А. Ю. Попов, А. П. Солодов, Оценки снизу положительных и отрицательных частей мер и расположение особенностей их преобразований Лапласа, *Матем. заметки*, 2007, том 82, выпуск 1, 84–98

DOI: http://dx.doi.org/10.4213/mzm3756

Математические заметки

Том 82 выпуск 1 июль 2007

УДК 517.442

Оценки снизу положительных и отрицательных частей мер и расположение особенностей их преобразований Лапласа

А. Ю. Попов, А. П. Солодов

Для действительнозначной меры с вариацией $V(x)$, допускающей оценку $V(x) \leqslant c_0 \exp(Cx)$, и преобразованием Лапласа, голоморфным в круге $\{|s-C| \leqslant C\}$ и имеющем хотя бы один полюс порядка m, получены оценки снизу для положительной и отрицательной части меры $V_\pm(x) > cx^m$, $x > x_0$. Установлены оценки снизу для $V_\pm(x)$ на "коротких" отрезках. Рассматриваются приложения полученных результатов в теории чисел.

Библиография: 11 названий.

1. Введение. Публикация посвящена изучению связи роста положительных и отрицательных частей действительнозначных мер на $\mathbb{R}_+$ и расположения особенностей в комплексной плоскости их преобразований Лапласа. Полученные оценки находят применение в аналитической теории чисел. Предполагается, что на $\mathbb{R}_+$ задана действительнозначная, вообще говоря не монотонная функция μ, имеющая на каждом отрезке $[0,x]$, $x > 0$, ограниченную вариацию $V(x)$, допускающую оценку

$$V(x) \leqslant c_0 \exp(Cx) \qquad \forall\, x > 0, \tag{1}$$

с некоторыми положительными постоянными c_0 и C. Положим

$$V_+(x) = \frac{V(x) + \mu(x)}{2}, \qquad V_-(x) = \frac{V(x) - \mu(x)}{2} \tag{2}$$

(для удобства считаем $\mu(0) = 0$). Известно [1; гл. 8, § 3], что V_+ и V_- являются неубывающими функциями и имеет место разложение функции μ

$$\mu(x) = V_+(x) - V_-(x) \tag{3}$$

в виде разности двух неубывающих функций. Это разложение не является единственным; возможны другие разложения: $\mu(x) = 2V_+(x) - V(x)$, $\mu(x) = V(x) -$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 06-01-00326, грант № 05-01-00192) и программы "Ведущие научные школы РФ" (грант № НШ-1657.2003.1).

$2V_-(x)$. Но мы отдадим предпочтение разложению (3), поскольку оно выглядит более естественным для абсолютно непрерывных мер. В этом случае

$$V_+(x) = \int_0^x (\mu'(t))^+ \, dt, \qquad V_-(x) = \int_0^x (\mu'(t))^- \, dt, \tag{4}$$

где, как обычно, $A^+ = \max(A, 0)$, $A^- = -\min(A, 0)$, $A = A^+ - A^-$, $A \in \mathbb{R}$.

Рассмотрим преобразование Лапласа меры $d\mu$:

$$F(s) = \int_0^\infty \exp(-st) \, d\mu(t). \tag{5}$$

Ввиду (1) интеграл (5) равномерно сходится в полуплоскостях $\operatorname{Re} s > C + \varepsilon$ $(\forall\, \varepsilon > 0)$ и, следовательно, представляет собой функцию, аналитическую в области $\operatorname{Re} s > C$. Через G_F обозначим в некотором смысле максимальную односвязную компоненту области голоморфности функции F, содержащую полуплоскость $\operatorname{Re} s > C$, называемую в литературе (см., например, [2; гл. 2, § 2]) звездой голоморфизма F и определяемую следующим образом. Для каждого $t \in \mathbb{R}$ через $p(t)$ обозначим точную нижнюю грань таких σ, что функция F допускает аналитическое продолжение в некоторую окрестность отрезка $[\sigma + it, C + it]$. Если таких σ не существует, то полагаем $p(t) = C$, а в случае аналитической продолжимости $F(s)$ в какую-либо область, содержащую всю прямую $\operatorname{Im} s = t$, имеем $p(t) = -\infty$. Звезда голоморфизма G_F задается равенством $G_F = \{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} s > p(\operatorname{Im} s)\}$, в нее $F(s)$ допускает однозначное аналитическое продолжение и каждая граничная точка G_F является для $F(s)$ особой.

Цель работы – получить, вообще говоря, неулучшаемые оценки снизу вариаций компонент разложения (3) меры $d\mu$ в случае, когда среди особенностей функции F имеются полюсы.

2. Пример меры, преобразование Лапласа которой имеет в $\mathbb{C}$ конечное число полюсов, лежащих на мнимой оси, а вариация меры экспоненциально растет на некоторой последовательности точек. Если мера $d\mu$ положительна, а функция $F(s)$ имеет в точке $s = 0$ степенную особенность $F(s) \sim As^{-\alpha}$ $(s \to +0)$, $\alpha > 0$, $A > 0$, то согласно тауберовой теореме Фрейда [3], [4; гл. 1, § 2] имеем $V(x) \sim Ax^\alpha / \Gamma(1 + \alpha)$. Этот результат показывает, что степенная особенность в точке $s = 0$ преобразования Лапласа положительной меры определяет порядок роста вариации этой меры, а другие особенности $F(s)$ (даже если они есть), существенного вклада в асимптотику $V(x)$ не вносят.

Возникает естественный вопрос. Остается ли справедливым заключение цитированной теоремы Фрейда (хотя бы при целых α и в более слабом виде $V(x) \asymp x^m$ при $x \to +\infty$), если снять условие положительности меры $d\mu$? Ответ отрицателен. Для знакопеременных мер аналоги подобного утверждения отсутствуют. Каково бы ни было конечное множество точек E на мнимой оси, симметричное относительно $\mathbb{R}$, существует действительнозначная мера, удовлетворяющая условию (1), преобразование Лапласа которой имеет полюсы в E, допускает аналитическое продолжение в $\mathbb{C} \setminus E$, а вариация этой меры на некоторой последовательности точек, стремящихся к $+\infty$, имеет экспоненциальный рост.

Теорема 1. *Для любого заданного конечного множества пар чисел* $\{(y_k, m_k)\}_{k=0}^N$, $N \in \mathbb{N}_0$, $0 = y_0 < y_1 < \dots < y_N$, $m_k \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant k \leqslant N$, $m_0 \in \mathbb{N}_0$, *а также для любого* $C > 0$ *найдется действительнозначная мера* $d\mu$ *на* $[0, \infty)$, *удовлетворяющая условию* (1) *такая, что для ее вариации* $V(x)$ *справедливы предельные соотношения*

$$\overline{\lim_{x\to+\infty}}\, V(x)e^{-Cx} > 0, \tag{6}$$

$$\underline{\lim_{x\to+\infty}}\, V(x)x^{-M} < +\infty, \qquad \text{где} \quad M = \max_{0\leqslant k\leqslant N} m_k, \tag{7}$$

а преобразование Лапласа (5) *меры* $d\mu$ *является мероморфной функцией в* $\mathbb{C}$ *и имеет полюсы в точках* $\pm iy_k$ *порядков* m_k *для всех* k *от* 0 *до* N *и не имеет никаких других особенностей.* (*Если* $m_0 = 0$, *то считается, что в точке* 0 *функция* $F(s)$ *аналитична.*)

Доказательство. Меру $d\mu$ получим в виде суммы мер $d\mu_0$, $d\mu_1$ и $d\mu_2$. Начнем с построения меры $d\mu_1$. Имеем

$$\int_0^{+\infty} t^{m-1}e^{-st}\,dt = \frac{(m-1)!}{s^m} \qquad \forall\, m \in \mathbb{N}. \tag{8}$$

Следовательно, при любых $\eta \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$ справедливо тождество, получающееся из (8) переходом от s к $s - i\eta$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}\, e^{i\eta t}e^{-st}\,dt = \frac{1}{(s-i\eta)^m}\,, \qquad \eta \in \mathbb{R}, \quad m \in \mathbb{N}. \tag{9}$$

Положим $\mu_1(x) \equiv 0$, если $N = 0$,

$$\mu_1(x) = \int_0^x \sum_{k=1}^N \frac{t^{m_k-1}}{(m_k-1)!}\cos(y_k t)\,dt, \qquad N \geqslant 1. \tag{10}$$

Из (9) и (10) видно, что преобразование Лапласа $F_1(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st}\,d\mu_1(t)$ имеет полюсы порядка m_k в точках $\pm iy_k$, $1 \leqslant k \leqslant N$, и не имеет в $\mathbb{C}$ никаких других особенностей. Обозначим также

$$\mu_0(x) = \frac{x^{m_0}}{m_0!}\,, \quad m_0 \in \mathbb{N}_0, \qquad F_0(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st}\,d\mu_0(t) = \begin{cases} 0, & m_0 = 0,\\ s^{-m_0}, & m_0 \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{11}$$

Построим меру $d\mu_2$. Зададим последовательность $\{\lambda_n\}$ рекуррентными соотношениями

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_{n+1} = \exp(\lambda_n^2), \;\; n \in \mathbb{N}, \qquad \varepsilon_n = 1/\lambda_{n+1}. \tag{12}$$

Возьмем произвольное положительное число C и положим

$$F_2(s) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{C\lambda_n}\bigl(e^{-\lambda_n s} - e^{-(\lambda_n+\varepsilon_n)s}\bigr). \tag{13}$$

Ряд экспонент (13) является преобразованием Лапласа дискретной меры $d\mu_2$, порожденной функцией, имеющей скачки в точках λ_n величины $e^{C\lambda_n}$ и в точках $\lambda_n+\varepsilon_n$

величины $-e^{C\lambda_n}$. Вариация меры $d\mu_2$ на отрезке $[0,x]$ (обозначим ее $V_2(x)$) равна сумме абсолютных величин скачков $\mu_2(t)$ в точках, лежащих на отрезке $[0,x]$, а именно

$$V_2(x) = \sum_{\lambda_n \leqslant x} e^{C\lambda_n} + \sum_{\lambda_n+\varepsilon_n \leqslant x} e^{C\lambda_n} \leqslant 2\sum_{\lambda_n \leqslant x} e^{C\lambda_n}. \tag{14}$$

Через $n(x)$ обозначим наибольшее из чисел n таких, что $\lambda_n \leqslant x$. Если $n(x)=1$, то $V_2(x) \leqslant 2e^{Cx}$. Если $n(x)>1$, то согласно (12) имеем $\lambda_{n(x)-1} = \sqrt{\ln \lambda_{n(x)}} \leqslant \sqrt{\ln x}$. А так как $k \leqslant \lambda_k$ при любом $k \geqslant 1$, отсюда получаем неравенство

$$\sum_{n=1}^{n(x)-1} e^{C\lambda_n} \leqslant (n(x)-1)\exp\bigl(C\sqrt{\ln \lambda_{n(x)}}\bigr) \leqslant \sqrt{\ln x}\,\exp(C\sqrt{\ln x}) = o(x) \tag{15}$$

при $x \to +\infty$. Из (14) и (15) находим

$$V_2(x) \leqslant o(x) + 2e^{Cx} = O(e^{Cx}), \tag{16}$$

т.е. условие (1) для меры $d\mu_2$ выполнено. Из доказанных неравенств вытекают также оценки

$$V_2(\lambda_n - 1) = o(\lambda_n), \qquad n \to \infty, \tag{17}$$

$$V_2(\lambda_n) \geqslant e^{C\lambda_n}. \tag{18}$$

Действительно, вариация меры $d\mu_2$ на отрезке $[0, \lambda_n - 1]$ такая же, как и на отрезке $[0, \lambda_{n-1}+\varepsilon_{n-1}]$, т.е.

$$O(e^{C(\lambda_{n-1}+\varepsilon_{n-1})}) = O(e^{C\lambda_{n-1}}) = O\bigl(\exp\bigl(C\sqrt{\ln \lambda_n}\bigr)\bigr) = o(\lambda_n)$$

при $n \to \infty$ (см. (16)), а вариация меры $d\mu_2$ на отрезке $[0,\lambda_n]$ не меньше ее скачка в точке λ_n.

Теперь докажем, что функция $F_2(s)$ является целой. Возьмем произвольный компакт $K \subset \mathbb{C}$ и обозначим $a = \sup\{|s| \mid s \in K\}$. Расширим K (если потребуется) так, чтобы выполнялось неравенство $a > C$. Тогда при всех $s \in K$ модуль общего члена ряда (13), равный

$$e^{C\lambda_n}|e^{-s\lambda_n} - e^{-s(\lambda_n+\varepsilon_n)}| = \exp(\lambda_n(C - \operatorname{Re} s))|1 - e^{-s\varepsilon_n}|,$$

не превосходит

$$\begin{aligned}\exp(2\lambda_n|a|)|1 - e^{-s\varepsilon_n}| &\leqslant |a|\varepsilon_n \exp(|a|\varepsilon_n + 2\lambda_n|a|)\\ &= |a|\exp(|a|\varepsilon_n + 2\lambda_n|a| - \lambda_n^2) = O(\exp(2\lambda_n|a| - \lambda_n^2)).\end{aligned}$$

Ввиду сходимости ряда из мажорант $\sum_{n=1}^{\infty}\exp(b\lambda_n - \lambda_n^2)$ (при любом $b>0$) ряд (13) на любом компакте в $\mathbb{C}$ равномерно сходится, а это влечет за собой аналитичность его суммы $F_2(s)$ во всей комплексной плоскости.

Покажем, что функция $\mu(t) = \mu_0(t) + \mu_1(t) + \mu_2(t)$ искомая. Рассмотрим преобразование Лапласа меры $d\mu$

$$F(s) = F_0(s) + F_1(s) + F_2(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st}\, d\mu(t).$$

Поскольку $F_2(s)$ – целая функция, то $F(s)$ имеет в $\mathbb{C}$ те же особенности, что и сумма $F_0(s)+F_1(s)$, т.е. полюс в точке 0 порядка m_0 (если $m_0 = 0$, то голоморфна в точке 0) и полюсы в точках $\pm iy_k$, $1 \leqslant k \leqslant N$, порядков m_k. Ввиду того, что $F_0(s) + F_1(s)$ – рациональная функция, функция $F(s)$ является мероморфной. Осталось доказать соотношения (6), (7), (1). Из (10) и (11) сразу же следует оценка

$$V_0(x) + V_1(x) = O(x^M) \tag{19}$$

(напомним, что $M = \max\{m_k \mid 0 \leqslant k \leqslant N\}$). Из (19) и (16) вытекает неравенство (1), а из (19) и (17) находим $V(\lambda_n) \geqslant \exp(C\lambda_n) + O(\lambda_n^M)$, что влечет за собой (6). Из (19) и (17) сразу следует (7). Теорема 1 доказана.

3. Основные результаты. Теорема 1 показывает, что если о действительнозначной мере $d\mu$ не известно ничего, кроме информации о полюсах ее преобразования Лапласа, то получение одинаковых по порядку двусторонних оценок вариации меры $d\mu$ невозможно. Тем не менее, оценки снизу $V(x)$, такие же по порядку, как и в теореме Фрейда, сохраняются.

Теорема A ([5]). *Если на границе звезды G_F имеется хотя бы один полюс функции F с неотрицательной действительной частью, то существуют такие положительные постоянные x_1 и c_1, что при всех $x > x_1$ справедливо неравенство*

$$V(x) > c_1 x^m, \tag{20}$$

где m – порядок полюса.

В этой работе при дополнительных ограничениях на $F(s)$ выводятся оценки снизу $V_+(x)$ и $V_-(x)$, такие же, как и (20).

Замечание 1. В формулировке теоремы A в [5] предполагалось, что действительная часть полюса равна нулю. Но общий случай выводится из этого частного. Докажем сделанное утверждение. Обозначим $s_0 + it_0$ полюс в теореме A. Выведем из ее справедливости при $s_0 = 0$ оценку (20) в случае $s_0 > 0$. Рассмотрим функцию

$$F_0(s) = F(s + s_0) = \int_0^{+\infty} e^{-st} e^{-s_0 t}\, d\mu(t) \equiv \int_0^{+\infty} e^{-st}\, d\mu_0(t),$$

где

$$\mu_0(x) = \int_0^x e^{-s_0 t}\, d\mu(t), \qquad \mu(x) = \int_0^x e^{s_0 t}\, d\mu_0(t). \tag{21}$$

Функция $F_0(s)$ имеет на границе своей звезды голоморфности полюс порядка m с нулевой вещественной частью. Поэтому

$$\operatorname{Var} \mu_0(t)|_0^x \geqslant c_1 x^m. \tag{22}$$

Из (21) видно, что вариация функции μ на любом отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}$ не меньше $e^{as_0} \operatorname{Var} \mu_0(t)|_a^b$. Отсюда и из (22) получаем требуемую оценку снизу для $V(x)$.

Теорема 2. *Если на границе звезды G_F имеется хотя бы один полюс функции F с неотрицательной действительной частью, а круг $\{s \in \mathbb{C} \mid |s - C| \leqslant C\}$ лежит внутри G_F, то существуют такие положительные постоянные x_2 и c_2, что при всех $x > x_2$ справедливы неравенства*

$$V_+(x) > c_2 x^m, \qquad V_-(x) > c_2 x^m, \tag{23}$$

где m – порядок полюса.

Доказательство. Поскольку функция F аналитична в замкнутом круге $\{s\in\mathbb{C} \mid |s - C| \leqslant C\}$, можно выбрать число $R > C$ так, чтобы круг $\{s \in \mathbb{C} \mid |s - R| \leqslant R\}$ также лежал внутри звезды G_F. Положим $\delta = (1 - C/R)/2$. Очевидно, что для всех $\tau > 0$ выполняется неравенство

$$\sum_{p\leqslant xR\delta^2} \frac{\tau^p}{p!} < \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\tau^p}{p!} = e^{\tau}.$$

Следовательно,

$$V_\pm(x) = \int_0^{xR} dV_\pm\biggl(\frac{\tau}{R}\biggr) > \int_0^{xR} \biggl(\sum_{p\leqslant xR\delta^2} \frac{\tau^p}{p!}\biggr) e^{-\tau}\, dV_\pm\biggl(\frac{\tau}{R}\biggr). \tag{24}$$

Исходя из (2), оценим интеграл в правой части (24) следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\int_0^{xR} \biggl(\sum_{p\leqslant xR\delta^2} \frac{\tau^p}{p!}\biggr) e^{-\tau}\, dV_\pm\biggl(\frac{\tau}{R}\biggr) \\
&\quad = \sum_{p\leqslant xR\delta^2} \int_0^{+\infty} \frac{\tau^p}{p!}\, e^{-\tau}\, dV_\pm\biggl(\frac{\tau}{R}\biggr) - \int_{xR}^{+\infty} \biggl(\sum_{p\leqslant xR\delta^2} \frac{\tau^p}{p!}\biggr) e^{-\tau}\, dV_\pm\biggl(\frac{\tau}{R}\biggr) \\
&\quad \geqslant \frac{1}{2} \sum_{p\leqslant xR\delta^2} \int_0^{+\infty} \frac{\tau^p}{p!}\, e^{-\tau}\, dV\biggl(\frac{\tau}{R}\biggr) - \frac{1}{2} \sum_{p\leqslant xR\delta^2} \biggl| \int_0^{+\infty} \frac{\tau^p}{p!}\, e^{-\tau}\, d\mu\biggl(\frac{\tau}{R}\biggr) \biggr| \\
&\qquad - \int_{xR}^{+\infty} \biggl(\sum_{p\leqslant xR\delta^2} \frac{\tau^p}{p!}\biggr) e^{-\tau}\, dV\biggl(\frac{\tau}{R}\biggr).
\end{aligned} \tag{25}$$

Покажем, что второе и третье слагаемые правой части (25) ограничены и, стало быть, достаточно вывести требуемую оценку снизу первого слагаемого. Ограниченность второго слагаемого сразу следует из аналитичности $F(s)$ в круге $\{s \in \mathbb{C} \mid |s - R| \leqslant R\}$. Действительно, согласно представлению (5) для каждого $p \in \mathbb{N}_0$ выполняется равенство

$$\frac{R^p F^{(p)}(R)}{p!} = \int_0^{+\infty} \frac{(-Rt)^p}{p!}\, e^{-Rt}\, d\mu(t) = \int_0^{+\infty} \frac{(-\tau)^p}{p!}\, e^{-\tau}\, d\mu\biggl(\frac{\tau}{R}\biggr). \tag{26}$$

В силу аналитичности $F(s)$ в круге $\{s \in \mathbb{C} \mid |s - R| \leqslant R\}$ найдутся числа $c_3 > 0$ и $\xi \in (0, 1)$ такие, что

$$\frac{R^p |F^{(p)}(R)|}{p!} < c_3 \xi^p. \tag{27}$$

Из (26) и (27) получаем неравенство

$$\sum_{p\leqslant xR\delta^2}\left|\int_0^{+\infty}\frac{\tau^p}{p!}e^{-\tau}\,d\mu\left(\frac{\tau}{R}\right)\right|\leqslant\frac{c_3}{1-\xi}\,. \tag{28}$$

Третье слагаемое

$$\int_{xR}^{+\infty}\left(\sum_{p\leqslant xR\delta^2}\frac{\tau^p}{p!}\right)e^{-\tau}\,dV\left(\frac{\tau}{R}\right)$$

было оценено сверху в работе [5] в лемме 1 даже при меньших ограничениях на функции μ и F. Было доказано неравенство

$$\int_{xR}^{+\infty}\left(\sum_{p\leqslant xR\delta^2}\frac{\tau^p}{p!}\right)e^{-\tau}\,dV\left(\frac{\tau}{R}\right)<c_4\exp\left(-\frac{xR\delta}{2}\right). \tag{29}$$

Таким образом, из (24), (25), (28) и (29) выводим асимптотическое неравенство

$$V_{\pm}(x)>\frac{1}{2}\sum_{p\leqslant xR\delta^2}\int_0^{+\infty}\frac{\tau^p}{p!}e^{-\tau}\,dV\left(\frac{\tau}{R}\right)+O(1). \tag{30}$$

Первое слагаемое в (30) оценим снизу, пользуясь наличием полюса порядка m у функции $F(s)$ на мнимой оси или правее, скажем, в точке s_0+it_0, где $s_0\geqslant 0$. Рассмотрим функцию $\Phi(s)=F(R+it_0-R_1s)$, где $R_1=R-s_0$. По условию теоремы $\Phi(s)$ аналитична на полуинтервале $[0,1)$ и в точке $s=1$ имеет полюс порядка m. Так как $\Phi(s)$ голоморфна в точке $s=0$, найдется такое положительное число r, что $\Phi(s)$ аналитична в круге $\{s\in\mathbb{C}\mid |s|\leqslant e^{-r}\}$. Разложим функцию $\Phi(s)$ в ряд Маклорена в круге $\{s\in\mathbb{C}\mid |s|\leqslant e^{-r}\}$:

$$\Phi(s)=F(R+it_0-R_1s)=\sum_{p=0}^{\infty}a_ps^p,\qquad \limsup_{p\to\infty}|a_p|^{1/p}<e^r. \tag{31}$$

Введем еще функцию $f(w)=\Phi(e^{-w})$. Она аналитична в полуплоскости $\{w\in\mathbb{C}\mid \operatorname{Re}w>r\}$, и имеет в точке $w=0$ полюс порядка m, лежащий на границе звезды G_f. Напишем представление функции $f(w)$ в виде преобразования Лапласа в полосе $\{w\in\mathbb{C}\mid \operatorname{Re}w>r\}$

$$f(w)=\sum_{p=0}^{\infty}a_pe^{-wp}=\int_0^{+\infty}e^{-wt}\,d\nu(t).$$

Функция $\nu(t)$ постоянна на интервалах $n-1<t<n$, $n\in\mathbb{N}$, имеет скачки в $\mathbb{N}_0$, а величина скачка в точке $p\in\mathbb{N}_0$ равна a_p. Для $V_\nu(x)$ – вариации меры $d\nu$ на отрезке $[0,x]$, которая равна $\sum_{p\leqslant x}|a_p|$, в силу (31) выполнена оценка (1) с $C=r$. Применяя к $f(w)$ теорему 1 работы [5], получим оценку снизу для $V_\nu(x)$. А именно, найдутся постоянные $c_5,x_3>0$ такие, что для всех $x>x_3$ выполняется неравенство

$$V_\nu(x)=\sum_{p\leqslant x}|a_p|>c_5x^m. \tag{32}$$

С другой стороны, из (31) и (5) находим

$$a_p = \frac{\Phi^{(p)}(0)}{p!} = (-R_1)^p F^{(p)}(R + it_0) = \int_0^{+\infty} \frac{(-R_1 t)^p}{p!} e^{-(R+it_0)t}\, d\mu(t).$$

Следовательно,

$$|a_p| \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{(R_1 t)^p}{p!} e^{-Rt}\, dV(t). \tag{33}$$

Из (32) и (33) получаем, что для всех $x > x_3/(R\delta^2)$ выполняется неравенство

$$\begin{aligned}\sum_{p\leqslant xR\delta^2} \int_0^{+\infty} \frac{\tau^p}{p!} e^{-\tau}\, dV\left(\frac{\tau}{R}\right) &= \sum_{p\leqslant xR\delta^2} \int_0^{+\infty} \frac{(Rt)^p}{p!}\, e^{-Rt}\, dV(t)\\ &\geqslant \sum_{p\leqslant xR\delta^2} \int_0^{+\infty} \frac{(R_1 t)^p}{p!}\, e^{-Rt}\, dV(t)\\ &\geqslant \sum_{p\leqslant xR\delta^2} |a_p| > c_5 (R\delta^2)^m x^m. \end{aligned}\tag{34}$$

Из (30) и (34) следует существование чисел $c_2 = (c_5/4)(R\delta^2)^m$, $x_2' = x_3/(R\delta^2)$ таких, что для всех $x > x_2'$ выполнены оценки снизу $V_\pm(x) > 2c_2 x^m + O(1) > c_2 x^m$ при $x > x_2$. Теорема 2 доказана.

Замечание 2. Оценка снизу (20) была получена в [5] при еще меньших условиях на функцию F. А именно, для справедливости (20) достаточно лишь наличие полюса с неотрицательной действительной частью на границе G_F. Для одновременного выполнения оценок (23) этого мало, поскольку при наличии полюса у функции F на $\mathbb{R}$ возможна ситуация $V_-(x) \equiv 0$. Таким образом, в теореме 2 отказаться от требования голоморфности $F(s)$ на отрезке $[0, C]$, вообще говоря, нельзя. Является ли излишним требование голоморфности $F(s)$ в круге $|s - C| \leqslant C$? Ответ авторам не известен.

В статье [5] рассматривалась также задача об оценке снизу вариации меры $d\mu$ на “коротких” отрезках. Была доказана следующая теорема.

Теорема B. *Пусть $R > C$, $t_0 \in \mathbb{R}$, функция $F(s)$ не имеет в некоторой окрестности круга $\{s \in \mathbb{C} \mid |s - (R + it_0)| \leqslant R\}$ никаких особенностей, кроме полюсов, а в точке it_0 имеет полюс порядка m. Обозначим через α_1 и α_2 соответственно наименьший и наибольший корни уравнения $\alpha \ln(e/\alpha) = 1 - C/R$ на интервале $0 < \alpha < e$. Тогда существуют положительные постоянные c_6 и x_4 такие, что при любом $x > x_4$ выполняется неравенство*

$$V(x) - V(\lambda x) > c_6 x^m, \qquad \text{где} \quad \lambda = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\,.$$

Мы дополняем теорему B в том же духе, в котором теорема 2 дополняет теорему A.

Лемма. *Если функция* $\varphi(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kz^k$ *аналитична в круге* $|z|<1$ *и во всех точках окружности* $|z|=1$, *исключая* $z=1$, *и при некотором* $p>0$ *удовлетворяет условию*

$$\varphi(z)=o(|1-z|^{-p}),\qquad z\to 1,\quad |z|\leqslant 1, \tag{35}$$

то $\sum_{k=0}^{n}a_k=o(n^p)$, $n\to\infty$.

Доказательство. Фиксируем $\varepsilon>0$. По условию (35) найдется такое N, что для всех $n>N$ неравенство

$$|\varphi(z)|<\varepsilon|1-z|^{-p} \tag{36}$$

выполняется при всех z, $|z|\leqslant 1$, лежащих на прямой $\operatorname{Re}z=1-1/n$. Обозначим через L_n дугу $\{z\in\mathbb{C}\mid |z|=1, \operatorname{Re}z\leqslant 1-1/n\}$, а через l_n отрезок $\{z\in\mathbb{C}\mid |z|\leqslant 1, \operatorname{Re}z=1-1/n\}$. Положим $h_n=\sqrt{2n-1}/n$. Согласно интегральной формуле Коши имеем

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}a_k&=\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=0}^{n}\int_{L_n\cup l_n}\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta^{k+1}}\,d\zeta\\&=\frac{1}{2\pi i}\int_{L_n\cup l_n}\varphi(\zeta)\frac{1-\zeta^{n+1}}{\zeta^{n+1}(1-\zeta)}\,d\zeta\\&=\frac{1}{2\pi i}\int_{L_n}\frac{\varphi(\zeta)\,d\zeta}{\zeta^{n+1}(1-\zeta)}+\frac{1}{2\pi i}\int_{l_n}\frac{\varphi(\zeta)\,d\zeta}{\zeta^{n+1}(1-\zeta)}-\frac{1}{2\pi i}\int_{L_n\cup l_n}\frac{\varphi(\zeta)\,d\zeta}{1-\zeta}\\&=\frac{1}{2\pi i}\int_{L_n}\frac{\varphi(\zeta)\,d\zeta}{\zeta^{n+1}(1-\zeta)}+\frac{1}{2\pi i}\int_{l_n}\frac{\varphi(\zeta)\,d\zeta}{\zeta^{n+1}(1-\zeta)}\,.\end{aligned}\tag{37}$$

Оценим сверху модуль каждого из интегралов. Первый из интегралов (37) оценим, используя непрерывность φ на дуге L_{N+1} и неравенство (36). Пусть $M=\max_{L_{N+1}}|\varphi(z)|$. Тогда

$$\begin{aligned}\biggl|\int_{L_n}\frac{\varphi(\zeta)\,d\zeta}{\zeta^{n+1}(1-\zeta)}\biggr|&\leqslant\int_{L_n}\frac{M+\varepsilon|1-\zeta|^{-p}}{|1-\zeta|}\,|d\zeta|\\&=\int_{\arcsin h_n}^{\pi}\frac{M+\varepsilon(2\sin(\varphi/2))^{-p}}{\sin(\varphi/2)}\,d\varphi=O\biggl(M\ln n+\frac{\varepsilon n^{p/2}}{p}\biggr),\end{aligned}\tag{38}$$

где постоянная в O абсолютная. Для оценки второго интеграла (37) снова применим неравенство (36):

$$\begin{aligned}\biggl|\int_{l_n}\frac{\varphi(\zeta)\,d\zeta}{\zeta^{n+1}(1-\zeta)}\biggr|&\leqslant\int_{l_n}\frac{\varepsilon|1-\zeta|^{-p}}{|\zeta|^{n+1}|1-\zeta|}\,|d\zeta|\\&=\varepsilon\int_{-h_n}^{h_n}\frac{dt}{((1-1/n)^2+t^2)^{(n+1)/2}(n^{-2}+t^2)^{(p+1)/2}}\,.\end{aligned}\tag{39}$$

Поскольку $((1-1/n)^2+t^2)^{(n+1)/2}\geqslant(1-1/n)^{n+1}\geqslant 1/8\ \ \forall\, n\geqslant 2$, то

$$\biggl|\int_{l_n}\frac{\varphi(\zeta)\,d\zeta}{\zeta^{n+1}(1-\zeta)}\biggr|\leqslant 16\varepsilon\int_{0}^{h_n}\frac{dt}{(t^2+n^{-2})^{(p+1)/2}}$$

$$< 16\varepsilon \int_0^\infty \frac{dt}{(t^2+n^{-2})^{(p+1)/2}} = 8\sqrt{\pi}\varepsilon \frac{\Gamma(p/2)}{\Gamma((p+1)/2)}\, n^p. \tag{40}$$

Из (38), (39) и (40) заключаем, что при любом $\varepsilon > 0$ верно неравенство

$$\limsup_{n\to\infty} \left| n^{-p} \sum_{k=0}^n a_k \right| \leqslant 8\sqrt{\pi}\varepsilon \frac{\Gamma(p/2)}{\Gamma((p+1)/2)}\,. \tag{41}$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ из (41) получаем утверждение леммы.

Теорема 3. *Пусть $m \in \mathbb{N}$, $\varepsilon \in (0,1)$, а функция $F(s)$, определенная интегралом (5) по действительнозначной мере, удовлетворяющей условию (1), допускает аналитическое продолжение в прямоугольник $\Pi = \{s \in \mathbb{C} \mid 0 < \operatorname{Re} s \leqslant C, |\operatorname{Im} s| < 4C/\varepsilon\}$ и верна оценка*

$$F(s) = o(s^{-m}), \qquad s \to 0, \quad s \in \Pi. \tag{42}$$

Предположим затем, что существует число $t_0 > 0$ такое, что в прямоугольнике $\Pi_1 = \{s \in \mathbb{C} \mid 0 < \operatorname{Re} s \leqslant C, |\operatorname{Im}(s - it_0)| < 4C/\varepsilon\}$ функция $F(s)$ не имеет никаких особенностей кроме полюсов, допускает аналитическое продолжение в некоторую окрестность точки it_0 и в этой точке имеет полюс порядка m. Тогда при $\lambda = 1-\varepsilon$ и всех достаточно больших x справедливы неравенства

$$V_+(x) - V_+(\lambda x) > c_7 x^m, \qquad V_-(x) - V_-(\lambda x) > c_7 x^m. \tag{43}$$

Доказательство. Положим $R = 8C/\varepsilon^2$. Тогда часть замкнутого круга $\{s \in \mathbb{C} \mid |s - (R + it_0)| \leqslant R\}$, лежащая в полосе $\{s \in \mathbb{C} \mid 0 \leqslant \operatorname{Re} s \leqslant C\}$, содержится в прямоугольнике Π_1. По условию теоремы функция $F(s)$ в некоторой окрестности замкнутого круга $\{s \in \mathbb{C} \mid |s - (R + it_0)| \leqslant R\}$ не имеет никаких особенностей кроме полюсов, а в точке it_0 имеет полюс порядка m. Выберем $Q > R$ так, чтобы в некоторой окрестности замкнутого круга $\{s \in \mathbb{C} \mid |s - (Q + it_0)| \leqslant Q\}$ не было никаких особенностей кроме полюсов.

Обозначим через α_1 и α_2 наименьший и наибольший корни уравнения $\alpha \ln(e/\alpha) = 1 - C/R$, а через β_1 и β_2 – наименьший и наибольший корни уравнения $\beta \ln(e/\beta) = 1 - C/Q$. Положим

$$\gamma_1 = \frac{\alpha_1 + \beta_1}{2}\,, \quad \gamma_2 = \frac{\alpha_2 + \beta_2}{2}\,, \qquad \bar\lambda = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\,,$$
$$y_1(x) = \bar\lambda Q \gamma_2 x, \qquad y_2(x) = Q\gamma_1 x.$$

Тогда

$$y_2(x) - y_1(x) = \frac{\beta_1\alpha_2 - \beta_2\alpha_1}{2\alpha_2}\, Qx > 0.$$

Оценим снизу вариацию $V_\pm$ по отрезку $[\bar\lambda x, x]$. Имеем

$$V_\pm(x) - V_\pm(\bar\lambda x) = \int_{\bar\lambda Q x}^{Qx} dV_\pm\left(\frac{\tau}{Q}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&> \int_{\bar\lambda Qx}^{Qx}\Biggl(\sum_{y_1(x)\leqslant n\leqslant y_2(x)}\frac{\tau^n}{n!}\Biggr)e^{-\tau}\,dV_{\pm}\left(\frac{\tau}{Q}\right)\\
&= \frac12\int_{\bar\lambda Qx}^{Qx}\Biggl(\sum_{y_1(x)\leqslant n\leqslant y_2(x)}\frac{\tau^n}{n!}\Biggr)e^{-\tau}\,dV\left(\frac{\tau}{Q}\right)\\
&\qquad \pm\frac12\int_{\bar\lambda Qx}^{Qx}\Biggl(\sum_{y_1(x)\leqslant n\leqslant y_2(x)}\frac{\tau^n}{n!}\Biggr)e^{-\tau}\,d\mu\left(\frac{\tau}{Q}\right).
\end{aligned}
\tag{44}
$$

В [5] на с. 153 доказано неравенство

$$
\int_{\bar\lambda Qx}^{Qx}\Biggl(\sum_{y_1(x)\leqslant n\leqslant y_2(x)}\frac{\tau^n}{n!}\Biggr)e^{-\tau}\,dV\left(\frac{\tau}{Q}\right) > c_8x^m,\qquad x>x_4,
\tag{45}
$$

где c_8 и x_4 – некоторые постоянные. Оценим сверху второе слагаемое. Обозначив $E(x)=[0,\bar\lambda Qx]\cup[Qx,+\infty)$, находим

$$
\begin{aligned}
&\int_{\bar\lambda Qx}^{Qx}\Biggl(\sum_{y_1(x)\leqslant n\leqslant y_2(x)}\frac{\tau^n}{n!}\Biggr)e^{-\tau}\,d\mu\left(\frac{\tau}{Q}\right)\\
&\quad=\int_0^{+\infty}\Biggl(\sum_{y_1(x)\leqslant n\leqslant y_2(x)}\frac{\tau^n}{n!}\Biggr)e^{-\tau}\,d\mu\left(\frac{\tau}{Q}\right)-\int_{E(x)}\Biggl(\sum_{y_1(x)\leqslant n\leqslant y_2(x)}\frac{\tau^n}{n!}\Biggr)e^{-\tau}\,d\mu\left(\frac{\tau}{Q}\right).
\end{aligned}
$$

Ограниченность второго слагаемого следует из результатов [5]. В этой работе на с. 153 доказаны неравенства

$$
(n!)^{-1}\int_{E(x)}\tau^ne^{-\tau}\,dV(x)=O(\xi^n),\qquad \text{где}\quad 0<\xi<1.
$$

Суммируя их, получаем требуемое. Оценка первого интеграла непосредственно следует из леммы:

$$
\int_0^{+\infty}\Biggl(\sum_{y_1(x)\leqslant n\leqslant y_2(x)}\frac{\tau^n}{n!}\Biggr)e^{-\tau}\,d\mu\left(\frac{\tau}{Q}\right)=\sum_{y_1(x)\leqslant n\leqslant y_2(x)}\frac{F^{(n)}(Q)}{n!}(-Q)^n=o(x^m).
$$

Таким образом,

$$
\int_{\bar\lambda Qx}^{Qx}\Biggl(\sum_{y_1(x)\leqslant n\leqslant y_2(x)}\frac{\tau^n}{n!}\Biggr)e^{-\tau}\,d\mu\left(\frac{\tau}{Q}\right)=o(x^m),\qquad x\to+\infty.
\tag{46}
$$

Из (44), (45) и (46) получаем оценку (43) с $\lambda=\bar\lambda$. В работе [5] установлено, что $\bar\lambda>1-\varepsilon+\varepsilon^2/8$. Следовательно, неравенства (43) справедливы, если взять $\lambda=1-\varepsilon$.

Следствие 1. Пусть $\varepsilon > 0$, $m \in \mathbb{N}$, функция $F(s)$ мероморфна в полуплоскости $\operatorname{Re} s > 0$, а в полуполосе $\operatorname{Re} s > 0$, $|\operatorname{Im} s| < 4C/\varepsilon$ не имеет особенностей. Тогда если у $F(s)$ есть хотя бы один полюс порядка m с неотрицательной вещественной частью, то при условии (42) выполняются неравенства (43) с $\lambda = 1 - \varepsilon$.

4. Приложения в теории чисел. Один из разделов аналитической теории чисел связан с изучением поведения сумм $A(x) = \sum_{n \leqslant x} a(n)$, где a – та или иная функция натурального аргумента. Если функция $a(n)$ достаточно часто меняет знак, то бывает, что и сумма $A(x)$ обладает тем же свойством и какой-либо асимптотики $A(x)$ указать нельзя. Тогда основными задачами становятся 1) оценка сверху модуля $|A(x)|$, 2) оценки снизу $A^{\pm}(x)$ на подпоследовательностях значений x или оценки снизу средних от этих функций по "коротким" отрезкам.

Наиболее часто встречающимся в математической литературе примером такой функции является функция Мёбиуса $\mu(n)$. Она равна 0, если n делится на квадрат простого числа, и равна $(-1)^s$, если число n разлагается в произведение s различных простых сомножителей, $\mu(1) = 1$. О сумме $M(x) = \sum_{n \leqslant x} \mu(n)$ известно следующее. В [6] доказана оценка

$$M(x) = O(x \exp(-c \ln^{0,6} x (\ln \ln x)^{-0.2})), \qquad x \to +\infty,$$

где c – некоторая положительная постоянная. Эта оценка при достаточно больших x до сих пор остается лучшей. С другой стороны, гипотеза "$M(x) = O(\sqrt{x})$" пока не опровергнута. "В среднем" $|M(x)|$ не меньше $c\sqrt{x}$. В [7] при $x > x_0$ доказано неравенство

$$\int_{x/100 \ln x}^{x} |M(u)| \, du > \frac{x^{3/2}}{17\,000}\,. \tag{47}$$

Соотношения $M^+(x) = \Omega(\sqrt{x})$, $M^-(x) = \Omega(\sqrt{x})$, $x \to +\infty$ (запись $u(x) = \Omega(v(x))$, $x \to +\infty$, означает отрицание утверждения $u(x) = o(v(x))$, $x \to +\infty$; см., например, [8; гл. VII, § 8]) были известны еще в начале XX века. Затем в ряде работ, начиная с [9], доказывалось, что перемены знака и "не малые" по модулю положительные и отрицательные значения $M(x)$ встречаются достаточно часто. Наилучший результат принадлежит Пинцу [10]. Он доказал, что на отрезке $[Y \exp(-5(\ln \ln Y)^{3/2}), Y]$ $\forall\, Y > Y_0$ найдутся два числа x' и x'' такие, что

$$M(x') > \frac{\sqrt{x'}}{136\,000}\,, \qquad M(x'') < -\frac{\sqrt{x''}}{136\,000}\,. \tag{48}$$

Аналоги неравенств (47) для положительных и отрицательных частей $M(x)$ не известны. Заметим, что в доказательстве неравенств (47) и (48) в значительной степени использовалось то обстоятельство, что производящей функцией для функции Мёбиуса является именно $1/\zeta(s)$. Не видно, как доказать подобные неравенства для других теоретико-числовых функций, производящие функции которых имеют вид $f(s)/\zeta(s)$, где $f(s)$ мероморфна в полуплоскости $\operatorname{Re} s \geqslant 1/2$ и не имеет нулей в некоторых точках, в которых $\zeta(s)$ обращается в нуль.

Следствие 1 из теоремы 3 позволяет вывести оценку снизу средних

$$\int_{Y^{1-\epsilon}}^{Y} u^{-3/2}A^{+}(u)\,du > c_9\ln Y, \qquad \int_{Y^{1-\epsilon}}^{Y} u^{-3/2}A^{-}(u)\,du > c_9\ln Y \tag{49}$$

при "небольших" значениях ε для достаточно широкого класса функций натурального аргумента $\{a(n)\}$, содержащего в себе функцию Мёбиуса. Оценки вида (49), в которых вместо $A^{\pm}(u)$ стоит $|A(u)|$ были получены в [11].

В формулируемой ниже теореме предполагается, что T – произвольное положительное число, относительно которого известно, что в прямоугольнике $\mathscr{P}_T = \{s \in \mathbb{C} \mid |1/2 < \operatorname{Re} s < 1, |\operatorname{Im} s| < T\}$ нет нулей ζ функции Римана. Известно, что в качестве T можно взять $2\cdot 10^{10}$, но с каждым годом находятся все бо́льшие значения T.

Теорема 4. *Пусть $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ – произвольная последовательность действительных чисел, удовлетворяющая следующим условиям*:

1) $b_n = O(n^{\alpha})$, $\alpha > 0$;
2) *функция* $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n n^{-s}$ *мероморфна в полуплоскости* $\operatorname{Re} s \geqslant 1/2$;
3) $f(s)$ *не имеет полюсов в прямоугольнике* $\mathscr{P}_T$;
4) *существует нуль* $\zeta(s)$, *не являющийся нулем функции* $f(s)$.

Положим $a_n = \sum_{d\setminus n} b_d\mu(n/d)$, $A(x) = \sum_{n\leqslant x} a_n$, $\varepsilon = (4\alpha+2)/T$. (*Если* $A(x) = O(x)$, *то берем* $\varepsilon = 2/T$.) *Тогда существуют положительные постоянные* c_9 *и* y_0 *такие, что при любом* $Y > y_0$ *верны оценки* (49).

Если положить $b_1 = 1$, $b_n = 0$ при $n \geqslant 2$, то $f(s) \equiv 1$ и получается

Следствие 2. Неравенства (49) верны для $M^{\pm}(u)$ при $\varepsilon = 10^{-10}$.

Замечание 3. До сих пор не известно, имеет ли дзета-функция Римана хотя бы один кратный нуль. Если выяснится, что кратный нуль существует, то при выполнении условия 4) теоремы 4 в оценке (49) вместо $\ln Y$ можно будет поставить $(\ln Y)^m$, где m – кратность нуля. Если выяснится, что существует нуль $\zeta(s)$, вещественная часть которого равна $1/2 + \varkappa$, $\varkappa > 0$, то тем же методом получится оценка

$$\int_{Y^{1-\varepsilon}}^{Y} u^{\varkappa-3/2}A^{\pm}(u)\,du > c_{10}\ln Y.$$

Справедлив более общий результат, чем теорема 4, хотя и более сложно формулируемый. Следствие 1 показывает, что от условия мероморфности $f(s)$ в некоторой окрестности полуплоскости $\operatorname{Re} s \geqslant 1/2$ можно отказаться.

Теорема 5. *Утверждение теоремы 4 справедливо, если условие* 2) *в ее формулировке заменить на два следующих*:

2а) *функция* $f(s)$ *мероморфна в полуплоскости* $\operatorname{Re} s > 1/2$, *и верна асимптотическая оценка* $f(s) = o((s-1/2)^{-1}$, $s \to 1/2$, $\operatorname{Re} s > 1/2$;

2б) $f(s)$ *продолжается как мероморфная функция в окрестность хотя бы одного нуля* ρ *дзета-функции Римана, лежащего на прямой* $\operatorname{Re} s = 1/2$, *но вне прямоугольника* $\mathscr{P}_T$, *и не обращается в нуль в точке* ρ.

Доказательство. Рассмотрим функцию $F_1(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$. Из определений последовательности a_n, абсолютной сходимости ряда $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n n^{-s}$ при $\operatorname{Re} s > 1+\alpha$, абсолютной сходимости ряда $1/\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n) n^{-s}$ при $\operatorname{Re} s > 1$, и правила перемножения рядов Дирихле [8; с. 426]

$$\biggl(\sum_{n=1}^{\infty} u_n n^{-s}\biggr)\biggl(\sum_{n=1}^{\infty} v_n n^{-s}\biggr) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n n^{-s}, \qquad U_n = \sum_{d\mid n} u_d v_{n/d},$$

выполняющегося в полуплоскости, в которой оба перемножаемых ряда сходятся абсолютно, следует тождество

$$F_1(s) = \frac{f(s)}{\zeta(s)}, \qquad \operatorname{Re} s > 1+\alpha. \tag{50}$$

Согласно [8; с. 421] наряду с (50) верно интегральное представление

$$F_1(s) = s\int_1^{+\infty} A(x) x^{-s-1}\,dx, \qquad \operatorname{Re} s > 1+\alpha. \tag{51}$$

Оценим сверху $|A(x)|$. В силу неравенства $|\mu(n)| \leqslant 1$ и условия 1 теоремы 4 имеем $|a_n| = O(\sum_{d\,|\,n} d^{\alpha})$, $\alpha > 0$. Следовательно,

$$A(x) = O\biggl(\sum_{n\leqslant x}\sum_{d\mid n} d^{\alpha}\biggr) = O\biggl(\sum_{d\leqslant x} d^{\alpha}\biggl[\frac{x}{d}\biggr]\biggr) = O\biggl(x\sum_{d\leqslant x} d^{\alpha-1}\biggr).$$

Отсюда находим $A(x) = O(x^{1+\alpha})$, $\alpha > 0$, а это влечет за собой оценку

$$W(x) \equiv \int_0^x |A(e^t)| e^{-t/2}\,dt = O(e^{(\alpha+0.5)x}), \qquad x > 0. \tag{52}$$

Рассмотрим функцию $F(s) = (s+0.5)^{-1} F_1(s+0.5)$. Согласно (50) и (51) имеем

$$F(s) = \frac{f(s+0.5)}{(s+0.5)\zeta(s+0.5)} = \int_0^{+\infty} (A(e^u) e^{-u/2}) e^{-us}\,du \equiv \int_0^{+\infty} e^{-us}\,d\nu(u),$$

где $\nu(u) = \int_0^u A(e^t) e^{-t/2}\,dt$, $\operatorname{Var}\nu(u)|_0^x = W(x)$. Отсюда заключаем, что функция F является преобразованием Лапласа действительнозначной меры $d\nu$, удовлетворяющей условию (1) при $C = \alpha + 0.5$. Из условий теоремы 5 видно, что для функции F выполнены все условия следствия 1 из теоремы 3. Поэтому (см. (4)) верна оценка

$$W^{\pm}(x) - W^{\pm}(x(1-\varepsilon)) = \int_{x(1-\varepsilon)}^{x} A^{\pm}(e^u) e^{-u/2}\,du > c_9 x. \tag{53}$$

Из (53) сразу получаем неравенства (49). Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] И. П. Натансон, *Теория функций вещественной переменной*, Наука, М., 1974.

[2] А. Ф. Леонтьев, *Ряды экспонент*, Наука, М., 1976.

[3] G. Freud,, "Restglied eines Tauberscher Satzes. I", *Acta Math. Hungar.*, **2**:3–4 (1951), 299–308.

[4] А. Г. Постников, *Введение в аналитическую теорию чисел*, Наука, М., 1971.

[5] А. Ю. Попов, Ю. С. Чайников, "Аналоги тауберовых теорем для преобразования Лапласа", *Изв. РАН. Сер. матем.*, **66**:6 (2002), 137–158.

[6] A. Walfisz, *Weilsche Exponentialsummen in der neueren Zahlentheorie*, Mathematische Forschungsberichte, **16**, Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1963.

[7] J. Pintz, "Oscillatory properties of $M(x) = \sum_{n\leqslant x}\mu(n)$, I", *Acta Arith.*, **42**:1 (1982), 49–55.

[8] К. Прахар, *Теория распределения простых чисел*, Мир, М., 1967.

[9] I. Kátai, "Comparative theory of prime numbers", *Acta Math. Hungar.*, **18** (1967), 133–149.

[10] J. Pintz, "Oscillatory properties of $M(x) = \sum_{n\leqslant x}\mu(n)$. III", *Acta Arith.*, **43**:2 (1984), 105–113.

[11] С. В. Конягин, А. Ю. Попов, "О скорости расходимости некоторых интегралов", *Матем. заметки*, **58**:2 (1995), 243–255.

А. Ю. Попов, А. П. Солодов
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
13.06.2006