А. Ю. Попов, О количестве вещественных собственных значений одной краевой задачи для уравнения второго порядка с дробной производной, *Фундамент. и прикл. матем.*, 2006, том 12, выпуск 6, 137–155

О количестве вещественных собственных значений одной краевой задачи для уравнения второго порядка с дробной производной*

А. Ю. ПОПОВ

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

УДК 517.589+517.927.2

Ключевые слова: функция Миттаг-Леффлера, вещественное собственное значение.

Аннотация

Найдена асимптотика при $\alpha \to 0+$ количества вещественных собственных значений $\lambda_n(\alpha)$ задачи $y''(x)+\lambda D_0^\alpha y(x) = 0$, $0 < x < 1$, $y(0) = y(1) = 0$. Произведена минимизация вещественных собственных значений. Доказано, что $\lim\limits_{\alpha\to 0+} \lambda_n(\alpha) = (\pi n)^2$.

Abstract

A. Yu. Popov, On the number of real eigenvalues of a certain boundary-value problem for a second-order equation with fractional derivative, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 12 (2006), no. 6, pp. 137—155.

The asymptotics as $\alpha \to 0+$ of the number of real eigenvalues $\lambda_n(\alpha)$ of the problem $y''(x) + \lambda D_0^\alpha y(x) = 0$, $0 < x < 1$, $y(0) = y(1) = 0$, is found. The minimization of real eigenvalues was carried out. It is proved that $\lim\limits_{\alpha\to 0+} \lambda_n(\alpha) = (\pi n)^2$.

В [6] А. М. Нахушев поставил вопрос о количестве вещественных собственных значений краевой задачи

$$y''(x) + \lambda D_0^\alpha y(x) = 0, \quad 0 < x < 1, \quad y(0) = y(1) = 0, \tag{1}$$

где

$$D_0^\alpha y(x) = \bigl(\Gamma(1-\alpha)\bigr)^{-1} \frac{d}{dx} \int\limits_0^x (x-t)^{-\alpha} y(t)\, dt \,—$$

оператор дифференцирования порядка $\alpha \in (0,1)$. Число $\lambda \in \mathbb{C}$ называется собственным значением (с. з.) задачи (1), если существует комплекснозначная функция $y \in C[0,1] \cap C^2(0,1)$, отличная от тождественного нуля, для которой выполняются равенства (1). Подобные краевые задачи рассматривались ещё

*Работа поддержана грантом РФФИ № 06-01-00326.

Фундаментальная и прикладная математика, 2006, том 12, № 6, с. 137—155.

раньше М. М. Джрбашяном [4]. Теория краевых задач для дифференциальных уравнений, содержащих операторы дифференцирования нецелого порядка, изложена в [7,9]. В [7] много внимания уделено приложениям этих задач к различным вопросам естествознания.

Нахушев [6] выдвинул гипотезу о наличии вещественных с. з. задачи (1) при небольших значениях α. Это подтвердилось численными экспериментами, результаты которых приведены в [6], однако теоретического обоснования данная гипотеза не получила. В [6] было отмечено, что $\lambda \in \mathbb{C}$ является с. з. задачи (1) тогда и только тогда, когда

$$E_\rho(-\lambda, 2) = 0, \quad \rho = (2-\alpha)^{-1}, \tag{2}$$

где $E_\rho(z,\mu)$ — функция Миттаг-Леффлера:

$$E_\rho(z,\mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\mu + k/\rho)}. \tag{3}$$

Давно доказано [3, гл. 3], что при $\rho > 1/2$ множество вещественных нулей функции $E_\rho(z,\mu)$ либо конечно, либо пусто. Но вопрос о нахождении (или хотя бы оценке) количества действительных нулей функции (3) до недавнего времени почти не был изучен. Для значений $\rho \geqslant 1$ эту проблему полностью решил А. М. Седлецкий [10]. А. В. Псху [8] доказал, что при $1/2 < \rho < 1$, $\mu \geqslant 3/(2\rho)$ функция $E_\rho(z,\mu)$ не имеет вещественных нулей. Отсюда следует, что при $2/3 \leqslant \alpha < 1$ задача (1) не имеет вещественных с. з.

В этой работе доказано, что при $\alpha \in (0, 1/3]$ задача (1) имеет вещественные с. з., установлены границы, в которых они лежат, при $\alpha \in (0, 1/6]$ произведена локализация. Выведена асимптотика количества вещественных с. з. задачи (1) при $\alpha \to +0$. Вопрос о наличии вещественных с. з. задачи (1) при $1/3 < \alpha < 2/3$ пока не исследован.

Теорема 1. *При $0 < \alpha \leqslant 1/3$ задача (1) имеет не менее двух вещественных с. з.*

Теорема 2. *При любом $\alpha \in (0, 1/3]$ все вещественные с. з. задачи (1) лежат на интервале $\bigl(\Gamma(4-\alpha), R^{2-\alpha}(\alpha)\bigr)$, где*

$$R(\alpha) = 2\left(\ln\frac{2}{\alpha} + \ln\ln\frac{2}{\alpha}\right)\operatorname{cosec}(\pi\varepsilon), \quad \varepsilon = \rho - \frac{1}{2} = \frac{\alpha}{4-2\alpha}.$$

Положим $R_1(\alpha) = 2\ln(1/\alpha)\operatorname{cosec}(\pi\varepsilon)$, $x_n(\alpha) = \pi(n+\rho)\sec(\pi\varepsilon)$, $n \in \mathbb{N}_0$.

Теорема 3. *При любом $\alpha \in (0, 1/6]$ все с. з. задачи (1) $\lambda_n(\alpha)$, попавшие в круг $|\lambda| \leqslant R_1^{2-\alpha}(\alpha)$, вещественны и, будучи упорядочены по возрастанию начиная с $\lambda_1(\alpha)$, удовлетворяют неравенствам*

$$x_{n-1}^{2-\alpha}(\alpha) < \lambda_n(\alpha) < x_n^{2-\alpha}(\alpha). \tag{4}$$

В предельном случае $\alpha = 0$ задача (1) становится краевой задачей Штурма—Лиувилля с последовательностью с. з. $\lambda_n = (\pi n)^2$. Верно ли, что

$\lim\limits_{\alpha\to 0+} \lambda_n(\alpha) = (\pi n)^2$ при любом фиксированном n? Ответ положителен. Более того, сходимость равномерна по $n \in [1, (\alpha \ln 1/\alpha)^{-1/2} h(\alpha)]$, где $h(\alpha)$ — произвольная бесконечно малая в нуле функция. Это вытекает из следующих оценок с. з., намного более точных, чем (4), но выполняющихся в существенно меньшем круге, чем рассматриваемый в теореме 3.

Теорема 4. *При любом* $\alpha \in (0,\, 0{,}1]$ *все с. з. задачи* (1)*, попавшие в круг* $|\lambda| \leqslant \alpha^{-2}$*, вещественны и положительны. Будучи расположены в порядке возрастания, они удовлетворяют неравенствам* ($\varepsilon = \alpha/(4-2\alpha) = \rho - 1/2$)

$$\begin{aligned} \left(\frac{\pi(n+\varepsilon)}{\cos\pi\varepsilon}\right)^{2-\alpha} &< \lambda_n(\alpha) < \left(\frac{\pi(n+2\varepsilon)}{\cos\pi\varepsilon}\right)^{2-\alpha}, \quad \text{если } n \text{ нечётно,} \\ \left(\frac{\pi n}{\cos\pi\varepsilon}\right)^{2-\alpha} &< \lambda_n(\alpha) < \left(\frac{\pi(n+\varepsilon)}{\cos\pi\varepsilon}\right)^{2-\alpha}, \quad \text{если } n \text{ чётно.} \end{aligned} \tag{5}$$

Следствие 1. *При любых* $\alpha \in (0,\, 0{,}1]$ *и* $n \in [1, (4\alpha)^{-1}]$ *верны неравенства*

$$(\pi n)^{2-\alpha} < \lambda_n(\alpha) < (\pi n)^2. \tag{6}$$

Следствие 2. *Если* $h(\alpha)$ — *произвольная положительная функция, заданная на полуинтервале* $0 < \alpha \leqslant 0{,}1$, $\lim\limits_{\alpha\to 0+} h(\alpha) = 0$, *то*

$$\lim_{\alpha\to 0+} \max\left\{ |\lambda_n(\alpha) - (\pi n)^2| \;\middle|\; 1 \leqslant n \leqslant \left(\alpha \ln\frac{1}{\alpha}\right)^{-1/2} h(\alpha) \right\} = 0.$$

Теорема 5. *Для величины* $N(\alpha)$*, равной количеству вещественных с. з. задачи* (1)*, верна асимптотика*

$$N(\alpha) = 8\pi^{-2}\alpha^{-1} \ln\frac{1}{\alpha} + O\left(\alpha^{-1} \ln\ln\frac{1}{\alpha}\right), \quad \alpha \to +0. \tag{7}$$

Доказательства теорем 1—5 основаны на найденном автором новом, более точном, чем в [3, гл. 3], приближении функции Миттаг-Леффлера порядка ρ в левой полуплоскости при «небольших» $|z|$ и ρ, достаточно близких к $1/2$.

Лемма 1. *При любых* $\rho \in (1/2, 2/3]$, $z \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} z > 0$, *справедливо представление* ($\rho = (2-\alpha)^{-1}$)

$$E_\rho(-z^{2-\alpha}, 2) = 2\rho z^{-1} \exp(z\cos\pi\rho)\cos(z\sin(\pi\rho) - \pi\rho) + \frac{z^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha)} - \Omega_\rho(z), \tag{8}$$

в котором остаточный член допускает следующую оценку ($x = \operatorname{Re} z$):

$$|\Omega_\rho(z)| \leqslant |\pi z|^{-1} x^{2\alpha-3} \Gamma(3-2\alpha)\left(\sin(2\pi\alpha) + \frac{1}{2}\sin\pi\alpha\right). \tag{9}$$

Доказательство. Установим сначала, что функция Ω_ρ имеет вид

$$\Omega_\rho(z) = (\pi z)^{-1}(I_{1,\rho}(z)\sin 2\pi\alpha + I_{2,\rho}(z)\sin\pi\alpha), \tag{10}$$

где

$$I_{1,\rho}(z) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{2-2\alpha}e^{-zt}}{1+2t^{2-\alpha}\cos\pi\alpha + t^{4-2\alpha}}\,dt, \quad I_{2,\rho}(z) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{2-2\alpha}e^{-zt}}{t^{\alpha-2}+2\cos\pi\alpha + t^{2-\alpha}}\,dt.$$

Тождество (8), (10) достаточно доказать при $z = x > 0$, поскольку обе его части голоморфны в открытой правой полуплоскости. Под z^α понимается $\exp(\alpha \ln z)$, $\ln$ — главная ветвь логарифма. При любых $\rho > 0$, $1/\rho \notin \{2k-1, k \in \mathbb{N}\}$, $\mu \in \mathbb{C}$, $x > 0$ имеем [2, гл. 18]

$$E_\rho(-x^{1/\rho}, \mu) = (2\pi i)^{-1} \int\limits_{\mathcal{L}(\sigma)} (\zeta^{1/\rho} + x^{1/\rho})^{-1}\zeta^{1/\rho-\mu}e^\zeta\,d\zeta,$$

где $\mathcal{L}(\sigma)$, $\sigma > x$, — петля Ханкеля, т. е. контур, состоящий из двух лучей разреза комплексной плоскости $\zeta = r\exp(\pm\pi i)$, $r \geqslant \sigma$, и дуги окружности $|\zeta| = \sigma$, соединяющей точки $\sigma\exp(-\pi i)$ и $\sigma\exp(\pi i)$. При интегрировании по контуру $\mathcal{L}(\sigma)$ переменная ζ движется из нижней полуплоскости в верхнюю. В лемме $\mu = 2$, $1/\rho = 2-\alpha$. Поэтому получаем представление

$$E_\rho(-x^{2-\alpha}, 2) = (2\pi i)^{-1} \int\limits_{\mathcal{L}(\sigma)} (\zeta^{1/\rho} + x^{1/\rho})^{-1}\zeta^{-\alpha}e^\zeta d\zeta. \tag{11}$$

Внутри петель $\mathcal{L}(\sigma)$, $0 < x < \sigma$, подынтегральная функция имеет ровно два простых полюса $\zeta_\pm = x\exp(\pm\pi i\rho)$. Все остальные её полюсы, лежащие на римановой поверхности аргумента, а именно $\{x\exp(\pm(2k+1)\pi i\rho)\}_{k\in\mathbb{N}}$, не попадают внутрь петли $\mathcal{L}(\sigma)$, поскольку $\rho > 1/2$. Сумма вычетов подынтегральной функции в точках $\zeta_\pm$ равна

$$2\rho x^{-1}\exp(x\cos\pi\rho)\cos(x\sin(\pi\rho) - \pi\rho). \tag{12}$$

По теореме о вычетах в (11) можно перейти к интегрированию по контуру $\mathcal{L}(\sigma')$, $0 < \sigma' < x$, прибавив к интегралу функцию (12):

$$E_\rho(-x^{2-\alpha}, 2) = \frac{2\rho}{x}\exp(x\cos\pi\rho)\cos(x\sin(\pi\rho) - \pi\rho) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathcal{L}(\sigma')} \frac{\zeta^{-\alpha}e^\zeta\,d\zeta}{\zeta^{1/\rho} + x^{1/\rho}}. \tag{13}$$

Преобразуем подынтегральную функцию в (13) с помощью тождеств

$$(\zeta^{1/\rho} + x^{1/\rho})^{-1} = (\zeta^{2-\alpha} + x^{2-\alpha})^{-1} = x^{\alpha-2} - x^{\alpha-2}\zeta^{2-\alpha}(\zeta^{2-\alpha} + x^{2-\alpha})^{-1},$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathcal{L}(R)} \zeta^{-\alpha}e^\zeta\,d\zeta = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}, \quad R > 0, \quad \alpha \in \mathbb{C}.$$

Получим

$$E_\rho(-x^{2-\alpha}, 2) = 2\rho x^{-1}\exp(x\cos\pi\rho)\cos(x\sin(\pi\rho) - \pi\rho) + \frac{x^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha)} - \Omega_\rho(x),$$

где

$$\Omega_\rho(x) = (2\pi i)^{-1} x^{\alpha-2} \int\limits_{\mathcal{L}(\sigma')} \zeta^{2-2\alpha} (\zeta^{2-\alpha} + x^{2-\alpha})^{-1} e^{\zeta}\, d\zeta, \quad 0 < \sigma' < x.$$

Главная часть представления (8) найдена. Преобразуем остаточный член. Ввиду стремления к нулю при $\zeta \to 0$ ($\zeta \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$) функции $\zeta^{2-2\alpha}(\zeta^{2-\alpha} + x^{2-\alpha})^{-1} e^{\zeta}$ в интеграле, выражающем $\Omega_\rho(x)$, можно перейти к интегрированию по $\mathcal{L}(0)$, т. е. по объединению берегов разреза $\zeta = r\exp(-\pi i)$ (интегрирование идёт от $-\infty$ до 0) и $\zeta = r\exp(\pi i)$ (интегрирование идёт от 0 до $-\infty$). В соответствии со сказанным находим

$$\Omega_\rho(x) = \frac{x^{\alpha-2}}{2\pi i} \int\limits_0^{+\infty} \left(\frac{\exp\bigl(-\pi i(2-2\alpha)\bigr)}{x^{2-\alpha} + r^{2-\alpha}\exp\bigl(-\pi i(2-\alpha)\bigr)} - \right.$$
$$\left. - \frac{\exp\bigl(\pi i(2-2\alpha)\bigr)}{x^{2-\alpha} + r^{2-\alpha}\exp\bigl(\pi i(2-\alpha)\bigr)} \right) r^{2-2\alpha} e^{-r}\, dr. \tag{14}$$

Положив в (14) $r = xt$, приходим к равенству

$$\Omega_\rho(x) = \frac{x^{-1}}{2\pi i} \int\limits_0^{+\infty} \left(\frac{\exp(2\pi i\alpha)}{1 + t^{2-\alpha}\exp(\pi i\alpha)} - \frac{\exp(-2\pi i\alpha)}{1 + t^{2-\alpha}\exp(-\pi i\alpha)} \right) t^{2-2\alpha} e^{-xt}\, dt =$$
$$= (\pi x)^{-1} \int\limits_0^{+\infty} (1 + 2t^{2-\alpha}\cos\pi\alpha + t^{4-2\alpha})^{-1} (\sin 2\pi\alpha + t^{2-\alpha}\sin\pi\alpha) t^{2-2\alpha} e^{-xt}\, dt.$$

Разбив последний интеграл на сумму двух, получим (10).

Выведем оценку (9). При $\rho \in (1/2, 2/3]$ имеем $\alpha \in (0, 1/2]$, откуда $\cos(\pi\alpha) \geqslant$ $\geqslant 0$. Следовательно,

$$\begin{aligned} &1 + 2t^{2-\alpha}\cos\pi\alpha + t^{4-2\alpha} \geqslant 1 + t^{4-2\alpha} > 1 \quad \forall t > 0, \\ &t^{2-\alpha} + \cos\pi\alpha + t^{\alpha-2} \geqslant t^{2-\alpha} + t^{\alpha-2} \geqslant 2 \quad \forall t > 0. \end{aligned} \tag{15}$$

Из (15) видно, что знаменатель подынтегральной функции в $I_{k,\rho}(z)$ не меньше k ($k = 1, 2$). Отсюда получаем неравенства

$$|I_{k,\rho}(z)| \leqslant k^{-1} \int\limits_0^{+\infty} t^{2-2\alpha} e^{-xt}\, dt = k^{-1} x^{2\alpha-3} \Gamma(3 - 2\alpha), \quad k = 1, 2. \tag{16}$$

Из (16) и (10) немедленно следует (9). Лемма доказана. □

Обозначим

$$F_\rho(z) = zE_\rho(-z^{2-\alpha}, 2), \quad f_\rho(z) = 2\rho\exp(z\cos\pi\rho)\cos(z\sin(\pi\rho) - \pi\rho).$$

Лемма 2. *При* $\operatorname{Re} z > 0$, $\rho \in (1/2, 2/3]$, $\alpha = 2 - 1/\rho$ *справедливо представление*

$$F_\rho(z) = f_\rho(z) + \frac{z^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} - \omega_\rho(z), \tag{17}$$

в котором $\omega_\rho(z)$ — *функция, голоморфная в полуплоскости* $\operatorname{Re} z > 0$ *и допускающая оценку*

$$|\omega_\rho(z)| \leqslant \min(1, 5\alpha) x^{2\alpha-3}, \quad x = \operatorname{Re} z. \tag{18}$$

Доказательство. Представление (17) с $\omega_\rho(z) = z\Omega_\rho(z)$ вытекает из определения функций F_ρ, f_ρ и формулы (8). Из (9) и неравенства $\Gamma(t) < 2$, $2 \leqslant t < 3$, находим

$$|\omega_\rho(z)| \leqslant \frac{2}{\pi} x^{2\alpha-3} \left(\sin(2\pi\alpha) + \frac{1}{2}\sin\pi\alpha \right). \tag{19}$$

Неравенство (18) следует из (19) и оценки $|\sin u| \leqslant \min(1, |u|)$, $u \in \mathbb{R}$. Лемма доказана. □

Доказательство теоремы 1. Из (3) видно, что $E_\rho(0,2) > 0$ для любого $\rho > 0$. Асимптотика

$$E_\rho(-\lambda, \mu) \sim \frac{1}{\lambda\Gamma(\mu - 1/\rho)}, \quad \lambda \to +\infty, \quad \forall \rho > \frac{1}{2}, \quad \mu \neq \frac{1}{\rho},$$

выведенная в [3, гл. 3], показывает, что функция $E_\rho(-\lambda, 2)$ положительна при $\rho > 1/2$ и всех достаточно больших λ. Поэтому для доказательства теоремы достаточно найти хотя бы одну точку $t_\rho > 0$, такую что $E_\rho(-t_\rho, 2) < 0$ (для любого $\alpha \in (0, 1/3]$). Покажем, что это верно при $t_\rho = (\pi(1+\rho)\operatorname{cosec}\pi\rho)^{2-\alpha}$. Согласно обозначениям, введённым перед леммой 2, требуется доказать неравенство

$$F_\rho(\pi(1+\rho)\operatorname{cosec}\pi\rho) < 0 \quad \forall \rho \in (0{,}5,\ 0{,}6]. \tag{20}$$

Поскольку при $x = \pi(1+\rho)\operatorname{cosec}\pi\rho$ имеем $f_\rho(x) = -2\rho\exp(\pi(1+\rho)\operatorname{ctg}\pi\rho)$, а функция $\omega_\rho(x) = x\Omega_\rho(x)$ положительна на $(0, +\infty)$ ввиду (10), то в свете (17) и (18) неравенство (20) вытекает из неравенства

$$\frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} < \exp(-\pi(1+\rho)\operatorname{tg}\pi\varepsilon), \quad x = \pi(1+\rho)\operatorname{cosec}\pi\rho, \tag{21}$$

где $\varepsilon = \rho - 0{,}5$, $0 < \varepsilon \leqslant 0{,}1$. Оценим сверху левую часть (21). Так как $x > 1{,}5\,\pi > 4{,}7$, $0 < \alpha \leqslant 1/3$, $1/\Gamma(\alpha) \leqslant 1/\Gamma(1/3) < 0{,}38$, то $x^{\alpha-1}/\Gamma(\alpha) < 0{,}38\,(4{,}7)^{-2/3} < 0{,}14$. В то же время правая часть (21) не меньше $\exp(-1{,}6\,\pi\operatorname{tg}18^\circ) > \exp(-1{,}7) > 0{,}17$. Неравенство (21), а вместе с ним и (20) доказаны. Этим доказательство теоремы 1 завершено. □

Лемма 3. *При любом* $\alpha \in (0, 1/3]$ *справедливо двойное неравенство*

$$4 < \alpha R(\alpha) < 2{,}5\,\ln^2\frac{2}{\alpha}. \tag{22}$$

Доказательство. Поскольку $\operatorname{cosec}(\pi\varepsilon) > (\pi\varepsilon)^{-1}$, $2/\alpha \geqslant 6$, то

$$R(\alpha) > 2(\pi\varepsilon)^{-1}(\ln 6 + \ln\ln 6) > \frac{4{,}6}{\pi}\varepsilon^{-1} = \frac{4{,}6}{\pi}\,\frac{4-2\alpha}{\alpha}.$$

Следовательно,

$$\alpha R(\alpha) > \frac{4{,}6}{\pi}(4-2\alpha) \geqslant \frac{4{,}6}{\pi}\left(3+\frac{1}{3}\right) > 4{,}8.$$

Левое неравенство (22) доказано. Так как $\varepsilon \leqslant 0{,}1$, то $\operatorname{cosec}(\pi\varepsilon) < (3\varepsilon)^{-1}$, а из неравенства $\ln x < x/2$ (для любого $x > 0$) вытекает, что $\ln\ln(2/\alpha) < 0{,}5\ \ln(2/\alpha)$. Следовательно,

$$R(\alpha) < (3\varepsilon)^{-1}\cdot 3\ln\frac{2}{\alpha} = \varepsilon^{-1}\ln\frac{2}{\alpha} = (4-2\alpha)\alpha^{-1}\ln\frac{2}{\alpha}.$$

Отсюда находим, что

$$\alpha R(\alpha) < 4\ln\frac{2}{\alpha} = 2{,}5\cdot 1{,}6\ \ln\frac{2}{\alpha} < 2{,}5\ \ln^2\frac{2}{\alpha},$$

поскольку $\ln(2/\alpha) \geqslant \ln 6 > 1{,}6$. Лемма доказана. □

Лемма 4. *При любом $\alpha \in [0,1]$ функция $E_\rho(z,2)$, $\rho = (2-\alpha)^{-1}$, не имеет нулей в круге $|z| \leqslant \Gamma(4-\alpha)$.*

Доказательство. Докажем более сильное утверждение:

$$\operatorname{Re} E_\rho(z,2) > 0, \quad |z| \leqslant \Gamma(4-\alpha). \tag{23}$$

Соотношение (23) достаточно доказать только при $z = \Gamma(4-\alpha)e^{i\varphi}$, $\varphi \in \mathbb{R}$, поскольку действительная часть целой функции является гармонической во всей плоскости, а значит, её минимум в любом круге достигается на границе этого круга. Имеем

$$\operatorname{Re} E_\rho(\Gamma(4-\alpha)e^{i\varphi},2) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Gamma^k(4-\alpha)}{\Gamma(2k+2-k\alpha)}\cos k\varphi. \tag{24}$$

Сумма произвольного ряда $a_0/2 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k\cos k\varphi$ с убывающей и выпуклой последовательностью коэффициентов $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$, $a_k > 0$, положительна (не меньше чем $a_0/2 - a_1 + a_2/2$) [1, гл. 1, § 30]. В ряде (24) $a_0 = 2$, $a_k = \Gamma^k(4-\alpha)/\Gamma(2k+2-k\alpha)$, $k \in \mathbb{N}$. В частности, $a_1 = 1$. Убывание и выпуклость последовательности $\{a_k\}$ равносильны справедливости неравенств

$$a_{k+1} < a_k, \quad 0 \leqslant a_k - 2a_{k+1} + a_{k+2} \quad \forall k \in \mathbb{N}, \tag{25}$$

которые сейчас будут доказаны (при $k = 0$ неравенства (25) очевидны: $a_1 = a_0/2 < a_0$, $a_0 - 2a_1 + a_2 = a_2 > 0$).

Покажем, что при $k \geqslant 2$ верны более сильные неравенства $2a_{k+1} \leqslant a_k$. Для изучаемой последовательности $\{a_k\}$ они после замены переменной $\alpha = 1-t$ принимают вид

$$2\Gamma(3+t)\Gamma(k+2+kt) \leqslant \Gamma(k+3+(k+1)t) \quad \forall t \in [0,1]. \tag{26}$$

Тем самым требуется доказать, что

$$f_k(t) = \ln\Gamma(k+3+(k+1)t) - \ln\Gamma(k+2+kt) - \ln\Gamma(3+t) - \ln 2 \geqslant 0$$

при любых $k \geqslant 2$ и $t \in [0,1]$. Имеем

$$\begin{aligned}
&f_k(0) = \ln\Gamma(k+3) - \ln\Gamma(k+2) - \ln\Gamma(3) - \ln 2 = \ln(k+2) - \ln 4 \geqslant 0 \quad \forall k \geqslant 2,\\
&f_k'(t) = (k+1)\psi(k+3+(k+1)t) - k\psi(k+2+kt) - \psi(3+t) \geqslant\\
&\quad \geqslant (k+1)\psi(k+3+(k+1)t) - (k+1)\psi(k+2+kt) =\\
&\quad = (k+1)\big(\psi(k+3+(k+1)t) - \psi(k+2+kt)\big) > 0 \quad \forall k \geqslant 2 \;\; \forall t > 0
\end{aligned}$$

(использовано возрастание ψ — логарифмической производной гамма-функции). Итак, $f_k(0) \geqslant 0$, $f_k'(t) > 0$ при всех $t > 0$. Отсюда вытекает положительность $f_k(t)$ при $t > 0$, что и доказывает неравенства (26).

Докажем неравенства (25) при $k = 1$. Первое из них принимает вид $\Gamma^2(3+t) < \Gamma(4+2t)$ (при любом $t \in [0,1]$) и равносильно следующему: $f(t) = \ln\Gamma(4+2t) - 2\ln\Gamma(3+t) > 0$, $0 \leqslant t \leqslant 1$. Имеем

$$f(0) = \ln\Gamma(4) - 2\ln\Gamma(3) = \ln 1{,}5 > 0, \quad f'(t) = 2\psi(4+2t) - 2\psi(3+t) > 0.$$

Отсюда заключаем, что $f(t) > 0$, а это и требовалось доказать. Второе неравенство (25) при $k = 1$ имеет вид

$$0 \leqslant a_1 - 2a_2 + a_3 = 1 - 2\frac{\Gamma^2(3+t)}{\Gamma(4+2t)} + \frac{\Gamma^3(3+t)}{\Gamma(5+3t)}, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

При $t = 0$ функция

$$g(t) = 1 - 2\frac{\Gamma^2(3+t)}{\Gamma(4+2t)} + \frac{\Gamma^3(3+t)}{\Gamma(5+3t)}$$

обращается в нуль. Поэтому для доказательства неотрицательности $g(t)$ достаточно доказать неотрицательность производной

$$\begin{aligned}
g'(t) = \frac{3\Gamma^3(3+t)\big(\psi(3+t) - \psi(5+3t)\big)}{\Gamma(5+3t)} - \frac{4\Gamma^2(3+t)\big(\psi(3+t) - \psi(4+2t)\big)}{\Gamma(4+2t)} =\\
= 4a_2\big(\psi(4+2t) - \psi(3+t)\big) - 3a_3\big(\psi(5+3t) - \psi(3+t)\big).
\end{aligned}$$

Ввиду вогнутости функции ψ на $\mathbb{R}_+$ верно неравенство

$$\psi(a) - 2\psi(a+h) + \psi(a+2h) \leqslant 0, \quad h > 0.$$

Применив это неравенство при $a = 3+t$, $h = 1+t$, получим

$$\psi(3+t) - 2\psi(4+2t) + \psi(5+3t) \leqslant 0 \iff \psi(5+3t) - \psi(4+2t) \leqslant \psi(4+2t) - \psi(3+t).$$

Отсюда находим, что

$$\begin{aligned}
\psi(5+3t) - \psi(3+t) = \big(\psi(5+3t) - \psi(4+2t)\big) + \big(\psi(4+2t) - \psi(3+t)\big) \leqslant\\
\leqslant 2\big(\psi(4+2t) - \psi(3+t)\big).
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$g'(t) \geqslant 4a_2\bigl(\psi(4+2t)-\psi(3+t)\bigr) - 6a_3\bigl(\psi(4+2t)-\psi(3+t)\bigr) = \\ = 4\bigl(\psi(4+2t)-\psi(3+t)\bigr)(a_2 - 1{,}5\,a_3) > 0,$$

так как согласно доказанному выше $2a_3 < a_2$. Доказательство неравенств (25), а вместе с ними и леммы 4 завершено. □

Доказательство теоремы 2. Ввиду положительности всех тейлоровых коэффициентов функции $E_\rho(z,2)$ уравнение (2) не имеет отрицательных корней. Отсутствие его корней на отрезке $[0,\Gamma(4-\alpha)]$ вытекает из леммы 4. Отсутствие корней уравнения (2) на луче $[R^{2-\alpha},+\infty)$ равносильно знакопостоянству функции $F_\rho(x)$ при $x \geqslant R(\alpha)$. Докажем неравенство

$$x^{2\alpha-3} + \exp(-x\sin\pi\varepsilon) < \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, \quad x \geqslant R(\alpha), \quad 0 < \alpha \leqslant \frac{1}{3}, \quad \varepsilon = \frac{\alpha}{4-2\alpha}. \tag{27}$$

Тогда из (17), (18) и (27) получим, что $F_\rho(x) > 0$ при $x \geqslant R(\alpha)$.

Умножив обе части (27) на x и заменив в правой части x^α на 1 и $1/\Gamma(\alpha)$ на α, мы только усилим неравенство (27):

$$x^{2\alpha-2} + x\exp(-x\sin\pi\varepsilon) < \alpha, \quad x \geqslant R(\alpha), \quad 0 < \alpha \leqslant \frac{1}{3}. \tag{28}$$

Левая часть (28) является убывающей функцией x при $x \geqslant \operatorname{cosec}(\pi\varepsilon)$, а так как $R(\alpha) > \operatorname{cosec}(\pi\varepsilon)$, то достаточно доказать (28) при $x = R(\alpha)$. Имеем $x^{2\alpha-2} \leqslant x^{-4/3} < R^{-1}(\alpha)$,

$$\exp(-R(\alpha)\sin\pi\varepsilon) = \exp\left(-2\ln\frac{2}{\alpha} - 2\ln\ln\frac{2}{\alpha}\right) = 0{,}25\,\alpha^2\ln^{-2}\frac{2}{\alpha}.$$

Следовательно, достаточно доказать неравенство

$$R^{-1}(\alpha) + 0{,}25\,\alpha^2\ln^{-2}\frac{2}{\alpha}R(\alpha) < \alpha, \quad 0 < \alpha \leqslant \frac{1}{3}. \tag{29}$$

Согласно лемме 3 имеем $\alpha R(\alpha)\ln^{-2}(2/\alpha) \leqslant 2{,}5$, $R^{-1}(\alpha) < 0{,}25\,\alpha$. Отсюда видно, что левая часть (29) меньше $0{,}25\,\alpha + 0{,}625\,\alpha < \alpha$, что и требовалось. Теорема доказана. □

Лемма 5. *При любых $\alpha \in (0,1/6]$, $\rho = (2-\alpha)^{-1}$ справедливо неравенство $\pi\rho < \sin^2(\pi\rho)\Gamma^\rho(4-\alpha)$.*

Доказательство. Поскольку $1/2 < \rho \leqslant 6/11$ при $0 < \alpha \leqslant 1/6$, то $\pi\rho\sin^{-2}\pi\rho \leqslant (6\pi/11)\sin^{-2}(6\pi/11) < 1{,}8$. С другой стороны, $\Gamma^\rho(4-\alpha) \geqslant \sqrt{\Gamma(4-1/6)} \geqslant 2$. Лемма доказана. □

Доказательство теоремы 3. По лемме 4 уравнение (2) не имеет корней при $|\lambda| \leqslant \Gamma(4-\alpha)$ и согласно [11] не имеет корней вне угла $|\arg\lambda| \leqslant \pi\alpha/2$. Поэтому ограничимся рассмотрением компакта

$$D_\alpha = \left\{\lambda \in \mathbb{C} \;\middle|\; \Gamma(4-\alpha) \leqslant |\lambda| \leqslant R_1^{2-\alpha}(\alpha),\ |\arg\lambda| \leqslant \pi\frac{\alpha}{2}\right\}.$$

Множество D_α при отображении $z=\lambda^\rho$ переходит в

$$G_\alpha=\left\{z\in\mathbb{C}\;\middle|\;\Gamma^\rho(4-\alpha)\leqslant|z|\leqslant R_1(\alpha),\ |\arg z|\leqslant\pi\left(\rho-\frac{1}{2}\right)\right\}.$$

Поэтому надо доказать, что все нули $F_\rho(z)$ (обозначим их z_m), лежащие в G_α, вещественны, просты и, будучи занумерованы в порядке возрастания, удовлетворяют неравенствам $x_{m-1}<z_m<x_m$.

Пусть $M(\alpha)$ — наименьшее натуральное число M, такое что $R_1(\alpha)\leqslant x_M$. Обозначим

$$\Pi_m=\{z\in\mathbb{C}\mid x_{m-1}\leqslant\operatorname{Re}z\leqslant x_m\},\quad \Pi_\alpha=\bigcup_{m=1}^{M(\alpha)}\Pi_m.$$

Заметим, что $G_\alpha\subset\Pi_\alpha$. Действительно, неравенство $\operatorname{Re}z\leqslant x_{M(\alpha)}$ (для любого $z\in G_\alpha$) вытекает из выбора $M(\alpha)$, а неравенство $x_0\leqslant\operatorname{Re}z$ (для любого $z\in G_\alpha$) является следствием соотношений

$$\min\{\operatorname{Re}z\mid z\in G_\alpha\}=\Gamma^\rho(4-\alpha)\cos\left(\pi\left(\rho-\frac{1}{2}\right)\right)=\Gamma^\rho(4-\alpha)\sin\pi\rho,\quad x_0=\frac{\pi\rho}{\sin\pi\rho}$$

и леммы 5. Поэтому цель будет достигнута, если установить вещественность и простоту всех нулей $F_\rho(z)$, лежащих в Π_α, и проверить, что в каждом из интервалов (x_{m-1},x_m), $1\leqslant m\leqslant M(\alpha)$, имеется ровно один нуль. Докажем, что в каждой полосе Π_m, $1\leqslant m\leqslant M(\alpha)$, функция $F_\rho(z)$ имеет единственный нуль, не попадающий на границу Π_m. Тогда ввиду действительнозначности $F_\rho(z)$ при $x>0$ получим, что этот нуль веществен, т. е. лежит на интервале (x_{m-1},x_m).

Очевидно, что функция $f_\rho(z)$ имеет в Π_m единственный нуль при любом $m\in\mathbb{N}$. Представление (17) вместе с теоремой Руше убеждает в том, что существование и единственность нуля $F_\rho(z)$ в полосе Π_m, $1\leqslant m\leqslant M(\alpha)$, следует из неравенства

$$|\omega_\rho(z)|+\left|\frac{z^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right|<|f_\rho(z)|,\quad z\in\partial\Pi_m(T),\quad 1\leqslant m\leqslant M(\alpha),\tag{30}$$

где $\Pi_m(T)=\{z\in\Pi_m\mid|\operatorname{Im}z|\leqslant T\}$, причём T можно выбрать сколь угодно большим. При $z=x\pm iT$, $x\geqslant x_0(\rho)$, $T\geqslant 3x/\sin\pi\rho$, неравенство (30) вытекает из оценок $|\omega_\rho(z)|<1$ (см. лемму 2), $|z^{\alpha-1}|/\Gamma(\alpha)<1$ ($\operatorname{Re}z>1$), $x_0=\pi\rho\operatorname{cosec}\pi\rho>\pi\rho>\pi/2$, $|\cos(\xi+i\eta)|\geqslant|\operatorname{sh}\eta|$, $\xi,\eta\in\mathbb{R}$. Действительно, отсюда видно, что левая часть (30) меньше 2 и

$$|f_\rho(z)|\geqslant 2\rho\exp(x\cos\pi\rho)\operatorname{sh}(T\sin\pi\rho)>e^{-x}\operatorname{sh}(3x)>e^x>2\quad\text{при}\quad x\geqslant 1.$$

Для доказательства неравенства (30) на вертикалях $\operatorname{Re}z=x_m$, $0\leqslant m\leqslant M(\alpha)$, воспользуемся оценками

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}=\frac{\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\leqslant\frac{\alpha}{\Gamma(7/6)}<1{,}1\,\alpha$$

и (18). При $z = x_m + iy$, $y \in \mathbb{R}$, имеем

$$|\cos(z\sin\pi\rho - \pi\rho)| = \left|\cos\bigl(x_m\sin(\pi\rho) - \pi\rho + iy\sin(\pi\rho)\bigr)\right| = \\ = \left|\cos\bigl(\pi m + iy\sin(\pi\rho)\bigr)\right| = \operatorname{ch}(y\sin\pi\rho) \geqslant 1.$$

Следовательно, достаточно доказать, что ($\varepsilon = \rho - 0{,}5$)

$$5\alpha x_m^{2\alpha-3} + 1{,}1\,\alpha x_m^{\alpha-1} < 2\rho\exp(-x_m\sin\pi\varepsilon), \quad 0 \leqslant m \leqslant M(\alpha). \tag{31}$$

Рассмотрим сначала $m = 0$. Неравенство (31) приобретает вид

$$5\alpha x_0^{2\alpha-3} + 1{,}1\,\alpha x_0^{\alpha-1} < 2\rho\exp(-\pi\rho\operatorname{tg}\pi\varepsilon). \tag{32}$$

Так как $\alpha \leqslant 1/6$ (тогда $\varepsilon \leqslant 1/22$), $x_0 > \pi/2 > 1{,}5$, то (32) следует из численного неравенства

$$\frac{5}{6}\left(\frac{2}{3}\right)^{8/3} + 0{,}2\left(\frac{2}{3}\right)^{5/6} < \exp\left(-\frac{6\pi}{11}\operatorname{tg}\frac{\pi}{22}\right),$$

проверяемого непосредственно. Неравенство (32), а значит, и (31) при $m = 0$ доказаны.

При $m \geqslant 1$ имеем $x_m \geqslant x_1 > \pi(1+\rho) > 1{,}5\,\pi > 4{,}7$. Поэтому

$$5x_m^{2\alpha-3} \leqslant 5x_1^{\alpha-2}\cdot x_m^{\alpha-1} < 5\,(4{,}7)^{-11/6}x_m^{\alpha-1} < 0{,}3\,x_m^{\alpha-1}.$$

На основании этой оценки при $m \geqslant 1$ заменим неравенство (31) более сильным неравенством

$$1{,}4\,\alpha x_m^{\alpha-1} < 2\rho\exp(-x_m\sin\pi\varepsilon), \quad 1 \leqslant m \leqslant M(\alpha), \tag{33}$$

которое сейчас и докажем. Если $x_m < \operatorname{cosec}\pi\varepsilon$, то правая часть (33) превосходит e^{-1}, а левая меньше $1{,}4\,\alpha \leqslant 1{,}4/6 < 0{,}3 < e^{-1}$, и неравенство (33) выполняется. При $x_m \geqslant \operatorname{cosec}(\pi\varepsilon)$ умножим обе части (33) на x_m. Получим неравенство

$$1{,}4\,\alpha x_m^{\alpha} < 2\rho x_m\exp(-x_m\sin\pi\varepsilon), \quad m \leqslant M(\alpha), \quad x_m \geqslant \operatorname{cosec}\pi\varepsilon. \tag{34}$$

Поскольку функция $x\exp(-x\sin\pi\varepsilon)$ убывает при $x \geqslant \operatorname{cosec}(\pi\varepsilon)$, а функция x^α возрастает, то достаточно доказать неравенство (34) при $m = M(\alpha)$. В силу выбора $M(\alpha)$ имеем $x_{M(\alpha)-1} < R_1(\alpha) \leqslant x_{M(\alpha)}$, откуда находим, что

$$x_{M(\alpha)} < R_1(\alpha) + (x_{M(\alpha)} - x_{M(\alpha)-1}) = R_1(\alpha) + \pi\sec\pi\varepsilon < 1{,}5\,R_1(\alpha). \tag{35}$$

Из (35) и определения $R_1(\alpha)$ получаем оценку

$$x_{M(\alpha)}^{\alpha} \leqslant \bigl(1{,}5\,R_1(\alpha)\bigr)^{\alpha} = \left(\frac{3\ln(1/\alpha)}{\sin\pi\varepsilon}\right)^{\alpha} < \left(\frac{\ln(1/\alpha)}{\varepsilon}\right)^{\alpha} \tag{36}$$

(были использованы неравенства $\operatorname{cosec}(\pi\varepsilon) < (3\varepsilon)^{-1}$, $0 < \varepsilon < 1/6$, и $\alpha \leqslant 1/6$). Поскольку $\varepsilon = \rho - 0{,}5$, $\rho = (2-\alpha)^{-1}$, то $\varepsilon^{-1} = (4-2\alpha)/\alpha < 4/\alpha$. Отсюда и из неравенства $\ln t < t/3$ (для любого $t \geqslant 6$) находим

$$x_{M(\alpha)}^{\alpha} < \left(\frac{4}{3\alpha^2}\right)^{\alpha} \leqslant \sqrt[6]{48}. \tag{37}$$

Следовательно, левая часть неравенства (34), которое требуется доказать, меньше $2{,}8\,\alpha$.

Оценим снизу правую часть (34). На основании (35) имеем

$$x_{M(\alpha)}\exp(-x_{M(\alpha)}\sin\pi\varepsilon) > R_1(\alpha)\exp(-R_1(\alpha)\sin\pi\varepsilon - \pi\operatorname{tg}\pi\varepsilon) =$$
$$= R_1(\alpha)\exp\left(-2\ln\frac{1}{\alpha} - \pi\operatorname{tg}\pi\varepsilon\right) = 2\alpha^2\ln\frac{1}{\alpha}\operatorname{cosec}(\pi\varepsilon)\exp(-\pi\operatorname{tg}\pi\varepsilon) >$$
$$> 2(\pi\varepsilon)^{-1}\alpha^2\ln\frac{1}{\alpha}\exp\left(-\pi\operatorname{tg}\frac{\pi}{22}\right).$$

Поскольку $2\rho\varepsilon^{-1} = 4/\alpha$, $\exp\bigl(-\pi\operatorname{tg}(\pi/22)\bigr) > 0{,}63$, то получаем, что правая часть неравенства (34) превосходит

$$\frac{8\cdot 0{,}63}{\pi}\alpha\ln\frac{1}{\alpha} > 1{,}6\,\alpha\ln 6 > 2{,}8\,\alpha.$$

Неравенство (34) доказано, и этим доказательство теоремы 3 завершено. □

В [6] приведены два вещественных с. з. задачи (1) для $\alpha = 0{,}1$, вычисленные с двумя верными знаками после запятой. Теорема 3 позволяет утверждать, что при $\alpha = 0{,}1$ задача (1) имеет не менее 16 вещественных с. з. Это видно из численного неравенства

$$x_{16} = \frac{\pi(16 + 10/19)}{\sin(10\pi/19)} < R_1(0{,}1) = \frac{2\ln 10}{\sin(\pi/38)}.$$

Доказательство теоремы 4. Вещественность и положительность всех с. з. в круге $|\lambda| \leqslant \alpha^{-2}$ следует из теоремы 3, так как при $\alpha \in (0,\ 0{,}1]$ имеем

$$R_1^{2-\alpha} > \left(2\ln\frac{1}{\alpha}(\pi\varepsilon)^{-1}\right)^{2-\alpha} = \left(\frac{8-4\alpha}{\pi}\alpha^{-1}\ln\frac{1}{\alpha}\right)^{2-\alpha} >$$
$$> \left(\frac{7}{\pi}\alpha^{-1}\ln 10\right)^{2-\alpha} > (4\alpha^{-1})^{2-\alpha} = 16\alpha^{-2}\left(\frac{\alpha}{4}\right)^{\alpha} \geqslant 4\alpha^{-2}$$

(в конце выкладки используется равенство $\min\limits_{\alpha\in(0,1]}(\alpha/4)^{\alpha} = 1/4$). Из определения величин $x_n(\alpha)$ при всех $n \in \mathbb{N}$ и $\alpha \in (0,1)$ следуют неравенства

$$x_{n-1}(\alpha) < \pi n\sec(\pi\varepsilon) < \pi(n+2\varepsilon)\sec(\pi\varepsilon) < x_n(\alpha). \tag{38}$$

Соотношения (38) показывают, что неравенства (5) точнее оценок (4). Для доказательства (5) достаточно проверить, что функция $F_\rho(z)$ (её определение приведено перед леммой 2) имеет разные знаки в парах точек $(\pi(n+\varepsilon)\sec\pi\varepsilon, \pi(n+2\varepsilon)\sec\pi\varepsilon)$ при n нечётном и $(\pi n\sec\pi\varepsilon, \pi(n+\varepsilon)\sec\pi\varepsilon)$ при n чётном. Поскольку нас интересуют с. з. λ_n, лежащие в круге $|\lambda| \leqslant \alpha^{-2}$, то выполнено ограничение

$$(\pi n\sec\pi\varepsilon) \leqslant \alpha^{-2\rho}. \tag{39}$$

Эти рассуждения показывают, что для доказательства теоремы осталось при ограничении (39) вывести неравенства

$$F_\rho(\pi(n+\varepsilon)\sec\pi\varepsilon) > 0, \tag{40}$$

$$F_\rho(\pi n\sec\pi\varepsilon) < 0, \quad \text{если } n \text{ чётно}, \quad F_\rho(\pi(n+2\varepsilon)\sec\pi\varepsilon) < 0, \quad \text{если } n \text{ нечётно}. \tag{41}$$

Напомним, что $\varepsilon = \rho - 1/2$. Следовательно, $\sin\pi\rho = \cos\pi\varepsilon$, $\cos\pi\rho = -\sin\pi\varepsilon$. Нетрудно убедиться в том, что $f_\rho(\pi(n+\varepsilon)\sec\pi\varepsilon) = 0$ при любом $n\in\mathbb{N}$. Поэтому, обозначив $\xi_n = \pi(n+\varepsilon)\sec\pi\varepsilon$ и применив лемму 2, находим, что

$$\begin{aligned}F_\rho(\xi_n) &= \frac{\xi_n^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \omega_\rho(\xi_n) > \frac{\xi_n^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} - 5\alpha\xi_n^{2\alpha-3} = \alpha\xi_n^{\alpha-1}\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} - 5\xi_n^{\alpha-2}\right) > \\ &> \alpha\xi_n^{\alpha-1}(1-5\xi_n^{\alpha-2}) \geqslant \alpha\xi_n^{\alpha-1}(1-5\xi_1^{\alpha-2}) > \\ &> \alpha\xi_n^{\alpha-1}(1-5\pi^{\alpha-2}) \geqslant \alpha\xi_n^{\alpha-1}(1-5\pi^{-1{,}9}) > 0.\end{aligned}$$

Неравенства (40) доказаны.

Докажем неравенства (41). При чётном n, обозначив $\eta_n = \pi n\sec\pi\varepsilon$, имеем

$$\cos(\eta_n\sin\pi\rho - \pi\rho) = \cos\left(\eta_n\cos\pi\varepsilon - \pi\varepsilon - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\pi n - \pi\varepsilon - \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\pi\varepsilon.$$

Отсюда, учитывая ограничения (39), находим

$$\begin{aligned}f_\rho(\eta_n) &= -2\rho\exp(-\eta_n\sin\pi\varepsilon)\sin\pi\varepsilon < -3\varepsilon\exp(-\eta_n\sin\pi\varepsilon) < \\ &< -3\varepsilon\exp(-\alpha^{-2\rho}\pi\varepsilon) = -3\varepsilon\exp\left(-\frac{\alpha^{1-2\rho}\pi}{4-2\alpha}\right) < -3\varepsilon\exp\left(-\frac{\alpha^{1-2\rho}\pi}{3{,}8}\right).\end{aligned}$$

Поскольку $\alpha^{1-2\rho} = \alpha^{-\alpha/(2-\alpha)}$, $\max\limits_{0<\alpha\leqslant 0{,}1}\alpha^{-\alpha/(2-\alpha)} = (0{,}1)^{-0{,}1/1{,}9} = 10^{1/19} < 1{,}2$, то

$$f_\rho(\eta_n) < -3\varepsilon\exp\left(-\frac{1{,}2\,\pi}{3{,}8}\right) < -3\frac{\varepsilon}{e} < -1{,}1\,\varepsilon.$$

Это соотношение вместе с леммой 2 с учётом возрастания и вогнутости функции $1/\Gamma(t)$ на отрезке $1\leqslant t\leqslant 1{,}1$ приводит к неравенствам

$$\begin{aligned}F_\rho(\eta_n) &< -1{,}1\,\varepsilon + \frac{\eta_n^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + 5\alpha\eta_n^{2\alpha-3} = -\frac{1{,}1\,\alpha}{4-2\alpha} + \frac{\alpha\eta_n^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha+1)} + 5\alpha\eta_n^{2\alpha-3} < \\ &< -\frac{1{,}1\,\alpha}{4} + \frac{\alpha\eta_n^{\alpha-1}}{\Gamma(1{,}1)} + 5\alpha\eta_n^{2\alpha-3} < -0{,}27\,\alpha + 1{,}06\,\alpha\eta_n^{\alpha-1} + 5\alpha\eta_n^{2\alpha-3}.\end{aligned}$$

Так как n чётно, то $n\geqslant 2$ и $\eta_n\geqslant 2\pi$. Поэтому

$$\begin{aligned}\alpha^{-1}F_\rho(\eta_n) &< -0{,}27 + 1{,}06\,(2\pi)^{\alpha-1} + 5(2\pi)^{2\alpha-3} \leqslant \\ &\leqslant -0{,}27 + 1{,}06\,(2\pi)^{-0{,}9} + 5(2\pi)^{-2{,}8} < 0,\end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Теперь докажем (40) при нечётных n. Сначала рассмотрим $n\geqslant 3$. Обозначим

$$\eta_n' = \pi(n+2\varepsilon)\sec\pi\varepsilon = \eta_n + 2\pi\varepsilon\sec\pi\varepsilon.$$

По аналогии с предыдущими рассуждениями находим $\cos(\eta_n' \sin\pi\rho - \pi\rho) = -\sin\pi\varepsilon$,

$$\begin{aligned} f_\rho(\eta_n') &= -2\rho\exp(-\eta_n'\sin\pi\varepsilon)\sin\pi\varepsilon = \\ &= -(1+2\varepsilon)\exp(-\eta_n\sin\pi\varepsilon)\exp(-2\pi\varepsilon\operatorname{tg}\pi\varepsilon)\sin\pi\varepsilon < \\ &< -(1+2\varepsilon)\exp(-2\pi\varepsilon\operatorname{tg}\pi\varepsilon)1{,}1\varepsilon. \end{aligned}$$

Нетрудно убедиться в том, что при $\alpha \in (0,\, 0{,}1]$ величина $\varepsilon = \alpha/(4-2\alpha)$ меняется в пределах $0 < \varepsilon \leqslant 1/38$, а функция $(1+2\varepsilon)\exp(-2\pi\varepsilon\operatorname{tg}\pi\varepsilon)$ превосходит 1 на полуинтервале $0 < \varepsilon \leqslant 1/38$. Отсюда получаем оценки $f_\rho(\eta_n') < -1{,}1\,\varepsilon$,

$$F_\rho(\eta_n') < -1{,}1\,\varepsilon + \frac{{\eta_n'}^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + 5\alpha{\eta_n'}^{2\alpha-3} < -0{,}27\,\alpha + 1{,}06\,\alpha{\eta_n'}^{\alpha-1} + 5\alpha{\eta_n'}^{2\alpha-3}.$$

Так как $n \geqslant 3$, то $\eta_n' \geqslant 3\pi$. Поэтому

$$\alpha^{-1}F_\rho(\eta_n') < -0{,}27 + 1{,}06\,(3\pi)^{-0{,}9} + 5\,(3\pi)^{-2{,}8} < 0,$$

что и требовалось доказать.

Наконец, докажем (40) при $n = 1$. По-прежнему $\cos(\eta_1'\sin\pi\rho - \pi\rho) = -\sin\pi\varepsilon$. Отсюда, учитывая, что $\sin\pi\varepsilon > 3{,}1\,\varepsilon$ при $\varepsilon \in (0, 1/38]$, находим

$$f_\rho(\eta_1') = -2\rho\exp(-\pi(1+2\varepsilon)\operatorname{tg}\pi\varepsilon)\sin\pi\varepsilon < -3{,}1\,\varepsilon\exp(-\pi(1+2\varepsilon)\operatorname{tg}\pi\varepsilon).$$

В силу неравенства $\exp(-\pi(1+2\varepsilon)\operatorname{tg}\pi\varepsilon) \geqslant \exp\bigl(-\pi(1+1/19)\operatorname{tg}(\pi/38)\bigr) > 0{,}76$, $0 < \varepsilon \leqslant 1/38$, получаем оценки $f_\rho(\eta_1') < -2{,}356\,\varepsilon < -0{,}589\,\alpha$,

$$\begin{aligned} F_\rho(\eta_1') &< -0{,}589\,\alpha + 1{,}06\,\alpha{\eta_1'}^{\alpha-1} + 5\alpha{\eta_1'}^{2\alpha-3} < \\ &< -0{,}589\,\alpha + 1{,}06\,\pi^{\alpha-1} + 5\alpha\pi^{2\alpha-3} < \alpha(-0{,}589 + 1{,}06\,\pi^{-0{,}9} + 5\pi^{-2{,}8}) < 0. \end{aligned}$$

Неравенства (41) полностью доказаны, и это завершает доказательство теоремы 4. □

Доказательство следствия 1. Проверим сперва, что все с. з. задачи (1) с номерами $n \leqslant n_0 = n_0(\alpha) = [(4\alpha)^{-1}]$ попадают в круг $|\lambda| \leqslant \alpha^{-2}$. В свете теоремы 4 для этого достаточно доказать, что

$$(\pi(n_0+2\varepsilon)\sec\pi\varepsilon)^{2-\alpha} \leqslant \alpha^{-2} \iff n_0 + 2\varepsilon \leqslant \alpha^{-2/(2-\alpha)}\pi^{-1}\cos(\pi\varepsilon).$$

Последнее неравенство равносильно следующему:

$$\alpha n_0(\alpha) \leqslant \alpha^{-\alpha/(2-\alpha)}\pi^{-1}\cos(\pi\varepsilon) - 2\alpha\varepsilon. \tag{42}$$

Левая часть в (42) меньше $1/4$, а правая больше

$$\pi^{-1}\cos(\pi\varepsilon) - 2\alpha\varepsilon \geqslant \pi^{-1}\cos\left(\frac{\pi}{38}\right) - 0{,}2\,\varepsilon > 0{,}3 - \frac{0{,}2}{38} > 0{,}29,$$

что и доказывает требуемое. Таким образом, все с. з. с номерами $n \leqslant [(4\alpha)^{-1}]$ лежат в круге $|\lambda| \leqslant \alpha^{-2}$. Тогда по теореме 4 для них верны неравенства (5).

Следовательно, осталось доказать, что

$$(\pi n)^{2-\alpha} < \left(\frac{\pi n}{\cos \pi\varepsilon}\right)^{2-\alpha}, \quad \left(\frac{\pi(n+2\varepsilon)}{\cos \pi\varepsilon}\right)^{2-\alpha} < (\pi n)^2,$$

$$0 < \varepsilon \leqslant \frac{1}{38}, \quad 0 < \alpha \leqslant 0{,}1, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{43}$$

Первое неравенство (43) тривиально. Докажем второе. Оно равносильно следующему:

$$\left(\left(1 + \frac{2\varepsilon}{n}\right) \sec \pi\varepsilon\right)^{2-\alpha} < (\pi n)^{\alpha}. \tag{44}$$

Левая часть (44) с ростом n убывает, а правая возрастает. Поэтому неравенство (44) достаточно доказать при $n = 1$. Оно принимает вид $\big((1 + 2\varepsilon) \sec \pi\varepsilon\big)^{2-\alpha} < \pi^{\alpha}$. А так как $\alpha/(2 - \alpha) = 2\varepsilon$, то остаётся доказать, что

$$(1 + 2\varepsilon) \sec \pi\varepsilon < \pi^{2\varepsilon} = e^{2\varepsilon} \left(\frac{\pi}{e}\right)^{2\varepsilon}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant \frac{1}{38}. \tag{45}$$

При $0 < \varepsilon \leqslant 1/38$ имеем

$$\sec^2 \pi\varepsilon = 1 + \operatorname{tg}^2 \pi\varepsilon < 1 + 16\varepsilon^2 < \exp\left(\frac{\varepsilon}{2}\right).$$

А так как $\pi/e > \exp(1/8)$, то $\sec(\pi\varepsilon) < \exp(\varepsilon/4) < (\pi/e)^{2\varepsilon}$. Отсюда и из неравенства $1 + 2\varepsilon < e^{2\varepsilon}$ получаем (45). Следствие 1 доказано. $\square$

Доказательство следствия 2. Из (6) видно, что

$$|\lambda_n(\alpha) - (\pi n)^2| < (\pi n)^2 - (\pi n)^{2-\alpha} =$$
$$= (\pi n)^2 \Big(1 - \exp\big(-\alpha \ln(\pi n)\big)\Big) = O\big(\alpha (\pi n)^2 \ln(\pi n)\big).$$

Отсюда при $n \leqslant (\alpha \ln 1/\alpha)^{-1/2} h(\alpha)$ находим, что

$$|\lambda_n(\alpha) - (\pi n)^2| = O\left(\ln^{-1}\left(\frac{1}{\alpha}\right) \ln(\pi n) h^2(\alpha)\right) = O\big(h^2(\alpha)\big) = o(1), \quad \alpha \to 0+,$$

что и требовалось доказать. $\square$

Доказательство теоремы 5. Из теорем 2 и 3 вытекает, что количество вещественных с. з. задачи (1) складывается из количества с. з. в круге $|\lambda| \leqslant R_1^{2-\alpha}(\alpha)$ (оно равно $M(\alpha)$ или $M(\alpha) - 1$, величина $M(\alpha)$ определена в доказательстве теоремы 3) и с. з. на интервале $R_1^{2-\alpha}(\alpha) < \lambda < R^{2-\alpha}(\alpha)$ (обозначим это число $N_0(\alpha)$). Таким образом,

$$M(\alpha) - 1 \leqslant N(\alpha) \leqslant M(\alpha) + N_0(\alpha). \tag{46}$$

Поскольку $(n + \rho) = \pi^{-1} x_n \cos \pi\varepsilon$, то

$$M(\alpha)=\pi^{-1}\big(R_1(\alpha)+O(1)\big)\cos\pi\varepsilon+O(1)=2\pi^{-1}\ln\frac{1}{\alpha}\operatorname{ctg}(\pi\varepsilon)+O(1)=$$
$$=2\pi^{-1}(\pi\varepsilon)^{-1}\ln\frac{1}{\alpha}+O(1)=8\pi^{-2}\alpha^{-1}\ln\frac{1}{\alpha}+O\left(\ln\frac{1}{\alpha}\right),\quad \alpha\to 0+\,.$$

Отсюда и из (46) видно, что для доказательства теоремы требуется вывести оценку

$$N_0(\alpha)=O\left(\alpha^{-1}\ln\ln\frac{1}{\alpha}\right),\quad \alpha\to 0+\,.$$

Положим $T(\alpha)=\operatorname{cosec}(\pi\varepsilon)$. Через $a(\alpha)$ обозначим наибольшее из чисел $x_n(\rho)$ с чётным номером, не превосходящее $R_1(\alpha)$, а через $b(\alpha)$ — наименьшее из чисел $x_n(\rho)$ с чётным номером, большее $R(\alpha)$. Докажем, что количество нулей $F_\rho(z)$ не только на интервале $\big(R_1(\alpha),R(\alpha)\big)$, но даже в прямоугольнике

$$P(\alpha)=\{z\in\mathbb{C}\mid a(\alpha)\leqslant\operatorname{Re}z\leqslant b(\alpha),\ |\operatorname{Im}z|\leqslant T(\alpha)\}$$

есть $O\big(\alpha^{-1}\ln\ln(1/\alpha)\big)$. Поскольку периметр прямоугольника $P(\alpha)$ имеет порядок $\alpha^{-1}\ln\ln(1/\alpha)$ при $\alpha\to 0+$, то достаточно доказать, что модуль логарифмической производной функции $F_\rho(z)$ на сторонах прямоугольника $P(\alpha)$ ограничен абсолютной постоянной. Выведем неравенство

$$\left|\frac{F_\rho'(z)}{F_\rho(z)}\right|\leqslant 2\quad \forall z\in\partial P(\alpha)\ \forall\alpha\in(0,\,0{,}1].\tag{47}$$

Начнём с оценки $|F_\rho'(z)/F_\rho(z)|$ на вертикалях $z=x_n+iy$, $y\in\mathbb{R}$. Имеем

$$\begin{gathered}\cos\big((x_n+iy)\sin\pi\rho-\pi\rho\big)=(-1)^n\operatorname{ch}(y\sin\pi\rho),\\ \operatorname{Re}(z^p)=|z^p|\cos\left(p\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{\operatorname{Re}z}\right)\right),\quad y=\operatorname{Im}z,\quad p\in\mathbb{R}.\end{gathered}\tag{48}$$

Легко видеть, что $\max\{|y/x|\mid x+iy\in P(\alpha)\}=T(\alpha)/a(\alpha)$. Последовательность x_n является арифметической прогрессией с разностью, равной $\pi\sec(\pi\varepsilon)<$ $<3{,}142\sec(\pi/38)<3{,}16$ (если $0<\alpha\leqslant 0{,}1$, то $0{,}5<\rho\leqslant 10/19$). Следовательно, $R_1(\alpha)-a(\alpha)<6{,}32$, а при $\alpha\leqslant 0{,}1$ имеем

$$R_1(\alpha)\geqslant 2\operatorname{cosec}(\pi\varepsilon)\ln 10\geqslant 2\operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{38}\right)\ln 10>55.$$

Поэтому $a(\alpha)>0{,}88\,R_1(\alpha)$. Отсюда выводим оценку

$$\frac{y}{x}\leqslant\frac{T(\alpha)}{0{,}88\,R_1(\alpha)}<0{,}6\,\ln^{-1}\frac{1}{\alpha}\leqslant\frac{0{,}6}{\ln 10}<0{,}3,\quad x+iy\in P(\alpha),\tag{49}$$

которая влечёт за собой неравенство

$$\operatorname{Re}(z^p)\geqslant|z|^p\cos(0{,}3\,p),\quad z\in P(\alpha),\quad |p|\leqslant\pi.\tag{50}$$

Из (48), (49) и (50) при чётном n и $|y|\leqslant T(\alpha)$ находим

$$\operatorname{Re}F_\rho(x_n+iy)\geqslant 2\rho\exp(x_n\cos\pi\rho)\cos(y\cos\pi\rho)\operatorname{ch}(y\sin\pi\rho)+$$
$$+|z|^{\alpha-1}\frac{\cos\big(0{,}3(\alpha-1)\big)}{\Gamma(\alpha)}-|\omega_\rho(x_n+iy)|.$$

Из (49) также следует, что $|z| \leqslant 1{,}1 \operatorname{Re} z$, $z \in P(\alpha)$. Отсюда и из оценки (18) остаточного члена ω_ρ при $z = x + iy \in P(\alpha)$ находим, что

$$|\omega_\rho(z)| \leqslant 5\alpha x^{2\alpha-3} = 5\alpha |z|^{\alpha-1} \left(\frac{|z|}{x}\right)^{1-\alpha} x^{2\alpha-2} \leqslant \frac{5}{\Gamma(\alpha)} |z|^{\alpha-1} \frac{|z|}{x} a^{2\alpha-2}(\alpha) \leqslant$$
$$\leqslant 6\frac{|z|^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \big(0{,}8\, R_1(\alpha)\big)^{-1{,}8} \leqslant 6(44)^{-1{,}8} \frac{|z|^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} < 0{,}01\, \frac{|z|^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}. \quad (51)$$

В силу выбора $T(\alpha)$ верно неравенство

$$|y \cos \pi\rho| \leqslant T|\cos \pi\rho| = T \sin \pi\varepsilon = 1.$$

Отсюда и из соотношений (49)—(51) получаем неравенство

$$\operatorname{Re} F_\rho(x_n + iy) \geqslant 2\rho \cos(1) \exp(x_n \cos \pi\rho) \operatorname{ch}(y \sin \pi\rho) + 0{,}8\, \frac{|z|^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} >$$
$$> 0{,}5 \left(2\rho \exp(x_n \cos \pi\rho) \operatorname{ch}(y \sin \pi\rho) + \frac{|z|^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right). \quad (52)$$

Оценим сверху $|F'_\rho(z)|$. Имеем

$$F'_\rho(z) = 2\rho \exp(z \cos \pi\rho) \cos(z \sin \pi\rho) + (\alpha - 1)\frac{z^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha)} + \omega'_\rho(z). \quad (53)$$

Воспользовавшись известной оценкой модуля производной аналитической функции

$$|g'(a)| \leqslant R^{-1} \max_{|z-a| \leqslant R} |g(z)|, \quad a \in \mathbb{C}, \quad R > 0, \quad g \in \mathcal{A}(|z-a| \leqslant R), \quad (54)$$

взяв $R = x/2$, $x = \operatorname{Re} z \geqslant 2$, из (54) и (18) находим

$$|\omega'_\rho(z)| \leqslant 5\alpha \left(\frac{x}{2}\right)^{2\alpha-4} \leqslant 5\alpha x^{2\alpha-3} \frac{16}{x} < 0{,}01\, \frac{|z|^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \quad (55)$$

(в последнем неравенстве была применена оценка (51) и также учитывалось, что $x > 16$ при $z \in P(\alpha)$, $0 < \alpha \leqslant 0{,}1$). Из соотношений (53) и (55) получаем

$$|F'_\rho(x + iy)| \leqslant 2\rho \exp(x \cos \pi\rho) \operatorname{ch}(y \sin \pi\rho) + \frac{|z|^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha)} + 0{,}01\, \frac{|z|^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} <$$
$$< 2\rho \exp(x \cos \pi\rho) \operatorname{ch}(y \sin \pi\rho) + \frac{|z|^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}. \quad (56)$$

Из (56) и (52) находим $|F'_\rho(z)| \leqslant 2 \operatorname{Re} |F_\rho(z)|$ на вертикальных сторонах прямоугольника $P(\alpha)$. Неравенство (47) на «вертикальной части» границы $P(\alpha)$ доказано.

Докажем (47) на «горизонтальной части» границы рассматриваемого прямоугольника, т. е. при $z = x \pm iT(\alpha)$, $a(\alpha) \leqslant x \leqslant b(\alpha)$. В качестве оценки сверху $|F'_\rho(z)|$ годится (56), а оценка снизу $|F_\rho(z)|$ получается за счёт того, что при $|\operatorname{Im} z| = T(\alpha)$, $a(\alpha) \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant b(\alpha)$ модуль функции $f_\rho(z) = 2\rho \exp(z \cos \pi\rho) \cos(z \sin \pi\rho - \pi\rho)$ значительно больше, чем $|z|^{\alpha-1}/\Gamma(\alpha) + |\omega_\rho(z)|$. Действительно, при $z = x \pm iT$, $\rho > 1/2$ имеем

$$|f_\rho(z)| \geqslant 2\rho \exp(x \cos \pi\rho) \operatorname{sh}(T \sin \pi\rho) = 2\rho \exp(x \cos \pi\rho) \operatorname{sh}(\operatorname{ctg} \pi\varepsilon). \tag{57}$$

Напомним, что $\varepsilon = \alpha/(4 - 2\alpha) \leqslant \alpha/3{,}8$, и, как нетрудно доказать, $\operatorname{ctg}(\pi\varepsilon) \geqslant (3{,}8\,\varepsilon)^{-1}$ при $0 < \varepsilon \leqslant 1/20$. Следовательно,

$$\operatorname{sh}(\operatorname{ctg} \pi\varepsilon) > \operatorname{sh}\left(\frac{1}{\alpha}\right), \quad 0 < \alpha \leqslant 0{,}1. \tag{58}$$

При $z \in P(\alpha)$ имеем $x = \operatorname{Re} z \leqslant R(\alpha) + 2\pi/\sin \pi\rho$. Следовательно, ввиду равенства $R(\alpha) \cos \pi\rho = -2\big(\ln(2/\alpha) + \ln\ln(2/\alpha)\big)$ получаем

$$\exp(x \cos \pi\rho) \geqslant \exp\left(-2\left(\ln \frac{2}{\alpha} + \ln\ln \frac{2}{\alpha}\right) - 2\pi|\operatorname{ctg} \pi\rho|\right) = \\ = \frac{\alpha^2}{4} \ln^{-2} \frac{2}{\alpha} \exp(-2\pi \operatorname{tg} \pi\varepsilon).$$

Несложно проверяется, что при $0 < \alpha \leqslant 0{,}1$ верны неравенства $\ln^2(2/\alpha) < 1/\alpha$, $\operatorname{tg}(\pi\varepsilon) < \operatorname{tg} 5^\circ < 0{,}1$. Поэтому

$$\exp(x \cos \pi\rho) > \frac{\alpha^3}{4} \exp(-0{,}63) > \frac{\alpha^3}{8}, \quad x = \operatorname{Re} z, \quad z \in P(\alpha), \quad \alpha \leqslant 0{,}1. \tag{59}$$

Из (57)—(59) находим, что

$$|f_\rho(z)| > \frac{\alpha^3}{8} \operatorname{sh}\left(\frac{1}{\alpha}\right) > \frac{\alpha^3}{8} \frac{\alpha^{-3}}{6} = \frac{1}{48}, \quad z = x \pm iT(\alpha). \tag{60}$$

С другой стороны, имеем (напомним, что если $z \in P(\alpha)$, то $\operatorname{Re} z \geqslant 44$ при $\alpha \leqslant 0{,}1$)

$$\frac{|z^{\alpha-1}|}{\Gamma(\alpha)} \leqslant \frac{44^{-0{,}9}}{\Gamma(0{,}1)} = \frac{0{,}1 \cdot 44^{-0{,}9}}{\Gamma(1{,}1)} < 0{,}11 \cdot 44^{-0{,}9} < \frac{1}{250}.$$

А так как вследствие (51) в прямоугольнике $P(\alpha)$ верно неравенство $|\omega_\rho(z)| < 0{,}01\,|z|^{\alpha-1}/\Gamma(\alpha)$, то

$$\frac{|z|^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + |\omega_\rho(z)| < \frac{1}{240}, \quad z \in P(\alpha). \tag{61}$$

Из (60) и (61) находим, что

$$\frac{|z|^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + |\omega_\rho(z)| < \frac{1}{5} f_\rho(z),$$

откуда

$$|F_\rho(z)| > \frac{4}{5}\,|f_\rho(z)|, \quad z \in P(\alpha), \quad |\operatorname{Im} z| = T(\alpha). \tag{62}$$

Аналогично из (56) и (57) при $z \in P(\alpha)$, $|\operatorname{Im} z| = T(\alpha)$, получаем неравенство

$$|F_\rho'(z)| \leqslant |f_\rho(z)| \operatorname{cth}(\operatorname{ctg} \pi\varepsilon) + \frac{1}{5}\,|f_\rho(z)| \leqslant \frac{7}{5}\,|f_\rho(z)| \tag{63}$$

(было использовано неравенство $\operatorname{cth} A < 6/5$ при $A > 2$). Из (62) и (63) выводим оценку $|F'_\rho(z)/F_\rho(z)| < 7/4 < 2$ при $z \in P(\alpha)$, $|\operatorname{Im} z| = T(\alpha)$. Оценка (47) полностью доказана, и это завершает доказательство теоремы 5. □

Литература

[1] Бари Н. К. Тригонометрические ряды. — М.: Физматгиз, 1961.

[2] Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 3. — М.: Наука, 1967.

[3] Джрбашян М. М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. — М.: Наука, 1966.

[4] Джрбашян М. М. Краевая задача для дифференциального оператора дробного порядка типа Штурма—Лиувилля // Изв. АН Арм. ССР. Сер. мат. — 1970. — Т. 5, № 2. — С. 71—96.

[5] Купцов Л. П. Гамма-функция // Математическая энциклопедия. Т. 1. — М.: Сов. энциклопедия, 1977. — С. 866—869

[6] Нахушев А. М. Задача Штурма—Лиувилля для дифференциального уравнения второго порядка с дробными производными в младших членах // ДАН СССР. — 1977. — Т. 234, № 2. — С. 308—311.

[7] Нахушев А. М. Дробное исчисление и его применение. — М.: Физматлит, 2003.

[8] Псху А. В. О вещественных нулях функции типа Миттаг-Леффлера // Мат. заметки. — 2005. — Т. 77, вып. 4. — С. 592—599.

[9] Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. — Минск, 1987.

[10] Седлецкий А. М. Неасимптотические свойства корней функции типа Миттаг-Леффлера // Мат. заметки. — 2004. — Т. 75, вып. 3. — С. 405—420.

[11] Ostrovskii I. V., Peresyolkova I. N. Non-asymptotic results on distribution of zeros of the function $E_\rho(z,\mu)$ // Anal. Math. — 1997. — Vol. 23. — P. 283—296.