А. Ю. Попов, О наименьшем типе целой функции порядка ρ с корнями заданной верхней ρ-плотности, лежащими на одном луче, *Матем. заметки*, 2009, том 85, выпуск 2, 246–260

DOI: http://dx.doi.org/10.4213/mzm4645

Математические заметки

Том 85 выпуск 2 февраль 2009

УДК 517.547.22

О наименьшем типе целой функции порядка ρ с корнями заданной верхней ρ-плотности, лежащими на одном луче

А. Ю. Попов

Давно известно, что наименьший возможный тип при порядке ρ на классе целых функций с верхней плотностью корней 1 (при показателе ρ) равен $1/(e\rho)$. Автором доказано, что если все корни целых функций лежат на одном луче, то картина иная: наименьший тип на таком классе на множестве порядков $(1,+\infty)\setminus\mathbb{N}$ отделен от нуля и ограничен сверху.

Библиография: 3 названия.

1. Введение и основные результаты. Напомним два определения [1; гл. 1, §§ 1, 4]. *Типом при порядке* $\rho>0$ целой функции f, не равной нулю тождественно, называется величина

$$\sigma_f(R)=\limsup_{R\to+\infty}R^{-\rho}\ln(\max_{|z|\leqslant R}|f(z)|). \tag{1}$$

Пусть $\Lambda_f=\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ – множество корней функции f (точек, в которых $f(z)$ обращается в нуль). Каждый корень стоит в этой последовательности столько раз, какова его кратность. *Верхней плотностью при порядке* ρ последовательности Λ_f (более кратко, *верхней ρ-плотностью*) называется величина

$$D_\rho(f)=\limsup_{n\to\infty}(|\lambda_n|^{-\rho}n)=\limsup_{R\to+\infty}(R^{-\rho}n_f(R)), \tag{2}$$

где $n_f(R)$ – количество корней $f(z)$ в круге $|z|\leqslant R$.

Ставится следующая задача: найти

$$C(\rho)=\inf\{\sigma_\rho(f)\mid D_\rho(f)=1,\ \Lambda_f\subset(0,+\infty)\}. \tag{3}$$

Такая задача без ограничения $\Lambda_f\subset(0,+\infty)$ давно решена [1; гл. 4, § 1]:

$$\inf\{\sigma_\rho(f)\mid D_\rho(f)=1\}=(e\rho)^{-1}\qquad\text{для всех}\quad\rho>0. \tag{4}$$

Тем самым, справедлива неулучшаемая на классе всех функций нормального типа при порядке ρ оценка снизу типа функции через верхнюю ρ-плотность ее корней:

$$\sigma_\rho(f)\geqslant(e\rho)^{-1}D_\rho(f).$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 06-01-00326).

Если же все корни целой функции f вещественны и положительны (или лежат на каком-либо одном луче), то верна неулучшаемая оценка

$$\sigma_\rho(f) \geqslant C(\rho) D_\rho(f).$$

Поэтому важно узнать, чему равна функция $C(\rho)$, и исследовать ее поведение. Из (3) и (4) видно, что $C(\rho) \geqslant (e\rho)^{-1}$ для всех $\rho > 0$.

При $0 < \rho < 1$ функция $C(\rho)$ найдена автором [2]. Она имеет простой вид, хотя и не является элементарной:

$$C(\rho) = \max\{t^{-\rho} \ln(1+t) \mid t > 0\}, \qquad 0 < \rho < 1. \tag{5}$$

Из (5) следует, что $C(\rho)$ при $0 < \rho < 1$ не меньше значения функции $t^{-\rho}\ln(1+t)$ в точке $t_\rho = \exp(1/\rho)$, т.е. $C(\rho) \geqslant e^{-1}\ln(1+\exp(1/\rho)) > (e\rho)^{-1}$, $0 < \rho < 1$. В [2] доказано также, что

$$C(\rho) = \frac{1}{e\rho} + O\biggl(\exp\biggl(-\frac{1}{\rho}\biggr)\biggr), \quad \rho \to 0+, \qquad \lim_{\rho \to 1-0} C(\rho) = 1,$$

$C(\rho)$ убывает на интервале $(0, 1/\ln 4)$, возрастает на интервале $(1/\ln 4, 1)$, $C(1/\ln 4) = \ln 2$. Таким образом, функция $C(\rho)$ весьма близка к экстремуму в задаче без ограничений на расположение корней только в малой правой полуокрестности нуля, но с увеличением ρ все более удаляется от величины (4). Эта тенденция продолжается и при $\rho > 1$.

Из теоремы Линделёфа о типе целой функции целого порядка [1; гл. 1, § 11] следует, что если $\rho \in \mathbb{N}$, $0 < D_\rho(f) < +\infty$, а все корни функции f, кроме, может быть, конечного числа, лежат в некотором угле раствора, меньшего π/ρ, то ее тип при порядке ρ бесконечен. Тем более, это верно для функций, корни которых лежат на одном луче. Поэтому в натуральных точках функция $C(\rho)$ равна $+\infty$, и поставленная задача интересна только при $\rho \,\bar{\in}\, \mathbb{N}$.

Основной результат работы состоит в том, что на луче $\rho > 1$ функция $C(\rho)$ ограничена и отделена от нуля:

$$2^{-\rho/2} \leqslant C(\rho) \leqslant 2^{1-\rho}\biggl(1 + \max_{r \geqslant 2} \frac{\ln(r-1)}{r}\biggr) < 1.28 \cdot 2^{1-\rho}, \qquad 1 < \rho < 2, \tag{6}$$

$$C(\rho) < \frac{2^{2-\rho}}{\rho}, \qquad \frac{3}{2} < \rho < 2. \tag{7}$$

$$0.47 < \operatorname{ci}\biggl(\frac{\pi}{2}\biggr) < C(\rho) < 1, \quad \rho > 2, \qquad \text{где} \quad \operatorname{ci}(x) = -\int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\, dt. \tag{8}$$

К сожалению, в явном виде, подобном (5), $C(\rho)$ при $\rho > 1$ найти не удалось. Тем не менее, из (7) и оценки снизу в (6) следует предельное соотношение $\lim_{\rho \to 2-0} C(\rho) = 1/2$.

Для более детальной формулировки результатов введем ряд обозначений. Положим

$$\begin{gathered} E_p(w) = (1-w)\exp\biggl(\sum_{k=1}^{p} \frac{w^k}{k}\biggr), \qquad p \in \mathbb{N}, \\ \mathscr{F}_p(r,\varphi) = \ln|E_p(re^{i\varphi})| = \frac{1}{2}\ln(r^2 - 2r\cos\varphi + 1) + \sum_{k=1}^{p} \frac{r^k \cos k\varphi}{k}, \\ \mathscr{M}_p(r) = \max\{\mathscr{F}_p(r,\varphi) \mid -\pi \leqslant \varphi \leqslant \pi\}. \end{gathered} \tag{9}$$

При $0 \leqslant r < 1$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$ и $r = 1$, $0 < \varphi < 2\pi$ имеет место разложение в ряд

$$\mathscr{F}_p(r,\varphi) = -\sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{r^k \cos k\varphi}{k}\,. \tag{10}$$

Свойства максимума $\mathscr{M}_p(r)$ исследовал Данжуа [3]. В частности, он доказал равенства

$$\mathscr{M}_p(1) = \mathscr{F}_p\biggl(1, \frac{\pi}{2p+1}\biggr), \qquad \mathscr{M}_p(r) = \mathscr{F}_p(r,0), \quad r \geqslant 1 + \frac{1}{p}\,, \tag{11}$$

и вывел интегральное представление

$$\mathscr{M}_p(r) = \int_0^r t^p \frac{\sin(p\alpha(t))}{\sin\alpha(t)}\,dt, \qquad 0 < r < 1 + \frac{1}{p}\,, \tag{12}$$

$\alpha(t)$ – наименьший положительный корень уравнения $t\sin(p\alpha) = \sin((p+1)\alpha)$.

Обозначим также

$$a_\rho(r) = r^{-\rho}\mathscr{F}_p\biggl(r, \frac{\pi}{2p+1}\biggr), \qquad A(\rho) = \max\{a_\rho(r) \mid 1 \leqslant r \leqslant 4\},$$
$$b_\rho(r) = r^{-\rho}\mathscr{M}_p(r), \qquad B(\rho) = \max\biggl\{b_\rho(r) \biggm| 1 + \frac{1}{p} \leqslant r \leqslant 5\biggr\}, \qquad \rho > 1, \quad p = [\rho]. \tag{13}$$

Теорема 1. *Для типа при порядке $\rho \bar{\in} \mathbb{Z}$ любой целой функции, верхняя ρ-плотность корней которой конечна, а аргументы корней стремятся к нулю, верны оценки снизу*

$$\sigma_\rho(f) \geqslant 2^{-\rho/2} D_\rho(f), \quad 1 < \rho < 2, \qquad \sigma_\rho(f) \geqslant A(\rho) D_\rho(f), \quad 2 < \rho.$$

Теорема 2. *Справедлива оценка сверху $C(\rho) \leqslant B(\rho)$ для всех $\rho \in (1, +\infty) \setminus \mathbb{N}$.*

2. Доказательство теоремы 1. Сперва заметим, что при любом $\varphi \in [\pi/(2p+2), \pi/2p]$ функция $\mathscr{F}_p(r,\varphi)$ положительна и возрастает на луче $0 < r < +\infty$. Действительно, из (9) находим

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathscr{F}_p(r,\varphi)}{\partial r} &= \frac{r - \cos\varphi}{r^2 - 2r\cos\varphi + 1} + \sum_{k=1}^{p} r^{k-1}\cos k\varphi = \frac{r - \cos\varphi}{r^2 - 2r\cos\varphi + 1} + \frac{1}{r}\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{p}(re^{i\varphi})^k \\ &= \frac{r - \cos\varphi}{r^2 - 2r\cos\varphi + 1} + \operatorname{Re}\biggl(e^{i\varphi}\frac{r^p e^{i\varphi p} - 1}{re^{i\varphi} - 1}\biggr) = r^p \frac{r\cos p\varphi - \cos(p+1)\varphi}{r^2 - 2r\cos\varphi + 1}\,.\end{aligned} \tag{14}$$

При $\varphi \in [\pi/(2p+2), \pi/2p]$, $r > 0$, оба слагаемых $r\cos(p\varphi)$, $-\cos((p+1)\varphi)$ в числителе последней дроби неотрицательны и одновременно в нуль не обращаются; $\mathscr{F}_p(0,\varphi) = 0$. Поэтому верны неравенства

$$\frac{\partial \mathscr{F}_p(r,\varphi)}{\partial r} > 0 \quad \Rightarrow \quad \mathscr{F}_p(r,\varphi) > 0 \qquad \text{для всех} \quad r > 0, \ \ \varphi \in \biggl[\frac{\pi}{2p+2}\,, \frac{\pi}{2p}\biggr]. \tag{15}$$

Если порядок целой функции f равен ρ, $p=[\rho]$, то она представима в виде

$$f(z)=z^m e^{g(z)}\prod_{n=1}^{\infty}E_p\biggl(\frac{z}{\lambda_n}\biggr), \tag{16}$$

где $\Lambda_f=\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ – последовательность всех корней $f(z)$, отличных от точки $z=0$, g – многочлен, $\deg g\leqslant p$, $m=0$ в случае $f(0)\neq 0$, а если $f(0)=0$, то m – кратность корня $z=0$. Рассмотрим последовательность функций

$$f_N(z)=\prod_{n=N}^{\infty}E_p\biggl(\frac{z}{\lambda_n}\biggr) \tag{17}$$

и оценим снизу величину

$$h_N=\limsup_{R\to+\infty}\biggl(R^{-\rho}\ln\biggl|f_N\biggl(R\exp\biggl(\frac{\pi i}{2p+1}\biggr)\biggr)\biggr|\biggr). \tag{18}$$

Из (1), (16)–(18) и неравенства $p<\rho$ следуют соотношения

$$h_N\leqslant\sigma_\rho(f_N)=\sigma_\rho(f)\qquad\text{для всех}\quad N\in\mathbb{N}. \tag{19}$$

Ввиду (9) и (17) имеем

$$\ln|f_N(Re^{i\varphi})|=\sum_{n=N}^{\infty}\ln\biggl|E_p\biggl(\frac{Re^{i\varphi}}{\lambda_n}\biggr)\biggr|=\sum_{n=N}^{\infty}\mathscr{F}_p\biggl(\frac{R}{|\lambda_n|},\varphi-\arg\lambda_n\biggr). \tag{20}$$

Обозначим

$$\varepsilon_n=\max_{k\geqslant n}|\arg\lambda_k|,\qquad I_{p,n}=\biggl[\frac{\pi}{2p+1}-\varepsilon_n,\frac{\pi}{2p+1}+\varepsilon_n\biggr].$$

По условию теоремы $\lim_{n\to\infty}\arg\lambda_n=0$, а значит, существует такое число N_0, что при любом $n>N_0$ выполняется двойное неравенство $\pi/(2p+2)<\pi/(2p+1)-\arg\lambda_n<\pi/(2p)$. Отсюда из (15) заключаем, что при $\varphi=\pi/(2p+1)$ все слагаемые в сумме (20) положительны, а значит, сумма не увеличится от отбрасывания остатка ряда. Поэтому, обозначив r_ρ точку, в которой функция $a_\rho(r)$ достигает своего максимума на отрезке $1\leqslant r\leqslant 4$, при любом $N>N_0$ находим

$$\begin{aligned}\ln\biggl|f_N\biggl(R\exp\biggl(\frac{\pi i}{2p+1}\biggr)\biggr)\biggr|&>\sum_{N\leqslant n,\,|\lambda_n|\leqslant R/r_\rho}\mathscr{F}_p\biggl(\frac{R}{|\lambda_n|},\frac{\pi}{2p+1}-\arg\lambda_n\biggr)\\&\geqslant\sum_{N\leqslant n,\,|\lambda_n|\leqslant R/r_\rho}\min\biggl\{\mathscr{F}_p\biggl(\frac{R}{|\lambda_n|},\varphi\biggr)\biggm|\varphi\in I_{p,N}\biggr\}.\end{aligned} \tag{21}$$

Нетрудно убедиться в том, что если $G(x,y)$ – действительнозначная функция, определенная в полуполосе $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid 0<x<+\infty,\ a\leqslant y\leqslant b\}$, возрастающая по переменной x при любом $y\in[a,b]$ и непрерывная на отрезке $a\leqslant y\leqslant b$ при любом $x>0$, то функция $\widetilde{G}(x)=\min\{G(x,y)\mid a\leqslant y\leqslant b\}$ также возрастает на луче $0<x<+\infty$. Ввиду (15) $\mathscr{F}_p(r,\varphi)$ возрастает по r при любом $\varphi\in I_{p,N}\subset[\pi/(2p+2),\pi/(2p)]$; следовательно, функция $\widetilde{\mathscr{F}_p}(r)=\min\{\mathscr{F}_p(r,\varphi)\mid\varphi\in I_{p,N}\}$ обладает тем же свойством. Поэтому все слагаемые в сумме (21) не меньше $\min\{\mathscr{F}_p(r_\rho,\varphi)\mid\varphi\in I_{p,N}\}$, а их количество равно $n_f(R/r_p)-N+1$. Все эти соображения приводят к оценке

$$\ln\left|f_N\left(R\exp\left(\frac{\pi i}{2p+1}\right)\right)\right|>\left(n_f\left(\frac{R}{r_p}\right)-N\right)\min\{\mathscr{F}_p(r_\rho,\varphi)\mid\varphi\in I_{p,N}\}. \tag{22}$$

Из (18) и (22) при любом $N\in\mathbb{N}$ находим

$$\begin{aligned}h_N&\geqslant\limsup_{R\to+\infty}\left(\frac{n_f(R/r_\rho)-N}{R^\rho}\min\{\mathscr{F}_p(r_\rho,\varphi)\mid\varphi\in I_{p,N}\}\right)\\&=\min\{\mathscr{F}_p(r_\rho,\varphi)\mid\varphi\in I_{p,N}\}\limsup_{R\to+\infty}\frac{n_f(R/r_\rho)}{R_\rho}\\&=r_\rho^{-\rho}D_\rho(f)\min\{\mathscr{F}_p(r,\varphi)\mid\varphi\in I_{p,N}\}.\end{aligned}$$

А так как $\lim_{N\to\infty}\varepsilon_N=0$, функция $\mathscr{F}(r,\varphi)$ непрерывна всюду, кроме точки $r=1,\varphi=0$, то

$$\lim_{N\to\infty}\min\{\mathscr{F}_p(r_\rho,\varphi)\mid\varphi\in I_{p,N}\}=\mathscr{F}_p\left(r_\rho,\frac{\pi}{2p+1}\right).$$

Следовательно,

$$\liminf_{N\to\infty}h_N\geqslant a_\rho(r_\rho)D_\rho(f).$$

Это соотношение вместе с (19) доказывает второе неравенство теоремы.

Докажем первое неравенство теоремы. Рассуждая аналогично, при любом $N\in\mathbb{N}$ получим равенства

$$\ln|f_N(Re^{\pi i/4})|=\sum_{n=N}^{\infty}\mathscr{F}_1\left(\frac{R}{|\lambda_n|},\frac{\pi}{4}-\arg\lambda_n\right). \tag{23}$$

В сумме (23) могут присутствовать отрицательные слагаемые (в случае $\arg\lambda_n>0$). Тем не менее, покажем, что если выбрать N_0 из условия $\varepsilon_n<\pi/180$ (для всех $n>N_0$), то

$$\mathscr{F}_1\left(\frac{R}{|\lambda_n|},\frac{\pi}{4}-\arg\lambda_n\right)>0,\quad|\lambda_n|\leqslant\frac{R}{4\sin(2\varepsilon_N)},\qquad n\geqslant N>N_0, \tag{24}$$

а сумма отрицательных слагаемых в (23) не превосходит $3(2-\rho)^{-1}\varepsilon_N D_\rho(f)R^\rho$.

Если это сделать, то доказательство завершается так. Имеем

$$\ln|f_N(Re^{\pi i/4})|\geqslant\sum_{N\leqslant n,\,|\lambda_n|\leqslant R/\sqrt{2}}\mathscr{F}_1\left(\frac{R}{|\lambda_n|},\frac{\pi}{4}-\arg\lambda_n\right)-3(2-\rho)^{-1}\varepsilon_N D_\rho(f)R^\rho. \tag{25}$$

Из (14) видно, что функция $\mathscr{F}_1(r,\varphi)$ возрастает на луче $1<r<+\infty$ при любом $\varphi\in[0,\pi/2]$, а значит, и $\min\{\mathscr{F}_1(r,\varphi)\mid\varphi\in I_N\}$, $I_N=[\pi/4-\varepsilon_N,\pi/4+\varepsilon_N]$ обладает тем же свойством. Поэтому все числа

$$\mathscr{F}_1\left(\frac{R}{|\lambda_n|},\frac{\pi}{4}-\arg\lambda_n\right),\qquad N\leqslant n,\quad|\lambda_n|\leqslant\frac{R}{\sqrt{2}},$$

не меньше $\min\{\mathscr{F}_1(\sqrt{2},\varphi) \mid \varphi \in I_N\}$, и мы приходим к оценке

$$\ln|f_N(Re^{\pi i/4})| > \biggl(n_f\biggl(\frac{R}{\sqrt{2}}\biggr) - N\biggr) \min\{\mathscr{F}_1(\sqrt{2},\varphi) \mid \varphi \in I_N\} - 3(2-\rho)^{-1}\varepsilon_N D_\rho(f) R^\rho. \tag{26}$$

Разделив обе части (26) на R^ρ и перейдя к верхнему пределу при $R \to +\infty$, получим

$$\begin{aligned} h_N = \limsup_{R\to+\infty} \frac{\ln|f_N(Re^{\pi i/4})|}{R^\rho} &\geqslant \frac{-3\varepsilon_N D_\rho(f)}{2-\rho} \\ &\quad + \min\{\mathscr{F}_1(\sqrt{2},\varphi) \mid \varphi \in I_N\} \limsup_{R\to+\infty} \frac{n_f(R/\sqrt{2}) - N}{R^\rho} \\ &= \frac{-3\varepsilon_N D_\rho(f)}{2-\rho} + 2^{-\rho/2} D_\rho(f) \min\{\mathscr{F}_1(\sqrt{2},\varphi) \mid \varphi \in I_N\}. \end{aligned} \tag{27}$$

Ввиду соотношений (19) и того, что правая часть (27) имеет предел при $N \to \infty$, взяв от обеих частей (27) нижний предел, выводим требуемую оценку

$$\sigma_\rho(f) \geqslant 2^{-\rho/2} D_\rho(f) \mathscr{F}_1\biggl(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\biggr) = 2^{-\rho/2} D_\rho(f).$$

Таким образом, осталось доказать неравенство (24) и оценить сверху сумму отрицательных слагаемых в (23). Неравенство (24) следует из такого неравенства:

$$\mathscr{F}_1(r,\varphi) > 0 \qquad \text{при} \quad r \geqslant 4\sin 2\theta, \;\; \varphi \in \biggl[\frac{\pi}{4} - \theta, \frac{\pi}{4} + \theta\biggr], \;\; |\theta| \leqslant \frac{\pi}{180}\,.$$

Данное неравенство в свою очередь вытекает из следующих:

$$\begin{gathered} \mathscr{F}_1\biggl(4\sin 2\alpha, \frac{\pi}{4} - \alpha\biggr) > 0 \qquad \text{при} \quad 0 < \varphi \leqslant \frac{\pi}{180}\,, \\ \frac{\partial \mathscr{F}_1}{\partial r}\biggl(r, \frac{\pi}{4} - \alpha\biggr) > 0 \qquad \text{при} \quad r \geqslant 4\sin 2\alpha, \;\; 0 < \alpha \leqslant \frac{\pi}{180}\,. \end{gathered} \tag{28}$$

(Если $\varphi \in [\pi/4, \pi/2]$, $r > 0$, то функция $\mathscr{F}_1(r,\varphi)$ положительна.) Докажем (28). Поскольку

$$\biggl|\sum_{k=4}^{\infty} \biggl(\frac{r^k}{k}\biggr) \cos k\varphi\biggr| \leqslant \sum_{k=4}^{\infty} \frac{r^k}{k} < \frac{1}{4} \sum_{k=4}^{\infty} r^k = \frac{r^4}{4}(1-r)^{-1}, \qquad 0 < r < 1,$$

тождество (10) дает оценку снизу

$$\mathscr{F}_1(r,\varphi) > -\frac{r^2}{2}\cos 2\varphi - \frac{r^3}{3}\cos 3\varphi - \frac{r^4}{4}(1-r)^{-1}.$$

Ввиду ограничения на α при $\varphi = \pi/4 - \alpha$ имеем $\cos 3\varphi < -1/2$. Следовательно,

$$r^{-2}\mathscr{F}_1\biggl(r, \frac{\pi}{4} - \alpha\biggr) > -\frac{\sin 2\alpha}{2} + \frac{r}{6} - \frac{r^2}{4(1-r)}\,.$$

Отсюда при $r = 4\sin 2\alpha$ (тогда $r \leqslant 8\alpha \leqslant 2\pi/45 < 1/7$) находим

$$2r^{-3}\mathscr{F}_1\biggl(r, \frac{\pi}{4} - \alpha\biggr) > \frac{1}{12} - \frac{r}{2(1-r)} > \frac{1}{12} - \frac{1/7}{2(1-1/7)} = 0.$$

Далее, согласно (14) имеем $\operatorname{sgn}(\partial \mathscr{F}_1(r,\varphi)/\partial r) = \operatorname{sgn}(r\cos\varphi - \cos 2\varphi)$. Отсюда при $\varphi = \pi/4 - \alpha$, $0 < \alpha \leqslant \pi/180$, $r > 2\sin\alpha$ находим

$$r\cos\varphi - \cos 2\varphi > \frac{r}{2} - \cos 2\varphi = \frac{r}{2} - \sin 2\alpha > 0.$$

Неравенства (28), а вместе с ними и (24), доказаны.

Перейдем к оценке суммы отрицательных слагаемых в (23). Поскольку $\mathscr{F}_1(r,\varphi) = -(r^2/2)\cos(2\varphi) + \mathscr{F}_2(r,\varphi)$, а функция $\mathscr{F}_2(r,\varphi)$ положительна при любом $r > 0$, $\pi/6 \leqslant \varphi \leqslant \pi/4$, то в интересующей нас области изменения φ верна оценка снизу

$$\mathscr{F}_1(r,\varphi) \geqslant -\frac{r^2}{2}\cos(2\varphi) \geqslant -\frac{r^2}{2}\sin(2\varepsilon_N) > -\varepsilon_N r^2.$$

Следовательно, искомая сумма по абсолютной величине при всех достаточно больших N не превосходит

$$\begin{aligned}
\varepsilon_N \sum_{|\lambda_n| > R/(4\sin(2\varepsilon_N))} \left(\frac{R}{|\lambda_n|}\right)^2 &= \varepsilon_N R^2 \int_{R/(4\sin(2\varepsilon_N))}^{+\infty} t^{-2}\,dn_f(t) \\
&< \varepsilon_N R^2 \int_{R/(8\varepsilon_N)}^{+\infty} t^{-2}\,dn_f(t) < 2\varepsilon_N R^2 \int_{R/(8\varepsilon_N)}^{+\infty} t^{-3} n_f(t)\,dt \\
&< 3\varepsilon_N R^2 \int_{R/(8\varepsilon_N)}^{+\infty} D_\rho(f) t^{\rho-3}\,dt \\
&< 3\varepsilon_N D_\rho(f) R^2 \int_R^{+\infty} t^{\rho-3}\,dt = 3\varepsilon_N (2-\rho)^{-1} D_\rho(f) R^\rho,
\end{aligned}$$

что и требовалось доказать (выше использовалось, что при всех достаточно больших t верно неравенство[1] $n_f(t) < (3/2)t^\rho D_\rho(f)$, а также $\varepsilon_N < 1/8$). Теорема 1 полностью доказана.

Как видно из доказательства теоремы, можно получить неравенство

$$\sigma_\rho(f) \geqslant D_\rho(f) \sup\left\{ r^{-\rho} \mathscr{F}_p\left(r, \frac{\pi}{2p+1}\right) \;\Big|\; r > 0 \right\},$$

а в определении $A(\rho)$ бралась не точная верхняя грань по всем $r > 0$, а максимум по $r \in [1,4]$. Это было сделано не случайно; ниже в лемме 4 доказано, что значения функции $a_\rho(r)$ на множестве $(0,1) \cup (4,+\infty)$ меньше $A(\rho)$. Таким образом, если вместо точки r_ρ брать в доказательстве теоремы другие значения r, улучшения оценки $\sigma_\rho(f) \geqslant A(\rho) D_\rho(f)$ получить нельзя.

3. Численные оценки функции $C(\rho)$ и другие неравенства.

Лемма 1. *При любом $p \in \mathbb{N}$ все функции $r^{-\rho}\mathscr{M}_p(r)$, $p < \rho < p+1$, возрастают на отрезке $0 \leqslant r \leqslant 1 + 1/p$ и меньше 1.*

Доказательство. Случай $p = 1$ тривиален: $M_1(r) = r^2/2$ при $0 \leqslant r \leqslant 2$. Далее $p \geqslant 2$. Рассмотрим функцию

$$\Phi_p(r) = r^{-p-1}\mathscr{M}_p(r)$$

[1]Здесь предполагается, что $D_\rho(f) > 0$. В случае $D_\rho(f) = 0$ утверждение теоремы очевидно.

и докажем ее возрастание на отрезке $0 \leqslant r \leqslant 1 + 1/p$. Считаем, что

$$\Phi_p(0) = \lim_{r\to 0+} \Phi_p(r) = \frac{1}{p+1}\,.$$

Это предельное соотношение следует из разложения (10).

Согласно (12) имеем

$$\Phi_p(r) = \int_0^r \left(\frac{t}{r}\right)^p \frac{\sin p\alpha(t)}{\sin\alpha(t)}\, d\!\left(\frac{t}{r}\right) = \int_0^1 u^p \frac{\sin p\alpha(ru)}{\sin\alpha(ru)}\, du, \qquad 0 < r \leqslant 1 + \frac{1}{p}\,. \tag{29}$$

Нетрудно убедиться в том, что функция $\alpha(t)$ убывает на интервале $0 < t < 1 + 1/p$. Следовательно, $\alpha(ru)$ убывает по r на интервале $0 < r < 1 + 1/p$ при любом фиксированном $u \in (0, 1]$. Функция $\sin(p\alpha)/\sin\alpha$, $p \in \mathbb{N}$, $p \leqslant 2$, убывает на интервале $0 < \alpha < \pi/p$, а область значений $\alpha(t)$ на множестве $0 < t < 1 + 1/p$ есть интервал $(0, \pi/(p + 1)) \subset (0, \pi/p)$. Поэтому отношение $\omega(r, u) = \sin(p\alpha(ru))/\sin(\alpha(ru))$ является композицией двух убывающих функций и возрастает по $r \in (0, 1 + 1/p)$ при любом $u \in (0, 1)$. Отсюда заключаем, что интеграл

$$\Phi_p(r) = \int_0^1 u^p \omega(r, u)\, du$$

возрастает на интервале $0 < r < 1 + 1/p$, а это вместе с непрерывностью функции $\Phi_p(r)$ на отрезке $0 \leqslant r \leqslant 1 + 1/p$ доказывает требуемое. Поскольку функции $r^{-\rho}\mathscr{M}_p(r)$, $p < \rho < p+1$, получаются умножением $\Phi_p(r)$ на положительные степени r, то и они возрастают на отрезке $[0, 1 + 1/p]$.

Выведем оценку сверху $r^{-\rho}\mathscr{M}_p(r)$. Из неравенства $\sin(p\alpha)/\sin\alpha < p$, верного при $p > 1$, $0 < \alpha < \pi/p$, и (29) находим

$$\Phi_p(r) < p\int_0^1 u^p\, du = \frac{p}{p+1}\,, \qquad 0 < r \leqslant 1 + \frac{1}{p}\,. \tag{30}$$

Из (30) следуют неравенства

$$r^{-\rho}\mathscr{M}_p(r) = r^{p+1-\rho}\Phi_p(r) < r^{p+1-\rho}\frac{p}{p+1}\,, \qquad 0 < r \leqslant 1 + \frac{1}{p}\,. \tag{31}$$

Таким образом, при $0 < r \leqslant 1$ имеем $r^{-\rho}\mathscr{M}_p(r) < r^{p+1-\rho} < 1$, а при $1 < r \leqslant 1 + 1/p$ $r^{-\rho}\mathscr{M}_p(r) < rp/(p + 1) \leqslant 1$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Верны неравенства*

$$\mathscr{M}_p(r) \leqslant r^p + \ln(r-1) + \ln p, \qquad p \in \mathbb{N}, \quad r \geqslant 1 + \frac{1}{p}\,, \tag{32}$$

$$\mathscr{M}_p(r) < r^p + \ln(r-1) + \ln(p-1), \qquad p \geqslant 4, \quad r \geqslant 1 + \frac{1}{p}\,, \tag{33}$$

$$\mathscr{M}_p(r) < \frac{2r^p}{p}\,, \qquad p \in \mathbb{N}, \quad r \geqslant 3. \tag{34}$$

Доказательство. При $p = 1$ в (32) имеет место равенство, а неравенство (34) очевидно:

$$M_1(r) = r + \ln(r-1) < r + r - 1 < 2r \qquad \text{для всех} \quad r \geqslant 2.$$

Далее $p \geqslant 2$.

Из (9) и (11) при $r \geqslant 1 + 1/p$ находим

$$\mathscr{M}_p(r) - \ln(r-1) = \sum_{k=1}^{p} \frac{r^k}{k} = \sum_{k=2}^{p} \frac{1}{k} + 1 + \sum_{k=1}^{p} \frac{r^k - 1}{k}\,. \tag{35}$$

Нетрудно убедиться в справедливости неравенств

$$\sum_{k=2}^{p} \frac{1}{k} < \ln p \quad p \geqslant 2, \qquad \frac{r^k - 1}{k} \leqslant (r-1)r^{k-1} \quad k \in \mathbb{N}, \ \ r > 1. \tag{36}$$

Из (35) и (36) получаем оценку

$$\mathscr{M}_p(r) - \ln(r-1) < 1 + \ln p + (r-1)\sum_{k=1}^{p} r^{k-1} = \ln p + r^p.$$

Неравенство (32) доказано. Если при $p \geqslant 4$ использовать более точную, чем в (35), оценку $\sum_{k=2}^{p} 1/k < \ln(p-1)$, то получится неравенство (33).

При $p = 2$ неравенство (34) сразу следует из оценок $\ln(r-1) \leqslant r - 2 < r^2/6$, $r \leqslant r^2/3$ при $r \geqslant 3$. При $p \geqslant 3$ воспользуемся уже доказанным неравенством $\ln(r-1) + r + r^2/2 < r^2$ и получим, что требуется вывести соотношение

$$r^2 + \sum_{k=3}^{p} \frac{r^k}{k} \leqslant \frac{2r^p}{p}\,.$$

В сумме $\sum_{k=3}^{p} r^k/k$ каждое последнее слагаемое при $r \geqslant 3$ превосходит предыдущее более, чем в 2 раза, и к этой сумме еще добавляется r^2, что не больше минимального слагаемого $r^3/3$. Поэтому вся сумма не превосходит удвоенного максимального слагаемого, что и требовалось доказать. Лемма 2 полностью доказана.

Лемма 3. *Последовательность* $\mathscr{M}_p(1) = \mathscr{F}_p(1, \pi/(2p+1))$ *убывает и имеет предел, равный* $\operatorname{ci}(\pi/2) = -\int_0^{\pi/2} \cos t/t\,dt = 0.472\ldots$.

Доказательство. Согласно (9) имеем

$$\mathscr{F}_p(1,\varphi) = \ln\left|2\sin\frac{\varphi}{2}\right| + \sum_{k=1}^{p} \frac{\cos k\varphi}{k}\,, \qquad 0 < |\varphi| \leqslant \pi.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
\mathscr{M}_p(1) - M_{p-1}(1) &= \mathscr{F}_p\left(1, \frac{\pi}{2p+1}\right) - \mathscr{F}_{p-1}\left(1, \frac{\pi}{2p-1}\right) \\
&= \frac{1}{p}\cos\left(\frac{\pi p}{2p+1}\right) + \ln\left(2\sin\left(\frac{\pi}{4p+2}\right)\right) - \ln\left(2\sin\left(\frac{\pi}{4p-2}\right)\right) \\
&\quad + \sum_{k=1}^{p-1} \frac{\cos(\pi k/(2p+1)) - \cos(\pi k/(2p-1))}{k} \\
&= \frac{1}{p}\cos\left(\frac{\pi p}{2p+1}\right) + \ln\left(\sin\left(\frac{\pi}{4p+2}\right)\right) - \ln\left(\sin\left(\frac{\pi}{4p-2}\right)\right) \\
&\quad + 2\sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k}\sin\left(\frac{\pi k}{4p^2-1}\right)\sin\left(\frac{2\pi k p}{4p^2-1}\right).
\end{aligned} \tag{37}$$

Для оценки сверху разности логарифмов синусов воспользуемся следующим неравенством. Если $g \in C[a,b] \cap C^3(a,b)$, $g'''(x) > 0$ при $x \in (a,b)$, то

$$g(a) - g(b) < (a-b)g'\left(\frac{a+b}{2}\right). \tag{38}$$

Чтобы убедиться в его справедливости, положим $x_0 = (a+b)/2$, $h = (a-b)/2$. Согласно формуле Тейлора существуют точки $\xi_a \in (a, x_0)$, $\xi_b \in (x_0, b)$ такие, что

$$g(a) = g(x_0 + h) = g(x_0) + hg'(x_0) + \frac{h^2}{2} g''(x_0) + \frac{h^3}{6} g'''(\xi_a),$$
$$g(b) = g(x_0 - h) = g(x_0) - hg'(x_0) + \frac{h^2}{2} g''(x_0) - \frac{h^3}{6} g'''(\xi_b).$$

Вычтя второе равенство из первого, получим

$$g(a) - g(b) = 2hg'(x_0) + \frac{h^3}{6}(g'''(\xi_a) + g'''(\xi_b)). \tag{39}$$

Ввиду положительности третьей производной и отрицательности h из (39) выводим (38).

Положим

$$g(x) = \ln \sin x, \qquad a = \frac{\pi}{4p+2}\,, \qquad b = \frac{\pi}{4p-2}\,.$$

Имеем

$$g'(x) = \operatorname{ctg} x, \quad g'''(x) = 2 \operatorname{ctg} x(1 + \operatorname{ctg}^2 x) > 0 \qquad \text{при} \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}\,.$$

Согласно (38) находим

$$\ln \sin\left(\frac{\pi}{4p+2}\right) - \ln \sin\left(\frac{\pi}{4p-2}\right) < -\frac{\pi}{4p^2-1} \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi p}{4p^2-1}\right). \tag{40}$$

Для оценки сверху суммы в (37) применим неравенство $\sin kx \leqslant k \sin x$, $k \geqslant 1$, $0 \leqslant x \leqslant \pi/k$. В соответствии с этим

$$\frac{1}{k} \sin\left(\frac{\pi k}{4p^2-1}\right) \leqslant \sin\left(\frac{\pi}{4p^2-1}\right), \qquad 1 \leqslant k \leqslant p. \tag{41}$$

Соотношения (37), (40), (41) дают

$$\mathscr{M}_p(1) - M_{p-1}(1) < \frac{1}{p} \cos\left(\frac{\pi p}{2p+1}\right) + 2 \sin\left(\frac{\pi}{4p^2-1}\right) \overline{D}_{p-1}\left(\frac{2\pi p}{4p^2-1}\right)$$
$$- \frac{\pi}{4p^2-1} \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi p}{4p^2-1}\right), \tag{42}$$

где

$$\overline{D}_{p-1}(x) = \sum_{k=1}^{p-1} \sin kx = \frac{1}{2} \operatorname{ctg}\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{\cos(p-1/2)x}{2\sin(x/2)}.$$

Отсюда и из (42) получаем оценки

$$\begin{aligned}
&\mathscr{M}_p(1) - M_{p-1}(1) \\
&\qquad < \frac{1}{p}\cos\left(\frac{\pi p}{2p+1}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4p^2-1}\right)\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi p}{4p^2-1}\right) \\
&\qquad\qquad - \sin\left(\frac{\pi}{4p^2-1}\right)\cos\left(\frac{\pi p}{2p+1}\right)\operatorname{cosec}\left(\frac{\pi p}{4p^2-1}\right) - \left(\frac{\pi}{4p^2-1}\right)\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi p}{4p^2-1}\right) \\
&\qquad = \cos\left(\frac{\pi p}{2p+1}\right)\left[\frac{1}{p} - \sin\left(\frac{\pi}{4p^2-1}\right)\operatorname{cosec}\left(\frac{\pi p}{4p^2-1}\right)\right] \\
&\qquad\qquad + \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi p}{4p^2-1}\right)\left[\sin\left(\frac{\pi}{4p^2-1}\right) - \left(\frac{\pi}{4p^2-1}\right)\right].
\end{aligned}$$

Таким образом, приходим к неравенству

$$\mathscr{M}_p(1) - M_{p-1}(1) < \cos\left(\frac{\pi p}{2p+1}\right)\left[\frac{1}{p} - \frac{\sin\beta}{\sin(p\beta)}\right] + \operatorname{ctg}(p\beta)\Big[\sin\beta - \beta\Big], \tag{43}$$

где $\beta = \beta(p) = \pi/(4p^2-1)$. Оба слагаемых в правой части (43) отрицательны, поэтому $\mathscr{M}_p(1) < M_{p-1}(1)$. Убывание последовательности

$$\mathscr{M}_p(1) = \mathscr{F}_p\left(1, \frac{\pi}{2p+1}\right)$$

доказано. Вычислим ее предел.

Имеем

$$\frac{d\mathscr{F}_p(1,\varphi)}{d\varphi} = \frac{d}{d\varphi}\left(\ln\left|2\sin\frac{\varphi}{2}\right| + \sum_{k=1}^{p}\frac{\cos k\varphi}{k}\right) = \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2} - \sum_{k=1}^{p}\sin k\varphi = \frac{\cos(p+1/2)\varphi}{2\sin(\varphi/2)}\,.$$

Следовательно,

$$\mathscr{F}_p\left(1, \frac{\pi}{2p+1}\right) - \mathscr{F}_p(1,\pi) = -\int_{\pi/(2p+1)}^{\pi}\frac{\cos(p+1/2)\varphi}{2\sin(\varphi/2)}\,d\varphi.$$

Рассмотрим функцию $g_1(\varphi) = 1/\varphi - (1/2)\operatorname{cosec}(\varphi/2)$, $0 < \varphi \leqslant \pi$, $g_1(0) = 0$. Функция g_1 непрерывна и монотонна на $[0,\pi]$, а это влечет за собой асимптотическую оценку

$$\int_{\pi/(2p+1)}^{\pi} g_1(\varphi)\cos(p+1/2)\varphi\,d\varphi = O\left(\frac{1}{p}\right), \qquad p\to+\infty.$$

Поэтому

$$\mathscr{F}_p\left(1, \frac{\pi}{2p+1}\right) = -\int_{\pi/(2p+1)}^{\pi}\frac{\cos(p+1/2)\varphi}{\varphi}\,d\varphi + \mathscr{F}_p(1,\pi) + O\left(\frac{1}{p}\right), \qquad p\to+\infty.$$

Сделав в интеграле замену переменной $(p+1/2)\varphi = t$ и воспользовавшись равенством

$$\mathscr{F}_p(1,\pi) = \sum_{k=p+1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k} = O\left(\frac{1}{p}\right),$$

получим

$$\mathscr{F}_p\left(1, \frac{\pi}{2p+1}\right) = -\int_{\pi/2}^{\pi(p+1/2)} \frac{\cos t}{t}\,dt + O\left(\frac{1}{p}\right) = \operatorname{ci}\left(\frac{\pi}{2}\right) + O\left(\frac{1}{p}\right), \qquad p \to +\infty.$$

Лемма 3 полностью доказана.

Лемма 4. *При любых $p \in \mathbb{N}$, $\rho \in (p, p+1)$ значения функций $a_\rho(r)$ и $b_\rho(r)$ вне отрезков $[1, 4]$ и $[1+1/p, 5]$ соответственно меньше их максимумов на этих отрезках.*

Доказательство. Значения функций $a_\rho(r)$ и $b_\rho(r)$ в точке $r = 1$ совпадают (см. (11), (13)). С другой стороны, $a_\rho(r) \leqslant b_\rho(r)$ при $r > 0$ и функция $b_\rho(r)$ по лемме 1 возрастает на $[0, 1+1/p]$. Поэтому

$$a_\rho(r) \leqslant b_\rho(r) < b_\rho(1) = a_\rho(1) \leqslant A(\rho) \leqslant B(\rho) \qquad \text{при} \quad r \in (0, 1).$$

При $r \geqslant 3$, $p \geqslant 5$ по лемме 2

$$a_\rho(r) \leqslant b_\rho(r) < r^{-p}\mathscr{M}_p(r) \leqslant \frac{2}{p} \leqslant 0.4,$$

а по лемме 3 имеем $B(\rho) \geqslant A(\rho) \geqslant a_\rho(1) > \operatorname{ci}(\pi/2) > 0.47$. Таким образом, утверждение леммы доказано при всех $p \geqslant 5$. При $1 \leqslant p \leqslant 4$ доказательство леммы завершается так. Непосредственно проверяется убывание функций $r^{-p}\mathscr{F}_p(r, \pi/(2p+1))$, $1 \leqslant p \leqslant 4$, на луче $[4, +\infty)$ и $r^{-p}\mathscr{M}_p(r) = r^{-p}\mathscr{F}_p(r, 0)$ на луче $[5, +\infty)$. Доказательство убывания этих восьми функций – простое упражнение по математическому анализу, оно здесь не приводится. Поскольку функции $a_\rho(r)$ и $b_\rho(r)$ получаются из $a_p(r)$ и $b_p(r)$ умножением на отрицательную степень r, то и они убывают на лучах $[4, +\infty)$ и $[5, +\infty)$ соответственно, а значит, значения $a_\rho(r)$ и $b_\rho(r)$ на лучах $[4, +\infty)$ и $[5, +\infty)$ меньше максимумов этих функций на отрезках $[1, 4]$ и $[1+1/p, 5]$ соответственно. Лемма доказана.

Следствие. *Выполнено равенство $B(\rho) = \max\{b_\rho(r) \mid r > 0\}$.*

Лемма 5. *При любых $\rho > 2$, $\rho \bar{\in} \mathbb{N}$, $r > 0$ верно неравенство $b_\rho(r) < 1$.*

Доказательство. При $0 < r \leqslant 1 + 1/p$ неравенство доказано в лемме 1. Докажем неравенство

$$\mathscr{M}_p(r) \leqslant r^p, \qquad 1 + \frac{1}{p} < r < +\infty. \tag{44}$$

В силу (11) оно равносильно следующему:

$$g(r) \equiv \ln(r-1) + \sum_{k=1}^{p} \frac{r^k}{k} - r^p \leqslant 0. \tag{45}$$

Имеем

$$g'(r) = r^{p-1}\left(\frac{r}{r-1} - p\right).$$

Следовательно, функция g убывает на луче $(1 + 1/(p-1), +\infty)$. Это означает, что

$$\max\left\{g(r) \;\middle|\; r \geqslant 1 + \frac{1}{p}\right\} = g\left(1 + \frac{1}{p-1}\right),$$

и неравенство (45) достаточно доказать только в одной точке $r = 1 + 1/(p-1)$. При $p \geqslant 4$ оно следует из (33), а при $p = 3$ и $p = 2$ (в последнем случае достигается равенство) проверяется непосредственно. Из (44) при $r > 1 + 1/p$, $p < \rho < p + 1$ находим

$$b_\rho(r) = r^{-\rho}\mathscr{M}_p(r) < r^{-p}\mathscr{M}_p(r) \leqslant 1.$$

Лемма доказана.

Теперь на основании лемм этого пункта и теорем 1, 2 докажем неравенства (6)–(8). Двойное неравенство (8) немедленно следует из лемм 3, 5 и теорем 1, 2. Для доказательства (7) в свете теоремы 2 достаточно проверить, что

$$r + \ln(r-1) < \frac{2^{2-\rho} r^\rho}{\rho} \qquad \text{для всех} \quad r \geqslant 2, \ \ \rho \in (1,2). \tag{46}$$

Действительно, из (46) сразу же видно, что $B(\rho) < 2^{2-\rho}/\rho$, $1 < \rho < 2$, а по теореме 2 имеем $C(\rho) \leqslant B(\rho)$. При $r = 2$ неравенство (46) выполняется. Осталось доказать, что производная по r левой части (46) меньше производной правой части при всех $r > 2$, т.е.

$$1 + \frac{1}{r-1} < 2^{2-\rho} r^{\rho-1} = 2\left(\frac{r}{2}\right)^{\rho-1}.$$

Это верно, и требуемое неравенство доказано.

Оценка снизу в (6) доказана в теореме 1. Оценка сверху в (6) следует из теоремы 2 и неравенств

$$\frac{r + \ln(r-1)}{r^\rho} = r^{1-\rho}\left(1 + \frac{\ln(r-1)}{r}\right) \leqslant 2^{1-\rho}\left(1 + \max_{r \geqslant 2}\left(\frac{\ln(r-1)}{r}\right)\right), \qquad r \geqslant 2.$$

Оценки (6)–(8) доказаны.

4. Доказательство теоремы 2. Построим целую функцию конечного положительного порядка $\rho \,\bar{\in}\, \mathbb{N}$, верхняя ρ-плотность корней которой равна произвольному заданному числу $d > 0$, а тип при порядке ρ не выше $B(\rho)$. Тогда по определению величины $C(\rho)$ получим неравенство $C(\rho) \leqslant B(\rho)$, и теорема будет доказана.

Образуем последовательность $\{R_k\}$ по правилу

$$R_1 = 3, \qquad R_{k+1} = R_k^4 \quad \text{при} \ \ k \in \mathbb{N}.$$

На отрезках $[R_k, R_k + 1]$ расположим $[dR_k^\rho]$ различных чисел произвольным образом. Они и составят последовательность $\{\mu_n\}$ корней искомой целой функции $F(z)$ (корни нумеруем в порядке возрастания). Положим

$$F(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E_p\left(\frac{z}{\mu_n}\right), \qquad p = [\rho].$$

Докажем, что $D_\rho(F) = d$, $\sigma_\rho(F) \leqslant dB(\rho)$. Из оценки $N_F(R_n + 1) > dR_n^\rho$, $n \geqslant 2$, сразу же видно, что $D_\rho(F) \geqslant d$. Противоположное неравенство следует из оценок

$$\frac{N_F(R)}{R^\rho} \leqslant \frac{O(R_{n-1}^\rho) + dR_n^\rho}{R^\rho} \leqslant \frac{O(R_{n-1}^\rho) + dR_n^\rho}{R_n^\rho} = d + o(1), \qquad R_n \leqslant R < R_{n+1}.$$

Оценим сверху тип функции F при порядке ρ. Имеем

$$\ln\Bigl(\max_{|z|\leqslant R}|F(z)|\Bigr)=\max_{|z|\leqslant R}\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left|E_p\left(\frac{z}{\mu_n}\right)\right|\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\mathscr{M}_p\left(\frac{R}{\mu_n}\right)\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}dR_k^{\rho}\mathscr{M}_p\left(\frac{R}{R_k}\right).$$

Вспомнив обозначение (13), получаем неравенство

$$R^{-\rho}\ln\left(\max_{|z|\leqslant R}|F(z)|\right)\leqslant d\sum_{k=1}^{\infty}b_\rho\left(\frac{R}{R_k}\right). \tag{47}$$

Осталось вывести для функции $X(R)=\sum_{k=1}^{\infty}b_\rho(R/R_k)$ асимптотическую оценку

$$X(R)\leqslant B(\rho)+o(1),\qquad R\to+\infty.$$

Идея вывода основана на том, что ввиду быстрого роста последовательности $\{R_k\}$ при любом достаточно большом значении R сумма всех слагаемых ряда, кроме одного, уходит в остаточный член. Обозначим $\Delta_m=[\sqrt{R_m},\sqrt{R_{m+1}}]$. Имеем

$$\limsup_{R\to+\infty}X(R)=\limsup_{m\to\infty}X_m,\qquad\text{где}\quad X_m=\max\{X(R)\mid R\in\Delta_m\}. \tag{48}$$

Согласно леммам 1 и 2 (см. (31) и (34)) верны неравенства

$$b_\rho(r)<r^{1-\{\rho\}},\ \ 0<r<1,\quad b_\rho(r)<2r^{-\{\rho\}},\ \ r\geqslant 3,\qquad \{\rho\}=\rho-p.$$

Поэтому

1) если $k<m$, $m\geqslant 2$, $r\in\Delta_m$, то

$$\begin{gathered}\frac{R}{R_k}\geqslant\frac{\sqrt{R_m}}{R_{m-1}}=\frac{R_{m-1}^2}{R_{m-1}}=R_{m-1}\geqslant 3,\\ b_\rho\left(\frac{R}{R_k}\right)<2\left(\frac{R}{R_k}\right)^{-\{\rho\}}\leqslant 2R_{m-1}^{-\{\rho\}};\end{gathered} \tag{49}$$

2) если $k>m$, то

$$\begin{gathered}\frac{R}{R_k}\leqslant\frac{\sqrt{R_{m+1}}}{R_k}\leqslant R_k^{-1/2},\\ b_\rho\left(\frac{R}{R_k}\right)<R_k^{(\{\rho\}-1)/2}.\end{gathered} \tag{50}$$

Из (49), (50) находим

$$\max\left\{\sum_{k=1,\,k\neq n}^{\infty}b_\rho\left(\frac{R}{R_k}\right)\;\middle|\;R\in\Delta_m\right\}<2mR_{m-1}^{-\{\rho\}}+\sum_{k=m+1}^{\infty}R_k^{(\{\rho\}-1)/2},\qquad m\geqslant 2.$$

Поскольку последовательность $\{R_k\}$ растет быстрее любой геометрической прогрессии,

$$\lim_{m\to\infty}mR_{m-1}^{a}=0,\qquad\sum_{k=1}^{\infty}R_k^{a}<+\infty,$$

каково бы ни было отрицательное число a. Следовательно,

$$\max\{X(R) \mid R \in \Delta_m\} \leqslant \max\left\{b_\rho\left(\frac{R}{R_m}\right) \;\middle|\; R \in \Delta_m\right\} + o(1), \qquad m \to \infty.$$

Это соотношение вместе со следствием из леммы 4 и (48) дает оценку

$$\limsup_{m\to\infty} X_m \leqslant B(\rho) \to \limsup_{R\to+\infty} X(R) \leqslant B(\rho),$$

которая вместе с (47) и (1) доказывает, что $\sigma_\rho(F) \leqslant dB(\rho)$. Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Б. Я. Левин, *Распределение корней целых функций*, ГИТТЛ, М., 1956.

[2] А. Ю. Попов, "Наименьший возможный тип при порядке $\rho < 1$ канонических произведений с положительными нулями заданной верхней ρ-плотности", *Вестн. Моск. ун-та. Сер.* 1. *Матем., мех.*, 2005, №1, 31–36.

[3] A. Denjoy, "Sur les produits canoniques d'ordre infini", *J. Math.* (6), **6** (1910), 1–136.

А. Ю. Попов
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
20.03.2008