



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

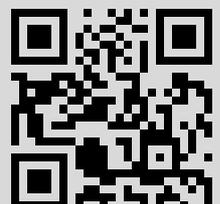
А. С. Демидов, А. С. Кочуров, А. Ю. Попов, К задаче о реконструкции нелинейностей в уравнениях математической физики, *Тр. сем. им. И. Г. Петровского*, 2009, выпуск 27, 74–123

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 213.24.135.225

24 ноября 2015 г., 16:51:56



А. С. Демидов, А. С. Кочуров, А. Ю. Попов*

К ЗАДАЧЕ О РЕКОНСТРУКЦИИ НЕЛИНЕЙНОСТЕЙ В УРАВНЕНИЯХ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ**

Одна из целей этой работы состоит в том, чтобы на сравнительно простом, но важном примере конкретизировать (и тем самым сделать более прозрачной) общую конструкцию [5] поиска *всех* «существенно различных», априори не заданных нелинейных зависимостей (нелинейностей) в уравнениях математической физики. Этот поиск осуществляется при наличии дополнительных граничных данных. В качестве важного модельного примера здесь рассматривается задача о реконструкции всех существенно различных нелинейностей f в эллиптическом уравнении

$$\Delta u(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = f(u(x, y)) \geq 0, \\ (x, y) \in \omega \in \mathbb{R}^2, \quad (0.1)$$

при наличии данных Коши на границе $\gamma = \partial\omega$ области ω . Это центральная проблема в так называемой обратной задаче о равновесии плазмы в токамаке¹ [6]. Равновесие описывается уравнением Грэда—Шафранова, которое при некотором допущении сводится к уравнению (0.1) относительно потенциала u магнитного поля (точнее, относительно некоторой компоненты векторного потенциала магнитного поля). При этом по данным магнитного мониторинга формируется множество Ψ вычисляемых (и/или оцениваемых [3, 22]) приближений для нормальных производных $\frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\gamma}$ функции u на границе области ω . Требуется для *фиксированной* функции $\Psi \in \Psi$ реконструировать *все* существенно различные (если таковые имеются) функции $f: u \mapsto f(u)$ в правой части урав-

*© Демидов А. С., Кочуров А. С., Попов А. Ю., 2009 г.

**Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты 05-01-22001, 05-01-00261, 09-01-00225а и 07-01-00500).

¹Токамак — Тороидальная КАмера с МАгнитными Катушками, служащая для реализации управляемого термоядерного синтеза.

нения (0.1), для которых найдутся решения $u = u_f$ уравнения (0.1), удовлетворяющие следующим условиям:

$$u|_{\gamma} = 0 \text{ и } \max_{s \in \gamma} |\varrho(s)(\Phi(s) - \Psi(s))| \leq \eta \ll 1, \\ \text{где } \Phi \stackrel{\text{def}}{=} \left. \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|_{\gamma}, \quad \int_{\gamma} \Phi \neq 0. \quad (0.2)$$

Здесь ν — внешняя единичная нормаль¹ к γ , $\varrho: \gamma \rightarrow [0, 1]$ — «весовая» функция, равная нулю вблизи точек, в которых кривизна кривой γ превышает некоторое значение, и равная единице в остальных точках. При этом функции f_1 и f_2 будем считать существенно различными, если найдется пара (u_{f_1}, u_{f_2}) соответствующих им решений задачи (0.1), (0.2), для которой справедливо неравенство

$$\mathcal{E}_{\|\cdot\|}(u_{f_1}, u_{f_2}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2 \|f_1(u_{f_1}) - f_2(u_{f_2})\|}{\|f_1(u_{f_1})\| + \|f_2(u_{f_2})\|} \geq \alpha, \quad (0.4)$$

где та или иная норма $\|\cdot\|$ (например, $\|\cdot\|_{L^p(\omega)}$), а также параметр $\alpha \in (0, 1)$ задаются (экспертами).

В работе

- 1) изложен алгоритм, позволяющий сравнительно быстро реконструировать все существенно различные функции $f: u \mapsto f(u)$ из ком-

¹Уравнение (0.1) соответствует цилиндрическому приближению камеры токамака (когда большой радиус тороидальной камеры считается равным бесконечности). В том случае, когда не пренебрегают эффектами тороидальности, уравнение Грэда—Шафранова (в отличие от уравнения (0.1)) принимает вид

$$\tilde{\Delta}u \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{x} \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{1}{x} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{x} f(u) + xg(u) \geq 0 \text{ в } \omega \in \mathbb{R}^2, \quad (0.3)$$

где искомыми являются функции f и g . Они определяют распределение тока и давления в плазме. Для соответствующей им функции u величина $I = \int_{\omega} \tilde{\Delta}u \, dx \, dy$ есть полный ток, протекающий по плазме. Он известен. В цилиндрическом приближении полный ток может быть выражен через функцию Φ , поскольку (в силу формулы Гаусса)

$$\int_{\omega} \tilde{\Delta}u \, dx \, dy \stackrel{(0.1), (0.2)}{=} \int_{\gamma} \Phi \, d\gamma.$$

В тороидальном случае

$$\int_{\omega} \tilde{\Delta}u \, dx \, dy = \int_{\gamma} \left. \frac{1}{x} \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|_{\gamma} \, d\gamma.$$

Поэтому в тороидальном случае следует по измерениям градиента u вне функциональной камеры вычислять на γ не нормальную, а кономальную производную функции u , ассоциированную с оператором $\tilde{\Delta}$.

пактного подмножества заданного функционального пространства;

- 2) приведен первый пример области и даже целого семейства $\Omega = \{\omega\}$ областей ω с *гладкой* границей, для которых в случае $\Phi = \Psi$ (т. е. при $\eta = 0$) обратная задача имеет не более одного решения f в классе аффинных¹ ($f(u) = au + b$), а также в классе экспоненциальных ($f(u) = ce^{du}$, $d > 0$) функций;
- 3) в Ω выделено некоторое подсемейство односвязных областей ω , моделирующих в некотором смысле так называемые дуплетные конфигурации [25, 26], и построены функции $\Psi: \gamma \rightarrow \mathbb{R}$, для которых обратная задача в классе аналитических функций f имеет не менее двух существенно различных решений.

В заключительном параграфе статьи обозначен рецепт реконструкции по граничным данным всех существенно различных нелинейностей в весьма общих уравнениях математической физики. К их числу относится система уравнений

$$\begin{aligned} \rho_t + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} &= 0, \\ \rho T_t + \rho \mathbf{v} \cdot \nabla T &= \lambda \Delta T + Q(\mathbf{u}) Y e^{-\sigma(\mathbf{u})} + A(\mathbf{u})(T - T_0), \\ \rho \mathbf{v}_t + \rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} &= \mu \Delta \mathbf{v} - \nabla p, \\ \rho Y_t - \rho \mathbf{v} \cdot \nabla Y &= \rho D \Delta Y - k(\mathbf{u}) Y e^{-\sigma(\mathbf{u})}, \end{aligned} \quad (0.5)$$

описывающая процессы горения и детонации [8]. Здесь $p = p(\rho, T)$ — заданная функция (характеризующая уравнение состояния),

$$\mathbf{u} = (\rho, \mathbf{v}, T, Y): (x, t) \mapsto \mathbf{u}(x, t),$$

где $x \in \omega \subset \mathbb{R}^n$, $t \in (0, t_*)$, $t_* \leq \infty$.

Можно считать известным значение вектор-функции \mathbf{u} при $t = 0$. Задача состоит в том, чтобы по градиенту \mathbf{u} , заданному при $x \in \partial\omega$ и $t \in (0, t_*)$, реконструировать все существенно различные функции:

$$A: \mathbf{u} \mapsto A(\mathbf{u}), \quad Q: \mathbf{u} \mapsto Q(\mathbf{u}), \quad \sigma: \mathbf{u} \mapsto \sigma(\mathbf{u}), \quad k: \mathbf{u} \mapsto k(\mathbf{u}), \quad (0.6)$$

для которых система уравнений (0.5) имеет вектор-функцию \mathbf{u} в качестве решения.

¹Ранее [4, 21, 27] было доказано, что для односвязных областей с гладкой границей, отличных от диска (круга), существует не более конечного числа решений обратной задачи в классе аффинных функций. Базовая идея работы [4] лежит в основе как приводимых здесь результатов единственности, так и общего алгоритма реконструкции всех нелинейностей в уравнениях с частными производными.

§ 1. «РЕАЛЬНАЯ» И «ИДЕАЛИЗИРОВАННАЯ»
ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧИ

1. Рассматриваемая задача для уравнения (0.1) относится к проблеме управляемого термоядерного синтеза в токамаках. Одна из тех функций f , для которых (при соответствующей функции Ψ) выполнены условия (0.1), (0.2), — обозначим эту функцию через f_* — характеризует распределение электрического тока

$$f_* \circ u_{f_*} : \omega \ni (x, y) \mapsto f_*(u_{f_*}(x, y)) \geq 0 \quad (1.1)$$

в так называемом плазменном шнуре, сечение которого — область ω . Знакоопределенность (неотрицательность) распределения тока эквивалентна его однонаправленности. Таким образом, величина

$$I \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\omega} \Delta u_{f_*} dx dy \stackrel{(0.1), (0.2)}{=} \int_{\gamma} \Phi d\gamma > 0 \quad (1.2)$$

есть полный ток, протекающий по плазме. Функция $u = u_{f_*}$ является z -компонентой векторного потенциала магнитного поля. Известно, что $u|_{\partial\omega} = \text{const}$. Для определенности эта константа считается здесь равной нулю, т. е. $\gamma = \partial\omega$ — это нулевая линия уровня функции u . Известно также, что (вообще говоря, априори неизвестная) функция $\Phi = \partial u / \partial \nu|_{\gamma}$ может быть приближена функцией Ψ , которая строится по данным магнитной диагностики.

Проблема реконструкции (идентификации) правой части уравнения Грэда—Шафранова по данным магнитной диагностики была поднята в начале 1970-х гг. (см., например, [6]) и живо обсуждается физиками до сих пор (в частности, в [24]). Ее принципиальная значимость обусловлена тем, что методы управления разрядом, в том числе методы борьбы с неустойчивостью плазмы, в существенной мере зависят от того, каково распределение (1.1) протекающего по ней тока, определяемого функцией f_* . Но эта функция физикам реально неизвестна. Конечно, можно (численно) подобрать некоторую функцию $f_{\#}$ и соответствующую ей функцию $u_{f_{\#}}$, для которых с той или иной точностью будут выполнены условия (0.1), (0.2). Однако если композиции $f_{\#} \circ u_{f_{\#}}$ и $f_* \circ u_{f_*}$ удовлетворяют условию (0.4), то управление разрядом, базирующееся на (ошибочном) предположении, что именно функция $f_{\#} \circ u_{f_{\#}}$ характеризует реальное распределение тока в плазме, может привести не к подавлению, а, наоборот, к развитию неустойчи-

востей плазмы. Поэтому необходимо предварительно найти множество из представителей всех существенно различных функций, для которых выполнены условия (0.1), (0.2). Если такому множеству будет соответствовать лишь один элемент $f \circ u_f$, то его можно принять за искомую физиками функцию $f_* \circ u_{f_*}$. Если же существенно различных функций несколько, то нужно будет выбирать ту из них, которая представляет функцию $f_* \circ u_{f_*}$. Для этих целей могут применяться дополнительные диагностики (см., например, [28]). Но сначала должны быть найдены все существенно различные (как минимум в указанном выше смысле¹) представители искоемых правых частей уравнения Грэда—Шафранова.

2. В [16—18] было доказано (за исключением некоторых частных случаев), что если граница $\gamma = \partial\omega$ «плазменной» области $\omega \in \mathbb{R}^2$ имеет угловую особенность (что соответствует современным экспериментам с так называемой диверторной конфигурацией²), то в классе аналитических функций может существовать только одна функция f , для которой равенство $\partial u_f / \partial \nu|_\gamma = \Phi$ справедливо в сколь угодно малой окрестности угловой точки. Другими словами, функция f определяется по асимптотическому поведению ее нормальной производной в окрестности угловой точки.

На первый взгляд может показаться (см., например, [17, 19]), что этот красивый математический результат позволяет положительно решить вопрос о единственности реконструкции искомого распределения. Однако это не так. Во-первых, нормальная производная весьма быстро стремится к нулю по мере приближения к угловой точке контура γ . При этом, согласно [16—18], множество значений этих нормальных производных, заданных в окрестности угловой точки, находится во взаимно-однозначном соответствии с множеством всех аналитических функций, задающих правую часть уравнения (0.1). Тем самым любые равномерные приближения нормальной производной в окрест-

¹Согласно В. Д. Пустовитову, ведущему специалисту РНЦ «Курчатовский институт», конкретизация того, что следует понимать под существенно различными распределениями тока в плазме, зависит от интересующих исследователя характеристик, таких, как ухудшение удержания плазмы, понижение предела ее устойчивости, затруднение ввода мощности, повышение локальных потерь на стенках камеры и т. п. Отличие профилей тока на 10—30 % (то, что «видно на глаз») было бы основанием для дальнейшего обсуждения этой проблемы с физиками, которые бы оценивали значение найденных различий.

²В этом случае магнитные силовые линии имеют сепаратрису, содержащую петлю в виде «половинки» восьмерки, охватывающей «плазменную» область ω . Тем самым ω имеет угловую точку. Однако вблизи точек с чрезмерной кривизной, а тем более в окрестности угловой точки реально невозможно получить данные о коэффициентах асимптотического поведения функции $\varphi = \partial u / \partial \nu|_\gamma$. Поэтому весовая функция ρ в формуле (0.2) равна нулю вблизи угловой точки.

ности угловой точки абсолютно неинформативны для реконструкции правой части (даже в рамках ее аффинной аппроксимации, как это следует из [21]). Во-вторых, если искомая нелинейность восстановлена по асимптотическому поведению нормальной производной, то можно говорить о знании функции u , а потому и о ее нормальной производной на всей гладкой части границы. Но тогда получаем с вероятностью 1 несовпадение так вычисляемой нормальной производной с функцией Ψ , представляющей эту производную.

Итак, реконструкция нелинейностей по асимптотическому поведению нормальной производной при приближении к угловой точке не может считаться приемлемой. Кроме того, необходимо учитывать, что максимально возможная информация о функции $\partial u / \partial \nu|_\gamma$ реально может извлекаться лишь из условия

$$\max_{s \in \gamma_1} \left| \frac{\partial u}{\partial \nu}(s) - \Psi(s) \right| \leq \eta. \quad (1.3)$$

Здесь η — малое число, Ψ — реально вычисляемая (по данным магнитной диагностики) функция на $\gamma_1 = \gamma \setminus \gamma_0$, где

$$\gamma_0 = \{x \in \gamma \mid |x - y| \leq C_\eta, |k(y)| \geq D_\eta\},$$

$k(y)$ — кривизна кривой γ в точке $y \in \gamma$, а C_η и D_η — некоторые (экспертные) константы.

Такая постановка задачи соответствует тому реальному факту, что данные о функции $\Phi = \partial u / \partial \nu|_\gamma$ возможно получить лишь приближенные, да и то только на тех гладких дугах кривой γ , которые несколько отдалены от точек, в которых кривая γ имеет завышенную кривизну.

Можно несколько упростить постановку задачи, идеализируя реальную ситуацию, полагая $\eta = 0$ и $\gamma_1 = \gamma$. Другими словами, идеализированная постановка предполагает, что кривая γ достаточно гладкая¹ и на ней известна функция

$$\Phi = \frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_\gamma.$$

¹Как было отмечено, исходные данные, к сожалению, информативны в реальности лишь на гладких дугах кривой γ . Это создает существенную трудность в изучении рассматриваемой здесь задачи о реконструкции правой части f уравнения $\Delta u = f(u)$, поскольку чем глаже кривая γ (являющаяся линией уровня функции u), тем труднее из знания нормальной производной $\partial u / \partial \nu|_\gamma$ извлечь данные о функции f .

§ 2. ФАКТОРИЗАЦИЯ, ФУНКЦИЯ \varkappa , ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ КЛАССЫ, АЛГОРИТМ ПОИСКА

В этом параграфе на примере задачи о поиске функции f , для которой существует решение u задачи Дирихле

$$\Delta u = f(u) \geq 0 \text{ в } \omega \in \mathbb{R}^2, \quad u|_{\gamma=\partial\omega} = 0, \quad (2.1)$$

удовлетворяющее с некоторой точностью условию

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|_{\gamma} = \Phi \quad (2.2)$$

для фиксированной функции Φ , подробно представлены следующие пять элементов общей конструкции¹ поиска *всех* существенно различных нелинейностей в обратных задачах математической физики:

- 1) выбор функционального класса \mathcal{F} в некотором нормированном пространстве X искомым функций f ;
- 2) «факторизация» исходного уравнения и переход к «факторизованному» функциональному классу \mathcal{G} ;
- 3) конструирование функции \varkappa , определенной на классе \mathcal{G} , и конструирование серии \mathfrak{S} необходимых условий, «сходящихся» (по модулю двух быстро проверяемых соотношений)² к критерию, характеризующему искомую нелинейность $f \in \mathcal{F}$;

¹Определенным подспорьем при реконструкции функций $f_j: u \mapsto f_j(u)$ в дифференциальном уравнении вида

$$F(x, D^\beta u) = \sum_{j=1}^J \rho_j(x) f_j(u)$$

может служить ассоциативное с ним дифференциальное уравнение (см., например, [1, 13]), отражающее постоянство искомым функций f_j вдоль любой линии уровня функции u . Именно это свойство может помочь эффективно искать функции f_j с априори заданной топологией линий уровня отображений

$$f_j \circ u: \omega \ni (x, y) \mapsto f_j(u(x, y)).$$

В случае уравнения Грэда—Шафранова (0.3) ассоциированное с ним уравнение таково:

$$u_y \{A(x, Du)\}_x - u_x \{A(x, Du)\}_y = 0, \quad \text{где } A(x, Du) = \frac{u_y(\tilde{\Delta}u)_x - u_x(\tilde{\Delta}u)_y}{xu_y},$$

а в случае уравнения $\Delta u = f(u)$, оно имеет вид $u_y(\Delta u)_x - u_x(\Delta u)_y = 0$.

²См. замечания 2.1 и 2.2.

- 4) сравнительно быстрый отсев тех функций $f \in \mathcal{F}$, которые не удовлетворяют обозначенной серии \mathfrak{S} необходимых условий¹ и формирование тем самым некоторого множества $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}$ функций, удовлетворяющих всей серии \mathfrak{S} ;
- 5) выборка из множества \mathcal{F}_0 всех искомым существенно различных функций f .

1. Не конкретизируя поначалу функциональный класс \mathcal{F} искомым функций f , изложим базовую идею. Она заложена в двух простых леммах 2.1, 2.2 и относится к факторизации исходного уравнения, конструированию функции \varkappa и серии \mathfrak{S} необходимых условий. Эти леммы являются естественным обобщением леммы из [4] (или, что то же самое, леммы 4.1 из [21]). Леммы 2.1 и 2.2 формулируются в рамках «идеализированной» постановки рассматриваемой задачи, т. е. для случая, когда кривая γ достаточно гладкая и на ней всюду задана (известна) функция $\Phi = \partial u / \partial \nu|_{\gamma}$. Обобщение этих лемм на «реальный» случай представляют леммы 2.3 и 2.4.

Под *факторизацией* некоторым подходящим числовым множителем $\sigma \neq 0$ (*параметром факторизации*) исходного уравнения $\Delta u = f(u)$ для однородной задачи Дирихле в области ω понимается переход к *факторизованной* задаче Дирихле

$$\Delta v = g(v) \text{ в } \omega, \quad v|_{\gamma} = 0, \quad \text{где } g(v) = \sigma f(u), \text{ а } v = \sigma u. \quad (2.3)$$

При этом имеем

$$\frac{\partial v}{\partial \nu} \Big|_{\gamma} = \sigma \Phi, \quad \text{где } \Phi = \frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{\gamma}. \quad (2.4)$$

ЛЕММА 2.1 (необходимое условие). Пусть задача (2.1), (2.2) имеет решения u_1 и u_2 соответственно для функций f_1 и f_2 , $g_j(v) = \sigma_j f_j(v/\sigma_j)$, где σ_1 и σ_2 — ненулевые константы. Тогда для любых двух точек $s_R \in \gamma$ и $s_\rho \in \gamma$ выполнено равенство

$$\varkappa(f_1, \sigma_1; s_R, s_\rho) = \varkappa(f_2, \sigma_2; s_R, s_\rho),$$

где $\varkappa(f_j, \sigma_j; s_R, s_\rho) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial v_j}{\partial \nu} \Big|_{s_R} / \frac{\partial v_j}{\partial \nu} \Big|_{s_\rho}$, а $v_j = \sigma_j u_j$. (2.5)

¹В случае отсутствия дополнительного аналитического анализа речь идет о переборе функций $g \in \mathcal{G}$.

Доказательство. Если для функций f_1 и f_2 существуют решения u_1 и u_2 задачи (2.1), (2.2), то для соответствующих им функций $g_j: v \mapsto g_j(v) = \sigma_j f(v/\sigma_j)$ и функций $v_j = \sigma_j u_j$ имеем

$$\frac{\varphi_1}{\sigma_1} = \Phi = \frac{\varphi_2}{\sigma_2}, \quad \text{где } \varphi_j \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial v_j}{\partial \nu} \Big|_{\gamma}. \quad (2.6)$$

Отсюда¹

$$\frac{\varphi_1}{\varphi_2} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}. \quad (2.7)$$

В частности, для любых двух точек $s_\rho \in \gamma$ и $s_R \in \gamma$ получаем

$$\frac{\varphi_1(s_R)}{\varphi_2(s_R)} = \frac{\varphi_1(s_\rho)}{\varphi_2(s_\rho)} \iff \frac{\varphi_1(s_R)}{\varphi_1(s_\rho)} = \frac{\varphi_2(s_R)}{\varphi_2(s_\rho)}. \quad (2.8)$$

Итак, установлено необходимое условие (2.5) разрешимости задачи (2.1), (2.2) для функции f_2 в том случае, когда эта задача разрешима для функции f_1 . \square

Лемма 2.2 (необходимое и достаточное условие). Пусть v_j — решение задачи Дирихле (2.3) для функции $g_j: v \mapsto g_j(v) \stackrel{\text{def}}{=} \sigma_j f_j(v/\sigma_j)$, где $j = 1, 2$, а σ_j — ненулевая константа. Предположим, что

- 1) равенство (2.5) верно для любой точки $s_R \in \gamma$ (и некоторой $s_\rho \in \gamma$);
- 2) хотя бы для одной точки $s_\rho \in \gamma$ справедливо равенство

$$\frac{\varphi_1(s_\rho)}{\sigma_1} = \frac{\varphi_2(s_\rho)}{\sigma_2}, \quad \text{где } \varphi_j(s) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial v_j}{\partial \nu} \Big|_{s \in \gamma}. \quad (2.9)$$

Тогда функция u_2 удовлетворяет условию (2.2), если и только если этому условию удовлетворяет функция u_1 .

Доказательство. Согласно предположению справедливо равенство

$$\varkappa(f_1, \sigma_1; s_R, s_\rho) = \varkappa(f_2, \sigma_2; s_R, s_\rho) \quad \forall s_R \in \gamma. \quad (2.10)$$

Обозначим обе части этого равенства через $\kappa(s_R)$. Имеем

$$\varphi_1(s_R) = \kappa(s_R)\varphi_1(s_\rho) \quad \text{и} \quad \varphi_2(s_R) = \kappa(s_R)\varphi_2(s_\rho). \quad (2.11)$$

¹Согласно лемме Жиро—Хопфа—Олейник о граничной производной функции $\varphi_j = \sigma_j \Phi$ отличны от нуля, так как $\Phi > 0$ в силу условия $f \geq 0$.

Поэтому

$$\begin{aligned} & \left. \frac{\partial u_1}{\partial \nu} \right|_{s_R} \stackrel{(2.4)}{=} \frac{\varphi_1(s_R)}{\sigma_1} \stackrel{(2.11)}{=} \frac{\kappa(s_R)\varphi_1(s_\rho)}{\sigma_1} \stackrel{(2.9)}{=} \\ & = \frac{\kappa(s_R)\varphi_2(s_\rho)}{\sigma_2} \stackrel{(2.11)}{=} \frac{\varphi_2(s_R)}{\sigma_2} \stackrel{(2.4)}{=} \left. \frac{\partial u_2}{\partial \nu} \right|_{s_R} \quad \forall s_R \in \gamma. \end{aligned}$$

Тем самым соотношения (2.9) и (2.10) вместе образуют достаточное (а также необходимое) условие существования двух функций f_1 и f_2 , для которых существуют решения u_1 и u_2 задачи (2.1), (2.2). \square

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. В случае «идеализированной» постановки задачи ансамбль равенств (2.5) есть та обозначенная в начале параграфа серия \mathfrak{S} необходимых условий, которая «сходится» к критерию, характеризующему искомую нелинейность $f \in \mathcal{F}$ по модулю двух быстро проверяемых соотношений. Одним из этих соотношений является равенство (2.9), а другим — неравенство (0.4).

Обобщим предыдущие леммы на случай «реальной» постановки задачи.

Пусть f_1 и f_2 — две функции из \mathcal{F} , а $u = u_j$ (где $j = 1, 2$) — соответствующие им решения задачи

$$\Delta u = f_j(u) \quad \text{в } \omega \in \mathbb{R}^2, \quad u|_{\gamma=\partial\omega} = 0, \quad (2.12)$$

удовлетворяющие неравенству

$$\max_{s \in \gamma_1} \left| \frac{\partial u}{\partial \nu}(s) - \Psi(s) \right| \leq \eta. \quad (2.13)$$

Здесь η — малое число, Ψ — фиксированная функция, заданная на $\gamma_1 = \gamma \setminus \gamma_0$, где

$$\gamma_0 = \{x \in \gamma \mid |x - y| \geq C_\eta, |k(y)| \geq D_\eta\},$$

$k(y)$ — кривизна кривой γ в точке $y \in \gamma$, а C_η и D_η — некоторые (экспертные) константы.

ЛЕММА 2.3 (необходимое условие). *Для любых двух точек $s_\rho \in \gamma_1$ и $s_R \in \gamma_1$ (в которых модуль функции Ψ превосходит¹ η) выполнено неравенство*

¹См. примечание на с. 82.

$$\begin{aligned} |\varkappa(f_1, \sigma_1; s_R, s_\rho) - \varkappa(f_2, \sigma_2; s_R, s_\rho)| &\leq \mu(\eta, \Psi) \stackrel{\text{def}}{=} \\ &= 2\eta \frac{|\Psi(s_R)| + |\Psi(s_\rho)| + 2\eta}{(|\Psi(s_\rho)| - \eta)^2} \min\{|\sigma_1|^2, |\sigma_2|^2\}, \end{aligned} \quad (2.14)$$

где σ_1, σ_2 — ненулевые константы, а

$$\begin{aligned} \varkappa(f_j, \sigma_j; s_R, s_\rho) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{\varphi_j(s_R)}{\varphi_j(s_\rho)}, \\ \varphi_j(s) = \sigma_j \Phi_j(s), \quad \Phi_j(s) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial u_j}{\partial \nu} \Big|_{s \in \gamma}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если для функций f_1 и f_2 существуют решения u_1 и u_2 задачи (2.12), то для соответствующих им функций g_j (с $j = 1, 2$) и функций $v_j = \sigma_j u_j$ имеем

$$\max_{s \in \gamma_1} \left| \frac{\varphi_j(s)}{\sigma_j} - \Psi(s) \right| \leq \eta, \quad \text{где } \varphi_j(s) = \frac{\partial v_j}{\partial \nu} \Big|_{s \in \gamma_1}. \quad (2.16)$$

Отсюда

$$\left| \frac{\varphi_1(s)}{\sigma_1} - \frac{\varphi_2(s)}{\sigma_2} \right| \leq 2\eta \quad \forall s \in \gamma_1. \quad (2.17)$$

Представим последнее неравенство в виде

$$\left| \frac{\varphi_1(s)}{\varphi_2(s)} - \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right| \leq 2\eta \left| \frac{\sigma_1}{\varphi_2(s)} \right| \quad \forall s \in \gamma_1. \quad (2.18)$$

В частности, для любых двух точек $s_R \in \gamma_1$ и $s_\rho \in \gamma_1$ имеем

$$\left| \frac{\varphi_1(s_R)}{\varphi_2(s_R)} - \frac{\varphi_1(s_\rho)}{\varphi_2(s_\rho)} \right| \leq 2\eta |\sigma_1| \left(\frac{1}{|\varphi_2(s_R)|} + \frac{1}{|\varphi_2(s_\rho)|} \right). \quad (2.19)$$

Перепишем неравенство (2.19) в виде

$$|\varkappa(f_1, \sigma_1; s_R, s_\rho) - \varkappa(f_2, \sigma_2; s_R, s_\rho)| \leq \eta K, \quad (2.20)$$

где

$$\varkappa(f_j, \sigma_j; s_R, s_\rho) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\varphi_j(s_R)}{\varphi_j(s_\rho)}, \quad K \stackrel{\text{def}}{=} 2|\sigma_1| \frac{|\varphi_2(s_R)| + |\varphi_2(s_\rho)|}{|\varphi_1(s_\rho)\varphi_2(s_\rho)|}. \quad (2.21)$$

Отметим, что

$$\varphi_j(s) = \sigma_j \Phi_j(s), \quad \text{где } \Phi_j(s) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial u_j}{\partial \nu} \Big|_{s \in \gamma}, \quad \text{а } \max_{s \in \gamma_1} |\Phi_j(s) - \Psi(s)| \stackrel{(2.12)}{\leq} \eta. \quad (2.22)$$

Поэтому разрешимость задачи (2.12), (2.13) для функций f_1 и f_2 с необходимостью влечет условие (2.14). \square

ЛЕММА 2.4 (необходимое и достаточное условие). Пусть v_j — решение задачи Дирихле (2.3) для функции $g_j: v \mapsto g_j(v) \stackrel{\text{def}}{=} \sigma_j f_j(v/\sigma_j)$, где $j = 1, 2$, а σ_j — ненулевая константа. Предположим, что:

- 1) равенство (2.14) верно для любой точки $s_R \in \gamma$ (и некоторой $s_\rho \in \gamma$);
- 2) хотя бы для одной точки $s_\rho \in \gamma$ установлена справедливость неравенства

$$\left| \frac{\varphi_1(s_\rho)}{\sigma_1} - \frac{\varphi_2(s_\rho)}{\sigma_2} \right| \leq \delta \ll 1; \quad (2.23)$$

- 3) функция $u = u_1$ удовлетворяет условию (2.13).

Тогда функция $u = u_2$ удовлетворяет аналогу условия (2.13), а именно условию

$$\begin{aligned} & \max_{s \in \gamma_1} \left| \frac{\partial u}{\partial \nu}(s) - \Psi(s) \right| \leq \lambda(\eta, \delta, \Psi) \stackrel{\text{def}}{=} \\ & = \eta + \frac{|\Psi(s_R)| + \eta}{|\Psi(s_\rho)| - \eta} \delta + (|\Psi(s_\rho)| + \eta + \delta) \mu(\eta, \Psi), \end{aligned} \quad (2.24)$$

где величина $\mu(\eta, \Psi)$ определена в (2.14).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что

$$\left. \frac{\partial u_j}{\partial \nu} \right|_{s_R} = \frac{\varphi_j(s_R)}{\sigma_j} = \kappa_j L_j, \quad \text{где } \kappa_j = \varkappa(f_j, \sigma_j; s_R, s_\rho), \quad \text{а } L_j = \frac{\varphi_j(s_\rho)}{\sigma_j}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} & \left| \left. \frac{\partial u_1}{\partial \nu} \right|_{s_R} - \left. \frac{\partial u_2}{\partial \nu} \right|_{s_R} \right| = |\kappa_1 L_1 - \kappa_2 L_2| = \\ & = |\kappa_1 L_1 - \kappa_1 L_2 + \kappa_1 L_2 - \kappa_2 L_2| \leq \\ & \leq |\kappa_1| |L_1 - L_2| + |L_2| |\kappa_1 - \kappa_2| \stackrel{(2.14)-(2.23)}{\leq} \\ & \leq \varkappa(f_j, \sigma_j; s_R, s_\rho) \delta + \left(\left| \frac{\varphi_1(s_\rho)}{\sigma_1} \right| + \delta \right) \mu(\eta, \Psi) \stackrel{(2.13)}{\leq} \\ & \leq \frac{|\Psi(s_R)| + \eta}{|\Psi(s_\rho)| - \eta} \delta + (|\Psi(s_\rho)| + \eta + \delta) \mu(\eta, \Psi) \stackrel{(2.13)}{\implies} (2.24). \quad \square \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. В случае «реальной» постановки задачи ансамбль равенств (2.14) есть та обозначенная в начале параграфа серия \mathfrak{S} необходимых условий, которая «сходится» к критерию, характеризующему

искомую нелинейность $f \in \mathcal{F}$ по модулю двух быстро проверяемых соотношений. Одним из этих соотношений (в данном, «реальном» случае) является неравенство (2.23), а другим — неравенство (0.4).

2. В этом пункте описывается конструкция численного поиска всех существенно различных правых частей уравнения (0.1), принадлежащих почти минимальной ε -сети¹ некоторого компактного подмножества \mathcal{F} пространства X формальных степенных рядов²

$$f \sim \sum_{m=0}^{\infty} a_m u^m \text{ с нормой } \|f\| = \sup_{m \geq 0} |a_m|. \quad (2.25)$$

Эта конструкция применима как непосредственно для задачи (0.1), (0.2) с искомой функцией f , так и для «факторизованной» задачи (2.3), (2.4) с искомой функцией

$$g \sim \sum_{m=0}^{\infty} b_m v^m, \text{ определяемой формулой } g(v) = \sigma f\left(\frac{v}{\sigma}\right) \\ \text{с некоторым } \sigma \neq 0. \quad (2.26)$$

Определим следующим образом операцию взятия r -й ($r \in \mathbb{N}$) производной:

$$f^{(r)} \sim \sum_{m=0}^{\infty} A_r^m a_m u^{m-r}, \text{ где } A_r^m = m(m-1) \cdot \dots \cdot (m-r+1). \quad (2.27)$$

Пусть $r \in \mathbb{N}$, $K_0 > 0$ и $K_1 > 0$. Объединение множеств

$$\mathcal{F}(r, K_0, K_1) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} a_m u^m \in X \mid |a_m| \leq K_0, A_r^m |a_m| \leq K_1 \right\} \quad (2.28)$$

¹Напомним [9,14], что множество A называется ε -сетью для \mathcal{F} , если $\mathcal{F} \subset (A + \varepsilon \cdot B_X)$, где B_X — единичный шар пространства X . Если среди всех ε -сетей некоторая содержит наименьшее общее количество элементов, то она называется минимальной ε -сетью. Под почти минимальной ε -сетью понимается ε -сеть, которая, возможно, содержит чуть больше элементов, чем минимальная ε -сеть (ср. формулы (2.39) и (2.40)).

²Отметим, что если $\lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{|a_m|} = 1/R$, то X — это пространство функций, аналитических в круге $\{|u| < R\}$. Отметим также (см. [9]), что приводимые ниже построения можно без принципиальных изменений перенести на случай, когда вместо пространства X рассматривается одно из весовых пространств $L^2(\mathbb{R}, e^{-u^2})$, $L^2(\mathbb{R}_-, |u|^a e^u)$ или $L^2([-1, 0], h)$ с другими классическими весами $h \geq 0$. Рассмотрение последних двух пространств естественно в силу того, что решение задачи (2.1) удовлетворяет условию $u \leq 0$.

по всем K_0 и K_1 содержит все полиномы. Поэтому можно ожидать, что особенности изучаемой задачи проявятся среди $f \in \mathcal{F}(r, K_0, K_1)$, если K_0 и K_1 достаточно велики. Отметим, что

$$\mathcal{F}(r, K_0, K_1) = K_0 \cdot \mathcal{F}(r, 1, K), \quad \text{где } K = \frac{K_1}{K_0}. \quad (2.29)$$

Очевидно следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. *Для функции $f \in \mathcal{F}(r, K_0, K_1)$ существует функция u_f , удовлетворяющая условиям (0.1), (0.2), тогда и только тогда, когда для факторизованной функции $g \in \mathcal{F}(r, 1, K_1/K_0)$, определяемой формулой*

$$g(t) = \sigma f\left(\frac{t}{\sigma}\right), \quad \text{где } \sigma = \frac{1}{K_0}, \quad (2.30)$$

функция $v = \sigma u_f$ удовлетворяет условиям (2.3), (2.4).

Таким образом, искомые правые части уравнения (0.1) задаются формулой

$$f(u) = \frac{g(\sigma u)}{\sigma}, \quad \sigma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad g \in \mathcal{G} = \mathcal{G}(r, K) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{F}(r, 1, K), \quad (2.31)$$

в которой функции $v = \sigma u$ и g удовлетворяют условиям леммы 2.2 (в случае «идеализированной» постановки задачи) или леммы 2.4 (в случае ее «реальной» постановки).

Множество $\mathcal{G} = \mathcal{G}(r, K)$ (так же как и $\mathcal{F}(r, K_0, K_1)$) компактно в X , а множество полиномов

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_M(r, K) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \sum_{m=0}^M b_m v^m \in X \mid |b_m| \leq \min\left(1, \frac{K}{A_r^m}\right) \right\},$$

где $M \geq r \geq 1$, (2.32)

приближает \mathcal{G} с точностью

$$\begin{aligned} \sup_{f \in \mathcal{G}} \inf_{p \in \mathfrak{P}} \|f - p\| &= \sup_{m > M} \{ |b_m| \mid |b_m| \leq 1, A_r^m |b_m| \leq K \} = \\ &= \sup_{m > M} \min \left\{ 1, \frac{K}{A_r^m} \right\} = \min \left\{ 1, \frac{K}{A_r^{M+1}} \right\}. \end{aligned} \quad (2.33)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.3. Излагаемый здесь рецепт поиска всех существенно различных правых частей $f \in \mathcal{F}$ уравнения Грэда—Шафранова предполагает разрешимость задачи Дирихле

$$\Delta v = p(v) \geq 0 \quad \text{в } \omega \in \mathbb{R}^2, \quad v|_{\gamma = \partial\omega} = 0, \quad \text{где } p(v) = \sum_{m=0}^M b_m v^m. \quad (2.34)$$

Условия $p(v) \geq 0$ и $v|_{\gamma=\partial\omega} = 0$ влекут $b_0 \geq 0$. Поэтому не нужно рассматривать варианты с $b_0 < 0$. Кроме того, отслеживая число решений¹ задачи (2.34), следует проверять выполнение неравенства $p(v(x, y)) \geq 0$ в ω .

Пусть $M \in \mathbb{N}$, $M \geq r \geq 1$ таково, что

$$A_r^{M+1} = (M+1)M \cdot \dots \cdot (M-r+2) \geq K > 0.$$

Тогда согласно (2.33) получаем такую формулу для точности приближения:

$$\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} \frac{K}{A_r^{M+1}} \leq 1. \quad (2.35)$$

Предложение 2.2. Любая ε -сеть для множества \mathfrak{F} , состоящая из полиномов этого множества, является ε -сетью для $\mathcal{G}(r, K) \stackrel{(2.31)}{=} \mathcal{F}(r, 1, \varepsilon A_r^{M+1})$.

Доказательство. Каждый элемент $g \in \mathcal{G}$ однозначно представим в виде $g = g_0 + g_1$, где

$$g_0(u) = \sum_{m=0}^M b_m v^m \in \mathfrak{F}, \quad g_1 = \sum_{m=M+1}^{\infty} b_m v^m.$$

Имеем

$$\|g_1\| \stackrel{(2.25)}{=} \sup_{m \geq M+1} |b_m| \stackrel{(2.32)}{\leq} \sup_{m \geq M+1} \left\{ \frac{K}{A_r^m} \right\} \stackrel{(2.27)}{=} \frac{K}{A_r^{M+1}} \stackrel{(2.35)}{=} \varepsilon.$$

Возьмем из ε -сети множества \mathfrak{F} элемент

$$\hat{p} = \sum_{m=0}^M \hat{b}_m v^m = \sum_{m=0}^{\infty} \hat{b}_m v^m, \quad \text{где } \hat{b}_m = 0 \text{ при } m > M.$$

Тогда

$$\|g_0 - \hat{p}\| \leq \varepsilon \iff \left\| \sum_{m=0}^M (b_m - \hat{b}_m) u^m \right\| \leq \varepsilon \iff |b_m - \hat{b}_m| \leq \varepsilon \\ \forall m = 0, \dots, M.$$

¹Как известно (см., например, [7]), при нечетном M и $b_M > 0$ задача (2.34) имеет (хотя бы одно) решение $u \in H_0^1(\omega) \cap L^p(\omega)$, где $p = M+1$. С другой стороны, согласно [23] не имеет решения в $H_0^1(\omega)$, например, уравнение $\Delta u = u^2 + a_0$, если $a_0 > \lambda_1/4$, где λ_1 — первое собственное значение оператора $-\Delta: H_0^1(\omega) \rightarrow H^{-1}(\omega)$.

А поскольку $|b_m| \leq \varepsilon$ при $m > M$ (ибо $\|g_1\| \leq \varepsilon$) и $\hat{b}_m = 0$ при $m > M$, то

$$|b_m - \hat{b}_m| \leq \varepsilon \text{ при } m \geq 0, \text{ т. е. } \|g - \hat{p}\| = \sup_m |b_m - \hat{b}_m| \leq \varepsilon. \quad \square$$

Согласно (2.35) $A_r^{M+1} = (M+1)M \cdot \dots \cdot (M-r+2) \geq K > 0$. Поэтому существует число

$$\begin{aligned} m_* &= \min_{r-1 \leq m \leq M} \{m \mid A_r^{m+1} \geq K\} \stackrel{(2.35)}{\iff} \\ &\iff \frac{1}{\varepsilon} \in [N_-, N_+) \stackrel{\text{def}}{=} \left[\frac{A_r^{M+1}}{A_r^{m_*+1}}, \frac{A_r^{M+1}}{A_r^{m_*}} \right). \end{aligned} \quad (2.36)$$

Для целого $m \in [0, M]$ определим

$$B_m \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & \text{при } m \in [0, m_*], \\ \frac{K}{A_r^m} & \text{при } m \in [m_* + 1, M] \text{ (если } m_* + 1 \leq M). \end{cases} \quad (2.37)$$

Очевидно следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. Множество $\mathfrak{P} \subset X$ состоит из полиномов $p: v \mapsto p(v) = \sum b_m v^m$, коэффициенты которых удовлетворяют условию

$$|b_m| \leq B_m, \quad 0 \leq m \leq M.$$

Отображение

$$J: \mathfrak{P} \ni \sum b_m v^m \mapsto b = (b_0, \dots, b_M) \in \mathbf{P} \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{m=0}^M [-B_m, B_m] \quad (2.38)$$

есть изометрия между множествами $\mathfrak{P} \subset X$ и $\mathbf{P} \subset l_{M+1}^\infty$, где норма элемента $b = (b_0, \dots, b_M) \in l_{M+1}^\infty$ равна $\|b\| = \max_{0 \leq m \leq M} |b_m|$.

СЛЕДСТВИЕ 2.1. Отображение J^{-1} переводит ε -сеть для $\mathbf{P} \subset l_{M+1}^\infty$ в ε -сеть для $\mathfrak{P} \subset X$.

Хорошо известно (см., например, [14]), что общее число элементов любой ε -сети параллелепипеда \mathbf{P} не меньше

$$L = \prod_{m=0}^M \frac{B_m}{\varepsilon}, \quad (2.39)$$

т. е. не меньше отношения объема $V(\mathbf{P}) = \prod_{m=0}^M 2B_m$ параллелепипеда \mathbf{P} к объему $(M+1)$ -мерного куба $\mathbf{C}_\varepsilon^{M+1}$, имеющего ребра длиной 2ε .

Учитывая это, построим ε -сеть для \mathbf{P} следующим образом. Возьмем некоторую угловую точку параллелепипеда \mathbf{P} и отложим от нее вдоль каждого исходящего из нее ребра примыкающие друг к другу отрезки длиной 2ε . При этом для того или иного ребра последний отрезок, вообще говоря, может выходить за пределы этого ребра. Общее число таких отрезков, отложенных вдоль m -го ребра, равно

$$\left\lceil \frac{2B_m}{2\varepsilon} \right\rceil = \left\lceil \frac{B_m}{\varepsilon} \right\rceil, \quad \text{где } \lceil x \rceil \text{ — наименьшее целое, больше или равное } x.$$

Так отложенные отрезки определяют примыкающие друг к другу кубы $\mathbf{C}_\varepsilon^{M+1}$, покрывающие параллелепипед \mathbf{P} . В качестве ε -сети возьмем их центры. Общее число таких центров равно

$$S = \prod_{m=0}^M \left\lceil \frac{B_m}{\varepsilon} \right\rceil \stackrel{(2.39)}{\geq} L. \quad (2.40)$$

В силу (2.36), (2.37) формулу (2.40) можно переписать в виде

$$S = N^{m_*+1} S_*, \quad \text{где } N = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil, \\ S_* = \begin{cases} \prod_{m=m_*+1}^M \left\lceil \frac{A_r^{M+1}}{A_r^m} \right\rceil & \text{при } m_* < M, \\ 1 & \text{при } m_* = M. \end{cases} \quad (2.41)$$

ПРИМЕРЫ. В приведенных ниже примерах в качестве исходных характеристик ε -сети в $\mathcal{G}(r, K)$ задаются три параметра:

- 1) натуральное число M , которое есть степень приближающих полиномов (элементов ε -сети);
- 2) натуральное число $r \leq M$;
- 3) положительное число $K \leq A_r^{M+1} = (M+1)M \cdot \dots \cdot (M+2-r)$, которое ограничивает сверху модуль r -й производной функций g из $\mathcal{G}(r, K)$.

По этим трем параметрам определяются:

- точность приближения $\varepsilon = K/A_r^{M+1}$;
- натуральное $m_* \in [r-1, M]$, равное тому минимальному m , для которого $A_r^{m+1} \geq K$, а также числа¹ N_- и N_+ , определенные в формуле (2.36);

¹В том случае, когда $1/\varepsilon \notin \mathbb{N}$, а промежуток $[N_-, N_+) \ni 1/\varepsilon$ содержит целое число, точность аппроксимации реально чуть лучше, чем ε . В силу формулы (2.41) она не хуже, чем $1/\lceil 1/\varepsilon \rceil \leq \varepsilon$.

- общее число S (см. (2.41)) элементов ε -сети, т. е. полиномов

$$p_{\mathbf{j}}: v \mapsto p_{\mathbf{j}}(v) = \sum_{m=0}^M b_{m,\mathbf{j}} v^m,$$

где $\mathbf{j} = \{j_0, \dots, j_M\}$, $b_{\mathbf{j}} = \{b_{j_0}, \dots, b_{j_M}\}$; (2.42)

- числа

$$B_m \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & \text{при } m \in [0, m_*], \\ \frac{K}{A_m^m} & \text{при } m \in [m_* + 1, M] \text{ (если } m_* + 1 \leq M), \end{cases}$$

ограничивающие коэффициенты b_{m,j_m} полиномов (2.42);

- сами коэффициенты

$$b_{m,j_m} = \varepsilon \left(2j_m + 1 - \left\lceil \frac{B_m}{\varepsilon} \right\rceil \right), \quad j_m = 0, \dots, \left\lceil \frac{B_m}{\varepsilon} \right\rceil - 1. \quad (2.43)$$

В таблице, приведенной ниже, представлены значения параметров ε , S , m_* , N_- и N_+ в зависимости от пяти значений $M = 1, 2, 3, 4, 5$, M значений $r = 1, \dots, M$ и двух значений K .

КОММЕНТАРИЙ. Выгоднее брать вариант, где больше K («ширина» функционального класса), но меньше S (число перебираемых вариантов), M (степень приближающих полиномов) и ε (точность приближения). Из приведенных в таблице вариантов определен интерес, по-видимому, представляют варианты № 5 и 17. При этом, согласно примечанию на с. 90, точность аппроксимации в варианте № 17 не хуже чем $1/3 < 0,42$. Что касается вариантов № 2, 3, 7, 8, 18 и 19, то в их пользу говорит то, что согласно замечанию 2.3 коэффициент при старшей степени полинома скорее всего достаточно будет брать только близким к нулю, а коэффициент при старшей нечетной степени — только положительным.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.4. В рассматриваемом здесь примере уравнения Грэда—Шафранова следует, учитывая замечание 2.3, выбирать программным образом лишь неотрицательные свободные коэффициенты у полиномов ε -сети. В этом случае число реально перебираемых вариантов будет равным примерно $S/2$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.5. В процессе численной проверки выполнения условий, сформулированных в леммах 2.1, 2.2 (или леммах 2.3, 2.4), следует

№	M	r	K	ε	S	m_*	N_-	N_+
1	1	1	2	1	1	1	1	2
2	2	1	2	0,67	4	1	1	3
3	2	2	2	1/3	27	1	3	∞
4	3	1	2	1/2	8	1	2	4
5	3	2	2	1/6	432	1	6	∞
6	3	3	2	1/12	6912	2	4	∞
7	4	1	2	0,4	18	1	2	5
8	4	2	2	1/10	3000	1	10	∞
9	4	3	2	1/30	540000	2	10	∞
10	4	4	2	1/60	64800000	3	5	∞
11	5	1	2	1/3	54	1	3	6
12	5	2	2	1/15	33750	1	15	∞
13	5	3	2	1/60	43200000	2	20	∞
14	5	4	2	1/180	47239200000	3	15	∞
15	5	5	2	1/360	36279700000000	4	6	∞
16	3	2	10	0,83	16	3	1	2
17	3	3	10	0,42	81	3	1	4
18	4	2	10	1/2	16	3	1	3
19	4	3	10	1/6	2592	3	2	10
20	4	4	10	1/12	103680	3	5	∞
21	5	2	10	1/3	162	3	2	5
22	5	3	10	1/12	207360	3	5	20
23	5	4	10	1/36	75582720	3	15	∞
24	5	5	10	1/72	11609500000	4	6	∞

использовать получаемую информацию для заполнения таблицы соответствий между испытываемыми элементами ε -сети и функциями Ψ , входящими в базу данных множества Ψ , т. е. множества приближений для нормальных производных $\frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\gamma}$, которые вычисляются по данным магнитного мониторинга.

§ 3. ПРИМЕРЫ ЕДИНСТВЕННОСТИ И НЕЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

Во пп. 2 и 3 этого параграфа представлены результаты о единственности решения обратной задачи для уравнения $\Delta u = f(u)|_{\omega \in \mathbb{R}^2} \geq 0$ в рамках «идеализированной» постановки, т. е. когда на гладкой кривой $\gamma = \partial\omega$ (нулевой линии уровня функции u) всюду известна функция $\Phi = \partial u / \partial \nu|_{\gamma}$. Эти результаты получены для аффинных и экспоненциальных классов функций

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\text{aff}} &\stackrel{\text{def}}{=} \{f: \mathbb{R} \ni u \mapsto f(u) = au + b\}|_{(a,b) \in \mathbb{R}^2}, \\ \mathcal{F}_{\text{exp}} &\stackrel{\text{def}}{=} \left\{ f: \mathbb{R} \ni u \mapsto f(u) = \frac{\lambda e^{2\mu u}}{\mu} \right\} \Big|_{(\lambda > 0, \mu > 0)} \end{aligned} \quad (3.1)$$

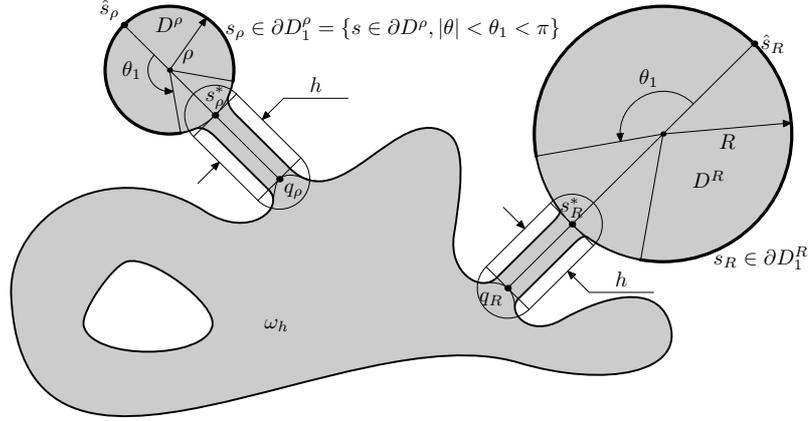
в случае специального семейства областей $\omega = \omega_h$, описываемого в п. 1. Специфическая особенность этих областей заключается в том, что они имеют два непересекающихся «полуострова» в виде дисков D^R и D^ρ разных радиусов R и ρ , которые примыкают к «материковой» части.

Если «материковая» часть области ω_h сводится к узкой перемычке, соединяющей диски D^R и D^ρ , то тогда, как показано в п. 4 этого параграфа, для функционального класса

$$\mathcal{F}_{(\text{aff}, \text{exp})} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ f: \mathbb{R} \ni u \mapsto f(u) = \alpha(au + b) + \beta \frac{\lambda e^{2\mu u}}{\mu} \right\} \Big|_{(\lambda \geq 0, \mu \geq 0)}, \quad (3.2)$$

т. е. объединения классов \mathcal{F}_{aff} и \mathcal{F}_{exp} , имеется два существенно различных решения обратной задачи в рамках ее «реальной» постановки. Напомним, что в этом случае функция $\Phi = \partial u / \partial \nu|_{\gamma}$ задана лишь приближенно, да и то лишь на той части кривой γ , которая несколько отдалена от точек, где кривизна кривой γ чрезмерно велика.

1. Пример областей $\omega = \omega_h$ представлен на рис. 1. Дадим формальное описание. В точках $s_R^* \in \partial D^R$ и $s_\rho^* \in \partial D^\rho$, диаметрально противоположных точкам $\hat{s}_R \in \partial D^R$ и $\hat{s}_\rho \in \partial D^\rho$, к дискам D^R и D^ρ восстановлены внешние единичные нормали $\nu_R = \overrightarrow{s_R^* q_R}$ и $\nu_\rho = \overrightarrow{s_\rho^* q_\rho}$, которые составляют остов областей $P_R = \{\text{dist}(x, \nu_R) < h\}$ и $P_\rho = \{\text{dist}(x, \nu_\rho) < h\}$. Область P_R составлена из прямоугольника, симметричного относительно нормали ν_R , и примыкающих к нему полудисков весьма малого радиуса $h/2$. Тот из них, который не пересекается с D^R , обозначим через δ^R . Аналогично определяется полудиск $\delta^\rho \subset D^\rho$. «Материковая» часть ω области ω_h представляет собой связную область

Рис. 1. Пример рассматриваемых областей ω_h

с гладкой границей, которая имеет ровно две точки пересечения q_R и q_ρ (концы нормалей ν_R и ν_ρ) с областью $(D^R \cup (P_R \setminus \delta^R)) \cup (D^\rho \cup (P_\rho \setminus \delta^\rho))$. Связная область ω_h с гладкой границей обладает следующими свойствами:

- 1) $D^R \subset \omega_h$, $D^\rho \subset \omega_h$, $\omega \subset \omega_h$;
- 2) $\omega_h \subset (D^R \cup P_R \cup \omega_h \cup P_\rho \cup D^\rho)$;
- 3) $\partial\omega_h \setminus (P_R \cup P_\rho) = (\partial D^R \cup \partial\omega \cup \partial D^\rho) \setminus (P_R \cup P_\rho)$.

Рассматриваемое семейство областей ω_h зависит от малого параметра h , который характеризует ширину «перешейков», соединяющих «материковую» часть области ω_h (возможно, состоящую лишь из слившихся «перешейков») с двумя ее «полуостровами» в виде дисков D^R и D^ρ радиусов R и $\rho < R$. Возьмем две точки s_R и s_ρ , расположенные соответственно на тех дугах $\gamma_1^R \subset \partial D^R$ и $\gamma_1^\rho \subset \partial D^\rho$ (рис. 1) границ дисков D^R и D^ρ , которые отстоят на некоторое расстояние от «перешейков». Если \mathcal{F} есть одно из множеств $\mathcal{F}_{\text{аф}}$, \mathcal{F}_{exp} или $\mathcal{F}_{(\text{аф}, \text{exp})}$, то для такой области ω_h функция

$$\varkappa: \mathcal{F} \times \mathbb{R} \ni (f, \sigma) \mapsto \varkappa(f, \sigma; s_R, s_\rho) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial v}{\partial \nu} \Big|_{s_R} / \frac{\partial v}{\partial \nu} \Big|_{s_\rho},$$

$$s_R \in \gamma_1^R, \quad s_\rho \in \gamma_1^\rho, \quad (3.3)$$

построенная (ср. с (2.5)) по решению v задачи Дирихле¹

$$\Delta v = g(v) \text{ в } \omega, \quad v|_{\gamma} = 0, \quad \text{где } g(v) = \sigma f\left(\frac{v}{\sigma}\right), \quad (3.4)$$

строго монотонна при малых h одновременно с функцией

$$\varkappa_0: (f, \sigma) \mapsto \varkappa_0(f, \sigma) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{dv^R}{dr} \Big|_{r=R} / \frac{dv^\rho}{dr} \Big|_{r=\rho}, \quad (3.5)$$

которая строится по решениям v^R и v^ρ задачи (3.4) соответственно для $\omega_h = D^R$ и $\omega_h = D^\rho$.

Функция \varkappa_0 считается явно. Убеждаемся, что она строго монотонна. Доказываем, что при малых h функция \varkappa тоже строго монотонна. Это позволяет с помощью леммы 2.1 установить теоремы 3.1 и 3.2 о единственности решения обратной задачи для уравнения Грэда—Шафранова в классе аффинных и в классе растущих экспоненциальных функций. Результат о неединственности в объединении этих классов представлен в п. 4.

2. Отметим прежде всего, что разрешимость задачи

$$\Delta u = f(u) \text{ в } \omega, \quad u = 0 \text{ на } \gamma = \partial\omega, \quad (3.6)$$

где

$$f \in \mathcal{F}_{\text{aff}} = \{f: \mathbb{R} \ni u \mapsto f(u) = au + b\}_{(a,b) \in \mathbb{R}^2},$$

необходимо влечет

$$b \geq 0, \quad a \geq -\lambda_1, \quad \text{причем } b = 0 \iff a = -\lambda_1, \quad (3.7)$$

где $\lambda_1 = \lambda_1(\omega)$ — первое собственное значение оператора $-\Delta$, т. е.

$$-\Delta\psi = \lambda_1\psi \text{ в } \omega, \quad \text{где } \psi > 0 \text{ в } \omega, \quad \psi = 0 \text{ на } \partial\omega. \quad (3.8)$$

В самом деле, $b \geq 0$, так как $au + b \geq 0$ и $u = 0$ на γ . Далее,

$$\lambda_1 \int u \cdot \psi = - \int u \cdot \Delta\psi = - \int \Delta u \cdot \psi = -a \int u \cdot \psi - b \int \psi,$$

т. е.

$$(\lambda_1 + a) \underbrace{\int u \cdot \psi}_{<0} = -b \underbrace{\int \psi}_{>0}, \quad \text{откуда} \quad \begin{aligned} \lambda_1 + a > 0 &\iff b > 0, \\ \lambda_1 + a = 0 &\iff b = 0. \end{aligned} \quad (3.9)$$

¹Напомним (см., например, [10, с. 370]), что решение задачи (3.4) существует, если $f \in \mathcal{F}$.

Из сказанного следует, что остается рассмотреть случай

$$b > 0 \iff a > -\lambda_1.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. Пусть $a > -\lambda_1$. Тогда решение u задачи

$$\Delta u = au + b \geq 0 \text{ в } \omega = \omega_h, \quad u|_{\gamma = \partial\omega_h} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{\gamma} = \Phi \quad (3.10)$$

существует если и только если

$$\int_{\gamma} \Phi \neq 0 \text{ и } \Phi = b \frac{\partial v_a}{\partial \nu} \Big|_{s \in \gamma},$$

где v_a есть решение следующей факторизованной¹ задачи:

$$\Delta v = av + 1 \text{ в } \omega, \quad v|_{\partial\omega} = 0. \quad (3.11)$$

При этом

$$b_{(a, \Phi)} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\int_{\gamma} \Phi}{\int_{\gamma} \frac{\partial v_a}{\partial \nu}}. \quad (3.12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Соотношение

$$v = \frac{u}{b} \quad (3.13)$$

связывает решения задач (3.10) и (3.11). При этом

$$\frac{\partial v}{\partial \nu} \Big|_{\gamma} \stackrel{(3.13)}{=} \frac{1}{b} \frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{\gamma} \stackrel{(3.10)}{=} \frac{1}{b} \Phi. \quad \square$$

Функции $v^R = v_a^R: D^R \rightarrow \mathbb{R}$ и $v^{\rho} = v_a^{\rho}: D^{\rho} \rightarrow \mathbb{R}$, фигурирующие в формуле (3.5), зависят от полярного радиуса r . Они являются решениями задачи (3.11) соответственно в областях $\omega = D^R$ и $\omega = D^{\rho}$. Отметим, что

$$-\lambda_1(\omega_h) > -\lambda_1(D^R), \text{ так как } D^R \subsetneq \omega_h. \quad (3.14)$$

¹Ср. с предложением 2.1.

Поскольку $b \stackrel{(3.12)}{=} b_{(a,\Phi)}$, функция $f: u \mapsto au + b$ полностью характеризуется параметром a , подчиненным условию (3.9). В данном случае естественно считать параметр a аргументом введенных формулами (3.3), (3.5) функций

$$\varkappa: a \mapsto \varkappa(a; s_R, s_\rho) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial v_a}{\partial \nu} \Big|_{s_R} / \frac{\partial v_a}{\partial \nu} \Big|_{s_\rho}, \quad s_R \in \gamma_1^R, \quad s_\rho \in \gamma_1^\rho, \quad (3.15)$$

и

$$\varkappa_0: a \mapsto \varkappa_0(a) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{dv_a^R}{dr} \Big|_{r=R} / \frac{dv_a^\rho}{dr} \Big|_{r=\rho}. \quad (3.16)$$

Через $\dot{\varkappa}$ и $\dot{\varkappa}_0$ будем обозначать производные этих функций по параметру $a > -\lambda_1$.

Без особого труда находятся асимптотики $\dot{\varkappa}_0(a) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d}{da} \varkappa_0(a)$ при $a \rightarrow \infty$, при $a \rightarrow 0$ и при $a \rightarrow -\lambda_1(D^R)$. В частности,

$$\begin{aligned} \dot{\varkappa}_0(a)|_{a \rightarrow \infty} &\sim -\frac{R-\rho}{4R\rho} a^{-3/2}, & \dot{\varkappa}_0(0) &= -\frac{R}{\rho} \frac{R^2 - \rho^2}{8}, \\ \dot{\varkappa}_0(a)|_{a \rightarrow -\lambda_1(D^R)+0} &\sim -\frac{C}{(\lambda_1(D^R) + a)^2}, \end{aligned} \quad (3.17)$$

где $C > 0$. Однако неравенство

$$\dot{\varkappa}_0(a) \leq -\frac{C}{1+a^2} \quad \forall a > -\lambda_1(D^R), \quad \text{где } C = C(R, \rho) > 0, \quad (3.18)$$

отнюдь не тривиально¹. Неравенство (3.18) позволяет доказать, что справедлива следующая лемма.

ЛЕММА 3.1. *Существует такое $h^* > 0$, что²*

$$\dot{\varkappa}(a) < 0 \quad \text{при } h \leq \frac{h^*}{2} \quad \text{и } a \geq -\lambda_1(\omega_{h^*}) > -\lambda_1(\omega_h). \quad (3.19)$$

Из этой леммы (доказанной в § 4) и леммы 2.1 следует теорема 3.1.

¹Его доказательство (составляющее вклад третьего автора в эту работу) приведено в § 5. Основная трудность в доказательстве неравенства (3.18) преодолевается с помощью неравенства (5.18), которое представляет самостоятельный интерес.

²Требование $h \leq h^*/2$ в (3.19) обеспечивает используемое нами в задаче (3.10) неравенство

$$b \neq 0 \stackrel{(3.7)}{\iff} a > -\lambda_1(\omega_h).$$

ТЕОРЕМА 3.1. Существует такое достаточно малое $h^* > 0$, зависящее от R, ρ и геометрии «матриковой» части семейства областей ω_h , что при $h \leq h^*/2$ существует лишь одна пара вещественных чисел (a, b) с $a \geq -\lambda_1(\omega_{h^*})$, для которых при заданной функции $\Phi: \gamma \rightarrow \mathbb{R}$ найдется функция u , удовлетворяющая условиям (3.10). Эта функция задается формулой $u = bv_a$, где v_a есть решение задачи (3.11).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 3.1 функция $\varkappa: a \mapsto \varkappa(a)$, определенная в (3.15), строго монотонна при $a \geq -\lambda_1(\omega_{h^*})$. Поэтому равенство

$$\varkappa(a_1; s_R, s_\rho) = \varkappa(a_2; s_R, s_\rho), \quad (3.20)$$

выражающее согласно лемме 2.1 необходимое условие разрешимости задачи (3.10) для двух различных пар чисел (a_1, b_1) и (a_2, b_2) , невозможно. \square

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Для произвольной отличной от диска односвязной области $\omega \in \mathbb{R}^2$ с гладкой границей $\partial\omega$ справедливы [4, 21] два факта, относящиеся к функции $a \mapsto \varkappa(a; s_R, s_\rho)$:

- 1) эта функция аналитична в $\mathbb{C} \setminus \left\{ \bigcup_{j \geq 2} (-\lambda_j + i0) \right\}$, где λ_j — j -е собственное значение оператора $-\Delta: H_0^1(\omega) \rightarrow H^{-1}(\omega)$;
- 2) главный член ее асимптотики при $a \rightarrow \infty$ есть

$$\varkappa_0(a) \stackrel{(3.17)}{\sim} -\frac{R-\rho}{4R\rho} a^{-3/2}.$$

Из этих двух фактов (первый из них устанавливается сравнительно легко) сразу следует теорема о том, что обратная задача (в ее «идеализированной» постановке) имеет не более чем конечное множество решений в классе аффинных функций [4, 21]. В [2] с помощью численной проверки строгой монотонности функции $a \mapsto \varkappa(a)$ установлена единственность решения этой обратной задачи для широкого класса областей. Там же доказано, что в случае «реальной» постановки этой задачи (т. е. при условии (1.3) с $\eta > 0$) существует счетное множество различающихся в равномерной метрике на любую наперед заданную константу распределений тока даже в случае аффинных правых частей, причем эти распределения образуют последовательность, сходящуюся к току, сосредоточенному на границе плазменной области.

3. Рассмотрим вопрос о реконструкции функции

$$f \in \mathcal{F}_{\text{exp}} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ f: \mathbb{R} \ni u \mapsto f(u) = \frac{\lambda e^{2\mu u}}{\mu} \right\} \Big|_{(p>0, q>0)},$$

для которой при заданной функции $\Phi: \gamma \rightarrow \mathbb{R}$ найдется решение u задачи

$$\Delta u = \frac{\lambda e^{2\mu u}}{\mu} \text{ в } \omega = \omega_h, \quad u|_{\gamma=\partial\omega_h} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{\gamma} = \Phi. \quad (3.21)$$

Предложение 3.2. Решение u задачи (3.21) существует тогда и только тогда, когда $\Phi = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial v_\lambda}{\partial \nu} \Big|_{s \in \gamma}$, где v_λ есть решение¹ следующей факторизованной задачи:

$$\Delta v = \lambda e^v > 0 \text{ в } \omega, \quad v|_{\partial\omega} = 0. \quad (3.22)$$

При этом параметр μ равен

$$\mu(\lambda, \Phi) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\int_{\gamma} \partial v_\lambda / \partial \nu}{\int_{\gamma} \Phi}. \quad (3.23)$$

Доказательство. Соотношение

$$v = 2\mu u \quad (3.24)$$

связывает решения задач (3.21) и (3.22). При этом

$$\frac{\partial v}{\partial \nu} \Big|_{\gamma} \stackrel{(3.24)}{=} \frac{1}{b} \frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{\gamma} \stackrel{(3.21)}{=} \frac{\Phi}{b}. \quad \square$$

Если $\omega = D^R$, то решение $v_\lambda = v_\lambda^R$ задачи (3.22) зависит от полярного радиуса r и задается, как нетрудно проверить, формулой

$$v_\lambda^R(r) = \frac{1}{2} \left(\ln \frac{4q^2(R)}{\lambda} - 2 \ln(q^2(R) - r^2) \right),$$

где $q(R) = \frac{1 + \sqrt{1 + \lambda R^2}}{\sqrt{\lambda}} > R.$ (3.25)

Поскольку $\mu \stackrel{(3.23)}{=} \mu(\lambda, \Phi)$, функция $f: u \mapsto \frac{\lambda}{\mu} e^{2\mu u}$ полностью характеризуется параметром $\lambda > 0$. Будем поэтому считать параметр $\lambda > 0$ аргументом введенных формулами (3.3), (3.5) функций

$$\varkappa: \lambda \mapsto \varkappa(\lambda; s_R, s_\rho) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial v_\lambda}{\partial \nu} \Big|_{s_R} / \frac{\partial v_\lambda}{\partial \nu} \Big|_{s_\rho}, \quad s_R \in \gamma_1^R, \quad s_\rho \in \gamma_1^\rho, \quad (3.26)$$

¹См. примечание на с. 95.

и

$$\varkappa_0: \lambda \mapsto \varkappa_0(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{dv_\lambda^R}{dr} \Big|_{r=R} / \frac{dv_\lambda^\rho}{dr} \Big|_{r=\rho} \stackrel{(3.25)}{=} \frac{R(1 + \sqrt{1 + \lambda\rho^2})}{\rho(1 + \sqrt{1 + \lambda R^2})}. \quad (3.27)$$

Через $\dot{\varkappa}$ и $\dot{\varkappa}_0$ обозначим производные этих функций по параметру λ . Из (3.27) очевидным образом следует, что

$$\dot{\varkappa}_0(\lambda) = \frac{(\rho^2 - R^2)\alpha}{2\sqrt{1 + \lambda R^2}\sqrt{1 + \lambda\rho^2}(1 + \sqrt{1 + \lambda R^2})^2},$$

где

$$\alpha = 1 + \frac{\rho^2 + R^2 + \lambda\rho^2 R^2}{\rho^2\sqrt{1 + \lambda R^2} + R^2\sqrt{1 + \lambda\rho^2}} > 0.$$

Лемма 3.2. Существует такое $h^* > 0$, что для области ω_h с $h \leq h^*$ справедливо неравенство

$$\dot{\varkappa}(\lambda) < 0 \quad \text{для любого } \lambda > 0. \quad (3.28)$$

Доказательство проводится по той же схеме, что и доказательство леммы 3.1.

ТЕОРЕМА 3.2. Существует такое достаточно малое $h^* > 0$, зависящее от R, ρ и геометрии «материковой» части семейства областей ω_h , что при $h \leq h^*$ существует лишь одна пара положительных чисел (λ, μ) , для которых при заданной функции $\Phi: \gamma \rightarrow \mathbb{R}$ найдется функция u , удовлетворяющая условиям (3.21). Эта функция задается формулой $u = \frac{v_\lambda}{2\mu}$, где v_λ есть решение задачи (3.22).

Доказательство аналогично доказательству теоремы 3.1.

4. Пусть a, b, λ, μ и r — положительные числа. Обозначим через u_1^r решение задачи

$$\Delta u_1 = au_1 + b \geq 0 \quad \text{в } D^r \stackrel{\text{def}}{=} \{\xi \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{x^2 + y^2} < r\}, \quad u_2|_{\partial D^r} = 0, \quad (3.29)$$

а через u_2^r — решение задачи

$$\Delta u_2 = \frac{\lambda e^{2\mu u_2}}{\mu} \quad \text{в } D^r, \quad u_2|_{\partial D^r} = 0. \quad (3.30)$$

Непосредственная проверка показывает, что¹

$$u_1^r: [0, r] \ni \xi \mapsto u_1^r(\xi) = \frac{b}{a} \left(\frac{I_0(\sqrt{a}\xi)}{I_0(\sqrt{a}r)} - 1 \right), \quad (3.31)$$

¹Функции Бесселя I_0, I_1 представлены в формулах (4.4), (4.5).

а

$$u_2^r: [0, r] \ni \xi \mapsto u_2^r(\xi) = \frac{1}{2\mu} \left(\ln \frac{4q^2(r)}{\lambda} - 2 \ln(q^2(r) - \xi^2) \right),$$

$$\text{где } q(r) = \frac{1 + \sqrt{1 + \lambda r^2}}{\sqrt{\lambda}} > r. \quad (3.32)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3. Пусть $0 < \rho < R = 1$. Тогда функции $u_1^R, u_2^R, u_1^\rho, u_2^\rho$ удовлетворяют условиям

$$\frac{d}{dr} u_1^R(r) \Big|_{r=R} = \frac{d}{dr} u_2^R(r) \Big|_{r=R} = 1, \quad \frac{d}{dr} u_1^\rho(r) \Big|_{r=\rho} = \frac{d}{dr} u_2^\rho(r) \Big|_{r=\rho} \quad (3.33)$$

в том и только в том случае, когда входящие в формулы (3.31), (3.32) положительные числа b, λ и μ следующим образом зависят от параметра $a > 0$:

$$b = \sqrt{a} \frac{I_0(\sqrt{a})}{I_1(\sqrt{a})}, \quad \lambda = \mu(\mu + 2), \quad \mu = \frac{2(c - \rho)}{(1 - c^2)\rho},$$

$$\text{где } c = \frac{I_1(\sqrt{a}\rho)I_0(\sqrt{a})}{I_0(\sqrt{a}\rho)I_1(\sqrt{a})}. \quad (3.34)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку

$$\frac{d}{dr} u_1^r(\xi) = \frac{b}{\sqrt{a}} \frac{I_1(\sqrt{a}\xi)}{I_0(\sqrt{a}r)}, \quad \text{а } \frac{d}{dr} u_2^r(\xi) = \frac{2\xi}{\mu(q^2(r) - \xi^2)}, \quad (3.35)$$

то первые два равенства в (3.33) означают, что

$$b = \sqrt{a} \frac{I_0(\sqrt{a})}{I_1(\sqrt{a})} \quad \text{и} \quad \frac{2}{\mu(q^2(1) - 1)} = 1 \stackrel{(3.31)}{\iff} \lambda = \mu(\mu + 2). \quad (3.36)$$

Последнее равенство в (3.33) эквивалентно соотношениям

$$\frac{2\rho}{\mu(q^2(\rho) - \rho^2)} = c \stackrel{(3.31)}{\iff} \frac{\rho(2 + \mu)}{1 + \sqrt{1 + (2 + \mu)\mu\rho^2}} = c \stackrel{\mu > 0, \rho \neq 1}{\iff} \iff \mu = \frac{2(c - \rho)}{(1 - c^2)\rho}, \quad (3.37)$$

где

$$c = \frac{d}{dr} u_1^\rho(r) \Big|_{r=\rho} \stackrel{(3.35), (3.36)}{\iff} c = \frac{I_1(\sqrt{a}\rho)I_0(\sqrt{a})}{I_0(\sqrt{a}\rho)I_1(\sqrt{a})}. \quad (3.38)$$

Предложение доказано. \square

Рассмотрим пример «реальной» постановки обратной задачи (0.1), (0.2), т. е. задачи о поиске существенно различных функций $f = f_j \in \mathcal{F}$, для которых имеются функции $u = u_{f_j}$, удовлетворяющие, во-первых, уравнению

$$\Delta u(x, y) = f(u(x, y)) \geq 0$$

в области $\omega = \omega_h$, состоящей из двух непересекающихся дисков D^R и D^ρ радиусов $R = 1$ и $\rho = 1/2$, соединенных очень узкой короткой перемычкой¹, и,

во-вторых, граничным условиям

$$u|_{\gamma=\partial\omega} = 0 \quad \text{и} \quad \max_{s \in \gamma_1 \subset \gamma} \left| \frac{\partial u(s)}{\partial \nu} - \Psi(s) \right| \leq \eta \ll 1,$$

где Ψ — заданная фиксированная функция, $\gamma_1 = \partial D_1^R \cup \partial D_1^\rho$, а

$$\partial D_1^R = \{s \in \partial D^R \mid |\theta| < \theta_1 < \pi\} \quad \text{и} \quad \partial D_1^\rho = \{s \in \partial D^\rho \mid |\theta| < \theta_1 < \pi\} —$$

это (см. рис. 1) те части границы γ области ω_h , которые несколько отдалены от перемычки, т. е. от тех точек, в которых кривизна кривой $\gamma = \partial\omega_h$ чрезмерно велика.

Зададим следующим образом функцию

$$\Psi(s) = \begin{cases} 1 & \text{при } s \in D_1^R, \\ \Psi \stackrel{(3.38)}{=} \Psi_a \stackrel{\text{def}}{=} \frac{I_1(\sqrt{a}/2)I_0(\sqrt{a})}{I_0(\sqrt{a}/2)I_1(\sqrt{a})} & \text{при } s \in D_1^\rho. \end{cases} \quad (3.39)$$

Как следует из предыдущих построений и формул (3.34) для коэффициентов $b = b(a)$, $\lambda = \lambda(a)$ и $\mu = \mu(a)$, определяющих функции

$$f_1: \mathbb{R} \ni u \mapsto f_1(u) = au + b, \quad f_2: \mathbb{R} \ni u \mapsto f_2(u) = \frac{\lambda e^{2\mu u}}{\mu},$$

в этих условиях и при достаточно малой ширине перемычки h , функции $f_1 \in \mathcal{F}_{\text{aff}}$ и $f_2 \in \mathcal{F}_{\text{exp}}$ являются существенно различными (см. (0.4)) в смысле такого оцениваемого (экспертами) коэффициента «различия»:

$$\mathcal{E}_{L^p}(u_{f_1}, u_{f_2}) = \frac{2 \|f_1(u_{f_1}) - f_2(u_{f_2})\|_{L^p}}{\|f_1(u_{f_1})\|_{L^p} + \|f_2(u_{f_2})\|_{L^p}}.$$

¹Это означает, что «материковая» часть этой области, представленной на рис. 1, сводится к этой перемычке.

А именно при достаточно малом $h > 0$

если $a = 10$, то

$$\begin{aligned} \Psi_a &\approx 0,75, & \mathcal{E}_{L^2} &\approx 0,03, & \mathcal{E}_{L^\infty} &\approx 0,1, \\ b &\approx 3,85, & \lambda &\approx 9,74, & \mu &\approx 2,28, \end{aligned}$$

при этом полный ток $I \approx 8,64$;

если $a = 10^2$, то

$$\begin{aligned} \Psi_a &\approx 0,94, & \mathcal{E}_{L^2} &\approx 0,14, & \mathcal{E}_{L^\infty} &\approx 0,5, \\ b &\approx 10,5, & \lambda &\approx 276, & \mu &\approx 15,6, \end{aligned}$$

при этом полный ток $I \approx 9,2$.

Представление о функциях u_{f_1} , u_{f_2} , $f_1(u_{f_1})$, $f_2(u_{f_2})$ дают их «предельные» (при $h \rightarrow 0$) графики, изображенные (для $a = 10$ и $a = 10^2$) на рис. 2.

§ 4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3.1

Благодаря неравенству (3.18) для доказательства леммы 3.1 достаточно показать, что для любого $t > 0$ (в частности, для $t \stackrel{(3.18)}{=} C/2$) существует такое $h^* > 0$, что

$$|\dot{\varkappa}(a) - \dot{\varkappa}_0(a)| \leq \frac{t}{1+a^2} \text{ при } h \leq \frac{h^*}{2} \text{ и } a \geq -\lambda_1(\omega_{h^*}) > -\lambda_1(\omega_h). \quad (4.1)$$

Имеем $\varkappa = \delta_R/\delta_\rho$, $\varkappa_0 = d_R/d_\rho$, где

$$\delta_R = \left. \frac{\partial v_a}{\partial \nu} \right|_{s=s_R}, \quad \delta_\rho = \left. \frac{\partial v_a}{\partial \nu} \right|_{s=s_\rho}, \quad d_R = \left. \frac{dv_a^R}{dr} \right|_{r=R}, \quad d_\rho = \left. \frac{dv_a^\rho}{dr} \right|_{r=\rho}.$$

Поэтому

$$\dot{\varkappa} = \frac{\dot{\delta}_R \delta_\rho - \delta_R \dot{\delta}_\rho}{\delta_\rho^2}, \quad \dot{\varkappa}_0 = \frac{\dot{d}_R d_\rho - d_R \dot{d}_\rho}{d_\rho^2}. \quad (4.2)$$

Полагая $\varepsilon_R \stackrel{\text{def}}{=} \delta_R - d_R$, $\varepsilon_\rho \stackrel{\text{def}}{=} \delta_\rho - d_\rho$, получаем

$$\begin{aligned} \dot{\varkappa} - \dot{\varkappa}_0 &= \frac{\dot{\varepsilon}_R d_\rho - \dot{\varepsilon}_\rho d_R}{d_\rho^2} + \frac{\varepsilon_\rho \dot{d}_R - \varepsilon_R \dot{d}_\rho}{d_\rho^2} + \frac{\dot{\varepsilon}_R \varepsilon_\rho - \varepsilon_R \dot{\varepsilon}_\rho}{d_\rho^2} - \\ &\quad - \varepsilon_\rho \frac{d_\rho + \delta_\rho}{d_\rho^2 \delta_\rho^2} [\dot{\delta}_R \delta_\rho - \delta_R \dot{\delta}_\rho]. \end{aligned} \quad (4.3)$$

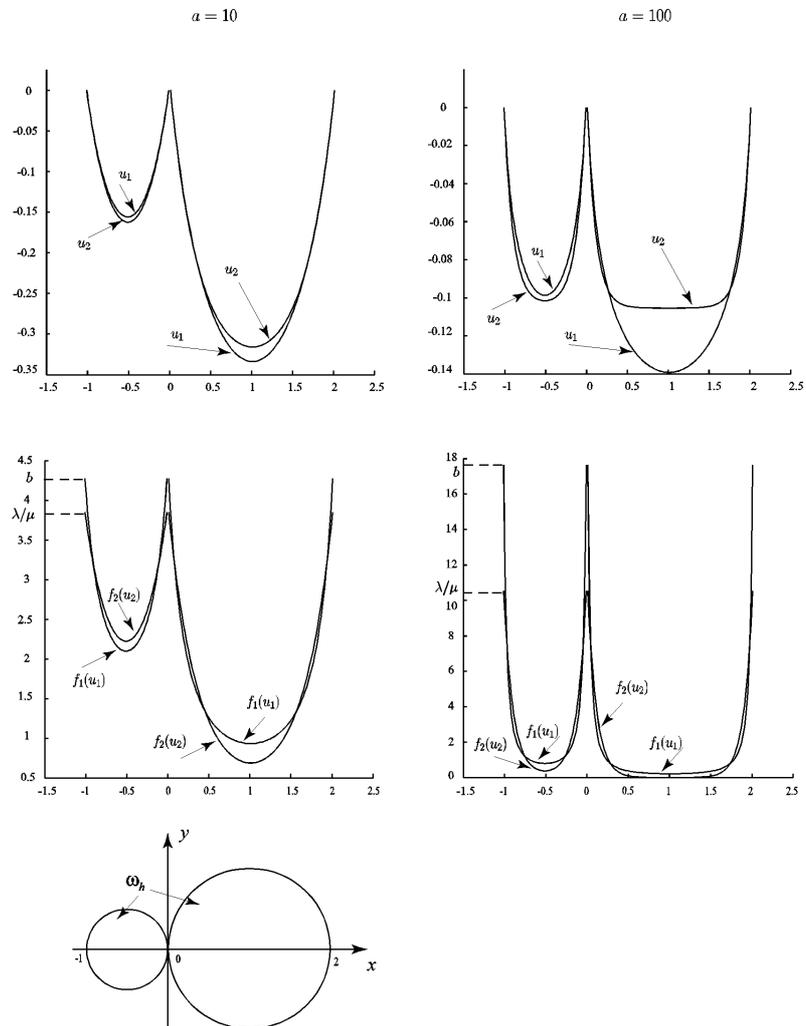


Рис. 2. Графики функций $x \mapsto u_k(x, 0)$, $x \mapsto f_k(u_k(x, 0))$ при $a = 10$ и $a = 100$ в предельной при $h \rightarrow 0$ области ω_h , состоящей из двух дисков радиусов $1/2$ и 1 . Соединяющая их «перемычка» в пределе стягивается в некоторую кривую (состоящую не более чем из двух отрезков), которая на рисунке заменена началом координат

Функция d_R явно выражается через функции Бесселя индексов 0 и 1:

$$J_0(x) = \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}, \quad I_0(x) = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{(k!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}, \quad (4.4)$$

$$J_1(x) = \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{k!(k+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+1} = -J'_0(x), \quad (4.5)$$

$$I_1(x) = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!(k+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+1} = I'_0(x).$$

Имеем

$$d_R(a) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{|a|}} \frac{J_1(R\sqrt{|a|})}{J_0(R\sqrt{|a|})} & \text{при } -\left(\frac{\mu_1}{R}\right)^2 < a < 0, \\ \frac{R}{2} & \text{при } a = 0, \\ \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{I_1(R\sqrt{a})}{I_0(R\sqrt{a})} & \text{при } a > 0, \end{cases} \quad (4.6)$$

где $\mu_1 = 2,4048\dots$ — наименьший положительный корень функции J_0 .

Отметим, что $\lambda_1(D^R) = (\mu_1/R)^2$. Согласно известным асимптотикам функций Бесселя и их производных (см., например, [15])

$$d_R(a) \sim a^{-1/2}, \quad \dot{d}_R(a) \sim -\frac{1}{2}a^{-3/2} \quad \text{при } a \rightarrow +\infty. \quad (4.7)$$

Поэтому, учитывая гладкость и положительность функции

$$a \mapsto d(a) \stackrel{\text{def}}{=} d_r(a)$$

($r = R$ или $r = \rho$), а также включение $D^r \not\subseteq \omega_h$, влекущее неравенство $\lambda_1(D^r) > \lambda_1(\omega_h)$, заключаем, что существуют такие положительные величины C_1 и C_2 , зависящие лишь от R, ρ и $\delta\lambda_h \stackrel{\text{def}}{=} \lambda_1(D^R) - \lambda_1(\omega_h) > 0$, что

$$C_1 \leq d(a)(1 + a_+^{1/2}) \leq C_2, \quad |\dot{d}(a)| \leq \frac{C_2}{1 + a_+^{3/2}} \quad \text{при } a \geq -\lambda_1(\omega_h) = -\lambda_1(D^R) + \delta\lambda_h, \quad (4.8)$$

где $a_+ = \max(0, a)$. Отсюда и из (4.3) получаем, что лемма 3.2 будет доказана, если установить, что для некоторого числа $C_3 = C_3(C_1, C_2) > 1$ и любого $t > 0$ найдется такое $h^* > 0$, что

$$C_3 \left| \frac{\dot{\varepsilon}(a)}{d(a)} \right| \leq \frac{t}{1 + a_+^2}, \quad C_3 \left| \varepsilon(a) \frac{\dot{d}(a)}{d^2(a)} \right| \leq \frac{t}{1 + a_+^2} \quad \text{при любом } h \leq \frac{h^*}{2} \text{ и } a \geq -\lambda_1(\omega_{h^*}), \quad (4.9)$$

где $\varepsilon = \varepsilon_R$ или $\varepsilon = \varepsilon_\rho$. Для доказательства оценок (4.9) достаточно (в силу (4.8)) показать, что для некоторого числа $C_4 = C_4(C_1, C_2) > 1$ и любого $t > 0$ найдется такое $h^* > 0$, что

$$C_4|\varepsilon(a)| \leq \frac{t}{1+a_+^{1/2}}, \quad C_4|\dot{\varepsilon}(a)| \leq \frac{t}{1+a_+^2}$$

при любом $h \leq \frac{h^*}{2}$ и $a \geq -\lambda_1(\omega_{h^*})$. (4.10)

Ясно, что достаточно установить оценки (4.10) лишь для $\varepsilon = \varepsilon_R$. Заметим, что

$$\varepsilon_R = \left. \frac{\partial w}{\partial r} \right|_{s=s_R}, \quad \dot{\varepsilon}_R = \left. \frac{\partial \dot{w}}{\partial r} \right|_{s=s_R}, \quad \text{где } w = (v_a - v_a^R)|_{D=D^R}. \quad (4.11)$$

При этом

$$\Delta w - aw = 0 \quad \text{в } D = D^R, \quad w|_{\partial D \setminus \Gamma_h} = 0, \quad w|_{\Gamma_h} = v_a|_{\Gamma_h}, \quad (4.12)$$

$$\Delta \dot{w} - a\dot{w} = w \quad \text{в } D = D^R, \quad \dot{w}|_{\partial D \setminus \Gamma_h} = 0, \quad \dot{w}|_{\Gamma_h} = \dot{v}_a|_{\Gamma_h}, \quad (4.13)$$

где

$$\Gamma_h = \partial D \cap \omega_h, \quad (4.14)$$

а \dot{v}_a есть решение задачи

$$\Delta \dot{v}_a - a\dot{v}_a = v_a \quad \text{в } \omega, \quad \dot{v}_a|_{\Gamma} = 0. \quad (4.15)$$

Чуть ниже доказывается следующая лемма.

ЛЕММА 4.1. Для любого $\alpha > 0$ существует такое $h^* > 0$, что

$$\max_{\Gamma_h} |v_a|_{\Gamma_h} \leq \alpha, \quad \max_{\Gamma_h} |\dot{v}_a|_{\Gamma_h} \leq \alpha$$

при любом $h \leq \hat{h} = \frac{h^*}{2}$ и $a \geq -\lambda_1(\omega_{h^*})$. (4.16)

Покажем, что эта лемма позволяет установить оценки (4.10) и потому завершить доказательство леммы 3.1. В самом деле, в точке $z = (x, y) \in \omega$ согласно формуле Грина имеем

$$w(z) = \int_{s \in \Gamma_h} v_a(s) \frac{\partial}{\partial \nu_s} G_a(z-s) ds,$$

$$\dot{w}(z) = \int_{s \in \Gamma_h} \dot{v}_a(s) \frac{\partial}{\partial \nu_s} G_a(z-s) ds + \iint_{\zeta \in D^R} w(\zeta) G_a(z-\zeta) d\zeta, \quad (4.17)$$

где функция Грина $z = (x, y) \mapsto G_a(z)$ определяется как решение задачи

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - a \right) G_a(z) \Big|_{z=(x,y) \in \omega} = \delta(x, y), \quad G_a(z)|_{z \in \partial\omega} = 0.$$

Известно (см., например, [15]), что эта функция Грина и ее производные экспоненциально убывают при $a \rightarrow \infty$, точнее, имеют место оценки

$$|\partial_x^k \partial_y^l G_a(x, y)| \leq C_{kl} \exp(-C(r_0)\sqrt{a})$$

при $a \rightarrow \infty$ и $|z| \geq r_0 > 0$, (4.18)

где $C_{kl} > 0$ и $C(r_0) > 0$ — некоторые константы. Кроме того, очевидно, что при $|z| \geq r_0$ существует такая константа $C^*(r_0) > 0$, что $|G_a(z)| \leq C^*(r_0)$. Поэтому оценки (4.10) следуют из формул (4.17).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 4.1. Прежде всего отметим, что

$$\tau \stackrel{\text{def}}{=} \lambda_1(\omega_{\hat{h}}) - \lambda_1(\omega_{h^*}) > 0, \quad \text{так как } \omega_{\hat{h}} \subsetneq \omega_{h^*}. \quad (4.19)$$

Поэтому существует такое число $C_\tau > 0$, что

$$|v_a| \leq C_\tau \leq \infty \quad \text{при } a \geq -\lambda_1(\omega_{h^*}) \text{ и } h \in (0, \hat{h}]. \quad (4.20)$$

Рассмотрим далее две подобласти: $D = D^R$ и $\omega_h \setminus D$. В каждой из этих подобластей, так же как и в области ω_h , обе функции v_a и \dot{v}_a удовлетворяют уравнению $\Delta\psi - a\psi = g$, где $g \stackrel{(3.11)}{=} 1$ для $\psi = v_a$ и $g \stackrel{(4.15)}{=} v_a \stackrel{(4.20)}{\in} [-C_\tau, C_\tau]$ для $\psi = \dot{v}_a$. Тем самым существует такая константа $K_\tau > 0$, что

$$|\psi| \leq K_\tau \leq \infty \quad \text{при } a \geq -\lambda_1(\omega_{h^*}) \text{ и } h \in (0, \hat{h}].$$

При этом на границе подобластей D и $\omega_h \setminus D$ функция ψ всюду равна нулю, кроме кривой Γ_h .

Покажем теперь, что импликация

$$\left(\exists \alpha > 0 \forall h^* > 0 \exists h \leq \hat{h} = \frac{h^*}{2} \exists a \geq -\lambda_1(\omega_{h^*}) \right) \implies \max_{\Gamma_h} |\psi|_{\Gamma_h} > \alpha \quad (4.21)$$

приводит к абсурду. Согласно сделанному предположению, на некоторой дуге $\Gamma_* \subset \Gamma_h$ имеем $|\psi| > \alpha/2$ при любом сколь угодно малом

$h^* > 0$. При этом $\psi = 0$ на $\partial\omega_h$. Поэтому в некоторой точке $z_* \in \Gamma_*$ производная функции $\psi|_{\omega_h \setminus D}$ по направлению внешней (относительно $\omega_h \setminus D$) нормали к Γ_* при $h_* \rightarrow 0$ стремится к $-\infty$ (если $\psi(z_*) < 0$) или к $+\infty$ (если $\psi(z_*) > 0$). Эта производная должна совпадать (в той же точке $z_* \in \Gamma_*$) с нормальной производной функции $\psi|_D$ по направлению внутренней (относительно D) нормали к Γ_* . Но при любом h^* эта производная ограничена снизу при $\psi(z_*) < 0$, а при $\psi(z_*) > 0$ она ограничена сверху (поскольку $\psi|_{\partial D \setminus \Gamma_h} = 0$). Полученное противоречие доказывает лемму 4.1, а тем самым и лемму 3.1. \square

§ 5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО НЕРАВЕНСТВА (3.18)

Рассмотрим логарифмические производные функций Бесселя (см. (4.4), (4.5))

$$F(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{I_1(x)}{I_0(x)} \quad \text{для } x > 0, \quad \Phi(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{J_1(x)}{J_0(x)} \quad \text{для } x \in (0, \mu_1), \quad (5.1)$$

где $\mu_1 = 2,4048\dots$ — наименьший положительный нуль J_0 .

ЛЕММА 5.1. При любых $q > 1$ и $x \in (0, \mu_1/q)$ справедливо неравенство

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\Phi(qx)}{\Phi(x)} \right) \geq \frac{(q-1)x}{8}. \quad (5.2)$$

ЛЕММА 5.2. При любых $q > 1$ и $x > 0$ верно неравенство

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{F(qx)}{F(x)} \right) \leq -\frac{(q-1)x}{9q^3(1+x^4)}. \quad (5.3)$$

Выведем неравенство (3.18) из лемм 5.1 и 5.2¹. Заметим, что

$$\varkappa_0(a) \stackrel{(3.5)}{=} \begin{cases} \frac{\Phi(R\sqrt{|a|})}{\Phi(\rho\sqrt{|a|})} & \text{при } a < 0, \\ \frac{R}{\rho} & \text{при } a = 0, \\ \frac{F(R\sqrt{a})}{F(\rho\sqrt{a})} & \text{при } a \geq 0. \end{cases} \quad (5.4)$$

¹Учитывая, что $\varkappa_0(0) \stackrel{(3.17)}{=} -\frac{R}{\rho} \frac{R^2 - \rho^2}{8}$, нужно доказать неравенство (3.18) лишь для $a \neq 0$.

Пусть $x = \rho\sqrt{|a|}$, а $q = R/\rho$. Применяя леммы 5.1 и 5.2, получаем, что для любого $a < 0$

$$\begin{aligned} \dot{z}_0(a) &= -\frac{\rho}{2\sqrt{|a|}} \frac{d}{dx} \left(\frac{\Phi(qx)}{\Phi(x)} \right) \stackrel{(5.2)}{\leq} \\ &\leq -\frac{(q-1)x}{8} = -\frac{\rho^2(q-1)}{16} \leq -\frac{C^-}{1+a^2}, \end{aligned} \quad (5.5)$$

где $C^- = \rho(R - \rho)/16$, а для $a > 0$

$$\begin{aligned} \dot{z}_0(a) &= \frac{\rho}{2\sqrt{a}} \frac{d}{dx} \left(\frac{F(qx)}{F(x)} \right) \stackrel{(5.3)}{\leq} -\frac{\rho}{2\sqrt{a}} \frac{(q-1)x}{9q^3(1+x^4)} = \\ &= -\frac{(q-1)\rho^2}{18q^3(1+\rho^4a^2)} \leq -\frac{C^+}{1+a^2}, \end{aligned} \quad (5.6)$$

где $C^+ = \min(1, \rho^4)(R - \rho)/(18R^3)$.

В нижеследующих доказательствах лемм 5.1 и 5.2 используются формулы¹

$$x \frac{dF(x)}{dx} = x(1 - F^2(x)) - F(x), \quad x \frac{d\Phi(x)}{dx} = x(1 + \Phi^2(x)) - \Phi(x), \quad (5.7)$$

а также следствие теоремы Лагранжа о приращениях дифференцируемой функции $\Psi \neq 0$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\frac{\Psi(qx)}{\Psi(x)} \right) &= \frac{\Psi(qx)}{\Psi(x)} \left(\frac{\psi(qx) - \psi(x)}{x} \right) = \frac{\Psi(qx)}{\Psi(x)} (q-1)\psi'(\xi), \\ \text{где } \psi(x) &= \frac{x\Psi'(x)}{\Psi(x)}, \quad \text{а } \xi \in (x, qx). \end{aligned} \quad (5.8)$$

Доказательство леммы 5.1. Убедимся сначала, что

$$x + \frac{x^3}{8} < 2\Phi(x) \quad \text{при } 0 < x < \mu_1 \quad \text{и} \quad \Phi(x) \leq x \quad \text{при } 0 < x \leq \sqrt{2}. \quad (5.9)$$

Воспользуемся тем, что степенные ряды для J_0 и J_1 (см. (4.4), (4.5)) являются обертывающими [12] для этих функций при любом $x \in \mathbb{R}$. В частности, для любого $x > 0$ верны оценки

$$\begin{aligned} 1 - \frac{x^2}{4} \leq J_0(x) \leq 1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64} &\equiv \left(1 - \frac{x^2}{8}\right)^2, \\ \frac{x}{2} - \frac{x^3}{16} \leq J_1(x) \leq \frac{x}{2}. \end{aligned} \quad (5.10)$$

¹Формулы (5.7) получаются непосредственным дифференцированием функций F и Φ с использованием известных соотношений $I_1'(x) = I_0(x) - (1/x)I_1(x)$ и $J_1'(x) = J_0(x) - (1/x)J_1(x)$. Напомним также, что $I_1(x) = I_0'(x)$, а $J_1(x) = -J_0'(x)$.

Поэтому в области положительности функций J_0 , J_1 и оценивающих их многочленов справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \frac{J_1(x)}{J_0(x)} &\leq \frac{x/2}{1-x^2/4} \text{ для } 0 < x \leq 2, \\ \frac{x/2 - x^3/16}{(1-x^2/8)^2} &\leq \frac{J_1(x)}{J_0(x)} \leq \frac{x}{2} \text{ для } 0 < x < \mu_1. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Первое из этих неравенств дает оценку сверху в (5.9), так как $1 - x^2/4 \geq 1/2$ при $0 < x \leq \sqrt{2}$. Второе неравенство в (5.11) приводит к оценке снизу в (5.9), поскольку

$$\frac{x/2 - x^3/16}{(1-x^2/8)^2} = \frac{x/2}{1-x^2/8} > \frac{x}{2} \left(1 + \frac{x^2}{8}\right). \quad (5.12)$$

Оценим теперь производную функции $\varphi(x) = \frac{x\Phi'(x)}{\Phi(x)}$. Из (5.7) следуют такие соотношения для производной функции $f(x) = xF'(x)/F(x)$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= F^{-2}(x)(2F(x) + xF^4(x) - x), \\ \varphi'(x) &= \Phi^{-2}(x)(2\Phi(x) + x\Phi^4(x) - x), \end{aligned} \quad (5.13)$$

а из первого неравенства (5.9) вытекает

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &> \Phi^{-2}(x) \left(\frac{x^3}{8} + x\Phi^4(x) \right) = x \left[\Phi^2(x) + \frac{(x/\Phi(x))^2}{8} \right] \\ &\text{при } 0 < x < \mu_1. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Кроме того, из (5.9) следует

$$\frac{x}{\Phi(x)} \geq 1 \text{ при } 0 < x \leq \sqrt{2}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \leq \frac{x}{2} < \Phi(x) \text{ при } \sqrt{2} \leq x < \mu_1.$$

Отсюда и из (5.14) вытекает

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &> \frac{x}{8} \text{ при } 0 < x \leq \sqrt{2}, \\ \varphi'(x) &> x\Phi^2(x) > \frac{x}{2} \text{ при } \sqrt{2} \leq x < \mu_1, \end{aligned} \quad (5.15)$$

что влечет лемму 5.1, ибо

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\Phi(qx)}{\Phi(x)} \right) \stackrel{(5.8)}{\geq} \frac{\Phi(qx)}{\Phi(x)} (q-1) \left(\min_{0 < x < \mu_1} \Phi'(x) \right) \stackrel{(5.15)}{\geq} \frac{\Phi(qx)}{\Phi(x)} \frac{(q-1)x}{8}. \quad (5.16)$$

Осталось показать, что $\Phi(qx)/\Phi(x) \geq 1$. Это так, поскольку $q > 1$, а $\Phi'(x) > 0$. Последнее верно, потому что

$$\Phi'(x) \stackrel{(5.7)}{=} \Phi^2(x) + \left(1 - \frac{\Phi(x)}{x}\right) \stackrel{(5.9)}{\geq} \Phi^2(x) > 0 \quad \text{при } 0 < x \leq \sqrt{2}, \quad (5.17)$$

а если $\sqrt{2} < x < \mu_1$, то $\Phi(x)/x < \Phi(x)/\sqrt{2}$ и поэтому

$$\begin{aligned} \Phi'(x) &\stackrel{(5.7)}{=} 1 + \Phi^2(x) - \frac{\Phi(x)}{x} > 1 + \Phi^2(x) - \frac{\Phi(x)}{\sqrt{2}} = \\ &= (1 - \Phi(x))^2 + \left(2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \Phi(x) > \Phi(x). \quad \square \end{aligned}$$

Доказательство леммы 5.2 опирается на следующее неравенство¹ для функции $I \stackrel{\text{def}}{=} I_0$:

$$I(x)I''(x) - I'^2(x) > \frac{1}{2x^2}I^2(x), \quad \text{если } x \geq \sqrt{2}. \quad (5.18)$$

Учитывая тождество $I''(x) = I(x) - I'(x)/x$ и формулы (5.1), перепишем неравенство (5.18) в форме

$$F^2(x) < 1 - \frac{1}{x}F(x) - \frac{1}{2x^2}, \quad \text{если } x \geq \sqrt{2}. \quad (5.19)$$

Отсюда

$$F(x) < 1, \quad F^4(x) \stackrel{(5.19)}{<} 1 + \frac{1}{x^2}F^2(x) + \frac{1}{4x^4} - \frac{2}{x}F(x) - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}F(x), \quad (5.20)$$

и потому при $x \geq \sqrt{2}$

$$\begin{aligned} 2F(x) + xF^4(x) - x &\stackrel{(5.20)}{<} \frac{1}{x}F^2(x) + \frac{1}{4x^3} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}F(x) = \\ &= \frac{1}{x}(F^2(x) - 1 + F(x)/x) + \frac{1}{4x^3} \stackrel{(5.19)}{<} -\frac{1}{4x^3}. \end{aligned} \quad (5.21)$$

¹Доказательство неравенства (5.18) приводится в заключительной (основной) части этого параграфа. Отметим, что известные асимптотики функции I и ее производных позволяют показать, что

$$\begin{aligned} I(x)I''(x) - I'^2(x) &= \frac{2e^y}{\pi y^3} \left(1 + \frac{3}{2y} + O\left(\frac{1}{y^2}\right)\right), \\ \frac{I^2(x)}{2x^2} &= \frac{2e^y}{\pi y^3} \left(1 + \frac{1}{2y} + O\left(\frac{1}{y^2}\right)\right) \quad \text{при } y = 2x \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что неравенство (5.18) выполняется при всех достаточно больших x . Основная трудность в том, чтобы доказать справедливость этого неравенства при всех $x \geq \sqrt{2}$. Ограничение $x \geq \sqrt{2}$ не случайно: уже при $x = 1$ верно противоположное неравенство $I(1)I''(1) - I'^2(1) < I^2(1)/2$.

Тем самым для производной функции $f(x) = xF'(x)/F(x)$ имеем

$$\begin{aligned} f'(x) &\stackrel{(5.13)}{=} F^{-2}(x)(2F(x) + xF^4(x) - x) \stackrel{(5.21)}{<} \\ &< -F^{-2}(x)\frac{1}{4x^3} \stackrel{(5.20)}{<} -\frac{1}{4x^3} \text{ при } x \geq \sqrt{2}. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Оценим теперь $f'(x)$ при $x \in (0, \sqrt{2})$, используя неравенство

$$F(x) \leq x(x^2 + 4)^{-1/2} \quad \forall x > 0$$

(см. [11, с. 429]). В силу этого неравенства имеем

$$\begin{aligned} f'(x) &\stackrel{(5.13)}{\leq} F^{-2}(x) \left(\frac{2x}{\sqrt{x^2+4}} + \frac{x^5}{(x^2+4)^2} - x \right) = \\ &= xF^{-2}(x) \frac{2(x^2+4)\sqrt{x^2+4} - 8x^2 - 16}{(x^2+4)^2}. \end{aligned}$$

Воспользовавшись тем, что $\sqrt{x^2+4} = 2\sqrt{1+x^2/4} \leq 2(1+x^2/8) = 2+x^2/4$, получим

$$f'(x) \leq 2xF^{-2}(x) \frac{(x^2+4)(2+x^2/4) - 4x^2 - 8}{(x^2+4)^2} = 2xF^{-2}(x) \frac{x^2/4 - 1}{(x^2+4)^2}.$$

Но $x^2/4 - 1 < -1/2$, а $(x^2+4)^2 < 36$, так как $x^2 < 1$. Поэтому, учитывая, что $x/F(x) \geq 2$ при $x > 0$, имеем

$$f'(x) < -\frac{x^3}{F^2(x)(x^2+4)^2} < -\frac{x^2}{F^2(x)} \frac{x}{36} \leq -\frac{x}{9} \text{ при } 0 < x < \sqrt{2}. \quad (5.23)$$

Формулы (5.22) и (5.23) влекут неравенство

$$f'(x) < -\frac{x}{9(1+x^4)} \text{ при } x > 0,$$

в силу которого

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\frac{F(qx)}{F(x)} \right) &\stackrel{(5.8)}{\leq} \frac{F(qx)}{F(x)} (q-1) \sup_{x < \xi < qx} f'(\xi) = \\ &= -\frac{F(qx)}{F(x)} (q-1) \inf_{x < \xi < qx} \left(\frac{\xi}{9(1+\xi^4)} \right). \end{aligned} \quad (5.24)$$

Функция $F(x) = I_1(x)/I_0(x)$, как нетрудно понять, возрастает при $x > 0$, и потому $F(x)/F(qx) \leq 1$. Кроме того,

$$\begin{aligned} \inf_{x < \xi < qx} \left(\frac{\xi}{9(1+\xi^4)} \right) &\leq -(q-1) \min \left(\frac{x}{9(1+x^4)}, \frac{qx}{9(1+qx^4)} \right) \leq \\ &\leq -\frac{q-1}{9q^3} \frac{x}{(1+x^4)}, \end{aligned}$$

и потому

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{F(qx)}{F(x)} \right) \stackrel{(5.24)}{\leq} -\frac{q-1}{9q^3} \frac{x}{(1+x^4)}. \quad (5.25)$$

Чтобы завершить доказательство леммы 5.2, остается проверить справедливость неравенства (5.18).

Доказательство неравенства (5.18). Покажем сначала, что функция $D(x) = I(x)I''(x) - I'^2(x)$ допускает интегральные представления

$$D(x) = \frac{2e^{2x}}{\pi^2} \int_0^1 \int_0^1 \frac{(\tau_1 - \tau_2)^2 e^{-2x(\tau_1 + \tau_2)} d\tau_1 d\tau_2}{\sqrt{\tau_1 \tau_2} \sqrt{1 - \tau_1} \sqrt{1 - \tau_2}}, \quad (5.26)$$

$$D(x) = \frac{1}{\pi^2} \int_0^1 \int_0^1 \frac{(t_1 + t_2)^2 \operatorname{ch}(x(t_1 - t_2)) + (t_1 - t_2)^2 \operatorname{ch}(x(t_1 + t_2))}{\sqrt{1 - t_1^2} \sqrt{1 - t_2^2}} dt_1 dt_2. \quad (5.27)$$

Воспользуемся тем, что

$$I(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{e^{xt} dt}{\sqrt{1 - t^2}} = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{\operatorname{ch}(xt) dt}{\sqrt{1 - t^2}} \quad (5.28)$$

(см., например, [11]) и потому

$$\begin{aligned} I'(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{te^{xt} dt}{\sqrt{1 - t^2}} = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{t \operatorname{sh}(xt) dt}{\sqrt{1 - t^2}}, \\ I''(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{t^2 e^{xt} dt}{\sqrt{1 - t^2}} = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{t^2 \operatorname{ch}(xt) dt}{\sqrt{1 - t^2}}. \end{aligned} \quad (5.29)$$

Из (5.28), (5.29) получаем

$$D(x) = \frac{1}{2\pi^2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{(t_1 - t_2)^2 e^{x(t_1 + t_2)}}{\sqrt{1 - t_1^2} \sqrt{1 - t_2^2}} dt_1 dt_2. \quad (5.30)$$

Отсюда

$$\begin{aligned}
 D(x) &= \frac{2}{\pi^2} \int_0^1 \int_0^1 \frac{(t_1^2 + t_2^2) \operatorname{ch}(xt_1) \operatorname{ch}(xt_2) - 2t_1 t_2 \operatorname{sh}(xt_1) \operatorname{sh}(xt_2)}{\sqrt{1-t_1^2} \sqrt{1-t_2^2}} dt_1 dt_2 = \\
 &= \frac{2}{\pi^2} \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{(t_1 - t_2)^2 \operatorname{ch}(xt_1) \operatorname{ch}(xt_2)}{\sqrt{1-t_1^2} \sqrt{1-t_2^2}} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{2t_1 t_2 (\operatorname{ch}(xt_1) \operatorname{ch}(xt_2) - \operatorname{sh}(xt_1) \operatorname{sh}(xt_2))}{\sqrt{1-t_1^2} \sqrt{1-t_2^2}} \right) dt_1 dt_2. \quad (5.31)
 \end{aligned}$$

Производя в интеграле (5.30) замену переменных $t_j = 1 - 2\tau_j$, придем к представлению (5.26), а поскольку

$$2 \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b = \operatorname{ch}(a+b) + \operatorname{ch}(a-b), \quad \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b - \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b = \operatorname{ch}(a-b),$$

то (5.31) влечет (5.27).

Из (5.27) следует, что при любом $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
 D^{(2n)}(0) &= \\
 &= \frac{1}{\pi^2} \int_0^1 \int_0^1 \frac{(t_1 + t_2)^2 (t_1 - t_2)^{2n} + (t_1 - t_2)^2 (t_1 + t_2)^{2n}}{\sqrt{1-t_1^2} \sqrt{1-t_2^2}} dt_1 dt_2 > 0. \quad (5.32)
 \end{aligned}$$

А так как $D(x) = I(x)I''(x) - I'^2(x)$ — четная целая функция, то из (5.32) заключаем, что эта функция разлагается в ряд Маклорена по четным степеням переменной x с положительными коэффициентами:

$$D(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad z = (x/2)^2, \quad a_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (5.33)$$

Учитывая (4.4), получаем

$$a_0 = \frac{1}{2}, \quad a_1 = \frac{1}{4}, \quad a_2 = \frac{1}{12}, \quad a_3 = \frac{5}{288}. \quad (5.34)$$

Из (5.33), (5.34) выводим неравенства

$$D(x) \geq \frac{1}{2} + \frac{z}{4} + \frac{z^2}{12} + \frac{5z^3}{288} \quad \forall z = \left(\frac{x}{2}\right)^2. \quad (5.35)$$

Сделаем еще один подготовительный шаг к доказательству неравенства (5.18). Оценим сверху $I(x)$ и $I^2(x)$ при $|x| \leq \sqrt{12}$ (т. е. при

$z \leq 3$). Заметим, что $n! \geq 2 \cdot 3^{n-2} \forall n \geq 2$. Поэтому при $z = (x/2)^2 \leq 3$

$$\begin{aligned} I(x) &\stackrel{(4.4)}{=} 1 + z + \sum_{n \geq 2} \frac{z^n}{(n!)^2} \geq 1 + z + \sum_{n \geq 2} \frac{z^2 \cdot 3^{n-2}}{(2 \cdot 3^{n-2})^2} = \\ &= 1 + z + \sum_{n \geq 2} 3^{2-n} = 1 + z + \frac{3z^2}{8}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$I^2(x) \leq 1 + 2z + \frac{7}{4}z^2 + \frac{3}{4}z^3 + \frac{z^4}{7} \quad \text{при } |x| \leq \sqrt{12}.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{2}x^{-2}I^2(x) = \frac{I^2(x)}{8z} \leq \frac{1}{8z} + \frac{1}{4} + \frac{7z}{32} + \frac{3z^2}{32} + \frac{z^3}{56} \quad \text{при } z = \left(\frac{x}{2}\right)^2 \leq 3. \quad (5.36)$$

Теперь уже нетрудно доказать неравенство (5.18) для $\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{12}$. Для этого достаточно убедиться, что правая часть неравенства (5.35) больше правой части неравенства (5.36), т. е.

$$\begin{aligned} &\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{8z}\right) + z\left(\frac{1}{4} - \frac{7}{32}\right) + z^2\left(\frac{1}{12} - \frac{3}{32}\right) + \\ &+ z^3\left(\frac{5}{288} - \frac{1}{56}\right) > 0 \quad \text{при } \frac{1}{2} \leq z \leq 3. \end{aligned} \quad (5.37)$$

Умножив обе части неравенства (5.37) на 32 и произведя несложные вычисления, получим равносильное неравенство

$$\left(8 - \frac{4}{z}\right) + z - \frac{z^2}{3} - \frac{z^3}{63} > 0 \quad \text{при } \frac{1}{2} \leq z \leq 3. \quad (5.38)$$

Если $1/2 \leq z \leq 1$, то $8 - 4/z \geq 0$ и

$$z - \frac{z^2}{3} - \frac{z^3}{63} \geq z\left(1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{63}\right) > \frac{z}{2} \geq \frac{1}{4}.$$

Потому неравенство (5.38) верно при $1/2 \leq z \leq 1$. Если $z \in [1, 3]$, то $z - z^2/3 \geq 0$, $8 - 4/z \geq 4$, и остается доказать, что $4 - z^3/63 > 0$ при $z \in [1, 3]$. Но это очевидно. Итак, неравенство (5.38) доказано, а потому доказано и неравенство (5.18) для $\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{12}$.

При $x > \sqrt{12}$ неравенство (5.18) следует из цепочки неравенств

$$I^2(x) < \frac{e^y}{\pi y} \left(1 + \frac{0,88}{y}\right) < \frac{e^y}{\pi y} \left(1 + \frac{1}{y}\right) < \frac{y^2}{2} D(x) \quad \text{при } y = 2x > \sqrt{48}. \quad (5.39)$$

Доказательство первого из них начнем с вывода оценки¹

$$I^2(x) < \frac{e^y}{\pi y} \left(1 + \frac{0,88}{y}\right) \quad \text{при } y = 2x > \sqrt{48}. \quad (5.40)$$

Сделаем в первой интегральной формуле (5.28) замену переменной $t = 1 - 2\tau$ и воспользовавшись неравенствами

$$\frac{1}{\sqrt{1-\tau}} < \begin{cases} 1 + \frac{\tau}{2} + \frac{\tau^2}{2\sqrt{1-\tau}} & \text{при } 0 < \tau \leq \frac{1}{2}, \\ 1 + \frac{\tau}{2} + \frac{\tau^2}{\sqrt{1-\tau}} & \text{при } \frac{1}{2} < \tau \leq 1, \end{cases}$$

получим

$$\begin{aligned} I(x) &= \frac{e^x}{\pi} \int_0^1 \frac{e^{-2\tau x}}{\sqrt{\tau - \tau^2}} d\tau < \\ &< \frac{e^x}{\pi} \left(\int_0^1 \frac{e^{-2\tau x}}{\sqrt{\tau}} \left(1 + \frac{\tau}{2}\right) d\tau + \int_0^{1/2} \frac{\tau^2 e^{-2\tau x}}{2\sqrt{\tau - \tau^2}} d\tau + \int_{1/2}^1 \frac{\tau^3 e^{-2\tau x}}{\tau\sqrt{\tau - \tau^2}} d\tau \right) < \\ &< \frac{e^x}{\pi} \left(\int_0^\infty \frac{e^{-2\tau x}}{\sqrt{\tau}} \left(1 + \frac{\tau}{2}\right) d\tau + \sup_{\tau > 0} (\tau^2 e^{-2\tau x}) \int_0^{1/2} \frac{1}{2\sqrt{\tau - \tau^2}} d\tau + \right. \\ &\quad \left. + \sup_{\tau > 0} (\tau^3 e^{-2\tau x}) \int_{1/2}^1 \frac{e^{-2\tau x}}{\tau\sqrt{\tau - \tau^2}} d\tau \right). \end{aligned}$$

¹За счет усложнения доказательства можно получить более точную оценку

$$I^2(x) < \frac{e^y}{\pi y} \left(1 + \frac{0,8}{y}\right).$$

Отметим, что при $y = 2x \rightarrow +\infty$ верна асимптотика

$$I^2(x) = \frac{e^y}{\pi y} \left(1 + \frac{1}{2y} + O\left(\frac{1}{y^2}\right)\right).$$

Отсюда, учитывая, что

$$\sup_{\tau>0}(\tau^k e^{-\tau y}) = k^k e^{-k} y^{-k}, \quad \int_0^{1/2} \frac{d\tau}{\sqrt{\tau-\tau^2}} = \frac{\pi}{2}, \quad \int_{1/2}^1 \frac{d\tau}{\tau\sqrt{\tau-\tau^2}} = 2,$$

$$\int_0^\infty \tau^{-1/2} e^{-\tau y} d\tau = \sqrt{\frac{\pi}{y}}, \quad \int_0^\infty \tau^{1/2} e^{-\tau y} d\tau = \frac{\sqrt{\pi}}{2y^{-3/2}},$$

получаем

$$I(x) < \frac{e^x}{\pi} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{y^{0,5}} + \frac{\sqrt{\pi}}{4y^{1,5}} + \frac{\pi}{y^2 e^2} + \frac{54}{y^3 e^3} \right) =$$

$$= \frac{e^x}{\sqrt{\pi y}} \left(1 + \frac{1}{4y} + \frac{\sqrt{\pi}}{e^2 y^{1,5}} + \frac{54}{\sqrt{\pi} y^{2,5} e^3} \right).$$

Имеем $\pi^{0,5} 48^{-0,25} e^{-2} < 0,0912$, $54\pi^{-0,5} e^{-3} 48^{-0,75} < 0,0832$. Поэтому

$$I(x) < \frac{e^x}{\sqrt{\pi y}} \left(1 + \frac{0,425}{y} \right) \quad \text{при } y = 2x \geq \sqrt{48}. \quad (5.41)$$

Отсюда следует требуемая оценка (5.39), так как

$$I^2(x) < \frac{e^y}{\pi y} \left(1 + \frac{0,85}{y} + \frac{0,425^2}{y^2} \right) < \frac{e^y}{\pi y} \left(1 + \frac{0,88}{y} \right) \quad \text{при } y \geq \sqrt{48}.$$

Осталось установить последнее из неравенств в (5.18). С этой целью заметим, что равенство (5.26) и неравенство $(1-\tau)^{-1/2} > 1+\tau/2$ влекут

$$D(x) >$$

$$> \frac{2e^y}{\pi^2} \int_0^1 \int_0^1 (\tau_1 \tau_2)^{-1/2} (\tau_1 - \tau_2)^2 \left(1 + \frac{\tau_1}{2} \right) \left(1 + \frac{\tau_2}{2} \right) e^{-y(\tau_1 + \tau_2)} d\tau_1 d\tau_2 >$$

$$> \frac{2e^y}{\pi^2} (A_1 + A_2), \quad (5.42)$$

где

$$A_1 = \int_0^1 \int_0^1 \frac{(\tau_1 - \tau_2)^2}{\sqrt{\tau_1 \tau_2}} e^{-y(\tau_1 + \tau_2)} d\tau_1 d\tau_2,$$

$$A_2 = \int_0^1 \int_0^1 \frac{(\tau_1 - \tau_2)^2}{\sqrt{\tau_1 \tau_2}} \left(\frac{\tau_1 + \tau_2}{2} \right) e^{-y(\tau_1 + \tau_2)} d\tau_1 d\tau_2.$$

Перепишем

$$A_1 = 2 \int_0^1 \int_0^1 (\tau_1^{3/2} \tau_2^{-1/2} - \tau_1^{1/2} \tau_2^{1/2}) e^{-y(\tau_1 + \tau_2)} d\tau_1 d\tau_2$$

в виде

$$\frac{1}{2} A_1 = \left(\int_0^1 \tau^{3/2} e^{-y\tau} d\tau \right) \left(\int_0^1 \tau^{-1/2} e^{-y\tau} d\tau \right) - \left(\int_0^1 \tau^{1/2} e^{-y\tau} d\tau \right)^2.$$

Отсюда, полагая

$$R_p(y) \stackrel{\text{def}}{=} y^p \int_1^\infty \tau^{p-1} e^{-y\tau} d\tau \equiv \int_y^\infty t^{p-1} e^{-t} dt, \quad p > 0, \quad (5.43)$$

получаем

$$A_1 = \left(\frac{\Gamma(2,5)}{y^{2,5}} - \frac{R(2,5)}{y^{2,5}} \right) \left(\frac{\Gamma(0,5)}{y^{0,5}} - \frac{R(0,5)}{y^{0,5}} \right) - \left(\frac{\Gamma(1,5)}{y^{1,5}} - \frac{R(1,5)}{y^{1,5}} \right)^2,$$

т. е.

$$A_1 = \frac{\Gamma(2,5)\Gamma(0,5) - 2\Gamma^2(2,5)}{y^3} - \frac{\Gamma(2,5)R_{0,5}(y) + \Gamma(0,5)R_{2,5}(y) - 2\Gamma(1,5)R_{1,5}(y)}{y^3} + r(y),$$

где

$$\begin{aligned} r(y) &= \frac{R_{2,5}(y)R_{0,5}(y) - R_{1,5}^2(y)}{y^3} = \\ &= \int_1^\infty \int_1^\infty (\tau_1 \tau_2)^{-1/2} (\tau_1 - \tau_2)^2 e^{-y(\tau_1 + \tau_2)} d\tau_1 d\tau_2 > 0. \end{aligned}$$

Поэтому

$$A_1 > \frac{\pi}{y^3} - \frac{2\sqrt{\pi}}{y^3} \left(R_{2,5}(y) + \frac{3}{4}R_{0,5}(y) - R_{1,5}(y) \right).$$

Отсюда, учитывая неравенство $R_{1,5}(y) \stackrel{(5.43)}{>} R_{0,5}(y)$, верное при любом $y \geq 1$, получаем

$$A_1 > \frac{\pi}{y^3} - \frac{2\sqrt{\pi}}{y^3} R_{2,5}(y) = \frac{\pi}{y^3} \left(1 - \frac{2R_{2,5}(y)}{\sqrt{\pi}} \right). \quad (5.44)$$

Оценим сверху $R_{2,5}(y)$ при $y \geq \sqrt{48}$. Имеем

$$R_{2,5}(y) = \int_y^{\infty} t^{1,5} e^{-t} dt \leq \int_y^{\infty} \frac{t^{2,5} e^{-t}}{y} dt \leq \frac{a(y)}{y}, \quad (5.45)$$

где

$$a(y) = \max_{t \geq y} (t^{2,5} e^{-t/2}) \int_y^{\infty} e^{-t/2} dt.$$

Но $y \geq 5$, поэтому $\max_{t \geq y} (t^{2,5} e^{-t/2}) = y^{2,5} e^{-y/2}$. Следовательно,

$$\begin{aligned} a(y) &\leq y^{2,5} e^{-y/2} \int_y^{\infty} e^{-t/2} dt = 2y^{2,5} e^{-y} \leq \\ &\leq 2 \max_{y \geq \sqrt{48}} y^{2,5} e^{-y} = 2 \cdot 48^{5/4} e^{-\sqrt{48}} = 96 \cdot 48^{1/4} e^{-\sqrt{48}} < 0,265. \end{aligned}$$

Отсюда и из (5.44), (5.45) заключаем, что

$$A_1 > \frac{\pi}{y^3} \left(1 - \frac{0,3}{y}\right) \quad \forall y \geq \sqrt{48}. \quad (5.46)$$

Оценим снизу A_2 . Имеем

$$\begin{aligned} A_2 &= \left(\int_0^1 \tau^{2,5} e^{-y\tau} d\tau \right) \left(\int_0^1 \tau^{-0,5} e^{-y\tau} d\tau \right) - \\ &- \left(\int_0^1 \tau^{1,5} e^{-y\tau} d\tau \right) \left(\int_0^1 \tau^{0,5} e^{-y\tau} d\tau \right). \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} A_2 &> \left(\frac{\Gamma(3,5)}{y^{3,5}} - \frac{R_{3,5}(y)}{y^{3,5}} \right) \left(\frac{\Gamma(0,5)}{y^{0,5}} - \frac{R_{0,5}(y)}{y^{0,5}} \right) - \frac{\Gamma(2,5)}{y^{2,5}} \frac{\Gamma(1,5)}{y^{1,5}} = \\ &= \frac{\Gamma(3,5)\Gamma(0,5)}{y^4} \left(1 - \frac{R_{3,5}(y)}{\Gamma(3,5)}\right) \left(1 - \frac{R_{0,5}(y)}{\Gamma(0,5)}\right) - \frac{\Gamma(2,5)\Gamma(1,5)}{y^4} = \\ &= \frac{1}{y^4} \left(\frac{15\pi}{8} (1 - \varepsilon_1)(1 - \varepsilon_2) - \frac{3\pi}{8} \right), \end{aligned}$$

где

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{\Gamma(3,5)} \int_y^\infty t^{2,5} e^{-t} dt, \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{\Gamma(0,5)} \int_y^\infty t^{-0,5} e^{-t} dt.$$

При $y \geq \sqrt{48}$ имеем

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{8}{15\sqrt{\pi}} \int_y^\infty t^{2,5} e^{-t} dt \leq \\ &\leq \frac{8}{15\sqrt{\pi}} \max_{t \geq y} (t^{2,5} e^{-t/2}) \int_y^\infty e^{-t/2} dt = \frac{8}{15\sqrt{\pi}} y^{2,5} e^{-y/2} \cdot 2e^{-y/2} = \\ &= \frac{16y^{2,5} e^{-y}}{15\sqrt{\pi}} \leq \frac{16 \cdot 48^{5/4} e^{-\sqrt{48}}}{15\sqrt{\pi}} = \frac{256 \cdot 48^{1/4} e^{-\sqrt{48}}}{5\sqrt{\pi}} = \\ &= 51,2 \cdot 48^{1/4} e^{-\sqrt{48}} \pi^{-0,5} < 0,08, \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_y^\infty t^{-0,5} e^{-t} dt < \frac{1}{\sqrt{\pi y}} \int_y^\infty e^{-t} dt = \frac{e^{-y}}{\sqrt{\pi y}} \leq \frac{e^{-\sqrt{48}}}{\sqrt{\pi}} 48^{-1/4} < 0,01. \end{aligned}$$

Следовательно, $A_2 > 1,3\pi y^{-4}$ при $y \geq \sqrt{48}$. Учитывая (5.46), имеем

$$A_1 + A_2 > \frac{\pi}{y^3} \left(1 + \frac{1}{y}\right) \quad \text{при } y > \sqrt{48},$$

что вместе с (5.42) доказывает последнее в (5.39) неравенство, а потому и неравенство (5.18). \square

§ 6. О РЕКОНСТРУКЦИИ ПО ГРАНИЧНЫМ ДАННЫМ ВСЕХ СУЩЕСТВЕННО РАЗЛИЧНЫХ НЕЛИНЕЙНОСТЕЙ В УРАВНЕНИЯХ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Изложенная в § 2 конструкция естественным образом распространяется:

1) на краевые задачи в области $\omega \subset \mathbb{R}^n$ для систем уравнений

$$\sum_{j=1}^J \sum_{|\alpha| \leq 2} \rho_{jk}(x) f_{jk\alpha} \left(\frac{\partial^{|\alpha|} \mathbf{u}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \right) = 0, \quad \mathbf{u} = (u_1, \dots, u_K), \quad (6.1)$$

эллиптического типа, в которых функции $f_{jk\alpha}$ для некоторых (или всех) индексов j, k, α являются искомыми, и на соответствующие системе (6.1);

- 2) на начально-краевые задачи в цилиндре $\omega \times (0, t_*)$ для систем эволюционных уравнений, таких, например, как система уравнений (0.5).

Реконструкция всех существенно различных искомым функций $f_{jk\alpha}$ по приближенным данным ∇u на границе γ области ω и соответственно на $\gamma \times (0, t_*)$ осуществляется по следующей схеме.

1. Выбирается компактное подмножество \mathcal{F} в некотором нормированном пространстве X искомым функций $f_{jk\alpha}$.
2. Берется (определяемый аналогично (2.30)) мультипараметр $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_K)$ с ненулевыми компонентами и осуществляется переход к факторизованной функции

$$\mathbf{v} = \sigma \mathbf{u} \stackrel{\text{def}}{=} (\sigma_1 u_1, \dots, \sigma_K u_K).$$

Если в качестве краевого условия фигурирует однородное условие Дирихле, то в случае рассмотрения краевой задачи для системы (6.1) функция \mathbf{v} есть решение однородной задачи Дирихле для системы уравнений

$$\sum_{j=1}^J \sum_{|\alpha| \leq 2} \rho_j(x) g_{jk\alpha} \left(\frac{\partial^{|\alpha|} \mathbf{v}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \right) = 0,$$

$$\text{где } g_{jk\alpha}(t_1, \dots, t_K) = f_{jk\alpha} \left(\frac{t_1}{\sigma_1}, \dots, \frac{t_K}{\sigma_K} \right).$$

Аналогичное утверждение справедливо в случае рассмотрения начально-краевой задачи. При этом

$$\left. \frac{\partial v_k}{\partial \nu} \right|_{\gamma} = \sigma_k \Phi_k, \quad \text{где } \Phi_k = \left. \frac{\partial u_k}{\partial \nu} \right|_{\gamma}.$$

3. Формулой

$$\varkappa_k \stackrel{\text{def}}{=} \left. \frac{\partial v_k}{\partial \nu} \right|_{s_R} / \left. \frac{\partial v_k}{\partial \nu} \right|_{s_\rho}$$

вводятся функции $\varkappa_1, \dots, \varkappa_K$, параметризованные точками $s_R \in \gamma$ и $s_\rho \in \gamma$. Устанавливаются леммы, аналогичные леммам 2.1–2.4, т. е. серии необходимых условий и критерии, характеризующие искомые нелинейности $f_{jk\alpha} \in \mathcal{F}$.

4. Осуществляется отсев тех функций $f_{jk\alpha} \in \mathcal{F}$, которые не удовлетворяют обозначенным необходимым условиям, и формируется множество $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}$ функций, им удовлетворяющих.
5. Из множества \mathcal{F}_0 выбираются все искомые существенно различные функции $f_{jk\alpha}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Андреев В. К., Капцов О. В., Пухначев В. В., Родионов А. А. Применение теоретико-групповых методов в гидродинамике. Новосибирск: Наука, 1994.
2. Безродных С. И., Власов В. И., Демидов А. С. Обратная задача для уравнения Грэда—Шафранова // Междунар. конф. «Современные проблемы математики, механики и их приложения», посвященная 70-летию ректора МГУ академика В. А. Садовниченко, Москва, 30 марта — 2 апреля 2009 г. Материалы конференции. М.: МГУ, 2009. С. 132.
3. Валиев А. Д., Демидов А. С. О неотрицательных тригонометрических полиномах с фиксированным средним, проходящих через заданные точки // Мат. заметки. 1997. Т. 62, № 3. С. 468—471.
4. Демидов А. С. Об обратной задаче для уравнения Грэда—Шафранова с аффинной правой частью // УМН. 2000. Т. 55, № 6. С. 131—132.
5. Демидов А. С. О реконструкции полиномиальных нелинейностей в уравнениях математической физики // Int. Conf. «Diff. Equations & Related Topics» dedicated to I. G. Petrovskii. Book of Abstracts. Moscow, 2007. P. 73—74.
6. Демидов А. С., Захаров Л. Е. Прямая и обратная задачи в теории равновесия плазмы // УМН. 1974. Т. 29, № 6. С. 203.
7. Дубинский Ю. А. Нелинейные эллиптические и параболические уравнения // Соврем. пробл. математики / ВИНТИ, 1976. Т. 9. С. 5—130. (Итоги науки и техники).
8. Зверев И. Н., Смирнов Н. Н. Газодинамика горения. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1987.
9. Колмогоров А. Н., Тихомиров В. М. ε -Энтропия и ε -емкость множеств в функциональных пространствах // УМН. 1959. Т. 14, № 2. С. 3—86.
10. Курант Р. Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1962.
11. Люк Ю. Специальные математические функции и их аппроксимации. М.: Мир, 1980.
12. Поля Г., Сеге Г. Задачи и теоремы из анализа. М.: ГИТТЛ, 1956.
13. Полянин А. Д., Зайцев В. Ф. Справочник по нелинейным уравнениям математической физики: точные решения. М.: Физматлит, 2002.
14. Тихомиров В. М. Некоторые вопросы теории приближений. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1976.

15. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972.
16. Beretta E., Vogelius M. An inverse problem originating from magnetohydrodynamics // Arch. Rational Mech. Anal. 1991. V. 115. P. 137–152.
17. Beretta E., Vogelius M. An inverse problem originating from magnetohydrodynamics. II. The case of the Grad–Shafranov equation // Indiana Univ. Math. J. 1992. V. 41. P. 1081–1118.
18. Beretta E., Vogelius M. An inverse problem originating from magnetohydrodynamics. III. Domains with corners of arbitrary angles // Asymptotic Anal. 1995. V. 11. P. 289–315.
19. Blum J., Buvat H. An inverse problem in plasma physics: The identification of the current density profile in a tokamak // Large-Scale Optimisation with Applications. Pt. I: Optimization in Inverse Problems and Design / Eds. L. T. Biegler, T. F. Coleman, A. R. Conn, F. N. Santosa. New York: Springer, 2002. (www.inria.fr/rapportsactivite/RA2002/idopt/bibliographie.html).
20. Demidov A. S. Sur la perturbation «singulière» dans un problème à frontière libre // Proc. Conf. «Singular Perturbations and Boundary Layer Theory» held in Lyon, 1976. Berlin: Springer, 1977. P. 123–130. (Lect. Notes Math. V. 594).
21. Demidov A. S., Moussaoui M. An inverse problem originating from magnetohydrodynamics // Inverse Problems. 2004. V. 20. P. 137–154.
22. Demidov A. S., Petrova V. V., Silantiev V. M. On inverse and direct free boundary problems in the theory of plasma equilibrium in a Tokamak // C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. I. 1996. V. 323. P. 353–358.
23. Pokhozhaev S. I. // Handbook of Differential Equations Station. Vol. 5 / Ed. M. Chipot. Amsterdam: Elsevier, 2008. P. 49–209.
24. Pustovitov V. D. Magnetic diagnostics: General principles and the problem of reconstruction of plasma current and pressure profiles in toroidal systems // Nuclear Fusion. 2001. V. 41, N 6. P. 721–730.
25. Pustovitov V. D. Theoretical principles of the plasma-equilibrium control in stellarators // Rev. Plasma Phys. 2001. V. 21. P. 1–201.
26. Suzuki Y., Yamada H., Nakajima N., Watanabe K., Nakamura Y., Hayashi T. Theoretical considerations of doublet-like configuration in LHD // Nuclear Fusion. 2006. V. 46. P. 123–132.
27. Vogelius M. An inverse problem for the equation $\Delta u = -cu - d$ // Ann. Inst. Fourier. 1994. V. 44. P. 1181–1209.
28. Zakharov L. E. The theory of variances of equilibrium reconstruction. 2007. (<http://w3.pppl.gov/~zakharov>).