А. Ю. Попов, О полноте редких подпоследовательностей систем функций вида $f^{(n)}(\lambda_n z)$, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2004, том 68, выпуск 5, 189–212

DOI: http://dx.doi.org/10.4213/im507

СЕРИЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ Том 68, № 5, 2004

УДК 517.538.2

А. Ю. Попов

О полноте редких подпоследовательностей систем функций вида $f^{(n)}(\lambda_n z)$

Получены новые результаты о полноте систем функций $f^{(n)}(\lambda_n z)$ в пространстве целых функций с топологией равномерной сходимости на любом компакте в $\mathbb{C}$. При наличии лакун в разложении Тейлора функции $f(z)$ доказано существование базисов, состоящих из подсистем указанного вида.

Библиография: 18 наименований.

В работах [1] и [2] было найдено условие, которому должна удовлетворять целая функция $f(z)$, необходимое и достаточное для полноты системы её последовательных производных

$$\{f^{(n)}(z)\}_{n=0}^{\infty} \tag{1}$$

в пространстве целых функций (обозначим его $\mathcal{A}(\mathbb{C})$) с топологией равномерной сходимости на любом компакте в $\mathbb{C}$. Сформулируем этот результат.

Теорема А [1], [2]. *Система* (1) *неполна в* $\mathcal{A}(\mathbb{C})$ *тогда и только тогда, когда* f *удовлетворяет линейному однородному дифференциальному уравнению бесконечного порядка с постоянными коэффициентами*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n y^{(n)}(z) = 0 \tag{2}$$

и характеристической функцией $\sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n \not\equiv 0$ *экспоненциального типа.*

Из теоремы А вытекает, что если система (1) полна в $\mathcal{A}(\mathbb{C})$, то она остается полной в этом же пространстве и после удаления из неё любого конечного числа элементов. Возникает следующий вопрос: "сколь много" можно удалить из полной системы (1) функций, чтобы оставшаяся система сохраняла свойство полноты в $\mathcal{A}(\mathbb{C})$? Если стараться придать этому вопросу строгую формулировку, то мы приходим к двум типам задач.

1. Выделяется тот или иной класс $\mathfrak{M}$ "достаточно редких" последовательностей натуральных чисел. Требуется выяснить, будут ли *все* системы вида $\{f^{(\nu_k)}(z)\}_{k=1}^{\infty}$, $\{\nu_k\} \in \mathfrak{M}$, полны в $\mathcal{A}(\mathbb{C})$, где f – целая функция, порождающая полную в $\mathcal{A}(\mathbb{C})$ систему (1) и обладающая определенными дополнительными свойствами.

2. Для данной функции $f \in \mathcal{A}(\mathbb{C})$, порождающей полную в этом пространстве систему производных, найти "сколь возможно редкую" (в смысле какого-нибудь определения) последовательность $\{\nu_k\}_{k=1}^{\infty}$ такую, что система функций $\{f^{(\nu_k)}(z)\}_{k=1}^{\infty}$ будет полной в $\mathcal{A}(\mathbb{C})$.

В работах [1]–[5] успешно решались задачи первого типа для различных подклассов аналитических функций. Так, Ю.А. Казьмин в [3] доказал, что любая подпоследовательность производных функции $f(z) = g(z)\exp(z^m)$ $(m \in \mathbb{N}$, $m \geqslant 2$, $g(z) \not\equiv 0$ – произвольная целая функция порядка, ме́ньшего m), имеющая плотность, бо́льшую $1 - 1/m$, полна в $\mathcal{A}(\mathbb{C})$. В.П. Громов [4] установил, что то же заключение справедливо и для любой целой функции экспоненциального типа σ, $0 < \sigma < +\infty$, ассоциированная по Борелю с которой имеет на окружности $|t| = \sigma$ ровно m особых точек, и по крайней мере одна из них не является полюсом. Ю.Ф. Коробейник в [5] решал задачи первого типа для различных подклассов нецелых функций (полнота, естественно, рассматривалась не в $\mathcal{A}(\mathbb{C})$, а в пространствах функций, аналитических в ограниченных областях). Отметим, что В.П. Громов доказал теорему А в более общем случае – для обобщенных производных в смысле Гельфонда–Леонтьева, а Ю.А. Казьмин – только для классических производных. В настоящей статье будет также рассматриваться лишь обычное дифференцирование.

Задачи второго типа принципиально отличаются от задач первого типа. Поясним это на примере. Рассмотрим функцию

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n^2}}{(n^2)!} \,. \tag{3}$$

Она имеет экспоненциальный тип, равный единице, и не удовлетворяет никакому уравнению (2), так как среди функций конечного экспоненциального типа указанным свойством обладают только квазиполиномы. Значит, система всех её производных полна в $\mathcal{A}(\mathbb{C})$. В.П. Громов в [4] отметил, что существует последовательность производных $\{F^{(n_k)}(z)\}$, неполная в $\mathcal{A}(\mathbb{C})$, с номерами $\{n_k\}$ плотности 1, и поэтому утверждение о полноте в $\mathcal{A}(\mathbb{C})$ любых последовательностей производных функции (3), имеющих плотность $1-\varepsilon$ (каково бы ни было заданное $\varepsilon \in (0,1)$), неверно. Следовательно, относительно полноты подсистем системы функций $\{F^{(m)}(z)\}_{m=0}^{\infty}$ нельзя доказать какой-либо нетривиальный результат по задаче первого типа, если "густоту" последовательности измерять в терминах плотности. При переходе к задачам второго типа картина резко меняется. Сейчас мы установим, что найдется последовательность $\{\nu_k\}_{k=0}^{\infty}$ нулевой плотности такая, что система производных $\{F^{(\nu_k)}(z)\}_{k=0}^{\infty}$ не только полна в $\mathcal{A}(\mathbb{C})$, но даже образует базис в этом пространстве. Действительно, положим $\nu_k = (k+1)^2 - k$, $k \in \mathbb{N}_0$. Очевидно, что плотность последовательности $\{\nu_k\}$ равна нулю. (Напомним, что плотностью возрастающей последовательности положительных чисел $\{\nu_k\}$ называется величина $\lim_{k\to\infty} k/\nu_k$.) Имеем

$$k!\,F^{(\nu_k)}(z) = \sum_{\{n\in\mathbb{N}\,|\,n^2\geqslant\nu_k\}} \frac{z^{n^2-\nu_k}\,k!}{(n^2-\nu_k)!} = \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{z^{n^2-(k+1)^2+k}\,k!}{(n^2-(k+1)^2+k)!} = z^k(1+\varphi_k(z))\,,$$

где

$$\varphi_k(z) = \sum_{n=k+2}^{\infty} z^{n^2-(k+1)^2} \frac{k!}{(n^2-(k+1)^2+k)!} \,.$$

Нетрудно убедиться в том, что при любых $k \in \mathbb{N}_0$ и $R > 0$ справедливы неравенства

$$\max_{|z|\leqslant R}|\varphi_k(z)| = \sum_{n=k+2}^{\infty} R^{n^2-(k+1)^2}\frac{k!}{(n^2-(k+1)^2+k)!}$$
$$\leqslant \sum_{m=2k+3}^{\infty}\frac{R^m\,k!}{(k+m)!} \leqslant \sum_{m=2k+3}^{\infty}\frac{R^m}{m!}\,. \tag{4}$$

Отсюда заключаем, что максимум модуля функции $\varphi_k(z)$ в круге $|z| \leqslant R$, $R > 0$, оценивается остатком степенного ряда для e^R с номером $2k+2$. Следовательно,

$$\lim_{k\to\infty}\Bigl(\max_{|z|\leqslant R}|\varphi_k(z)|\Bigr) = 0 \quad \forall R > 0. \tag{5}$$

Согласно теореме о базисности близких систем [6] условие (5) является достаточным для того, чтобы система функций $z^k(1+\varphi_k(z)) = k!\,F^{(\nu_k)}(z)$ образовывала квазистепенной базис в $\mathcal{A}(|z| < R)$ для любого $R > 0$, а значит, и в $\mathcal{A}(\mathbb{C})$. Базисность в $\mathcal{A}(\mathbb{C})$ системы функций $\{F^{(\nu_k)}(z)\}_{k=0}^{\infty}$ доказана.

Разобранный пример, во-первых, демонстрирует, что задачи первого и второго типов принципиально различны между собой. Во-вторых, он наталкивает на мысль о том, что, быть может, из системы производных (1) каждой целой функции, не удовлетворяющей никакому уравнению (2), можно каким-то особым образом выделить полную в $\mathcal{A}(\mathbb{C})$ подсистему

$$\{f^{(\nu_k)}(z)\}_{k=1}^{\infty} \tag{6}$$

с последовательностью номеров $\{\nu_k\}$ нулевой плотности. Автор решил эту задачу для целых функций нулевого экспоненциального типа, т. е. таких, для которых

$$\lim_{R\to\infty}\Bigl(R^{-1}\ln\max_{|z|\leqslant R}|f(z)|\Bigr) = 0\,.$$

Оказалось, что последовательность номеров производных, порождающих полную в $\mathcal{A}(\mathbb{C})$ систему (6), можно выбирать сколь угодно редкой и, в частности, добиться выполнения неравенств $\nu_{k+1} > \exp(\nu_k)$ или, например, $\nu_{k+1} > \exp(\nu_k!)$ для любого $k \in \mathbb{N}$. Точнее говоря, справедлива

Теорема Б. *Пусть f – целая функция экспоненциального типа нуль, отличная от полинома, а $\psi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ – произвольная функция. Тогда найдется последовательность натуральных чисел $\{\nu_k\}_{k=0}^{\infty}$ (зависящая от f и ψ) такая, что*:

1) *$\nu_{k+1} > \psi(\nu_k)$ для любого $k \in \mathbb{N}_0$;*
2) *система $\{f^{(\nu_k)}(z)\}_{k=0}^{\infty}$ полна в $\mathcal{A}(\mathbb{C})$.*

Теорема Б анонсирована в [7] и здесь будет получена как следствие более общей и сильной теоремы. Метод доказательств, используемый в статье, существенно отличается от методов работ [1]–[5]. Отметим также, что в [2] В. П. Громов нашел критерий полноты в $\mathcal{A}(\mathbb{C})$ систем из любых подпоследовательностей производных целых функций (обобщение теоремы А). Согласно его теореме последовательность

$\{f^{(n_k)}(z)\}_{k=0}^{\infty}$, $f\in\mathcal{A}(\mathbb{C})$, полна в $\mathcal{A}(\mathbb{C})$ тогда и только тогда, когда f не удовлетворяет никакому уравнению вида $\sum_{m=0}^{\infty}c_m y^{(m)}(z)=u(z)$, где $u(z)$ – произвольная целая функция, подчиненная условиям $u^{(n_k)}(0)=0$ для любого $k\in\mathbb{N}_0$, а характеристическая функция уравнения $\sum_{m=0}^{\infty}c_m t^m\not\equiv 0$ имеет конечный экспоненциальный тип. Этот критерий применялся в дальнейшем при решении задач первого типа (см., например, [4]). По мнению автора, использование упомянутого критерия вряд ли позволило бы без привлечения каких-либо дополнительных сложных соображений доказать теорему Б и, тем более, другие формулируемые ниже результаты.

Всюду далее через $[\rho,\sigma]$, как обычно, обозначается множество всех целых функций, тип при порядке ρ которых не превосходит σ (см. ниже (8)). Через $\mathbb{C}[z]$ обозначено множество всех многочленов.

Теорема 1. *Пусть $\lambda=\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ – произвольная ограниченная последовательность отличных от нуля комплексных чисел, $f\in[1,0]\backslash\mathbb{C}[z]$, а ψ – произвольная положительная функция натурального аргумента. Тогда найдется последовательность натуральных чисел $\{n_k\}_{k=0}^{\infty}$ (зависящая от λ, f и ψ) такая, что*:

1) *$n_{k+1}>\psi(n_k)$ для любого $k\in\mathbb{N}_0$;*

2) *система функций $\{f^{(n_k)}(\lambda_{n_k}z)\}_{k=0}^{\infty}$ полна в $\mathcal{A}(\mathbb{C})$;*

3) *существует последовательность линейных агрегатов из функций системы 2)*

$$g_q(z)=\sum_{\frac{q(q+1)}{2}\leqslant s<\frac{(q+1)(q+2)}{2}} d_{s,q}f^{(n_s)}(\lambda_{n_s}z),\qquad q\in\mathbb{N}_0,\quad d_{s,q}\in\mathbb{C}\,,$$

образующая квазистепенной базис в $\mathcal{A}(\mathbb{C})$.

Результаты, аналогичные теореме 1, получены автором для целых функций любого роста. Перед тем как их сформулировать, напомним необходимые сведения из теории роста целых функций (см. [8]–[10]).

Определение 1. Целая функция $A(z)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n z^n$ называется *функцией сравнения*, если:

1) $A_n>0$ для любого $n\in\mathbb{N}_0$;

2) $A_{n+1}/A_n\searrow 0,\ n\to\infty$.

Класс всех функций сравнения обозначим $\mathfrak{A}$.

Определение 2. Целая функция $a(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$ называется *сравнимой с* $A(z)\in\mathfrak{A}$, если существует постоянная $\tau>0$ такая, что отношение $|a(z)|/A(\tau|z|)$ ограничено в $\mathbb{C}$. Нижняя грань таких чисел τ (обозначим её $\sigma_A(a)$) называется *A-типом* функции $a(z)$.

Известна теорема [10, с. 34–38], которая утверждает, что A-тип целой функции $a(z)$ выражается через коэффициенты рядов Маклорена $a(z)$ и $A(z)$ следующим образом:

$$\sigma_A(a)=\limsup_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{A_n}\right|^{1/n}. \tag{7}$$

Множество всех функций сравнения является шкалой роста в $\mathcal{A}(\mathbb{C})$, "обслуживающей" всё пространство $\mathcal{A}(\mathbb{C})$ в том смысле, что для всякой целой функции

$f \notin \mathbb{C}[z]$ найдется $A(z) \in \mathfrak{A}$ такая, что $\sigma_A(f) = 1$. Этот результат является следствием цитированной теоремы Казьмина об A-типе и утверждения Адамара [11] (см. также [12, гл. 9, §67]): для любой не финитной последовательности $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ такой, что $\lim_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = 0$, существует последовательность положительных чисел $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$, обладающая свойствами 1) и 2) из определения 1, такая, что $|a_n| \leqslant A_n$ для любого $n \in \mathbb{N}_0$ и равенство $|a_n| = A_n$ выполнено для бесконечного числа номеров n. Подробное доказательство приведено в [13, предложение 4]. В теории целых функций конечного порядка часто используются функции сравнения

$$E_\rho(z,\mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\mu + k/\rho)}\,, \qquad \mu > 0,$$
$$A_\rho(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k!)^{1/\rho}}\,, \qquad 0 < \rho < +\infty$$

(очевидно, что $E_1(z,1) = A_1(z) = \exp z$). Достаточно обширные сведения о функциях $E_\rho(z,\mu)$ и их применениях как эталонов роста, так и ядер интегральных преобразований, имеются в монографии [14]. Классический тип целой функции $a(z)$ при порядке ρ, определяемый соотношением

$$\sigma_\rho(a) = \limsup_{R\to+\infty}\biggl(R^{-\rho}\ln\Bigl(\max_{|z|\leqslant R}|a(z)|\Bigr)\biggr), \tag{8}$$

связан с её E_ρ-типом и A_ρ-типом формулами

$$\sigma_\rho(a) = \bigl(\sigma_{E_\rho}(a)\bigr)^\rho, \qquad \sigma_\rho(a) = \frac{\bigl(\sigma_{A_\rho}(a)\bigr)^\rho}{\rho}\,. \tag{9}$$

Класс $\mathfrak{A}$ как множество эталонов роста включает в себя и уточненные порядки. Для каждого сильного уточненного порядка $\rho(r)$, $\lim_{r\to+\infty}\rho(r) = \rho \in (0,+\infty)$ (определения см. в [15, с. 46–59]), найдется функция сравнения $A_{\rho(r)}(z)$ такая, что $A_{\rho(r)}$-тип любой $a(z) \in \mathcal{A}(\mathbb{C})$ связан с её типом $\sigma_{\rho(r)}$ при уточненном порядке $\rho(r)$ формулой

$$\sigma_{\rho(r)}(a) = \frac{\bigl(\sigma_{A_{\rho(r)}}(a)\bigr)^\rho}{\rho}\,.$$

В качестве искомой функции сравнения подходит

$$A_{\rho(r)}(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\biggl(\frac{ze^{1/\rho}}{v(n)}\biggr)^n,$$

где v – обратная функция к $x^{\rho(x)}$. Несложно проверить, что если $\rho(r)$ – сильный уточненный порядок, то отношение $(v(n))^n/(v(n+1))^{n+1}$ монотонно при $n > n_0$ (см. выше п. 2) в определении 1). Как доказано в [15, гл. 1], для каждой целой функции f конечного положительного порядка найдется сильный уточненный порядок $\rho(r)$ такой, что $\sigma_{\rho(r)}(f) = 1$. Важное качество, которым обладает множество $\mathfrak{A}$, состоит в том, что это – система эталонов роста, классифицирующая также целые функции нулевого и бесконечного порядков. Существуют и другие шкалы роста в $\mathcal{A}(\mathbb{C})$, служащие для тех же целей. Одна из них исследована В.А. Осколковым в работе [16]. Шкала является более "тонкой", чем $\mathfrak{A}$, в классе целых функций бесконечного порядка, более "грубой" в классе целых функций нулевого порядка и по сути совпадает с уточненными порядками для целых функций конечного положительного порядка. В работах по теории целых функций обычно выбирается та шкала роста, которая наиболее удобна для конкретной решаемой задачи, лишь бы только она являлась плотным классом сравнения, т.е. для любой $f \in \mathcal{A}(\mathbb{C})\backslash\mathbb{C}[z]$ нашелся бы элемент рассматриваемой шкалы роста, относительно которого f имела бы конечный и положительный тип. В задачах, решаемых в настоящей работе, удобнее всего пользоваться системой эталонов роста $\mathfrak{A}$. Множество всех целых функций A-типа, не превосходящего σ, будем обозначать $[A,\sigma]$, а функций A-типа, меньшего σ, – через $[A,\sigma)$. Через $[A,+\infty)$ обозначим множество всех целых функций, сравнимых с $A(z)$ (см. выше определение 2), т.е. $[A,+\infty)=\bigcup_{0\leqslant\sigma<+\infty}[A,\sigma]$.

В частности (см. (7)–(9)), справедливы равенства

$$\begin{aligned} &[\rho,\sigma]=[E_\rho,\sigma^{1/\rho}], \qquad [\rho,\sigma)=[E_\rho,\sigma^{1/\rho}),\\ &[\rho,0]=[E_\rho,0], \qquad [\rho,+\infty)=[E_\rho,+\infty) \quad \forall\rho,\sigma\in(0,+\infty). \end{aligned} \tag{10}$$

Следующая теорема является центральным результатом настоящей статьи.

Теорема 2. *Пусть $A(z)=\sum_{n=0}^{\infty}A_nz^n\in\mathfrak{A}$, а $\lambda=\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ – произвольная последовательность отличных от нуля комплексных чисел, удовлетворяющая ограничению*

$$\lambda_n=O\biggl(\frac{A_n}{(n+1)A_{n+1}}\biggr), \qquad n\to\infty. \tag{11}$$

Пусть $f\in[A,0]\backslash\mathbb{C}[z]$, а ψ – произвольная положительная функция натурального аргумента. Тогда найдется последовательность натуральных чисел $\{n_k\}_{k=0}^{\infty}$ (зависящая от A, λ, f и ψ) такая, что:

1) *$n_{k+1}>\psi(n_k)$ для любого $k\in\mathbb{N}_0$;*

2) *система функций $\{f^{(n_k)}(\lambda_{n_k}z)\}_{k=0}^{\infty}$ полна в $\mathcal{A}(\mathbb{C})$;*

3) *существует последовательность линейных агрегатов из функций системы 2)*

$$g_q(z)=\sum_{\frac{q(q+1)}{2}\leqslant s<\frac{(q+1)(q+2)}{2}} d_{s,q}f^{(n_s)}(\lambda_{n_s}z), \qquad d_{s,q}\in\mathbb{C}, \quad q\in\mathbb{N}_0,$$

образующая квазистепенной базис в $\mathcal{A}(\mathbb{C})$.

Нетрудно убедиться в том, что теорема 1 получается из теоремы 2 при $A(z)=e^z$, а теорема Б – из теоремы 1 при $\lambda_n=1$ для любого $n\in\mathbb{N}_0$.

Очевидно, из полноты в $\mathcal{A}(\mathbb{C})$ редкой подсистемы функций $\{f^{(n)}(\lambda_nz)\}_{n=0}^{\infty}$ вытекает полнота и всей системы. По-видимому, приводимое ниже следствие из теоремы 2 для $A(z)\not\equiv e^z$ является новым.

Следствие 1. *Пусть* $A(z)=\sum_{n=0}^{\infty}A_nz^n\in\mathfrak{A}$, $f\in[A,0]\backslash\mathbb{C}[z]$, $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ – *произвольная последовательность отличных от нуля комплексных чисел, удовлетворяющая условию* (11). *Тогда система функций* $\{f^{(n)}(\lambda_nz)\}_{n=0}^{\infty}$ *полна в* $\mathcal{A}(\mathbb{C})$.

Интересно, что даже это существенное ослабление теоремы 2 в терминах роста функций f не может быть улучшено. Сказанное демонстрирует следующее утверждение (вторая часть теоремы 1 из [17]).

Пусть $A(z)=\sum_{n=0}^{\infty}A_nz^n$ – произвольная функция сравнения. Тогда найдутся функция $f(z)$, имеющая A-тип, равный 1, и последовательность действительных чисел λ_n^* такие, что выполняются соотношения

$$f^{(n)}(\lambda_n^*)=0,\qquad |\lambda_n^*|\leqslant\frac{A_n}{(n+1)A_{n+1}}\quad\forall n\in\mathbb{N}_0.$$

Отсюда заключаем, что для любого $\varepsilon>0$ существуют целая функция $g(z)=f(\varepsilon z)$ A-типа, равного ε, и последовательность $\xi_n=\lambda_n^*/\varepsilon$ такие, что

$$g^{(n)}(\xi_n)=0,\qquad \xi_n=O\biggl(\frac{A_n}{nA_{n+1}}\biggr),\quad n\to\infty. \tag{12}$$

Из равенств (12), очевидно, вытекает неполнота в $\mathcal{A}(\mathbb{C})$ системы функций

$$\{g^{(n)}(\xi_nz)\}_{n=0}^{\infty},$$

так как все функции этой системы обращаются в нуль в точке $z=1$. Тем самым следствие 1 в классе целых функций f положительного (даже сколь угодно малого) A-типа перестает быть верным.

Результаты статьи допускают некоторые модификации. Сформулируем одну из них.

Следствие 2. *Теорема* 2 *остается справедливой для всех функций* $f\in[A,+\infty)\backslash\mathbb{C}[z]$ *при условии*

$$\lambda_n=o\biggl(\frac{A_n}{nA_{n+1}}\biggr),\qquad n\to\infty$$

(*по-прежнему*, $\lambda_n\neq0$ *при всех* $n\in\mathbb{N}$).

В заключение попробуем разобраться, когда из системы $\{f^{(n)}(\lambda_nz)\}$ можно выбрать подсистему, которая сама (а не её линейные агрегаты) образует базис в $\mathcal{A}(\mathbb{C})$. Такое явление наблюдается для рядов с той или иной степенью лакунарности. Для краткости ограничимся случаем $\lambda_n=1$ для любого $n\in\mathbb{N}$ и будем рассматривать только классические характеристики роста – тип при конечном порядке.

Теорема 3. *Пусть*

$$f(z)=\sum_{j=1}^{\infty} b_j z^{m_j}, \qquad b_j\neq 0 \quad \forall j\in\mathbb{N}, \tag{13}$$

– целая функция, имеющая конечный тип при порядке $\rho\geqslant 1$, *последовательность номеров ненулевых коэффициентов ряда Маклорена которой удовлетворяет условию*

$$\lim_{j\to+\infty}\frac{m_{j+1}-m_j}{m_j^{1-1/\rho}}=+\infty. \tag{14}$$

Тогда для любой возрастающей положительной функции натурального аргумента ψ *найдется последовательность натуральных чисел* $\{\nu_n\}_{n=0}^{\infty}$ *(зависящая от* f *и* ψ*) такая, что выполнено условие*

$$\nu_{n+1}>\psi(\nu_n) \quad \forall n\in\mathbb{N}_0$$

и система $\{f^{(\nu_n)}(z)\}_{n=0}^{\infty}$ *образует базис в* $\mathcal{A}(\mathbb{C})$.

Теорема 4. *Для любой целой функции, являющейся суммой лакунарного степенного ряда*

$$f(z)=\sum_{j=1}^{\infty} b_j z^{m_j}, \qquad b_j\neq 0, \quad \forall j\in\mathbb{N}, \quad \liminf_{j\to+\infty}\frac{m_{j+1}}{m_j}=q>1, \tag{15}$$

и любой возрастающей положительной функции натурального аргумента ψ *найдется последовательность натуральных чисел* $\{\nu_n\}_{n=0}^{\infty}$ *(зависящая от* f *и* ψ*) такая, что выполнено условие*

$$\nu_{n+1}>\psi(\nu_n) \quad \forall n\in\mathbb{N}_0$$

и система $\{f^{(\nu_n)}(z)\}_{n=0}^{\infty}$ *образует базис в* $\mathcal{A}(\mathbb{C})$.

Перейдем к доказательствам сформулированных утверждений. Теорема 2 будет получена из еще более общего результата о базисности линейных агрегатов редких подпоследовательностей систем функций со специального вида матрицей коэффициентов степенных рядов.

Теорема 5. *Пусть имеются две бесконечные матрицы* $(A_{n,k})_{n,k\in\mathbb{N}_0}$ *и* $(a_{n,k})_{n,k\in\mathbb{N}_0}$, n *– номер строки,* k *– номер столбца, элементы которых удовлетворяют следующим ограничениям:*

1) $A_{n,k}>0$ *для любых* $n,k\in\mathbb{N}_0$;

2) *при любом фиксированном* $n\in\mathbb{N}$ *последовательность отношений* $\alpha_{n,k}=A_{n,k+1}/A_{n,k}$ *не возрастает по* k *при* $k\geqslant 0$ *и* $\lim_{k\to\infty}\alpha_{n,k}=0$;

3) $\lim_{n\to\infty}\alpha_{n,0}=0$;

4) $|a_{n,k}|\leqslant A_{n,k}$ *для любых* $k,n\in\mathbb{N}_0$;

5) *для любого* $k\in\mathbb{N}_0$ *в столбце с номером* k *имеется бесконечно много чисел* $a_{n,k}$, *для которых* $|a_{n,k}|=A_{n,k}$.

Рассмотрим систему функций[1]

$$f_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k} z^k.$$

Тогда для любой наперед заданной положительной функции натурального аргумента ψ найдется последовательность натуральных чисел $\{n_s\}_{s=0}^{\infty}$ такая, что

1) $n_{s+1} > \psi(n_s)$ *для любого* $s \in \mathbb{N}_0$;

2) *система функций* $\{f_{n_s}(z)\}_{s=0}^{\infty}$ *полна в* $\mathcal{A}(\mathbb{C})$;

3) *существует последовательность линейных агрегатов из функций системы* 2)

$$g_q(z) = \sum_{\frac{q(q+1)}{2} \leqslant s < \frac{(q+1)(q+2)}{2}} d_{s,q} f_{n_s}(z), \qquad d_{s,q} \in \mathbb{C}, \quad q \in \mathbb{N}_0\,,$$

образующих квазистепенной базис в $\mathcal{A}(\mathbb{C})$.

Поясним, как из теоремы 5 следует теорема 2. Поскольку

$$f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m z^m \in [A, 0] \backslash \mathbb{C}[z],$$

то функция

$$\varphi(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{b_m}{A_m}\, z^m \equiv \sum_{m=0}^{\infty} \beta_m z^m$$

является целой и отличной от многочлена. Согласно упоминавшейся выше теореме Адамара найдется функция сравнения $B(z) = \sum_{m=0}^{\infty} B_m z^m$ такая, что:

1) $|\beta_m| \leqslant B_m$ для любого $m \in \mathbb{N}$;

2) существует бесконечно много номеров m таких, что $|\beta_m| = B_m$.

Имеем

$$f^{(n)}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+n)!}{k!}\, b_{n+k} z^k.$$

Следовательно,

$$f^{(n)}(\lambda_n z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+n)!}{k!}\, b_{n+k} \lambda_n^k z^k.$$

Положим

$$a_{n,k} = b_{n+k} \frac{(n+k)!}{k!}\, \lambda_n^k, \qquad A_{n,k} = A_{n+k} B_{n+k} \frac{(n+k)!}{k!}\, |\lambda_n|^k$$

и проверим, что для двух бесконечных матриц $(A_{n,k})$ и $(a_{n,k})$, $n, k \in \mathbb{N}_0$, выполнены все пять условий теоремы 5. Условие 1) выполняется ввиду положительности коэффициентов степенных рядов функций сравнения и неравенств $\lambda_n \neq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}_0$.

[1] Из условий 2) и 4) следует, что все функции f_n являются целыми.

Условия 4) и 5) выполняются в силу построения и отмеченных свойств последовательности $\{B_m\}$.

Теперь исследуем поведение отношений $\alpha_{n,k}$. Имеем

$$\alpha_{n,k} = |\lambda_n| \frac{A_{n+k+1} B_{n+k+1}}{A_{n+k} B_{n+k}} \frac{n+k+1}{k+1}.$$

Частные $\frac{A_{n+k+1}}{A_{n+k}}$ и $\frac{B_{n+k+1}}{B_{n+k}}$ убывают и стремятся к нулю как с ростом n, так и с ростом k по свойству 2) из определения 1. Очевидно также, что

$$\frac{n+k+1}{k+1} = 1 + \frac{n}{k+1}$$

при фиксированном n убывает с ростом k и стремится к 1. Отсюда заключаем, что условие 2) из теоремы 5 также выполнено. Наконец,

$$\alpha_{n,0} = |\lambda_n|(n+1) \frac{A_{n+1}}{A_n} \frac{B_{n+1}}{B_n}. \tag{16}$$

Из равенства (16) и ограниченности последовательности $\mu_n = \lambda_n(n+1)A_{n+1}/A_n$ получаем

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_{n,0} = \lim_{n\to\infty} |\mu_n| \frac{B_{n+1}}{B_n} = 0,$$

а это и есть условие 3) теоремы 5. Таким образом, последовательность функций $f_n(z) = f^{(n)}(\lambda_n z)$ удовлетворяет всем условиям теоремы 5, и мы выводим из теоремы 5 теорему 2.

Вывод следствия 2 из теоремы 2 базируется на доказательстве существования функции сравнения $C(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n$, обладающей следующими свойствами:

1) $A(z)$ имеет нулевой C-тип;

2) $\lambda_n = o(C_n/(nC_{n+1})),\ n \to \infty$.

Тогда произвольная функция $f \in [A, +\infty)$ имеет нулевой С-тип и ввиду свойства 2) применима теорема 2, в которой надо заменить $A(z)$ на $C(z)$.

Предъявим требуемую функцию сравнения. Обозначим

$$R_n = \frac{A_n}{A_{n+1}}, \qquad x_n = \max\{k|\lambda_k| \mid k \leqslant n\}$$

и положим

$$r_n = \begin{cases} \sqrt{R_n}, & \text{если } \ x_n = O(1), \quad n \to \infty, \\ \sqrt{R_n x_n}, & \text{если } \ \lim_{n\to\infty} x_n = +\infty. \end{cases} \tag{17}$$

Последовательность x_n неубывает по построению, а последовательность R_n – по определению 1. Ввиду (17) тем же свойством обладает и $\{r_n\}$. По условию следствия $x_n = o(R_n),\ n \to \infty$. Отсюда и из (17) заключаем, что

$$x_n = o(r_n), \qquad r_n = o(R_n), \quad n \to \infty. \tag{18}$$

Покажем, что

$$C(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} z^n \prod_{k=0}^{n-1} r_k^{-1} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n \tag{19}$$

является искомой функцией сравнения. Включение $C(z) \in \mathfrak{A}$ вытекает из положительности коэффициентов ряда (19) и монотонного стремления к нулю отношения $C_{n+1}/C_n = 1/r_n$. Соотношение $\lambda_n = o(C_n/(nC_{n+1}))$, $n \to \infty$, справедливость которого требуется проверить, в силу введенных обозначений переписывается в следующей эквивалентной форме: $n\lambda_n = o(r_n)$, $n \to \infty$, а это уже доказано в (18), поскольку $n|\lambda_n| \leqslant x_n$. Наконец, C-тип $A(z)$ согласно (7) (очевидно, что $A_n = A_0 \prod_{k=0}^{n-1} R_k^{-1}$) вычисляется по формуле[2]

$$\limsup_{n\to\infty}\left(\frac{A_n}{C_n}\right)^{1/n} = \limsup_{n\to\infty}\left(A_0\prod_{k=0}^{n-1}\left(\frac{r_k}{R_k}\right)\right)^{1/n} = \lim_{n\to\infty}\left(A_0\prod_{k=0}^{n-1}\varepsilon_k\right)^{1/n} = 0.$$

Итак, функция сравнения, обладающая свойствами 1) и 2), предъявлена, и это доказывает следствие 2.

Идея доказательства теоремы 5 состоит в следующем. Особым образом выбирается последовательность $\{n_s\}$, удовлетворяющая соотношениям $n_{s+1} > \psi(n_s)$ $\forall s \in \mathbb{N}_0$, и разбивается на пачки из $q+1$ элемента в пачке с номером q, $q = 0, 1, 2, \dots$. Способ построения последовательности $\{n_s\}$ позволяет обеспечить наличие коэффициентов $d_{s,q}$ таких, что:

1) разложение в степенной ряд в точке $z = 0$ линейных комбинаций

$$g_q(z) = \sum_{\frac{q(q+1)}{2} \leqslant s < \frac{(q+1)(q+2)}{2}} d_{s,q} f_{n_s}(z)$$

начинается с z^q;

2) разность $z^{-q}g_q(z) - 1$ равномерно стремится к нулю при $q \to +\infty$ в кругах $|z| \leqslant R$ при любом $R > 0$.

Отсюда по упоминавшейся в начале статьи теореме М.А. Евграфова вытекает квазистепенная базисность в $\mathcal{A}(\mathbb{C})$ системы функций $\{g_q(z)\}_{q=0}^{\infty}$, а вместе с этим и полнота $\{f_{n_s}(z)\}_{s=0}^{\infty}$.

Очевидно, что такой план осуществим лишь в силу специфических свойств матрицы $(a_{n,k})$. Наборы коэффициентов $\{d_{s,q}\}$ линейных комбинаций g_q находятся как решения систем линейных уравнений с матрицей X_q, состоящей из $q+1$ строк бесконечной матрицы $(a_{n,k})_{n,k=0}^{\infty}$ с номерами

$$n_s, \qquad \frac{q(q+1)}{2} \leqslant s < \frac{(q+1)(q+2)}{2}$$

и столбцов с номерами от 0 до q. Для доказательства равномерного в любом круге стремления к нулю последовательности функций $z^{-q}g_q(z) - 1$ при $q \to +\infty$ требуется установить не только существование решений упомянутых систем, но и дать оценки этих решений. Поэтому сначала докажем три технические леммы, с помощью которых получим неравенства для определителей и миноров исследуемых матриц. Эти неравенства вместе с формулами Крамера позволяют должным образом оценить решения.

[2]Мы обозначили $\varepsilon_k = r_k/R_k$. Согласно (17) $\lim_{k\to\infty}\varepsilon_k = 0$. Поэтому

$$\left(\prod_{k=0}^{n-1}\varepsilon_k\right)^{1/n} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\varepsilon_k = o(1), \qquad n \to \infty.$$

Лемма 1. *Пусть* $q \in \mathbb{N}$, $(x_{j,k})_{0\leqslant j,k\leqslant q}$ – *матрица с положительными элементами, удовлетворяющими следующим ограничениям*:

1) *отношения* $\alpha_{j,k} = x_{j,k+1}/x_{j,k}$ *не возрастают в каждой* j-*й строке с ростом* k – *номера столбца*;

2) *выполняются следующие неравенства*:

$$\alpha_{0,0} \leqslant 1, \qquad \alpha_{p,0} \leqslant \frac{1}{2(q+1)!} \prod_{\ell=0}^{p-1} \prod_{k=0}^{q-1} \alpha_{\ell,k}, \qquad 1 \leqslant p \leqslant q\,.$$

Обозначим через S_{q+1} *множество всех перестановок элементов* $\{0,1,\dots,q\}$, *а через* $\hat\sigma$ – *перестановку, определяемую равенствами* $\hat\sigma(j) = q-j$, $0 \leqslant j \leqslant q$. *Тогда для любой перестановки* $\sigma \in S_{q+1}$, *отличной от* $\hat\sigma$, *имеем*

$$\omega(\sigma) \overset{\text{def}}{=} \prod_{j=0}^{q} \left(\frac{x_{j,\sigma(j)}}{x_{j,\hat\sigma(j)}}\right) \leqslant \frac{1}{2(q+1)!}\,.$$

Доказательство. Сначала выведем несколько полезных для дальнейшего неравенств:

$$\alpha_{0,\nu} \leqslant 1, \quad 1 \leqslant \nu \leqslant q-1, \quad \alpha_{j,\nu} < 1, \quad 1 \leqslant j \leqslant q, \quad 0 \leqslant \nu \leqslant q-1. \tag{20}$$

Из условий 1) и 2) следует, что

$$\alpha_{0,\nu} \leqslant \alpha_{0,0} \leqslant 1,$$
$$\alpha_{1,\nu} \leqslant \alpha_{1,0} \leqslant \frac{1}{2(q+1)!} \prod_{k=0}^{q-1} \alpha_{0,k} \leqslant \frac{1}{2(q+1)!} < 1.$$

Если неравенства $\alpha_{j,\nu} < 1$ при всех $j = 1,\dots,p-1$ уже доказаны, то из условия 2) выводим

$$\alpha_{p,\nu} \leqslant \alpha_{p,0} \leqslant \frac{1}{2(q+1)!} \prod_{\ell=0}^{p-1} \prod_{k=0}^{q-1} \alpha_{\ell,k} < \frac{1}{2(q+1)!} < 1\,.$$

Тем самым неравенства (20) доказаны. Из (20) и определения величин $\alpha_{j,\nu}$ заключаем, что если $0 \leqslant t < m \leqslant q$, $0 \leqslant j \leqslant q$, то

$$\frac{x_{j,m}}{x_{j,t}} = \prod_{\nu=t}^{m-1} \alpha_{j,\nu} \leqslant \alpha_{j,t} \leqslant \alpha_{j,0}. \tag{21}$$

При всех $j,m,t \in \{0,1,\dots,q\}$ выполняется оценка

$$\frac{x_{j,m}}{x_{j,t}} \leqslant \prod_{\nu=0}^{t-1} (\alpha_{j,\nu})^{-1}. \tag{22}$$

(Пустое произведение здесь и далее считается равным единице.) Действительно, если $t \leqslant m$, то ввиду (20) и (21) имеем

$$\frac{x_{j,m}}{x_{j,t}} \leqslant 1 \leqslant \prod_{\nu=0}^{t-1} (\alpha_{j,\nu})^{-1}.$$

Если же $t > m$, то

$$\frac{x_{j,m}}{x_{j,t}} = \prod_{\nu=m}^{t-1} (\alpha_{j,\nu})^{-1} \leqslant \prod_{\nu=0}^{t-1} (\alpha_{j,\nu})^{-1}.$$

Возьмем произвольную перестановку $\sigma \in S_{q+1}$ и зафиксируем её. Через p обозначим наибольший из номеров j, для которых $\sigma(j) \neq \hat{\sigma}(j)$. Поскольку значения различных перестановок не совпадают по меньшей мере в двух точках, то $p > 0$. Если $p < q$, то на множестве аргументов $\{p+1, \dots, q\}$ перестановка $\hat{\sigma}$, а вместе с ней и σ принимают все значения, меньшие $\hat{\sigma}(p) = q - p$. Так как в точке p значения этих перестановок не совпадают, то $\hat{\sigma}(p) < \sigma(p)$. Если же $p = q$, то $0 = \hat{\sigma}(q) < \sigma(q)$. Отсюда, учитывая (21), находим

$$\frac{x_{p,\sigma(p)}}{x_{p,\hat{\sigma}(p)}} \leqslant \alpha_{p,0}. \tag{23}$$

Неравенство (23) вместе с (22) и условием 2) леммы приводит нас к требуемой оценке $\omega(\sigma)$:

$$\omega(\sigma) = \prod_{j=0}^{q} \left(\frac{x_{j,\sigma(j)}}{x_{j,\hat{\sigma}(j)}} \right) = \frac{x_{p,\sigma(p)}}{x_{p,\hat{\sigma}(p)}} \prod_{j=0}^{p-1} \left(\frac{x_{j,\sigma(j)}}{x_{j,\hat{\sigma}(j)}} \right)$$
$$\leqslant \alpha_{p,0} \prod_{j=0}^{p-1} \prod_{\nu=0}^{\hat{\sigma}(j)-1} (\alpha_{j,\nu})^{-1} \leqslant \alpha_{p,0} \prod_{j=0}^{p-1} \prod_{\nu=0}^{q-1} (\alpha_{j,\nu})^{-1} \leqslant \frac{1}{2(q+1)!}\,.$$

Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть выполнены условия леммы 1. Совокупность всех взаимно однозначных отображений множества* $\{m \in \mathbb{Z} \mid 0 \leqslant m \leqslant q,\ m \neq j\}$ *в* $\{0, 1, \dots, q-1\}$ *обозначим* $S_{q,j}$, $0 \leqslant j \leqslant q$. *Положим*

$$\hat{\tau}_j(m) = \begin{cases} q - m, & m > j, \\ q - m - 1, & 0 \leqslant m < j. \end{cases}$$

Тогда для любых $j = 0, 1, \dots, q$ *и* $\tau \in S_{q,j}$, $\tau \neq \hat{\tau}_j$, *верно неравенство*

$$\omega_j(\tau) \overset{\text{def}}{=} \prod_{\substack{m=0\\ m\neq j}}^{q} \left(\frac{x_{m,\tau(m)}}{x_{m,\hat{\tau}_j(m)}} \right) \leqslant \frac{1}{2(q+1)!}\,.$$

Доказательство. Зафиксируем целое число j, $0 \leqslant j \leqslant q$, и отображение $\tau \in S_{q,j}$. Обозначим через p наибольший из номеров m, для которых $\tau(m) \neq \hat{\tau}_j(m)$. Нетрудно убедиться в том, что $p > 0$ и

$$\omega_j(\tau) = \frac{x_{p,\tau(p)}}{x_{p,\hat{\tau}_j(p)}} \prod_{\substack{m=0\\ m\neq j}}^{p-1} \left(\frac{x_{m,\tau(m)}}{x_{m,\hat{\tau}_j(m)}} \right). \tag{24}$$

Рассуждая так же, как и в доказательстве леммы 1, получаем неравенство $\hat{\tau}_j(p) < \tau(p)$ и, используя соотношения (21) и (22), из (24) выводим

$$\omega_j(\tau) \leqslant \alpha_{p,0} \prod_{\substack{m=0\\ m\neq j}}^{p-1} \prod_{t=0}^{q-1} (\alpha_{m,t})^{-1} \leqslant \frac{1}{2(q+1)!}\,.$$

Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть выполнены условия леммы 1 и имеется матрица* $Y = (y_{j,k})_{0\leqslant j,k\leqslant q}$, *элементы которой – произвольные комплексные числа, удовлетворяющие следующим ограничениям*:

1) $|y_{j,k}| \leqslant x_{j,k}$ *для любого* j *и любого* $k = 0, 1, \dots, q$;
2) $|y_{j,\hat\sigma(j)}| = x_{j,\hat\sigma(j)}$, $0 \leqslant j \leqslant q$.

Рассмотрим систему линейных уравнений

$$\sum_{j=0}^{q} u_j y_{j,k} = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant k \leqslant q-1, \\ 1, & k = q, \end{cases} \tag{25}$$

относительно переменных $\{u_j\}_{j=0}^{q}$. *Тогда эта система имеет единственное решение и для его компонент справедливы оценки*

$$|u_j| \leqslant 3x_{j,q-j}^{-1} \prod_{\ell=0}^{j-1} (\alpha_{\ell,q-\ell-1})^{-1}.$$

Доказательство. Установим, что определитель матрицы Y отличен от нуля. Имеем

$$\Delta = \det Y = \sum_{\sigma\in S_{q+1}} \operatorname{sign}\sigma \prod_{j=0}^{q} y_{j,\sigma(j)}. \tag{26}$$

Из (26) и условий 1), 2) леммы 3 находим

$$\begin{aligned} |\Delta| &\geqslant \prod_{j=0}^{q} |y_{j,\hat\sigma(j)}| - \sum_{\substack{\sigma\in S_{q+1}\\ \sigma\neq\hat\sigma}} \prod_{j=0}^{q} |y_{j,\sigma(j)}| = \prod_{j=0}^{q} x_{j,\hat\sigma(j)} - \sum_{\substack{\sigma\in S_{q+1}\\ \sigma\neq\hat\sigma}} \prod_{j=0}^{q} |y_{j,\sigma(j)}| \\ &\geqslant \prod_{j=0}^{q} x_{j,\sigma(j)} - \sum_{\substack{\sigma\in S_{q+1}\\ \sigma\neq\hat\sigma}} \prod_{j=0}^{q} x_{j,\sigma(j)} = \prod_{j=0}^{q} x_{j,\hat\sigma(j)} \biggl(1 - \sum_{\substack{\sigma\in S_{q+1}\\ \sigma\neq\hat\sigma}} \prod_{j=0}^{q} \biggl(\frac{x_{j,\sigma(j)}}{x_{j,\hat\sigma(j)}}\biggr)\biggr). \end{aligned}$$

Вспоминая определение величины $\omega(\sigma)$ и её оценку сверху из леммы 1, приходим к неравенству

$$\begin{aligned} \Delta &\geqslant \biggl(1 - \sum_{\substack{\sigma\in S_{q+1}\\ \sigma\neq\hat\sigma}} \frac{1}{2(q+1)!}\biggr) \prod_{j=0}^{q} x_{j,\hat\sigma(j)} \\ &= \biggl(1 - \frac{(q+1)!-1}{2(q+1)!}\biggr) \prod_{j=0}^{q} x_{j,\hat\sigma(j)} > \frac{1}{2} \prod_{j=0}^{q} x_{j,\hat\sigma(j)}. \end{aligned} \tag{27}$$

Тем самым показано, что $\Delta \neq 0$. Поэтому система линейных уравнений (25) имеет единственное решение $(u_0, u_1, \dots, u_q)$. Его компоненты u_j согласно формулам Крамера равны Δ_j/Δ, где Δ_j – определитель матрицы, получающейся из матрицы Y заменой её j-й строки $\{y_{j,k}\}_{0\leqslant k\leqslant q}$ на строку $(0, 0, \dots, 0, 1)$. (Для удобства система уравнений (25) записана так, что переменные u_j меняются по столбцам, а не по строкам.) Разлагая определитель Δ_j по j-й строке и используя обозначения, введенные в лемме 2, находим

$$\Delta_j = (-1)^{q+j} \det(y_{\ell,k})_{\substack{0\leqslant \ell\leqslant q,\, \ell\neq j\\ 0\leqslant k\leqslant q-1}} = (-1)^{q+j} \sum_{\tau\in S_{q,j}} \operatorname{sign}\tau \prod_{\substack{\ell=0\\ \ell\neq j}}^{q} y_{\ell,\tau(\ell)}. \tag{28}$$

Используя представление (28), условия 1), 2) леммы 3 и лемму 2, оценим модуль определителя Δ_j сверху:

$$|\Delta_j| \leqslant \sum_{\tau\in S_{q,j}} \prod_{\substack{\ell=0\\ \ell\neq j}}^{q} |y_{\ell,\tau(\ell)}| \leqslant \sum_{\tau\in S_{q,j}} \prod_{\substack{\ell=0\\ \ell\neq j}}^{q} x_{\ell,\tau(\ell)} = \biggl(1 + \sum_{\substack{\tau\in S_{q,j}\\ \tau\neq\hat\tau}} \omega_j(\tau)\biggr) \prod_{\substack{\ell=0\\ \ell\neq j}}^{q} x_{\ell,\hat\tau_j(\ell)}$$
$$\leqslant \biggl(1 + \frac{q!-1}{2(q+1)!}\biggr) \prod_{\substack{\ell=0\\ \ell\neq j}}^{q} x_{\ell,\hat\tau_j(\ell)} < \frac{3}{2} \prod_{\substack{\ell=0\\ \ell\neq j}}^{q} x_{\ell,\hat\tau_j(\ell)}. \tag{29}$$

Из соотношений (27) и (29) находим

$$|u_j| < \frac{3}{x_{j,\hat\sigma(j)}} \prod_{\substack{\ell=0\\ \ell\neq j}}^{q} \biggl(\frac{x_{\ell,\hat\tau_j(\ell)}}{x_{\ell,\hat\sigma(\ell)}}\biggr). \tag{30}$$

При $j<\ell\leqslant q$ имеем $\hat\tau_j(\ell)=\hat\sigma(\ell)$, а при $0\leqslant \ell<j$ по определению перестановок $\hat\tau_j$ и $\hat\sigma$ справедливо соотношение $\hat\tau_j(\ell)=q-\ell-1=\hat\sigma(\ell)-1$. Следовательно,

$$\frac{x_{\ell,\hat\sigma(\ell)}}{x_{\ell,\hat\tau_j(\ell)}} = \begin{cases} 1, & j<\ell\leqslant q,\\ \alpha_{\ell,q-\ell-1}, & 0\leqslant \ell<j. \end{cases}$$

Отсюда и из (30) получаем оценку

$$|u_j| < 3\biggl(x_{j,q-j}\prod_{\ell=0}^{j-1}\alpha_{\ell,q-\ell-1}\biggr)^{-1},$$

а это и требовалось доказать.

Доказательство теоремы 5. Сначала построим по индукции последовательность номеров $\{n_s\}_{s=0}^{\infty}$. Она будет объединением пачек E_q, $0\leqslant q<+\infty$, содержащих $q+1$ элемент:

$$E_q = \biggl\{ n_s \biggm| \frac{q(q+1)}{2} \leqslant s < \frac{(q+1)(q+2)}{2},\ q\in\mathbb{N}_0 \biggr\}.$$

В качестве номера n_0 возьмем наименьшее число m, для которого

$$\alpha_{\nu,0} < 1 \ \ \forall \nu\geqslant m, \quad |a_{m,0}| = A_{m,0}.$$

Из условия теоремы следует, что такие числа m существуют, поскольку $\lim_{\nu\to\infty}\alpha_{\nu,0}=0$ и равенство $|a_{m,0}|=A_{m,0}$ выполняется для бесконечного количества $m\in\mathbb{N}$. Положим $E_0=\{n_0\}$. Пусть теперь $q\in\mathbb{N}$ и пачки E_p при

$p < q$ уже построены. Опишем процесс построения пачки E_q, состоящей из $q+1$ элемента. Номер $n_{q(q+1)/2}$ будет наименьшим числом m, для которого выполняются соотношения

$$m > \psi(n_{q(q+1)/2-1}), \qquad |a_{m,q}| = A_{m,q}.$$

В силу условия 5) теоремы такие m существуют. Без ограничения общности можно считать, что $\psi(x) > x$ для любого $x \in \mathbb{N}$, это обеспечивает условие

$$n_{q(q+1)/2} > n_{q(q+1)/2-1}.$$

Номера $n_{q(q+1)/2+j}$, $1 \leqslant j \leqslant q$, выбираются следующим образом. Если уже имеются числа $n_{q(q+1)/2+\ell}$, $0 \leqslant \ell \leqslant j-1$, то в качестве $n_{q(q+1)/2+j}$ берем наименьшее $m \in \mathbb{N}$, для которого одновременно выполняются следующие соотношения:

1) $m > \psi(n_{q(q+1)/2+j-1})$;

2) $\alpha_{m,0} < \dfrac{1}{3(q+1)!} \displaystyle\prod_{\ell=0}^{j-1} \prod_{k=0}^{q-1} (\alpha_{n_{q(q+1)/2+\ell},k})$; (31)

3) $A_{m,q-j} = |a_{m,q-j}|$.

(Из условий 3), 5) теоремы, а также из положительности чисел $\alpha_{n,k}$ вытекает, что таких m бесконечно много.) Таким образом, пачка E_q построена, и тем самым построена бесконечная последовательность номеров $\{n_s\}_{s=0}^{\infty}$, для которой выполнено требование $n_{s+1} > \psi(n_s)$ $\forall s \in \mathbb{N}_0$.

Покажем, что для подпоследовательности функций $\{f_{n_s}(z)\}_{s=0}^{\infty}$ выполняется утверждение 3) теоремы (а значит, и утверждение 2)). Всюду ниже во избежание громоздких обозначений вместо $n_{j+q(q+1)/2}$ при $0 \leqslant j \leqslant q$ будем писать $n(j,q)$. При каждом фиксированном $q \in \mathbb{N}$ рассмотрим матрицы $Y_q = (y_{j,k,q})_{0 \leqslant j,k \leqslant q}$, где $y_{j,k,q} = a_{n(j,q),k}$, и систему линейных уравнений

$$\sum_{j=0}^{q} u_{j,q} y_{j,k,q} = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant k \leqslant q-1, \\ 1, & k = q. \end{cases} \tag{32}$$

Если положить $x_{j,k,q} = A_{n(j,q),k}$, то окажется, что в силу (31) для матриц $X_q = (x_{j,k,q})_{0 \leqslant j \leqslant k \leqslant q}$ и Y_q выполняются все условия леммы 3. Следовательно, система уравнений (32) имеет единственное решение $(u_{0,q}, \ldots, u_{q,q})$, для компонент которого справедлива оценка

$$|u_{j,q}| \leqslant \frac{3}{A_{n(j,q),q-j}} \prod_{\ell=0}^{j-1} (\alpha_{n(\ell,q),q-\ell-1})^{-1}, \qquad 0 \leqslant j \leqslant q. \tag{33}$$

Положим[3]

$$g_0(z) = (a_{n_0})^{-1} f_{n_0}(z), \qquad g_q(z) = \sum_{j=0}^{q} u_{j,q} f_{n(j,q)}, \qquad q \in \mathbb{N}.$$

[3]Напомним, что согласно выбору номера n_0 выполняется равенство $|a_{n_0,0}| = A_{n_0,0}$, а по условию теоремы 5 $A_{n,k} > 0$ при всех $n, k \in \mathbb{N}$. Следовательно, $a_{n_0,0} \neq 0$.

Отсюда заключаем, что функции $g_q(z)$ имеют следующее разложение в ряд Тейлора:

$$g_q(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\biggl(\sum_{j=0}^{q} a_{n(j,q),k}u_{j,q}\biggr)z^k, \qquad q \in \mathbb{N}. \tag{34}$$

В силу (32) коэффициенты ряда (34) при $0 \leqslant k \leqslant q-1$ обращаются в нуль, а коэффициент при z^q равен единице. Поэтому функции $g_q(z)$ имеют вид

$$g_q(z) = z^q(1+\varphi_q(z)), \qquad q \in \mathbb{N}_0,$$

где $\varphi_0(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{n_0,k}}{a_{n_0,0}} z^k$, а при $q \geqslant 1$

$$\varphi_q(z) = \sum_{k=q+1}^{\infty}\biggl(\sum_{j=0}^{q} a_{n(j,q),k}u_{j,q}\biggr)z^k. \tag{35}$$

Для доказательства утверждения 3) теоремы осталось установить квазистепенную базисность в $\mathcal{A}(\mathbb{C})$ последовательности функций $g_q(z) = z^q(1+\varphi_q(z))$. Как отмечалось выше, для этого достаточно проверить справедливость соотношения

$$\lim_{q\to+\infty}\Bigl(\max_{|z|\leqslant R}|\varphi_q(z)|\Bigr) = 0 \quad \forall R > 0. \tag{36}$$

Воспользуемся оценкой сверху (33) для величин $|u_{j,q}|$ и подставим ее в ряд (35). Получим

$$\max_{|z|\leqslant R}|\varphi_q(z)| \leqslant 3\sum_{k=q+1}^{\infty} R^{k-q}\sum_{j=0}^{q}\frac{|a_{n(j,q),k}|}{A_{n(j,q),q-j}}\prod_{\ell=0}^{j-1}(\alpha_{n(\ell,q),q-\ell-1})^{-1}. \tag{37}$$

Согласно (31) имеем

$$3(q+1)!\prod_{\ell=0}^{j-1}\prod_{k=0}^{q-1}(\alpha_{n(\ell,q),k})^{-1} \leqslant \frac{1}{\alpha_{n(j,q),0}}\,, \qquad 0 \leqslant j \leqslant q. \tag{38}$$

Напомним, что при $\nu \geqslant n_0$ все величины $\alpha_{\nu,0}$ меньше единицы. Поскольку последовательность $\alpha_{n,k}$ не возрастает по k при любом фиксированном n, то $\alpha_{\nu,k} < 1$ при всех $\nu \geqslant n_0,\ k \geqslant 0$. Поэтому, удалив некоторое количество сомножителей из произведения, стоящего в левой части неравенства (38), мы только усилим неравенство. В частности,

$$3(q+1)!\prod_{\ell=0}^{j-1}(\alpha_{n(\ell,q),q-\ell-1})^{-1} \leqslant \frac{1}{\alpha_{n(j,q),0}}\,, \qquad 0 \leqslant j \leqslant q. \tag{39}$$

Из неравенств (37) и (39), учитывая, что $|a_{n,k}| \leqslant A_{n,k}$ при всех $n,k \in \mathbb{N}_0$, находим

$$\max_{|z|\leqslant R}|\varphi_q(z)| \leqslant \frac{1}{(q+1)!}\sum_{k=q+1}^{\infty} R^{k-q}\sum_{j=0}^{q}\frac{A_{n(j,q),k}}{A_{n(j,q),q-j}}\,\frac{1}{\alpha_{n(j,q),0}}\,.$$

Поскольку при любых $\nu, k, t \in \mathbb{N},\ k > t$, имеем

$$\frac{A_{\nu,k}}{A_{\nu,t}} = \prod_{m=t}^{k-1} \alpha_{\nu,m},$$

то при $\nu > n_0$ и $0 \leqslant j \leqslant q$ справедлива оценка

$$\frac{A_{\nu,k}}{A_{\nu,q-j}} = \prod_{m=q-j}^{k-1} \alpha_{\nu,m} \leqslant \prod_{m=q}^{k-1} \alpha_{\nu,m}.$$

Следовательно,

$$\max_{|z|\leqslant R} |\varphi_q(z)| \leqslant \frac{1}{(q+1)!} \sum_{j=0}^{q} \frac{1}{\alpha_{n(j,q),0}} \sum_{k=q+1}^{\infty} \prod_{m=q}^{k-1} (R\alpha_{n(j,q),m}). \tag{40}$$

Поскольку $\lim_{\nu\to\infty} \alpha_{\nu,0} = 0$, то при $q > q_0(R)$ выполнено неравенство

$$\alpha_{n(j,q),0} R < \frac{1}{2}\,.$$

Отсюда в силу убывания последовательности $\alpha_{\nu,m}$ с ростом m получаем оценку

$$\sum_{k=q+1}^{\infty} \prod_{m=q}^{k-1} (R\alpha_{n(j,q),m}) \leqslant \sum_{k=q+1}^{\infty} (R\alpha_{n(j,q),0})^{k-q} = \frac{R\alpha_{n(j,q),0}}{1 - R\alpha_{n(j,q),0}} < 2R\alpha_{n(j,q),0}. \tag{41}$$

Из соотношений (40) и (41) находим

$$\max_{|z|\leqslant R} |\varphi_q(z)| \leqslant \frac{1}{(q+1)!} \sum_{j=0}^{q} 2R = \frac{2R}{q!}\,, \qquad q > q_0(R). \tag{42}$$

Отсюда вытекает (36); это завершает доказательство теоремы.

Доказательство теоремы 3. Напомним [18, гл. 7, § 12], что если целая функция $a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ имеет тип при порядке ρ, равный σ, то

$$(\sigma e \rho)^{1/\rho} = \limsup_{n\to\infty} \bigl(\sqrt[n]{|a_n|}\, n^{1/\rho} \bigr).$$

Из этого соотношения и определения верхнего предела вытекает ограниченность последовательности $\sqrt[n]{|a_n|}\, n^{1/\rho}$. Значит, существует положительная постоянная c, зависящая от функции $a(z)$, такая, что

$$\sqrt[n]{|a_n|}\, n^{1/\rho} < c \Leftrightarrow |a_n|\, n^{n/\rho} < c^n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Следовательно, $\lim_{n\to\infty} \bigl(c^{-n} |a_n|\, (n!)^{1/\rho} \bigr) = 0$.

Возьмем и зафиксируем функцию $f(z)$, имеющую конечный тип при порядке ρ, разложение в ряд Маклорена (13) которой удовлетворяет условию (14).

Согласно доказанному выше существует постоянная $c = c(f) > 0$ такая, что $\lim_{j\to\infty}\bigl(c^{-m_j} b_j (m_j!)^{1/\rho}\bigr) = 0$. Обозначим

$$x_j = c^{-m_j}|b_j|(m_j!)^{1/\rho} \tag{43}$$

и построим для последовательности x_j монотонно стремящуюся к нулю мажоранту по формуле $y_j = \max_{j\leqslant k} x_k$.

Нетрудно убедиться в том, что $x_j \leqslant y_j\ \forall j \in \mathbb{N}$ и множество $E = \{j \in \mathbb{N} \mid x_j = y_j\}$ состоит из бесконечного числа элементов.

Выберем E_1 – бесконечное подмножество E – по следующему правилу:

1) наименьший элемент E_1 совпадает с наименьшим элементом E;

2) если построены первые k элементов множества E_1 (обозначим их $j_0, j_1, \dots, j_{k-1}$), то следующий $(k+1)$-й находится так: среди всех чисел $n \in E$, бóльших j_{k-1} (они существуют, поскольку количество элементов E бесконечно), выбирается наименьшее из тех, для которых выполняются неравенства

$$2\psi(m_{j_{k-1}}) < n, \qquad 2 + j_{k-1} < n, \tag{44}$$

$$k < m_n - m_{n-1}. \tag{45}$$

Требование (45) осуществимо, так как ввиду (14) $\lim_{t\to\infty}(m_t - m_{t-1}) = +\infty$.

Положим $\nu_k = m_{j_k} - k$ и докажем, что, во-первых, $\psi(\nu_{k-1}) < \nu_k$ при любом натуральном k, а во-вторых, последовательность функций

$$f_k(z) = \frac{f^{(\nu_k)}(z)k!}{b_{j_k} m_{j_k}!}, \qquad k \in \mathbb{N}_0, \tag{46}$$

образует квазистепенной базис в $\mathcal{A}(\mathbb{C})$. Одновременная справедливость этих утверждений и означает, что теорема 3 верна.

Первое утверждение доказывается просто. Заметим, что согласно выбору последовательности $\{j_k\}$, определяемому соотношениями (44) и (45), верны неравенства

$$2\psi(m_{j_{k-1}}) < j_k, \qquad 2 + j_{k-1} < j_k, \qquad k < m_{j_k} - m_{j_k-1}.$$

Отсюда находим $j_k \geqslant 2k+1$. А так как $j_k \leqslant m_{j_k}$, то $\nu_k = m_{j_k} - k > m_{j_k} - j_k/2 \geqslant m_{j_k}/2$. Следовательно, $m_{j_k}/2 < \nu_k < m_{j_k}$. Поэтому в силу возрастания ψ имеем

$$\psi(\nu_n) < \psi(m_{j_n}) < \frac{j_{n+1}}{2} \leqslant \frac{m_{j_{n+1}}}{2} < \nu_{n+1},$$

что и требуется доказать.

Докажем квазистепенную базисность системы функций (46). Проверим сначала, что ряд Маклорена $f_k(z)$ начинается с z^k. Если продифференцировать ν_k раз функцию $f(z)$, то все слагаемые ее ряда Маклорена, содержащие степени z, меньшие ν_k, обратятся в нуль. В силу выбора ν_k и неравенства (45) имеем $\nu_k = m_{j_k} - k > m_{j_k-1}$. Ввиду лакунарности ряда (13) в нем отсутствуют слагаемые, содержащие степени z, лежащие в интервалах $\bigl(m_{j_k-1}, m_{j_k}\bigr)$. Поэтому производная функции f порядка ν_k имеет вид

$$f^{(\nu_k)}(z) = \sum_{j=j_k}^{\infty} b_j z^{m_j-\nu_k} \prod_{n=0}^{\nu_k-1}(m_j - n). \tag{47}$$

Из соотношений (46) и (47), учитывая, что $m_{j_k} - \nu_k = k$, находим

$$
\begin{aligned}
f_k(z) &= z^k + \sum_{j=j_k+1}^{\infty} \frac{b_j m_j! k!}{b_{j_k}(m_j-\nu_k)! m_{j_k}!}\, z^{m_j - m_{j_k} + k} \\
&= z^k\left(1 + \sum_{j=j_k+1}^{\infty} \frac{b_j}{b_{j_k}} \frac{m_j! k!}{(m_j - m_{j_k} + k)! m_{j_k}!}\, z^{m_j - m_{j_k}}\right).
\end{aligned} \tag{48}
$$

Согласно теореме Евграфова (см. выше) для доказательства квазистепенной базисности в $\mathcal{A}(\mathbb{C})$ системы функций $\{f_k(z)\}_{k=0}^{\infty}$, разложение которых в ряды Маклорена начинается с z^k, достаточно установить, что

$$
\lim_{k\to\infty} (z^{-k} f_k(z) - 1) = 0 \tag{49}
$$

равномерно в любом круге на комплексной плоскости. Из (48) видно, что предельное равенство (49) вытекает из следующего более сильного соотношения[4]

$$
\lim_{k\to\infty} S_k(R) = 0 \quad \forall R > 0, \tag{50}
$$

где

$$
S_k(R) = \sum_{j=j_k+1}^{\infty} \left|\frac{b_j}{b_{j_k}}\right| \frac{m_j!\, R^{m_j - m_{j_k}}}{(m_j - m_{j_k})!\, m_{j_k}!}\,. \tag{51}
$$

Именно равенство (50) сейчас и будет доказано.

Воспользовавшись введенным выше обозначением (43), получим

$$
\left|\frac{b_j}{b_{j_k}}\right| = \frac{x_j}{x_{j_k}} \frac{(m_{j_k}!)^{1/\rho}}{(m_j!)^{1/\rho}}\, c^{m_j - m_{j_k}} \leqslant c^{m_j - m_{j_k}} \left(\frac{m_{j_k}!}{m_j!}\right)^{1/\rho} \quad \forall j > j_k. \tag{52}
$$

Неравенство в (52) является следствием включения $j_k \in E$: согласно определению множества E имеем $x_j \leqslant x_n$ $(\forall n \in E,\ \forall j > n)$. Из (51) и (52) находим

$$
S_k(R) \leqslant \sum_{j=j_k+1}^{\infty} \frac{(cR)^{m_j - m_{j_k}}}{(m_j - m_{j_k})!} \left(\frac{m_j!}{m_{j_k}!}\right)^{1-\frac{1}{\rho}}.
$$

Таким образом, для завершения доказательства теоремы осталось решить следующую задачу. Требуется установить справедливость соотношения

$$
\lim_{k\to\infty} \sigma_k(r) = 0 \quad \forall r > 0, \tag{53}
$$

[4] Были использованы два очевидных неравенства:

$$
\max_{|z|\leqslant R} \left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| R^n \quad \forall R > 0, \qquad \frac{k!}{(p+k)!} \leqslant \frac{1}{p!} \quad \forall p, k \in \mathbb{N}.
$$

где $\{m_j\}_{j=1}^{\infty}$ – произвольная возрастающая последовательность натуральных чисел, удовлетворяющая условию (14),

$$\sigma_k(r) = \sum_{j=j_k+1}^{\infty} \frac{r^{m_j - m_{j_k}}}{(m_j - m_{j_k})!} \left(\frac{m_j!}{m_{j_k}!}\right)^{1-\frac{1}{\rho}}. \tag{54}$$

Обозначим $A_k = m_{j_k+1} - m_{j_k}$, $b = 1 - 1/\rho$. Получим

$$\sigma_k(r) < \sum_{m=m_{j_k+1}}^{\infty} \frac{r^{m-m_{j_k}}}{(m - m_{j_k})!} \left(\frac{m!}{m_{j_k}!}\right)^b = \sum_{n=A_k}^{\infty} \frac{r^n}{n!} \left(\frac{(m_{j_k}+n)!}{m_{j_k}!}\right)^b. \tag{55}$$

Если $\rho = 1$, то последняя сумма в (55) является остатком степенного ряда для e^r. Поскольку остатки степенного ряда произвольной целой функции равномерно сходятся к нулю в любом круге на комплексной плоскости, то из (55) и равенства $\lim_{k\to\infty} A_k = +\infty$ (см. (14)) сразу же вытекает (53) в случае $\rho = 1$.

При $\rho > 1$ согласно (14) имеем

$$\lim_{k\to\infty} (A_k m_{j_k}^{-b}) = +\infty. \tag{56}$$

Рассмотрим последовательность

$$u_{n,k} = \frac{(2r)^n}{n!} \left(\frac{(m_{j_k}+n)!}{m_{j_k}!}\right)^b.$$

Тогда оценка (55) переписывается в следующем виде:

$$\sigma_k(r) \leqslant \sum_{n=A_k}^{\infty} 2^{-n} u_{n,k}. \tag{57}$$

Докажем, что при любом достаточно большом k последовательность $u_{n,k}$ является убывающей по n при $n \geqslant A_k$ и

$$\lim_{k\to\infty} u_{A_k,k} = 0. \tag{58}$$

Нетрудно убедиться в том, что это завершит доказательство соотношения (53). Действительно, из (57) и (58), учитывая убывание $u_{n,k}$ по n при $n \geqslant A_k$, находим

$$\sigma_k(r) < u_{A_k,k} \sum_{n=A_k}^{\infty} 2^{-n} = o(u_{A_k,k}) = o(1), \qquad k \to \infty,$$

что и требовалось доказать.

Убывание $\{u_{n,k}\}$ по n при $n \geqslant A_k$ вытекает из неравенства

$$\frac{u_{n,k}}{u_{n-1,k}} < 1 \quad \forall n > A_k. \tag{59}$$

Установим его справедливость при любом достаточно большом k. Имеем

$$\frac{u_{n,k}}{u_{n-1,k}} = \frac{2r(m_{j_k}+n)^b}{n}. \tag{60}$$

Ввиду (56) при всех достаточно больших k выполняется неравенство

$$A_k > 8rm_{j_k}^b\,. \tag{61}$$

Из (60) и (61), учитывая убывание функции $x^{-1}(m+x)^b$ на полуоси $0 < x < +\infty$ при любых $m > 0$ и $b \in (0,1)$, получаем оценки

$$\frac{u_{n,k}}{u_{n-1,k}} < \frac{2r(m_{j_k}+A_k)^b}{A_k} < \frac{(m_{j_k}+8rm_{j_k}^b)^b}{4m_{j_k}^b}\,. \tag{62}$$

Правая часть неравенства (62) имеет при $k \to \infty$ предел, равный $1/4$, что влечет за собой справедливость неравенства (59) при $n > A_k$ и всех достаточно больших k.

Теперь докажем предельное соотношение (58). Имеем

$$\begin{aligned} u_{A_k,k} &= \frac{(2r)^{A_k}}{A_k!}\left(\frac{(m_{j_k}+A_k)!}{m_{j_k}!}\right)^b \leqslant \frac{(2r)^{A_k}(m_{j_k}+A_k)^{A_k b}}{A_k!} \\ &\leqslant \frac{(2r)^{A_k}A_k^{A_k}}{A_k!}\,\frac{(m_{j_k}+A_k)^{A_k b}}{A_k^{A_k}}\,. \end{aligned} \tag{63}$$

Из (63) и неравенства

$$\frac{m^m}{m!} < \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{m^\nu}{\nu!} = e^m \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

находим

$$u_{A_k,k} < (2er)^{A_k}\left(\frac{(m_{j_k}+A_k)^b}{A_k}\right)^{A_k}. \tag{64}$$

Исходя из убывания функции $x^{-1}(m+x)^b$ на луче $0 < x < +\infty$ $(m > 0,$ $0 < b < 1)$, заключаем, что, подставив в выражение $A_k^{-1}(m_{j_k}+A_k)^b$ вместо A_k оценку снизу $8rm_{j_k}^b$ этих величин (см. (61)), мы только усилим неравенство (64):

$$\begin{aligned} u_{A_k,k} &< (2er)^{A_k}\left(\frac{(m_{j_k}+8rm_{j_k}^b)^b}{8rm_{j_k}^b}\right)^{A_k} = \left(\frac{e}{4}\right)^{A_k}\left(\frac{m_{j_k}+8rm_{j_k}^b}{m_{j_k}}\right)^{bA_k} \\ &= \left(\frac{e}{4}\right)^{A_k}\bigl(1+o(1)\bigr)^{A_k} = o(1), \qquad k \to \infty. \end{aligned}$$

Стремление к нулю последовательности $u_{A_k,k}$ при $k \to \infty$ доказано, и это завершает доказательство теоремы.

Доказательство теоремы 4. Зафиксируем функцию $f(z)$, заданную лакунарным степенным рядом (15). Свяжем с ней функцию сравнения

$$B(z) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n z^n$$

(см. [13, предложение 4]), тейлоровы коэффициенты которой обладают следующими свойствами:

1) $|b_j| \leqslant B_{m_j}$ для любого $j \in \mathbb{N}$;

2) множество $E = \{j \in \mathbb{N} \mid |b_j| = B_{m_j}\}$ состоит из бесконечного числа элементов.

Построим E_1 – бесконечное подмножество E – точно так же, как и в теореме 3. Потом тем же способом определяем числовую $\{\nu_k\}_{k=0}^{\infty}$ и функциональную $\{f_k(z)\}_{k=0}^{\infty}$ последовательности. Неравенство $\psi(\nu_{k-1}) < \nu_k$ установлено в доказательстве теоремы 3. Осталось доказать предельные соотношения (50), из которых, как было отмечено выше, вытекает квазистепенная базисность в $\mathcal{A}(\mathbb{C})$ системы функций (46). Возьмем произвольное число $R > 0$ и зафиксируем его. В соответствии с построением множества E_1 и свойствами 1), 2) тейлоровых коэффициентов функции сравнения из (47) находим[5]

$$\begin{aligned} S_k(R) &\leqslant \sum_{j=j_k+1}^{\infty} \frac{B_{m_j}}{B_{m_{j_k}}} \frac{m_j!\, R^{m_j-m_{j_k}}}{(m_j-m_{j_k})!\, m_{j_k}!} \\ &< \sum_{j=j_k+1}^{\infty} \biggl(\frac{B_{m_j}}{B_{m_{j_k}}}\biggr) 2^{m_j} R^{m_j-m_{j_k}}. \end{aligned} \tag{65}$$

В силу стремления к нулю отношения B_{n+1}/B_n при всех достаточно больших n выполняются неравенства

$$\frac{B_{n+1}}{B_n} < \bigl(2^{1+\frac{q}{q-1}} R\bigr)^{-1}$$

(число $q > 1$ определено в (15)). Следовательно, при всех достаточно больших k имеем

$$\begin{aligned} \frac{B_{m_j}}{B_{m_{j_k}}} &= \prod_{n=m_{j_k}}^{m_j-1} \frac{B_{n+1}}{B_n} \\ &\leqslant \biggl(\max\biggl\{\frac{B_{n+1}}{B_n} \biggm| n \geqslant m_{j_k}\biggr\}\biggr)^{m_j-m_{j_k}} < \Bigl(2^{1+\frac{q}{q-1}} R\Bigr)^{m_{j_k}-m_j}. \end{aligned} \tag{66}$$

Из соотношений (65) и (66) находим

$$\begin{aligned} S_k(R) &< \sum_{j=j_k+1}^{\infty} 2^{m_j} \Bigl(2^{1+\frac{q}{q-1}}\Bigr)^{m_{j_k}-m_j} = 2^{m_{j_k}} \sum_{j=j_k+1}^{\infty} 2^{\frac{q(m_{j_k}-m_j)}{q-1}} \\ &< 2^{m_{j_k}} \sum_{m=p_k}^{\infty} 2^{-\frac{mq}{q-1}} = O\Bigl(2^{m_{j_k}} \cdot 2^{-\frac{p_k q}{q-1}}\Bigr), \end{aligned} \tag{67}$$

где $p_k = m_{j_k+1} - m_{j_k}$. В силу (15) имеем

$$q = \liminf_{j\to\infty} \frac{m_{j+1}}{m_j} = 1 + \liminf_{j\to\infty} \frac{m_{j+1}-m_j}{m_j} \leqslant 1 + \liminf_{k\to\infty} \frac{p_k}{m_{j_k}}.$$

---

[5] Ниже используется оценка сверху числа сочетаний: $\frac{m!}{k!(m-k)!} < 2^m \ \ \forall m \in \mathbb{N}$.

Отсюда $p_k/m_{j_k} \geqslant (q-1)(1+o(1))$, $k \to \infty$, или, что то же самое, $m_{j_k} \leqslant p_k/(q-1)+o(p_k)$, $k \to \infty$. Это соотношение вместе с (67) влечет за собой асимптотические оценки

$$\begin{aligned}\log_2 S_k(R) &< m_{j_k} - \frac{p_k q}{q-1} + O(1)\\ &= -p_k + \left(m_{j_k} - \frac{p_k}{q-1}\right) + O(1) \leqslant -p_k + o(p_k) \to -\infty, \qquad k \to \infty.\end{aligned}$$

Следовательно, $\lim_{k\to\infty} S_k(R) = 0$, что и доказывает теорему.

Список литературы

1. *Казьмин Ю. А.* О полноте одной системы аналитических функций. I, II // Вестн. МГУ. 1960. №5. С. 3–13; №6. С. 11–19.
2. *Громов В. П.* О полноте системы производных аналитических функций // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1961. Т. 25. №3. С. 543–551.
3. *Казьмин Ю. А.* О подпоследовательностях полиномов Эрмита и Лагерра // Вестн. МГУ. 1960. №2. С. 6–9.
4. *Громов В. П.* К вопросу о циклических элементах оператора дифференцирования в пространствах аналитических функций // Матем. заметки. 1983. Т. 33. №4. С. 529–538.
5. *Коробейник Ю. Ф.* О полноте одной системы аналитических функций // Матем. сб. 1965. Т. 67(109). №4. С. 561–569.
6. *Евграфов М. А.* Метод близких систем в пространстве аналитических функций и его применение к проблеме интерполяции // Тр. Моск. матем. об-ва. 1956. Т. 5. С. 89–201.
7. *Попов А. Ю.* Об аппроксимативных свойствах некоторых типов последовательностей целых функций // Докл. РАН. 1999. Т. 366. №1. С. 18–20.
8. *Казьмин Ю. А.* Сравнения функция // Матем. энциклопедия. Т. 5. М.: Сов. энциклопедия, 1985. С. 160.
9. *Казьмин Ю. А.* Об одной задаче А. О. Гельфонда // Матем. сб. 1973. Т. 90. №4. С. 521–543.
10. *Казьмин Ю. А.* Методы теории интерполяции аналитических функций и их приложения: Дис. ... доктора физ.-мат. наук. М.: МГУ, 1972.
11. *Hadamard J.* Essai sur l'etude des fonctions données par leur development de Taylor // J. Math. Pures. Appl. 1892. Ser. 4. V. 8.
12. *Валирон Ж.* Аналитические функции. М.: ГИТТЛ, 1957.
13. *Попов А. Ю.* Об обращении обобщенного преобразования Бореля // Фундам. и прикл. математика. 1999. Т. 5. №3. С. 817–841.
14. *Джрбашян М. М.* Интегральные преобразования и представления целых функций в комплексной области. М.: Наука, 1966.
15. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. М.: ГИТТЛ, 1956.
16. *Осколков В. А.* О некоторых вопросах теории целых функций // Матем. сб. 1993. Т. 184. №1. С. 129–148.
17. *Попов А. Ю.* Границы сходимости и единственности интерполяционных задач Абеля–Гончарова // Матем. сб. 2002. Т. 193. №2. С. 97–128.
18. *Маркушевич А. И.* Краткий курс теории аналитических функций. М.: Наука, 1977.

Поступило в редакцию
25.11.2003