

Общероссийский математический портал

А. Ю. Попов, Ю. С. Чайников, Аналогии тауберовых теорем для преобразования Лапласа, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2002, том 66, выпуск 6, 137–158

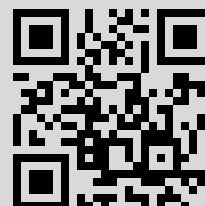
DOI: <http://dx.doi.org/10.4213/im412>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 213.24.135.225

24 ноября 2015 г., 16:11:00



УДК 517.521.75

А. Ю. Попов, Ю. С. Чайников

Аналоги тауберовых теорем для преобразования Лапласа

Получены усиления в различных направлениях тауберовой теоремы для преобразования Лапласа, доказанной С. В. Конягиным и А. Ю. Поповым в 1995 г.

Библиография: 9 наименований.

1. Постановка задачи и формулировки результатов. Осенью 1994 г. С. Б. Стечкин на своем научно-исследовательском семинаре в МГУ поставил следующую задачу¹.

Пусть μ – определенная на $\mathbb{R}_+$ комплекснозначная функция, имеющая при любом $x > 0$ ограниченную вариацию $V(x) = \text{Var } \mu(t)|_0^x$, для которой выполняется оценка

$$V(x) \leq c_0 \exp(Cx) \quad \forall x > 0. \quad (1)$$

(Через C , c_0 , c_1 и т.д. в работе обозначаются некоторые положительные постоянные.) Положим

$$F(s) = \int_0^{+\infty} \exp(-st) d\mu(t). \quad (2)$$

Из оценки (1) вытекает равномерная сходимость интеграла (2) в полуплоскостях $\text{Re } s > C + \varepsilon$ ($\forall \varepsilon > 0$). Следовательно, функция $F(s)$ является аналитической при $\text{Re } s > C$. Предположим, что выполнено *условие S*: существует такое число $t_0 \in \mathbb{R}$, что функция F допускает аналитическое продолжение в некоторую окрестность отрезка $[it_0, C + it_0]$ с выколотой точкой it_0 , а в самой точке it_0 функция $F(s)$ имеет полюс порядка m . Требуется доказать, что условие S влечет за собой оценку снизу вариации меры $d\mu$:

$$V(x) > c_1 x^m \quad \forall x > x_0, \quad (3)$$

или даже более сильное неравенство ($\lambda \in (0, 1)$ фиксировано)

$$V(x) - V(\lambda x) > c_1 x^m \quad \forall x > x_0. \quad (4)$$

Задачу получения аналогичных оценок можно ставить и в случае произвольной действительной части полюса функции F , но общий случай сводится к рассматриваемому заменой переменной. Исходя из тех же соображений, можно было бы считать, что $t_0 = 0$. Но так как в некоторых ситуациях имеет смысл отдельно изучать действительностнозначные меры, то такое упрощение в формулировке условия S произведено не было.

¹Задача возникла в теории чисел (см. [1]) и первоначально ставилась для преобразования Меллина функций g , локально суммируемых на $[1, +\infty)$: $F(s) = \int_1^{+\infty} g(u)u^{-s-1} du$. Но поскольку после замены переменной $u = e^t$ функцию F можно записать в виде преобразования Лапласа $F(s) = \int_0^{+\infty} \exp(-st)g(e^t) dt$ и эта запись удобнее по ряду причин, то задача С. Б. Стечкина переформулирована для преобразования Лапласа мер.

Рассматриваемая задача для положительной меры $d\mu$ и $t_0 = 0$ была давно решена (см., например, [2, гл. I]). Заметим, что если мера $d\mu$ положительна, то особая точка $F(s)$ с наибольшей абсциссой лежит на $\mathbb{R}$; следовательно, $F(s)$ аналитична на $(0, +\infty)$. В этой ситуации была выведена асимптотика

$$V(x) \sim c_2 x^m / m!, \quad x \rightarrow +\infty,$$

где $c_2 = \lim_{s \rightarrow +0} s^m F(s)$. Теоремы, в которых из свойств функции $F(s)$ находятся при $x \rightarrow +\infty$ асимптотики для $\mu(x)$, $V(x)$ или плотности меры $d\mu(x)$ (если последняя абсолютно непрерывна), принято называть *тауберовыми теоремами*. В настоящей работе мы не выводим асимптотик для этих функций, а ограничиваемся односторонними оценками; поэтому доказываемые ниже утверждения можно рассматривать только как аналоги тауберовых теорем. Причина такой, на первый взгляд, “ослабленной” (в сравнении с классической) постановки задачи кроется в том, что в исследуемой нами общей ситуации надежды на нахождение точного порядка роста $V(x)$ нет. Ведь задача поставлена таким образом, что в ее условии содержится минимум данных об особых точках $F(s)$. В частности, ничего не сказано о том, чему равна верхняя грань действительных частей особенностей $F(s)$. Информация подобного рода часто отсутствует для ряда производящих функций, представимых в виде преобразований Лапласа (или Меллина) и играющих заметную роль в аналитической теории чисел. Соответствующие примеры имеются в [1], [3], [4].

В работе [3] было доказано неравенство вида (4) при следующих дополнительных ограничениях на функцию F .

ТЕОРЕМА А [3]. *Если при каком-либо $R > C$ функция $F(s)$ допускает аналитическое продолжение в некоторую окрестность замкнутого сегмента $K_R(t_0) = \{s \in \mathbb{C}: |s - (R + it_0)| \leq R, \operatorname{Re} s \leq C\}$ с выколотой точкой it_0 и имеет в ней полюс порядка m , а $\beta \in (0, +\infty)$, $\delta \in (0, +\infty)$ – произвольные числа, удовлетворяющие условиям²*

$$\frac{\delta + \ln(1 - \delta)}{\delta - 1} > \frac{C}{R}, \quad \frac{\beta - \ln(1 + \beta)}{1 + \beta} > \frac{C}{R}, \quad (5)$$

то справедлива оценка (4) для $\lambda = (1 - \delta)^2 / (1 + \beta)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если $F(s)$ допускает аналитическое продолжение в некоторую окрестность полукруга K_C с выколотой точкой it_0 и имеет в ней полюс порядка m , то для достаточно близких к C значений $R > C$ выполняются условия теоремы А. Следовательно, в этом случае при некотором $\lambda \in (0, 1)$ выполняется оценка (4), и тем более оценка (3).

Таким образом, в работе [3] задача С. Б. Стечкина была решена при дополнительном условии аналитичности преобразования Лапласа $F(s)$ в полукруге $K_C(t_0)$ с выколотой точкой it_0 . В настоящей статье доказано, что для справедливости оценки (3) достаточно лишь одного условия S. Установлено также, что утверждение теоремы А остается в силе даже при некотором большем λ , чем в ней указано, если функция F имеет в K_R в качестве особенностей только полюсы. Перейдем к точным формулировкам результатов.

²Нетрудно убедиться в том (см. [3]), что такие β и δ всегда существуют.

ТЕОРЕМА 1³. Если выполнено условие S, то с некоторыми постоянными $c_1 > 0$ и $x_1 > 0$ справедлива оценка (3).

Поскольку сумма любого степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, сходящегося в круге $|z| < r$, после замены переменной $z = e^{-s}$ может быть представлена в полуплоскости $\operatorname{Re} s > -\ln r$ в виде преобразования Лапласа дискретной меры⁴ со скачками в точках $\mathbb{N}_0$, равными a_n , то из теоремы 1 немедленно получаем

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть функция $f(z)$ аналитична в некоторой окрестности отрезка $[0, 1]$, из которой выколота точка $z = 1$, а в точке $z = 1$ функция $f(z)$ имеет полюс порядка m . Тогда с некоторыми положительными постоянными c_3 и x_3 справедлива оценка

$$\sum_{n \leq y} |f^{(n)}(0)|/n! > c_3 y^m, \quad y > x_3.$$

ТЕОРЕМА 2⁵. Предположим, что существует замкнутый круг K радиуса $R > C$ с центром в точке, имеющей действительную часть, равную R , в некоторой окрестности которого функция $F(s)$ не имеет никаких особых точек, кроме полюсов, и в K содержится хотя бы один полюс порядка m . Обозначим через α_1 и α_2 соответственно наименьший и наибольший корни уравнения

$$\alpha \ln(e/\alpha) = 1 - C/R. \quad (6)$$

Тогда справедлива оценка (4) для $\lambda = \alpha_1/\alpha_2$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Функция $f(\alpha) = \alpha \ln(e/\alpha)$ возрастает на полуинтервале $(0, 1]$, убывает на отрезке $[1, e]$ и, будучи доопределена в нуле нулем, непрерывна на $[0, e]$. Имеем также $f(0) = f(e) = 0$, $f(1) = 1$. Поэтому уравнение (6) имеет единственный корень α_1 на $(0, 1)$ и единственный корень α_2 на $(1, e)$. Эти соображения убеждают в корректности формулировки теоремы 2.

Нетрудно проверить, что α_1/α_2 больше, чем $(1 - \delta)^2/(1 + \beta)$, как бы ни были выбраны δ и β в соответствии с условиями (5). Существенно также и то, что в теореме 2 допускается наличие в K_R других полюсов, кроме it_0 . Поэтому теорема 2 сильнее теоремы А.

При больших значениях R/C для величины α_1/α_2 можно дать простую оценку снизу.

СЛЕДСТВИЕ 2. Если в условиях теоремы 2 имеем $R \geq 6C$, то справедлива оценка (4) для $\lambda = 1 - (8C/R)^{1/2} + C/R$.

Существенное сокращение длин промежутков, на которых можно дать нетривиальную оценку снизу вариации меры $d\mu$, оказывается невозможным. Утверждение следствия 2 для $\lambda = 1 - 2\eta/\ln(1/\eta)$ при малых $\eta = C/R$, вообще говоря, неверно.

³Эта теорема доказана Ю. С. Чайниковым.

⁴Вариация этой меры $V(x) = \sum_{n \leq x} |a_n|$ удовлетворяет условию (1) с произвольным $C > -\ln r$ при $r \in (0, 1]$ и $C = 0$, если $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < +\infty$.

⁵Эта теорема доказана А. Ю. Поповым.

ПРИМЕР 1⁶. Для любого положительного $\eta < 2 \cdot 10^{-5}$ найдется функция скачков μ , являющаяся постоянной на отрезках $[y_k(1 - 2\eta/\ln(1/\eta)), y_k]$, $y_k = \exp(2^k)$, $k \in \mathbb{N}$, для которой выполнены все условия теоремы 2 с некоторыми R и $C = \eta R$. При этом в круге $K = \{s \in \mathbb{C} : |s - (R + it_0)| \leq R\}$ преобразование Лапласа меры $d\mu$ не имеет никаких особенностей, кроме простого полюса в точке it_0 .

СЛЕДСТВИЕ 3. Если функция $F(s)$ удовлетворяет условию S и в полуплоскости $\operatorname{Re} s > 0$ не имеет никаких особенностей, кроме, может быть, полюсов, то оценка (4) верна при любом $\lambda \in (0, 1)$ с некоторыми постоянными c_1 и x_0 , зависящими от λ и F .

Это следствие также нельзя усилить за счет уменьшения длин отрезков, на которых дается оценка снизу для вариации μ .

ПРИМЕР 2⁷. Пусть на $\mathbb{R}_+$ задана произвольная убывающая положительная функция $\varepsilon(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varepsilon(x) = 0$, $\varepsilon(0) < 1/2$. Тогда существует действительная на $\mathbb{R}_+$ функция скачков μ , обладающая следующими свойствами:

- 1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{-1} \ln V(x) = 0$, где $V(x) = \operatorname{Var} \mu(t)|_0^x$;
- 2) преобразование Лапласа меры $d\mu$, задаваемое формулой (2), допускает аналитическое продолжение в $\mathbb{C} \setminus (\mathcal{N}_1 \cup \mathcal{N}_2)$, где $\mathcal{N}_1 = \{\pi i(2m + 1)\}_{m \in \mathbb{Z}}$, $\mathcal{N}_2 = \{2\pi i t\}_{t \in \mathbb{Z}}$; в точках $\mathcal{N}_1$ функция F имеет полюсы первого порядка, а в точках $\mathcal{N}_2$ — существенные особенности;
- 3) функция μ постоянна на отрезках $[y_k(1 - \varepsilon(y_k)), y_k]$ $\forall k \in \mathbb{N}$, где $y_k = \exp(2^k)$.

2. Доказательство теоремы 1. Доказательство теоремы 1 базируется на двух леммах. Первая из них дает оценку снизу вариации меры $d\mu$ через сумму модулей слагаемых степенного ряда функции $F(s)$. Вторая лемма устанавливает существование последовательности отображений специального вида, переводящей круг в малую окрестность отрезка.

ЛЕММА 1. Пусть функция $\mu: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{C}$ удовлетворяет условию (1). Возьмем произвольную точку $s_0 \in \mathbb{C}$ с действительной частью $R > C$ и положим $\delta = \frac{1-C/R}{2}$. Тогда для любых $x > 0$ с некоторой постоянной в символе O , зависящей лишь от R , C и μ , для вариации меры $d\mu$ на отрезке $[0, x]$ справедлива оценка снизу:

$$V(x) > \sum_{p \leq x\delta^2 R} \frac{R^p |F^{(p)}(s_0)|}{p!} + O\left(\exp\left(-\frac{1}{2}\delta x R\right)\right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Интегральное представление (2) позволяет записать производные функции $F(s)$ при $\operatorname{Re} s > C$ следующим образом:

$$F^{(p)}(s) = \int_0^{+\infty} (-t)^p \exp(-st) d\mu(t). \quad (7)$$

Отсюда при $\operatorname{Re} s_0 = R > C$ следует неравенство

$$R^p |F^{(p)}(s_0)| \leq \int_0^{+\infty} R^p t^p \exp(-Rt) dV(t) = \int_0^{+\infty} \tau^p e^{-\tau} dV(\tau/R). \quad (8)$$

⁶Этот пример предложен А. Ю. Поповым.

⁷Этот пример предложен А. Ю. Поповым.

Суммируя разделенные на $p!$ неравенства (8) по всем целым неотрицательным p , не превосходящим $xR\delta^2$, находим

$$\begin{aligned} \sum_{p \leq xR\delta^2} \frac{R^p |F^{(p)}(s_0)|}{p!} &\leq \int_0^{+\infty} \left(\sum_{p \leq xR\delta^2} \frac{\tau^p}{p!} \right) e^{-\tau} dV\left(\frac{\tau}{R}\right) \\ &= \int_0^{xR} \left(\sum_{p \leq xR\delta^2} \frac{\tau^p}{p!} \right) e^{-\tau} dV\left(\frac{\tau}{R}\right) + \int_{xR}^{+\infty} \left(\sum_{p \leq xR\delta^2} \frac{\tau^p}{p!} \right) e^{-\tau} dV\left(\frac{\tau}{R}\right). \end{aligned} \quad (9)$$

Пусть $N = N(x) = [xR\delta^2]$. Очевидное неравенство $\sum_{p=0}^N \tau^p/p! < e^\tau \quad \forall \tau > 0$ позволяет оценить сверху первый интеграл в правой части (9) через интеграл $\int_0^{xR} dV(\tau/R) = V(x)$. Поэтому приходим к неравенству

$$V(x) > \sum_{p=0}^N \frac{R^p |F^{(p)}(s_0)|}{p!} - J, \quad (10)$$

где $J = \int_{xR}^{+\infty} \left(\sum_{p=0}^N \tau^p/p! \right) e^{-\tau} dV(\tau/R)$.

Далее воспользуемся тем обстоятельством, что N “малó” по сравнению с $\tau \geq xR$. Поэтому (напомним, что $0 < \delta < 1/2$) имеем

$$\sum_{p=0}^N \frac{\tau^p}{p!} < \delta^{-N} \sum_{p=0}^N \frac{\delta^p \tau^p}{p!} < \delta^{-N} \exp(\delta\tau).$$

Отсюда получаем

$$J < \delta^{-N} \int_{xR}^{+\infty} \exp(\delta\tau - \tau) dV(\tau/R). \quad (11)$$

Из условия (1) и выбора δ следует, что $\lim_{\tau \rightarrow +\infty} (V(\tau/R) \exp(\delta\tau - \tau)) = 0$. Поэтому, интегрируя по частям, находим

$$\begin{aligned} &\int_{xR}^{+\infty} \exp(\delta\tau - \tau) dV(\tau/R) \\ &= -V(x) \exp(xR(\delta - 1)) - \int_{xR}^{+\infty} V(\tau/R) d \exp(\delta\tau - \tau) \\ &= -V(x) \exp(xR(\delta - 1)) + (1 - \delta) \int_{xR}^{+\infty} V(\tau/R) \exp(\delta\tau - \tau) d\tau. \end{aligned} \quad (12)$$

Соотношения (11), (12) и (1) приводят нас к неравенству

$$\begin{aligned} J &< c_0(1 - \delta) \delta^{-N} \int_{xR}^{+\infty} \exp\left(\left(\frac{C}{R} + \delta - 1\right)\tau\right) d\tau \\ &= c_0(1 - \delta) \delta^{-N} \int_{xR}^{+\infty} \exp(-\delta\tau) d\tau \\ &= c_0(1 - \delta) \delta^{-N-1} \exp(-\delta xR) = c_4 \exp(N \ln(1/\delta) - \delta xR). \end{aligned} \quad (13)$$

(Мы использовали, что $C/R - 1 = -2\delta$.) Так как $N \leq xR\delta^2$, $0 < \delta < 1/2$, а $\max_{0 < \delta \leq 1/2} \delta \ln(1/\delta) = 1/e$, то из (13) окончательно получаем

$$0 \leq J < c_4 \exp\left(xR\delta\left(\delta \ln \frac{1}{\delta} - 1\right)\right) \leq c_4 \exp\left(xR\delta\left(\frac{1}{e} - 1\right)\right) < c_4 \exp\left(-\frac{xR\delta}{2}\right). \quad (14)$$

Это неравенство и неравенство (10) доказывают лемму 1.

Перед тем как сформулировать лемму 2, дадим необходимые определения. Положим $\varphi_\rho(z) = \exp(\rho(z-1))$, $\rho > 0$, а через D_1 обозначим замкнутый круг единичного радиуса на комплексной плоскости с центром в начале координат. Под $\mathcal{O}_\varepsilon(M)$, $M \subset \mathbb{C}$, как обычно, понимается ε -окрестность множества M .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{R}_n = (R_2, R_3, \dots, R_{n+1})$ – некоторый набор положительных чисел. Каждому такому набору поставим в соответствие набор множеств $\mathcal{D}(\mathfrak{R}_n) = (D_2, D_3, \dots, D_{n+1})$, определяемый рекуррентными соотношениями

$$D_{k+1} = (e^{-R_{k+1}} D_1) \cup \varphi_{R_{k+1}}(D_k), \quad 1 \leq k \leq n.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Набор $\mathfrak{R}_n$ назовем *допустимым*, если при любом целом $k \in [1, n]$ выполняется неравенство

$$R_{k+1} \max_{z \in D_k} |\operatorname{Im} z| < \pi/2. \quad (15)$$

Условие (15) гарантирует, что $\varphi_{R_{k+1}}$ взаимно однозначно отображает множество D_k на его образ $\varphi_{R_{k+1}}(D_k)$, а образ этот находится в правой полуплоскости и не содержит точку 0.

ЛЕММА 2. Для любого $\varepsilon > 0$ найдется допустимый набор $\mathfrak{R}_N$ такой, что множество $D_{N+1} \in \mathcal{D}(\mathfrak{R}_N)$ попадет в окрестность $\mathcal{O}_\varepsilon([0, 1])$.

С помощью леммы 2 докажем теорему 1, а затем приведем доказательство этой леммы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Установим сначала справедливость двух следующих утверждений. Предположим, что заданы число $n \in \mathbb{N}$ и допустимый в смысле определения 2 набор $\mathfrak{R}_n = (R_2, R_3, \dots, R_{n+1})$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Пусть даны произвольные $\varepsilon > 0$ и функция

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j,$$

аналитическая в области $\mathcal{O}_\varepsilon(D_{n+1}) \setminus \{1\}$ (см. определение 1) и имеющая в точке $z = 1$ полюс порядка m . Тогда найдутся положительные постоянные c_5 и x_5 , зависящие от f , ε и $\mathfrak{R}_n$, такие, что при любых $Y > x_5$ выполняется оценка

$$\sum_{j \leq Y} |a_j| > c_5 Y^m. \quad (16)$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Пусть даны произвольные $\varepsilon > 0$ и функция $\nu: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{C}$, имеющая при любом $x > 0$ ограниченную вариацию $V_\nu(x)$ на отрезке $[0, x]$, для которой верна оценка $V_\nu \leq c_6 \exp(Kx)$ с некоторыми положительными постоянными c_6 и K . Предположим, что преобразование Лапласа $G_\nu(x) = \int_0^{+\infty} \exp(-st) d\nu(t)$ допускает аналитическое продолжение из полуплоскости $\operatorname{Re} s > K$ в область $\mathcal{O}_\varepsilon(K \cdot E_n) \setminus \{0\}$, где $E_n = 1 - D_{n+1}$, а в точке $s = 0$ имеет полюс порядка m . Тогда найдутся положительные постоянные c_7 и x_7 такие, что при $x > x_7$ выполняется оценка

$$V_\nu(x) > c_7 x^m. \quad (17)$$

Утверждения 1 и 2 будем доказывать индукцией по n . Разберем сначала случай $n = 1$. Пусть при некотором допустимом R_2 (для $n = 1$ это означает, что $0 < R_2 < \pi/2$)

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j \in \mathcal{A}(\mathcal{O}_\varepsilon(D_2) \setminus \{1\}),$$

а в точке $z = 1$ функция f имеет полюс порядка m . Обозначим через r радиус сходимости ряда Маклорена функции f . Из определения 1 видно, что $r > \exp(-R_2)$. Рассмотрим функцию

$$g(w) = f(e^{-w}) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \exp(-jw) \equiv \int_0^{+\infty} e^{-wt} d\mu(t).$$

В представлении $g(w)$ в виде преобразования Лапласа мера $d\mu$ является функцией скачков, которые могут иметь место только в $\mathbb{N}_0$, а величина скачка в точке $j \in \mathbb{N}_0$ равна a_j . Поскольку $\exp(-R_2) < r < 1$, то для $V_\mu(x)$ – вариации меры $d\mu$ на отрезке $[0, x]$, которая равна $\sum_{j \leq x} |a_j|$, – выполнена оценка (1) для $C = R_2$. Согласно условию утверждения 1 функция $g(w)$ допускает аналитическое продолжение из полуплоскости $\operatorname{Re} w > R_2$ в некоторую окрестность множества $\mathcal{F}$ – образа компакта $\varphi_{R_2}(D_1)$ при отображении $w = -\ln z$, – из которой выколота точка $w = 0$. Здесь и далее под $\ln$ понимается главная ветвь логарифма, определяемая соотношениями $\ln(\rho e^{i\theta}) = \ln \rho + i\theta$, $\rho > 0$, $-\pi < \theta < \pi$ (для положительных ρ , как обычно, $\ln \rho$ – обратная функция к экспоненте). В силу допустимости R_2 компакт $\varphi_{R_2}(D_1)$ лежит в правой полуплоскости и не содержит точку 0. Следовательно, композиция $w_1(z) = -\ln \varphi_{R_2}(z)$ корректно определена и оба отображения $\ln$ и φ_{R_2} являются взаимно однозначными на рассматриваемых областях. Нетрудно убедиться в том, что интересующее нас множество $\mathcal{F}$ является образом единичного круга D_1 при его отображении в w -плоскость посредством композиции $w_1(z) \equiv R_2(1 - z)$. Отсюда заключаем, что функция $g(w)$ допускает аналитическое продолжение в некоторую окрестность замкнутого полукруга $\{z \in \mathbb{C}: |w - R_2| \leq R_2, \operatorname{Re} w \leq R_2\}$ с выколотой точкой $w = 0$, а в точке $w = 0$ имеет полюс порядка m . Применив теорему А (теорема 3 из работы [3]) и учитывая замечание 1, приходим к оценке $V_\mu(x) \equiv \sum_{j \leq x} |a_j| \geq c_8 x^m$, а это и требовалось доказать.

Теперь покажем, что утверждение 2 следует из утверждения 1 при любом $n \in \mathbb{N}$. Выберем $R > K$ таким образом, чтобы выполнялось включение

$$\mathcal{O}_{\varepsilon/2}(RE_n) \subset \mathcal{O}_\varepsilon(KE_n). \quad (18)$$

Положим $\delta = (1 - K/R)/2$. Тогда по лемме 1

$$V_\nu(x) \geq \sum_{p \leq xR\delta^2} |b_p| + o(1), \quad x \rightarrow +\infty, \quad (19)$$

где $\{b_p\}$ – последовательность коэффициентов разложения в ряд функции $f(z) = G_\nu(R(1-z)) = \sum_{p=0}^{\infty} b_p z^p$. Ввиду включения (18) функция $f(z)$ голоморфна в некоторой окрестности компакта D_{n+1} , из которой выколота точка $z = 1$, а в точке $z = 1$ она имеет полюс порядка m . Предположив справедливость утверждения 1 и применив (16) при $Y = xR\delta^2$, из (19) получим оценку (17).

Теперь осталось доказать утверждение 1 при любом $n > 1$, а именно установить, что из справедливости утверждения 1 для $n = k$ вытекает, что оно верно для $n = k + 1$. Рассмотрим, как и выше в случае $k = 1$, вспомогательную функцию

$$g(w) = f(e^{-w}) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \exp(-jw) \equiv \int_0^{+\infty} \exp(-wt) \, d\nu(t).$$

Рассуждая так же, найдем, что для вариации кусочно постоянной функции ν верна оценка (1) для $C = R_{k+1}$, а $g(w)$ допускает аналитическое продолжение в некоторую окрестность образа компакта $\varphi_{R_{k+1}}(D_k)$, из которой выколота точка $w = 0$, при отображении $w = -\ln z$. В силу допустимости рассматриваемого набора $\mathfrak{R}_n$ отображение $\varphi_{R_{k+1}}$ взаимно однозначно отображает D_k на свой образ, который лежит в полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$. Следовательно, взяв корректно определенную композицию $w_k(z) = -\ln(\varphi_{R_{k+1}}(z))$, убеждаемся в том, что $g(w)$ аналитически продолжается в некоторую окрестность с выколотой точкой $w = 0$ образа области D_k при отображении $w_k(z) \equiv R_{k+1}(1-z)$, т.е. функция g принадлежит $\mathcal{A}(\mathcal{O}_{\varepsilon_1}(R_{k+1}(1-D_k)) \setminus \{0\})$. Таким образом, выполнено условие утверждения 2 для $n = k$ и $K = R_{k+1}$. Так как согласно индукционному предположению при $n = k$ утверждение 1 верно и согласно доказанному выше верно и утверждение 2, то получаем оценку $V_\mu(x) = \sum_{j \leq x} |a_j| > c_9 x^m$ при $x > x_9$ с некоторыми положительными постоянными c_9 и x_9 , зависящими от рассматриваемых функций и множеств их голоморфности. Тем самым утверждения 1 и 2 доказаны при любых $n \in \mathbb{N}$.

Теперь из утверждения 2 и леммы 2 выведем теорему 1. Напомним, что рассматривается мера $d\mu$, для вариации которой верна оценка (1), а преобразование Лапласа (2) аналитически продолжается в некоторую окрестность отрезка $[it_0, C+it_0]$ (обозначим ее U_0) с выколотой точкой $s_0 = it_0$, а в точке it_0 функция $F(s)$ имеет полюс порядка m . Рассмотрим функцию

$$F_1(s) = F(s - it_0) = \int_0^{+\infty} \exp(-st) \, d\nu(t).$$

Очевидно, что $\nu(x) = \int_0^x \exp(ist_0) \, d\mu(t)$, $V_\nu(x) = \operatorname{Var} \nu(t)|_0^x \leq V_\mu(x)$. Следовательно, мера $d\nu$ также удовлетворяет условию (1), а $F_1(s) \in \mathcal{A}(U \setminus \{0\})$, где $U = U_0 - it_0$. Тогда $U_1 = 1 - C^{-1}U$ является окрестностью отрезка $[0, 1]$ и по лемме 2 найдутся $N \in \mathbb{N}$ и допустимый набор $\mathfrak{R}_N$ такие, что $D_{N+1} \in \mathcal{D}(\mathfrak{R}_N)$ содержится целиком в U_1 , а значит, $C(1 - D_{N+1}) \subset U$. Тем самым, для $F_1(s)$ выполняются все условия утверждения 2. Отсюда заключаем, что для вариации меры $d\mu$ справедлива оценка (3). Таким образом, теорема 1 полностью доказана в предположении справедливости леммы 2.

Для доказательства леммы 2 потребуются еще две леммы. Перед тем как их сформулировать, дадим

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть имеется множество $E \subset \mathbb{C}$, симметричное относительно действительной оси. *Высотой множества E* назовем величину $h(E) = \sup_{z \in E} \operatorname{Im} z$. Через $d(E)$ обозначим расстояние от E до прямой $\operatorname{Re} z = 1$. Если, кроме того, E целиком лежит в полуплоскости $\operatorname{Re} z < 1$, то *наклоном E по отношению к точке $z = 1$* , или, более кратко, *наклоном E* , назовем величину $t(E) = \sup\{y/(1-x) | x+iy \in E\}$.

ЛЕММА 3. Для произвольного симметричного относительно действительной оси и лежащего в полуплоскости $\operatorname{Re} z < 1$ множества $E \subset \mathbb{C}$ справедлива оценка

$$\frac{t(\varphi_R(E))}{t(E)} \leq \left(1 + \frac{Rd(E)}{2}\right)^{-1} \quad \forall R > 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем функцию $\tau(z) = \operatorname{Im} z/(1 - \operatorname{Re} z)$. Из определения наклона множества видно, что достаточно доказать неравенство

$$\frac{\tau(z)}{t(E)} \leq \left(1 + \frac{Rd(E)}{2}\right)^{-1} \quad (20)$$

для любой точки $z \in \varphi_R(E)$. Зафиксируем произвольную точку $x+iy \in \varphi_R(E)$, а через $\xi+i\eta$ обозначим ее прообраз при отображении φ_R , лежащий в E . Ясно, что

$$\tau(x+iy)/t(E) \leq \tau(x+iy)/\tau(\xi+i\eta). \quad (21)$$

Имеем

$$\frac{\tau(x+iy)}{\tau(\xi+i\eta)} = \frac{\exp(R(\xi-1))|\sin(R\eta)|}{1 - \exp(R(\xi-1))\cos(R\eta)} : \frac{\eta}{1-\xi} \leq \frac{R(1-\xi)\exp(R(\xi-1))}{1 - \exp(R(\xi-1))\cos(R\eta)}. \quad (22)$$

Пусть $1-\xi = u$. Тогда из (22) получим

$$\begin{aligned} \frac{\tau(x+iy)}{t(E)} &\leq \frac{Ru \exp(-Ru)}{1 - \exp(-Ru)\cos(R\eta)} = \frac{Ru}{\exp(Ru) - \cos(R\eta)} \leq \frac{Ru}{\exp(Ru) - 1} \\ &< \frac{Ru}{Ru + (Ru)^2/2} = \frac{1}{1 + Ru/2} \leq \frac{1}{1 + Rd(E)/2}. \end{aligned} \quad (23)$$

Из (23) и (21) вытекает неравенство (20), а вместе с ним и утверждение леммы.

ЛЕММА 4. Положим $C_1 = D_1$, $B_1 = e^{-1}D_1$, а при натуральных n положим $C_{n+1} = \varphi_1(C_n)$, $B_{n+1} = \varphi_1(B_n)$. Тогда справедливы предельные соотношения

$$C_n \downarrow \{1\}, \quad n \rightarrow \infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} t(B_n) = 0. \quad (24)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $z \in C_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$, то $|\varphi_1(z)| = |\exp(z-1)| = \exp(\operatorname{Re} z - 1) \leq 1$. Следовательно, $C_2 = \varphi_1(C_1) \subset C_1$. Применив к обеим частям этого включения $(n-1)$ -ю степень отображения φ_1 , получим $C_{n+1} \subset C_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Очевидно, что $z = 1$ является неподвижной точкой отображения φ_1 и $1 \in C_1$. Отсюда заключаем, что $\{C_n\}$ является последовательностью вложенных компактов, содержащих точку $z = 1$. Осталось проверить, что множества C_n стягиваются в эту точку.

Пусть $z_n = x_n + iy_n$ — точка компакта C_n , имеющая наибольшую ординату (если окажется, что такая точка не единственна, то выберем любую из имеющих

наибольшую ординату). Обозначим через $\xi_n + i\eta_n \in C_n$ прообраз z_{n+1} при отображении φ_1 . Имеем $y_{n+1} = \exp(\xi_n - 1) \sin \eta_n \leq \sin \eta_n$, а так как $\eta_n \leq y_n$, то приходим к неравенству $y_{n+1} \leq \sin y_n$. Следовательно, y_{n+1} оценивается сверху n -й итерацией синуса от 1, а значит, $y_n = h(C_n)$ стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. Из сказанного заключаем, что $K = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n \subset (0, 1]$. Пусть ζ – наименьший элемент компакта K , а ζ_1 – прообраз точки ζ при отображении φ_1 . Так как ζ принадлежит всем множествам C_n , то ζ_1 в силу биективности φ_1 и определения C_n обладает тем же свойством, т.е. $\zeta_1 \in K$. Но на интервале $(0, 1)$ выполняется неравенство $x < e^{x-1}$, а так как $\zeta_1 \in K$, то $\zeta_1 \geq \zeta = \exp(\zeta_1 - 1)$. Следовательно, $\zeta_1 = \zeta = 1$, а это означает, что $K = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n = \{1\}$.

Перейдем к доказательству второго соотношения в (24). Получим сперва оценку снизу для $d_n = d(B_n)$. По индукции легко проверяется, что ближайшая к 1 точка компакта B_n лежит на действительной оси. Поэтому имеем

$$d_1 = 1 - 1/e, \quad d_{n+1} = 1 - \exp(-d_n) \geq d_n - d_n^2/2. \quad (25)$$

Отсюда несложно выводится неравенство

$$d_n \geq 1/(n+1) \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (26)$$

Применяя лемму 3 к множествам B_n при $R = 1$ и используя (26), получаем оценку

$$\frac{t(B_{n+1})}{t(B_n)} = \frac{t(\varphi_1(B_n))}{t(B_n)} \leq \left(1 + \frac{1 \cdot d(B_n)}{2}\right)^{-1} \leq \frac{2n+2}{2n+3}. \quad (27)$$

Отсюда и из очевидного неравенства $t(B_1) < 1$ находим

$$t(B_n) = t(B_1) \prod_{k=1}^{n-1} \frac{t(B_{k+1})}{t(B_k)} < \prod_{k=1}^{n-1} \left(\frac{2k+2}{2k+3}\right) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

а это и доказывает требуемое. Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2. Без ограничения общности можно считать, что $0 < \varepsilon < 1/3$. При любом $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, через $\mathcal{N}_k$ обозначим класс допустимых наборов $\mathfrak{R}_N$, $N > k$, у которых $R_2 = R_3 = \dots = R_k = 1$, $R_{k+1} > 1$, $R_{k+j+1} > R_{k+j}$ при $1 \leq j \leq N - k - 1$. Сначала мы для любого заданного $n \in \mathbb{N}$ рекуррентными формулами построим некоторую совокупность чисел $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{n+1}$ (не зависящих от k) таких, что $\rho_1 < \rho_2 < \dots < \rho_{n+1}$, и тем самым определим набор $\mathfrak{R}_{k+n}^{(k)}$ (не обязательно допустимый), положив $R_2 = R_3 = \dots = R_k = 1$, $R_{k+j} = \rho_j$, $1 \leq j \leq n+1$. Затем докажем существование такого $k \in \mathbb{N}$, что построенный набор $\mathfrak{R}_{k+n}^{(k)}$ будет допустимым и, более того, множество $D_{n+k+1} \in \mathcal{D}(\mathfrak{R}_{k+n}^{(k)})$ попадет в $\mathcal{O}_\varepsilon([0, 1])$.

Пусть $B = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$. На основании второго предельного соотношения в (24) заключаем, что лишь конечное число множеств B_j имеет наклон, не меньший, чем ε . Обозначим объединение таких B_j через P_0 , а через Q_0 – объединение тех B_j , чей наклон меньше ε . Множество P_0 не пусто, поскольку $\varepsilon < 1/3$, а наклон B_1 равен $(e^2 - 1)^{-1/2} > 1/3$. По определению множества Q_0 имеем

$$t(Q_0) < \varepsilon. \quad (28)$$

Очевидно также, что B равно объединению множеств P_0 и Q_0 . Из соотношения (26) следует неравенство $d(P_0) > 0$. Следовательно, корректно определен наклон множества P_0 . Положим $\rho_1 = 1/t(P_0)$. Затем определим по индукции для $j \in \mathbb{N}$ множества P_j , Q_j и числа ρ_{j+1} следующим образом:

$$P_j = (e^{-\rho_j} D_1) \cup \varphi_{\rho_j}(P_{j-1}), \quad Q_j = \varphi_{\rho_j}(Q_{j-1}), \quad \rho_{j+1} = \frac{1}{t(P_j \cup Q_j)}. \quad (29)$$

Из неравенства (27) следует, что $t(P_0) = t(B_1) = t(e^{-1} D_1)$. Нетрудно проверить, что $t(e^{-1} D_1) < 0.4$, а значит, $\rho_1 > 2.5$.

По лемме 3 наклоны множеств Q_j монотонно убывают. Докажем по индукции неравенства

$$t(P_j \cup Q_j) < t(P_{j-1} \cup Q_{j-1}), \quad \rho_j < \rho_{j+1}. \quad (30)$$

Для $j = 1$ имеем

$$\begin{aligned} t(P_1 \cup Q_1) &= t((e^{-\rho_1} D_1) \cup \varphi_{\rho_1}(P_0) \cup \varphi_{\rho_1}(Q_0)) \\ &= t((e^{-\rho_1} D_1) \cup \varphi_{\rho_1}(B)) = \max[t(e^{-\rho_1} D_1), t(\varphi_{\rho_1}(B))]. \end{aligned} \quad (31)$$

Из леммы 3 вытекает, что $t(\varphi_{\rho_1}(B)) < t(B)$, но так как $t(B) \geq t(B_1) = t(e^{-1} D_1) > t(e^{-\rho_1} D_1)$, то в силу (31) $t(P_1 \cup Q_1) < t(P_0 \cup Q_0)$. Далее,

$$\rho_2 = 1/t(P_1) \geq 1/t(P_1 \cup Q_1) > 1/t(P_0 \cup Q_0) = 1/t(P_0) = \rho_1.$$

Пусть для $j = k$

$$t(P_k \cup Q_k) < t(P_{k-1} \cup Q_{k-1}), \quad \rho_k < \rho_{k+1}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} t(P_{k+1} \cup Q_{k+1}) &= t((e^{-\rho_{k+1}} D_1) \cup \varphi_{\rho_{k+1}}(P_k) \cup \varphi_{\rho_{k+1}}(Q_k)) \\ &= t((e^{-\rho_{k+1}} D_1) \cup \varphi_{\rho_{k+1}}(P_k \cup Q_k)) = \max[t(e^{-\rho_{k+1}} D_1), t(\varphi_{\rho_{k+1}}(P_k \cup Q_k))]. \end{aligned}$$

Имеем

$$t(e^{-\rho_{k+1}} D_1) = (e^{2\rho_{k+1}} - 1)^{-1/2} < 1/\rho_{k+1} = t(P_k \cup Q_k),$$

а согласно лемме 3 выполняется неравенство $t(\varphi_{\rho_{k+1}}(P_k \cup Q_k)) < t(P_k \cup Q_k)$. Таким образом, неравенства (30) доказаны.

Применяя при $j \in \mathbb{N}$ лемму 3 к множествам $Q_0, \dots, Q_{j-1}$ при R , равных $\rho_1, \dots, \rho_j$ соответственно, и используя (28), получаем оценку

$$t(Q_j) = t(Q_0) \prod_{k=0}^{j-1} \frac{t(Q_{k+1})}{t(Q_k)} < t(Q_0) < \varepsilon. \quad (32)$$

Оценим снизу числа $d(P_k)$ при $k \in \mathbb{N}$. Пусть z_{k+1} — точка компакта $\varphi_{\rho_{k+1}}(P_k)$, имеющая наибольшую абсциссу (если окажется, что такая точка не единственная, то можно выбрать любую из имеющих наибольшую абсциссу), и пусть $z_{k+1} = x_{k+1} + iy_{k+1}$. Обозначим через $\xi_k + \eta_k \in P_k$ прообраз z_{k+1} при отображении $\varphi_{\rho_{k+1}}$. Имеем

$$x_{k+1} = \cos(\rho_{k+1}\eta_k) \exp(\rho_{k+1}(\xi_k - 1)) \leq \exp(\rho_{k+1}(\xi_k - 1)).$$

Отсюда, используя очевидные неравенства $d(e^{-\rho_{k+1}} D_1) = 1 - e^{-\rho_{k+1}} > 1 - e^{-1} > 1/2$, получаем оценку снизу для $d(P_k)$:

$$\begin{aligned} d(P_{k+1}) &= d(e^{-\rho_{k+1}} D_1 \cup \varphi_{\rho_{k+1}}(P_k)) \\ &= \min\{d(e^{-\rho_{k+1}} D_1), d(\varphi_{\rho_{k+1}}(P_k))\} \geq \min\{1/2, 1 - e^{\rho_{k+1}(\xi_k - 1)}\}. \end{aligned} \quad (33)$$

Из этой оценки и неравенства $1 - e^{R(x-1)} \geq \min\{1/e, 1 - x\}$, верность которого при любых $x \in [-1, 1]$ и $R \geq \rho_1 > 2.5$ нетрудно проверить, заключаем:

$$d(P_{k+1}) \geq \min\{1/e, 1 - \xi_k\} \geq \min\{1/e, d(P_k)\} \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (34)$$

Оценим $t(P_{k+1})$. В силу леммы 3 и соотношения (34) имеем

$$\begin{aligned} t(P_{k+1}) &= t((e^{-\rho_{k+1}} D_1) \cup \varphi_{\rho_{k+1}}(P_k)) \\ &\leq \max\left\{t(P_k) \left(1 + \frac{\rho_{k+1} d(P_k)}{2}\right)^{-1}, (e^{2\rho_{k+1}} - 1)^{-1/2}\right\} \\ &\leq \max\left\{t(P_k) \left(1 + \frac{\min\{1/e, d(P_0)\}}{2}\right)^{-1}, \sqrt{2}e^{-\rho_{k+1}}\right\}. \end{aligned} \quad (35)$$

Для ρ_{k+1} справедливо равенство

$$\rho_{k+1} = \frac{1}{t(P_k \cup Q_k)} = \min\left\{\frac{1}{t(P_k)}, \frac{1}{t(Q_k)}\right\}. \quad (36)$$

Пусть сначала $t(P_k) \geq \varepsilon$. Тогда из (32) и (36) следует $\rho_{k+1} = 1/t(P_k)$. Используя для $x > 2.5$ неравенство $e^{-1/x} < 1/(2\sqrt{2}x)$, которое нетрудно проверить, из (35) получаем

$$\begin{aligned} t(P_{k+1}) &\leq \max\left\{t(P_k) \left(1 + \frac{\min\{1/e, d(P_0)\}}{2}\right)^{-1}, \frac{t(P_k)}{2}\right\} \\ &= t(P_k) \left(1 + \frac{\min\{1/e, d(P_0)\}}{2}\right)^{-1} \leq t(P_0) \left(1 + \frac{\min\{1/e, d(P_0)\}}{2}\right)^{-k}. \end{aligned} \quad (37)$$

Если же $t(P_k) < \varepsilon$, то из (36) следует, что $\rho_{k+1} > 1/\varepsilon$. Аналогично предыдущим рассуждениям

$$t(P_{k+1}) < \varepsilon \max\left\{\left(1 + \frac{\min\{1/e, d(P_0)\}}{2}\right)^{-1}, \frac{1}{2}\right\} < \varepsilon. \quad (38)$$

Из соотношений (37) и (38), а также (32) следует, что найдется $n \in \mathbb{N}$, для которого

$$t(P_{n+1} \cup Q_{n+1}) < \varepsilon. \quad (39)$$

Для каждого натурального $k \geq 2$ определим набор $\mathfrak{R}_{k+n}^{(k)}$, положив $R_2 = \dots = R_k = 1$ и $R_{k+j} = \rho_j$, $1 \leq j \leq n+1$. Таким образом, для доказательства леммы 2 достаточно установить существование такого $k \in \mathbb{N}$, что построенный набор $\mathfrak{R}_{k+n}^{(k)}$ будет являться допустимым и множество $D_{k+n} \in \mathcal{D}(\mathfrak{R}_{k+n}^{(k)})$ попадет в $\mathcal{O}_\varepsilon([0, 1])$.

Пусть $k \in \mathbb{N}$ произвольное, а n зафиксировано, причем так, что выполнены соотношения (39). Положим $S_0 = C_k$ и $S_j = \varphi_{\rho_j}(S_{j-1})$ при $j \in \mathbb{N}$. Тогда из определения множеств Q_j , P_j и определения 1 для рассмотренного выше набора $\mathfrak{R}_{k+n}^{(k)}$ по индукции докажем равенства

$$D_{k+j} = P_j \cup Q_j \cup S_j, \quad 0 \leq j \leq n+1. \quad (40)$$

Пусть $j = 0$. Тогда $S_0 = C_k$, а из включений $B_j \subset C_j$ и $C_{j+1} \subset C_j$, верных при $j \in \mathbb{N}$, легко получаем, что при $2 \leq j \leq k$ верно равенство

$$D_j = \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \right) \cup C_j. \quad (41)$$

В частности, при $j = k$ формула (41) принимает вид

$$D_k = \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \right) \cup C_k = P_0 \cup Q_0 \cup S_0. \quad (42)$$

Из определения 1, равенства (42), определения P_j и Q_j (см. (29)) и определения S_k (см. (39)) при $j = 1, \dots, n$ получаем

$$\begin{aligned} D_{k+j+1} &= (e^{-R_{k+j+1}} D_1) \cup \varphi_{R_{k+j+1}}(D_{k+j}) \\ &= (e^{-R_{k+j+1}} D_1) \cup \varphi_{R_{k+j+1}}(P_j \cup Q_j \cup S_j) \\ &= (e^{-\rho_{j+1}} D_1) \cup \varphi_{\rho_{j+1}}(P_j) \cup Q_{j+1} \cup S_{j+1} = P_{j+1} \cup Q_{j+1} \cup S_{j+1}, \end{aligned}$$

что и доказывает (40).

Для построенных наборов $\mathfrak{R}_{k+n}^{(k)}$ в силу включения $D_j \subset D_1$ при любом $k \in \mathbb{N}$ и любых $j = 1, \dots, k-1$ верны соотношения

$$R_{j+1} \max_{z \in D_j} \operatorname{Im} z < 1 \cdot 1 < \pi/2.$$

Для множеств $D_{k+j} \in \mathcal{D}(\mathfrak{R}_{k+n}^{(k)})$ при $j = 0, \dots, n$ (по определению 3) для высоты $h(D_{k+j})$ верна оценка (мы использовали запись (40) для D_{k+j})

$$h(D_{k+j}) = \max\{h(P_j \cup Q_j), h(S_j)\}. \quad (43)$$

Для того чтобы найти номер k такой, что набор $\mathfrak{R}_{k+n}^{(k)}$ является допустимым, достаточно проверить, что при любом $j = 0, \dots, n$ множества $D_{k+j} \in \mathcal{D}(\mathfrak{R}_{k+n}^{(k)})$ и числа $R_{k+j+1} = \rho_{j+1}$ связаны соотношениями

$$R_{k+j+1} \cdot h(D_{k+j}) \leq 1. \quad (44)$$

С этой целью для каждого $q = 0, \dots, n$ введем функцию $\psi_q(z)$:

$$\psi_0(z) \equiv z, \quad \psi_{q+1}(z) = \varphi_{R_{k+q+1}}(\psi_q(z)) \quad \text{при } 0 \leq q \leq n.$$

Каждая из функций $\psi_q(z)$ зависит только от набора $\rho_1, \dots, \rho_{n+1}$ и является непрерывной в круге D_1 . Из того, что $C_k \rightarrow \{1\}$ (см. (24)), и непрерывности функций

$\psi_q(z)$ следует, что найдется k , зависящее только от набора $\rho_1, \dots, \rho_{n+1}$, такое, что при всех $q = 0, \dots, n$ будут выполнены соотношения

$$h(P_q \cup Q_q) > h(\psi_q(C_k)) = h(\psi_q(S_0)) = h(S_q). \quad (45)$$

Следовательно, при выбранном k и всех $q = 0, \dots, n$ имеем

$$h(D_{k+q}) = \max\{h(P_q \cup Q_q), h(S_q)\} = h(P_q \cup Q_q) \leq t(P_q \cup Q_q). \quad (46)$$

Отсюда получаем, что при всех $q = 0, \dots, n$ верны оценки

$$R_{k+q+1} \max_{z \in D_{k+q}} \operatorname{Im} z = \rho_{q+1} h(D_{k+q}) \leq \frac{t(P_q \cup Q_q)}{t(P_q \cup Q_q)} = 1,$$

которые завершают доказательство допустимости набора $\mathfrak{R}_{k+n}^{(k)}$.

Осталось проверить, что набор $\mathfrak{R}_{k+n}^{(k)}$ искомый, т.е. что множество $D_{k+n+1} \in \mathcal{D}(\mathfrak{R}_{k+n}^{(k)})$ попадает в $\mathcal{O}_\varepsilon([0, 1])$. Из соотношения (46) при $q = n + 1$ и оценки (39) находим, что $h(D_{k+n+1}) \leq t(P_{n+1} \cup Q_{n+1}) < \varepsilon$. С другой стороны,

$$D_{k+n+1} = (e^{-\rho_{n+1}} D_1) \cup \varphi_{\rho_{n+1}}(D_{k+n})$$

и образ множества D_{k+n} при отображении $\varphi_{\rho_{n+1}}$ расположен в полосе $0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1$ в силу допустимости набора $\mathcal{D}(\mathfrak{R}_{k+n}^{(k)})$. Следовательно, $\varphi_{R_{k+n+1}}(D_{k+n})$ лежит в $\mathcal{O}_\varepsilon([0, 1])$. Затем из верного при $t \in (0, +\infty)$ неравенства $\exp(-t^{-1}) < t$ и неравенства (39) заключаем, что радиус круга $e^{-R_{k+n+1}} D_1$ меньше ε . Следовательно, множество $D_{k+n+1} \in \mathcal{D}(\mathfrak{R}_{k+n}^{(k)})$ попадает в $\mathcal{O}_\varepsilon([0, 1])$, а это доказывает лемму 2.

3. Доказательство теоремы 2. Из условия теоремы 2 вытекает, что при всех Q , достаточно близких к R , $Q > R$, функция $F(s)$ в некоторой окрестности замкнутого сегмента $K_Q(t_0)$ не имеет никаких особых точек, кроме полюсов, а на окружности $|s - (Q + it_0)| = Q$ имеет ровно один полюс в точке it_0 . Зафиксируем какое-нибудь число $Q > R$, для которого верны отмеченные свойства F . Через β_1 и β_2 обозначим наименьший и наибольший корни уравнения $\beta \ln(e/\beta) = 1 - C/Q$. Положим

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= (\alpha_1 + \beta_1)/2, & \gamma_2 &= (\alpha_2 + \beta_2)/2, \\ y_1(x) &= \lambda Q \gamma_2 x, & y_2(x) &= Q \gamma_1 x. \end{aligned} \quad (47)$$

Нетрудно убедиться в справедливости неравенств $\alpha_1 < \beta_1 < 1 < \beta_2 < \alpha_2$, из которых вытекает, что

$$\Delta = \beta_1 \alpha_2 - \alpha_1 \beta_2 > 0. \quad (48)$$

Из соотношений (47) и (48) находим

$$y_2(x) - y_1(x) = \Delta Q x / (2\alpha_2). \quad (49)$$

Дальнейший ход доказательства примерно такой же, как и у предыдущей теоремы (см. лемму 1). Отличие заключается в технических приемах, применяемых в данной ситуации. Они сходны с приемами, используемыми в работе [3], но здесь в

них внесен ряд улучшений. Вариация меры $d\mu$ на отрезке $[\lambda x, x]$ оценивается снизу суммой модулей n -х слагаемых ряда Тейлора функции F для $n \in [y_1(x), y_2(x)]$:

$$\begin{aligned} V(x) - V(\lambda x) &= \int_{\lambda Qx}^{Qx} dV(\tau/Q) > \int_{\lambda Qx}^{Qx} \left(\sum_{y_1(x) \leq n \leq y_2(x)} \tau^n/n! \right) e^{-\tau} dV(\tau/Q) \\ &> \sum_{y_1(x) \leq n \leq y_2(x)} Q^n |F^{(n)}(s_0)|/n! + O(1). \end{aligned} \quad (50)$$

Потом выводится оценка снизу суммы, стоящей в правой части неравенства (50).

Ясно, что в доказательстве нуждается лишь последнее неравенство в (50). Имеем (см. (8))

$$Q^n |F^{(n)}(s_0)| \leq \int_0^{+\infty} \tau^n e^{-\tau} dV(\tau/Q). \quad (51)$$

Обозначим $E(x) = [0, \lambda Qx] \cup [Qx, +\infty)$. Наша ближайшая цель – установить, что

$$(n!)^{-1} \int_{E(x)} \tau^n e^{-\tau} dV(\tau/Q) = O(\xi^n) \quad (52)$$

при некотором $\xi \in (0, 1)$ равномерно по $n \in [y_1(x), y_2(x)]$. Такого рода утверждение, приводящее к менее сильному результату, доказывалось и в работе [3]. Обозначим $E_n = [0, n/\gamma_2] \cup [n/\gamma_1, +\infty)$. Ввиду (47) справедливо включение

$$E(x) \subset \bigcap_{y_1(x) \leq n \leq y_2(x)} E_n, \quad (53)$$

которое показывает, что достаточно получить оценки вида (52) для соответствующих интегралов по множествам E_n . Имеем⁸

$$\begin{aligned} (n!)^{-1} \int_0^{n/\gamma_2} \tau^n e^{-\tau} dV(\tau/Q) &\leq (n!)^{-1} (n/\gamma_2)^n e^{-n/\gamma_2} \int_0^{n/\gamma_2} dV(\tau/Q) \\ &\leq (e/\gamma_2)^n e^{-n/\gamma_2} V(n/(\gamma_2 Q)) \leq c_0 (e/\gamma_2)^n e^{-n(1-C/Q)/\gamma_2} = c_0 e^{\kappa n}, \end{aligned}$$

где $\kappa = \ln(e/\gamma_2) - (1 - C/Q)/\gamma_2 = (\gamma_2 \ln(e/\gamma_2) - (1 - C/Q))/\gamma_2$.

Напомним, что согласно определению чисел β_2 и γ_2 выполняются соотношения $1 < \beta_2 < \gamma_2$, $\beta_2 \ln(e/\beta_2) = 1 - C/Q$. Они вместе с убыванием функции $t \ln(e/t)$ на отрезке $[1, e]$ влекут за собой отрицательность постоянной κ , а это приводит к оценке

$$(n!)^{-1} \int_0^{n/\gamma_2} \tau^n e^{-\tau} dV(\tau/Q) = O(\xi_2^n), \quad (54)$$

где $0 < \xi_2 < 1$.

Перейдем к оценке интеграла по лучу $[n/\gamma_1, +\infty)$. Интегрируя по частям и учитывая положительность меры dV и функции V , находим

$$\begin{aligned} \int_{n/\gamma_1}^{+\infty} \tau^n e^{-\tau} dV(\tau/Q) &= V(\tau/Q) \tau^n e^{-\tau} \Big|_{n/\gamma_1}^{+\infty} - \int_{n/\gamma_1}^{+\infty} V(\tau/Q) d(\tau^n e^{-\tau}) \\ &\leq \int_{n/\gamma_1}^{+\infty} V(\tau/Q) d(-\tau^n e^{-\tau}) \leq \int_{n/\gamma_1}^{+\infty} \tau^n e^{-\tau} V(\tau/Q) d\tau \\ &\leq c_0 \int_{n/\gamma_1}^{+\infty} \tau^n e^{-\tau(1-C/Q)} d\tau. \end{aligned} \quad (55)$$

⁸Ниже использовано возрастание функции $\tau^n e^{-\tau}$ на отрезке $[0, n]$, неравенство $n^n/n! < e^n$ и условие (1).

Заметим, что при любом $a > 0$ функция $\tau^n \exp(-a\tau)$ убывает на луче $[n/a, +\infty)$. Следовательно, при $b > a$ имеем

$$\begin{aligned}
\int_{n/a}^{+\infty} \tau^n \exp(-b\tau) d\tau &= \int_{n/a}^{+\infty} \tau^n \exp(-a\tau) \exp((a-b)\tau) d\tau \\
&\leq \sup_{\tau \geq n/a} (\tau^n \exp(-a\tau)) \int_{n/a}^{+\infty} \exp((a-b)\tau) d\tau \\
&= (n/a)^n \exp(-n) \int_{n/a}^{+\infty} \exp((a-b)\tau) d\tau \\
&= (n/a)^n \exp(-n) \exp((a-b)n/a)(b-a)^{-1} = (n/a)^n (b-a)^{-1} \exp(-bn/a).
\end{aligned} \tag{56}$$

Поскольку $\beta_1 \ln(e/\beta_1) = 1 - C/Q$ и $\beta_1 \in (0, 1)$, то $\beta_1 < 1 - C/Q$ и, тем более, $\gamma_1 < 1 - C/Q$. Тем самым неравенство (56) можно использовать для оценки последнего интеграла в (55), положив $a = \gamma_1$, $b = 1 - C/Q$. Из (55) и (56) находим

$$(n!)^{-1} \int_{n/\gamma_1}^{+\infty} \tau^n e^{-\tau} dV(\tau/Q) \leq c_{10} (e/\gamma_1)^n e^{-n(1-C/Q)/\gamma_1} = c_{10} e^{\kappa n},$$

где $\kappa = \ln(e/\gamma_1) - (1 - C/Q)/\gamma_1 = (\gamma_1 \ln(e/\gamma_1) - (1 - C/Q))/\gamma_1 < 0$. Отсюда вытекает, что при некотором $\xi_1 \in (0, 1)$ справедлива оценка

$$(n!)^{-1} \int_{n/\gamma_1}^{+\infty} \tau^n e^{-\tau} dV(\tau/Q) = O(\xi_1^n). \tag{57}$$

Из соотношений (57), (54) и (53) получаем (52), а из (52) и (51), в свою очередь, выводим соотношение

$$Q^n |F^{(n)}(s_0)| (n!)^{-1} \leq (n!)^{-1} \int_{\lambda Q x}^{Qx} \tau^n e^{-\tau} dV(\tau/Q) + O(\xi^n). \tag{58}$$

Суммируя неравенства (58) по $n \in [y_1(x), y_2(x)]$, приходим к оценке (50).

Осталось оценить снизу сумму $\sum_{y_1(x) \leq n \leq y_2(x)} Q^n |F^{(n)}(s_0)|/n!$ через $c_1 x^m$. С этой целью докажем следующий общий факт.

ЛЕММА 5. Пусть функция $f(z)$ аналитична в некоторой окрестности круга $D_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$ всюду, за исключением конечного числа точек, в которых f имеет полюсы. При этом в D_1 имеется по меньшей мере один полюс порядка m (m – заданное натуральное число), а общее число различных полюсов функции f в D_1 равно M . Тогда если $f(z)$ голоморфна в точке $z = 0$, то найдутся положительные постоянные c_{11} и c_{12} , зависящие от функции f , такие, что при любом натуральном $N > c_{11}$ выполняется неравенство

$$\max_{N < n \leq N+M} |f^n(0)/n!| > c_{12} N^{m-1}. \tag{59}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть r – модуль наименьшего по абсолютной величине полюса функции f в D_1 . Обозначим через q максимальный из порядков полюсов $f(z)$ на окружности $|z| = r$. Пусть $\{z_k = re^{i\varphi_k}\}_{k=1}^P$ – все различные полюсы $f(z)$ на окружности $|z| = r$, имеющие порядок q . Тогда функцию f можно представить в виде

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z) + f_3(z), \quad (60)$$

где

$$\begin{aligned} f_1(z) &= \sum_{k=1}^P b_k (1 - z/z_k)^{-q} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+q-1}{n} r^{-n} \left(\sum_{k=1}^P b_k e^{-in\varphi_k} \right) z^n \equiv \sum_{n=0}^{\infty} A_{1,n} z^n, \end{aligned} \quad (61)$$

$f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_{2,n} z^n$ – рациональная функция с полюсами порядка не выше $q-1$, лежащими только на окружности $|z| = r$, а функция $f_3(z) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} A_{3,n} z^n$ голоморфна в некотором замкнутом круге $|z| \leq r_1$, $r_1 > r$. Разумеется, не исключена возможность выполнения одного из тождеств $f_2(z) \equiv 0$ или $f_3(z) \equiv 0$. Например, слагаемое $f_2(z)$ отсутствует в разложении (60), если $q = 1$. С другой стороны, все коэффициенты b_k в представлении (61) отличны от нуля. Положим

$$S_n = \sum_{k=1}^P b_k e^{-in\varphi_k}. \quad (62)$$

Тогда, очевидно, имеем

$$A_{1,n} = \binom{n+q-1}{n} r^{-n} S_n, \quad (63)$$

а тейлоровы коэффициенты функций f_2 и f_3 допускают оценки

$$A_{2,n} = O(r^{-n} n^{q-2}), \quad A_{3,n} = O(r_1^{-n}). \quad (64)$$

Оценим снизу $\max_{N < n \leq N+P} |S_n|$. Систему равенств (62) при $N < n \leq N+P$ можно записать в виде

$$T_N \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{N+1} \\ \dots \\ S_{N+P} \end{pmatrix},$$

где T_N – $(P \times P)$ -матрица, в строке с номером ν и столбце с номером k которой ($1 \leq \nu, k \leq P$) стоит элемент $e^{-i(N+\nu)\varphi_k}$. Определитель T_N – определитель Вандер Монда на элементах $\{e^{-i\varphi_k}\}_{k=1}^P$, каждый k -й столбец которого умножен на $e^{-i(N+1)\varphi_k}$. Следовательно, $|\det T_N|$ не зависит от N и не равен нулю. Отсюда заключаем, что матрица T_N обратима при любом $N \in \mathbb{N}$, а так как все элементы матрицы T_N по модулю равны 1, то абсолютные величины всех элементов матрицы T_N^{-1} ограничены сверху некоторой постоянной c_{13} , зависящей только от функции f . Отсюда находим

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_P \end{pmatrix} = T_N^{-1} \begin{pmatrix} S_{N+1} \\ \dots \\ S_{N+P} \end{pmatrix} \Rightarrow \max_{1 \leq k \leq P} |b_k| \leq c_{13} \sum_{j=1}^P |S_{N+j}|. \quad (65)$$

Из соотношений (65) и (63) вытекает оценка

$$\max_{N < n \leq N+M} |A_{1,n}| > N^{q-1} r^{-N} \left(\max_{1 \leq k \leq P} |b_k| \right) (c_{13}P)^{-1}, \quad (66)$$

которая вместе с (64) и очевидным соотношением $f^n(0)/n! = A_{1,n} + A_{2,n} + A_{3,n}$ приводит к неравенству

$$\max_{N < n \leq N+M} |f^n(0)/n!| > c_{12} N^{q-1} r^{-N} \quad \forall N > c_{14}. \quad (67)$$

Теперь убедимся в том, что из (67) немедленно вытекает утверждение леммы 5. Действительно, если $r < 1$, то при любых $N > c_{11} > c_{14}$ имеем $r^{-N} > N^m$, и мы получаем (59), так как $P \leq M$. Если же $r = 1$, то $q \geq m$, и мы снова приходим к (59). Лемма доказана.

Из леммы 5 несложно вывести при больших x оценку снизу суммы

$$\sum_{h_1 x \leq n \leq h_2 x} |f^{(n)}(0)|/n!,$$

где $0 < h_1 < h_2$, а функция f удовлетворяет условиям леммы 5. Заметим, что на отрезок $[h_1 x, h_2 x]$ попадает не менее $\left[\frac{(h_2 - h_1)x}{M} \right] - 1 > c_{15}x$ попарно не пересекающихся пачек подряд идущих M натуральных чисел. Максимальный модуль слагаемых с номерами из каждой пачки согласно (59) больше $c_{12}(h_1 x)^{m-1}$. Следовательно, при достаточно больших x находим

$$\sum_{h_1(x) \leq n \leq h_2(x)} |f^{(n)}(0)|/n! > c_{16}x^m.$$

Применим этот результат к оценке снизу суммы, стоящей в правой части неравенства (50), для $f(z) = F(s_0 - Qz)$. Рассматриваемая функция f удовлетворяет всем условиям леммы 5 и $f^{(n)}(0) = (-Q)^n F^{(n)}(s_0)$. Поэтому

$$\sum_{h_1(x) \leq n \leq h_2(x)} Q^n |F^{(n)}(s_0)|/n! > c_{16}x^m \quad \forall x > c_{17} \quad (68)$$

(постоянные c_{16} и c_{17} зависят от F , h_1 и h_2).

Промежуток суммирования в (50) имеет вид $[h_1 x, h_2 x]$, где $h_1 = \lambda Q \gamma_2 < h_2 = Q \gamma_1$ (см. (47) и (49)). В итоге неравенства (68) и (50) доказывают теорему 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 2. Требуется установить, что для любого $a \in (0, 1/6]$ отношение наименьшего к наибольшему корню уравнения

$$\alpha \ln(e/\alpha) = 1 - a, \quad 0 < \alpha < e,$$

окажется больше $1 - \sqrt{8a} + a$. С этой целью оценим наименьший корень α_1 снизу, а наибольший корень α_2 — сверху. Для функции $f(\alpha) = \alpha \ln(e/\alpha)$ выпишем формулу Тейлора

$$\begin{aligned} f(1 - h_1) &= 1 - h_1^2/2 - h_1^3 f'''(\theta_1)/6, & 0 < h_1 < 1, \quad 1 - h_1 < \theta_1 < 1, \\ f(1 + h_2) &= 1 - h_2^2/2 + h_2^3/6 + h_2^4 f^{(4)}(\theta_2)/24, & 0 < h_2 < 1, \quad 1 < \theta_2 < 1 + h_2. \end{aligned}$$

Поскольку третья производная функции f на интервале $(0, e)$ положительна, а четвертая – отрицательна, то приходим к неравенствам

$$f(1 - h_1) < 1 - h_1^2/2, \quad f(1 + h_2) < 1 - h_2^2/2 + h_2^3/6, \quad 0 < h_1, h_2 < 1.$$

Отсюда находим

$$\begin{aligned} f(1 - \sqrt{2a}) &< 1 - a, \\ f(1 + \sqrt{2a} + a) &< 1 - \frac{2a + \sqrt{8}a^{3/2} + a^2}{2} + \frac{\sqrt{8}a^{3/2} + 6a^2 + 3\sqrt{2}a^{5/2} + a^3}{6} \\ &= 1 - a - \sqrt{8}a^{3/2}/3 + a^2/2 + a^{5/2}/\sqrt{2} + a^3/6. \end{aligned}$$

Несложно проверяется, что при $a \in (0, 1/6]$ последнее выражение меньше, чем $1 - a$. Следовательно, $\alpha_1 > 1 - \sqrt{2a}$, $\alpha_2 < 1 + \sqrt{2a} + a$. Поэтому, используя неравенство $(1 + \epsilon)^{-1} > 1 - \epsilon$, $0 < \epsilon < 1$, получаем

$$\begin{aligned} \alpha_1/\alpha_2 &> (1 - \sqrt{2a})(1 + \sqrt{2a} + a)^{-1} > (1 - \sqrt{2a})(1 - \sqrt{2a} - a) \\ &= 1 - \sqrt{8a} - a + 2a + \sqrt{2}a^{3/2} > 1 - \sqrt{8a} + a, \end{aligned}$$

а это и требовалось доказать.

4. Построение примеров. Напомним одну интерполяционную теорему А. Ф. Леонтьева (см. [5, теорема 2]), следствия из которой мы намерены использовать в построении примеров 1 и 2.

Пусть $\rho > 0$, $p = 1 + [\rho]$, $\{z_n\}_{n=1}^\infty$ – произвольная последовательность комплексных чисел, удовлетворяющая условиям

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (n|z_n|^{-\rho}) = \sigma < +\infty, \quad z_n^p \neq z_\nu^p \quad \forall n, \nu \in \mathbb{N}, \quad n \neq \nu,$$

$$L(z) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - z^p/z_n^p).$$

Пусть $\{a_{n,k} : n \in \mathbb{N}, 1 \leq k \leq p\}$ – произвольная последовательность комплексных чисел. Положим $b_n = \max_{1 \leq k \leq p} |a_{n,k}|$,

$$\gamma = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|z_n|^\rho} \ln \left| \frac{b_n}{L'(z_n)} \right|, \quad (69)$$

$\tau = \pi\sigma/\sin(\pi\rho/p)$, $\gamma^+ = \max(0, \gamma)$. Тогда при условии $\gamma < +\infty$ существует целая функция Φ , для которой выполняются равенства

$$\Phi(z_n \exp(2\pi i k/p)) = a_{n,k} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall k = 1, \dots, p,$$

а ее тип при порядке ρ не превосходит $\tau + \gamma^+$.

Переформулируем эту теорему, чуть ослабив ее в частном случае, который нам потребуется: $\rho = 1$ (тогда $p = 2$), $a_{n,1} = a_{n,2} = a_n$,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (n^{-1} \ln |a_n|) \leq 0, \quad (70)$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (n/|z_n|) = \sigma < +\infty, \quad |z_{n+1}| > |z_n| \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (71)$$

СЛЕДСТВИЕ (из теоремы А. Ф. Леонтьева). Пусть $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ – произвольные последовательности комплексных чисел, удовлетворяющие условиям (71) и (70) соответственно. Положим

$$L(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{z_n^2}\right), \quad \delta = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|z_n|} \ln \left| \frac{1}{L'(z_n)} \right|.$$

Тогда при условии $\delta < +\infty$ существует целая функция экспоненциального типа не выше $\pi\sigma + \max(\delta, 0)$, для которой выполняются равенства

$$\Phi(\pm z_n) = a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Условие (70) (по определению в (70) и в (69) считается, что $\ln 0 = -\infty$), которое можно переписать в виде $|a_n| \leq \exp(o(n))$, $n \rightarrow \infty$, позволяет в оценке экспоненциального типа функции Φ величину γ из (69) заменить на более простую величину δ , зависящую только от последовательности $\{z_n\}$, но не от $\{a_n\}$. Условие (70) в конструкциях примеров 1 и 2 заведомо будет выполняться.

ПОСТРОЕНИЕ ПРИМЕРА 2. Занумеруем все натуральные числа, лежащие в объединении отрезков $I_k = [y_k(1 - \epsilon(y_k)), y_k]$, в порядке возрастания и обозначим полученную последовательность $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$. Пусть $N(t)$ – количество элементов последовательности $\{z_n\}$, не превосходящих t . Заметим, что $y_k = y_{k-1}^2$ и $\epsilon(x) < 1/2$. Следовательно, на полуинтервале $(\sqrt{2t}, t]$ не могут встречаться точки из двух различных отрезков объединения $I = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$. Поэтому $N(t) \leq N(\sqrt{2t}) \leq \sqrt{2t}$, если $I \cap (\sqrt{2t}, t] = \emptyset$, а если $I \cap (\sqrt{2t}, t] \neq \emptyset$, то существует такой номер ν , что $I \cap (\sqrt{2t}, t] = I_{\nu} \cap (\sqrt{2t}, t]$ и в этом случае

$$N(t) \leq N(\sqrt{2t}) + 1 + |I_{\nu}| \leq 1 + \sqrt{2t} + \epsilon(y_{\nu})y_{\nu} \leq 1 + \sqrt{2t} + 2t\epsilon(\sqrt{2t}).$$

Отсюда находим $\lim_{t \rightarrow +\infty} (N(t)/t) = 0$, а значит, выполняется условие (71) с $\sigma = 0$. Поскольку $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$, то $\delta = 0$ [6, гл. 1, § 2]. Тогда согласно приведенному следствию из теоремы А. Ф. Леонтьева найдется целая функция Φ экспоненциального типа 0, для которой при всех $n \in \mathbb{N}$ выполняются равенства

$$\Phi(z_n) = (-1)^{z_n} \Leftrightarrow \Phi(p) = (-1)^p \quad \forall p \in \mathbb{N} \cap I. \quad (72)$$

Положим

$$f(z) = \sum_{p=0}^{\infty} ((-1)^p - \Phi(p))z^p = (z+1)^{-1} - \sum_{p=0}^{\infty} \Phi(p)z^p \equiv A_p z^p. \quad (73)$$

Согласно теореме Ло-Фабера⁹ [7, гл. 2, § 2] ряд $\sum_{p=0}^{\infty} \Phi(p)z^p$ (какова бы ни была целая функция Φ экспоненциального типа 0, не равная нулю тождественно) имеет радиус сходимости, равный 1, а сумма его допускает аналитическое продолжение в $\mathbb{C} \setminus \{1\}$. В точке $z = 1$ эта сумма имеет полюс, если $\Phi(z)$ – многочлен, и имеет существенную особенность в противном случае. Отсюда и из равенств (72), (73) находим

$$\limsup_{p \rightarrow \infty} \sqrt[p]{|A_p|} = 1, \quad A_p = 0 \quad \forall p \in \mathbb{N} \cap I, \quad f \in \mathcal{A}(\mathbb{C} \setminus \{1, -1\}).$$

⁹В монографии [8, гл. 1] эта теорема носит имя Вигерта.

Легко видеть, что в точке $z = -1$ функция $f(z)$ имеет полюс первого порядка, а в точке $z = 1$ — существенную особенность, поскольку $\Phi(z)$ не может быть многочленом. Из сказанного следует, что функция

$$F(s) = f(e^{-s}) = \sum_{p=0}^{\infty} A_p e^{-sp} \equiv \int_0^{+\infty} e^{-st} d\mu(t)$$

обладает всеми свойствами, перечисленными в формулировке примера 2. Пример 2 построен.

ПОСТРОЕНИЕ ПРИМЕРА 1. Обозначим для краткости $\sigma = 2\eta/\ln(1/\eta)$. Запишем все натуральные числа, лежащие в объединении отрезков $I_k = [(1-\sigma)y_k, y_k]$, в порядке возрастания и обозначим полученную последовательность $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$. Нелегко убедиться в справедливости неравенств

$$N(t) \leq \begin{cases} y_{k-1}, & y_k^{3/4} \leq t < (1-\sigma)y_k, \\ y_{k-1} + t - (1-\sigma)y_k + 1, & (1-\sigma)y_k \leq t \leq y_k, \\ y_{k-1} + \sigma y_k + 1, & y_k < t \leq y_{k+1}^{3/4}. \end{cases} \quad (74)$$

Отсюда находим

$$N(t)/t \leq \begin{cases} t^{-1/3}, & y_k^{3/4} \leq t < (1-\sigma)y_k, \\ O(t^{-1/2}) + 1 - (1-\sigma)y_k/t, & (1-\sigma)y_k \leq t \leq y_k, \\ \sigma y_k + O(t^{-1/2}), & y_k < t \leq y_{k+1}^{3/4}. \end{cases} \quad (75)$$

А так как $\max_{t \in [(1-\sigma)y_k, y_k]} 1 - (1-\sigma)y_k/t = \sigma$, то из (71) получаем

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} (N(t)/t) = \limsup_{k \rightarrow \infty} \left(\sup_{t \in [y_k^{3/4}, y_{k+1}^{3/4}]} N(t)/t \right) \leq \sigma.$$

С другой стороны, очевидная оценка снизу $N(y_k)/y_k \geq \sigma + O(1/y_k)$ убеждает нас в том, что верхний предел отношения $N(t)/t$ в точности равен σ , а это значит, что выполнено условие (71). Поскольку $\liminf_{n \rightarrow \infty} (z_{n+1} - z_n) = 1$, то для δ справедлива следующая оценка сверху [9, следствие 2]:

$$\begin{aligned} \delta &< \sigma \ln \left(\frac{4e}{\sigma} \right) = 2\eta \left(\ln \frac{1}{\eta} \right)^{-1} \ln \left(\frac{4e \ln 1/\eta}{2\eta} \right) \\ &= 2\eta \left(\ln \frac{1}{\eta} \right)^{-1} \left(\ln \frac{1}{\eta} + \ln \left(2e \ln \frac{1}{\eta} \right) \right). \end{aligned} \quad (76)$$

А так как при $\eta < e^{-10}$ выполнено неравенство $2e \ln(1/\eta) < \eta^{-0.4}$, то из (76) выводим $\delta < 2.8\eta$, $0 < \eta < 4 \cdot 10^{-5}$. Согласно следствию из интерполяционной теоремы А. Ф. Леонтьева существует целая функция Φ конечного экспоненциального типа ξ ,

$$\xi \leq \pi\sigma + \max(\delta, 0) < \pi\eta/\ln(1/\eta) + 2.8\eta = \eta_1, \quad (77)$$

для которой выполняются равенства

$$\Phi(z_n) = (-1)^{z_n} \quad \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \Phi(p) = (-1)^p \quad \forall p \in I \cap \mathbb{N}. \quad (78)$$

Положим

$$\begin{aligned} F(s) &= \sum_{p=0}^{\infty} ((-1)^p - \Phi(p)) \exp(-ps) = (1 + \exp(-s))^{-1} - \sum_{p=0}^{\infty} \Phi(p) \exp(-ps) \\ &\equiv \sum_{p=0}^{\infty} A_p \exp(-ps) \equiv \int_0^{\infty} \exp(-st) d\mu(t). \end{aligned}$$

Поскольку индикатрисса роста на $\mathbb{R}$ функции Φ не превосходит ее экспоненциального типа, то $\limsup_{p \rightarrow \infty} p^{-1} \ln |A_p| < \eta_1$. Тем самым, функция F является преобразованием Лапласа дискретной меры $d\mu$, удовлетворяющей условию (1) для

$$C = \eta_1 < \eta(\pi/\ln(1/\eta) + 2.8) < 3.1\eta, \quad 0 < \eta < 2 \cdot 10^{-5}. \quad (79)$$

Из соотношений (78) вытекает, что носитель меры $d\mu$ лежит вне объединения отрезков $[(1-\sigma)y_k, y_k]$. Поскольку ξ — экспоненциальный тип функции Φ — меньше π , то по теореме Ло-Фабера-Вигерта сумма ряда экспонент $\sum_{p=0}^{\infty} \Phi(p) \exp(-ps)$ допускает аналитическое продолжение в полосу $\{s \in \mathbb{C} \mid \xi < \operatorname{Im} s < 2\pi - \xi\}$. Следовательно, при $R' = \pi - \xi$ функция $F(s)$ допускает аналитическое продолжение в некоторую окрестность замкнутого круга $K' = \{s \in \mathbb{C} \mid |s - (R' + \pi i)| \leq R'\}$, из которой выколота точка πi , а в точке πi функция $F(s)$ имеет полюс первого порядка.

Таким образом, для завершения обоснования правильности построения примера 1 нам осталось доказать, что $C/R' < \eta$. Тогда, положив $R = C/\eta$, получим, что $F(s)$ продолжается в окрестность круга $\{s \in \mathbb{C} \mid |s - (R + \pi i)| \leq R\}$ с выколотой точкой πi , поскольку $R < R'$, и тем самым функция $F(s)$ удовлетворяет условиям примера 1.

Из соотношений (77) и (79) при $0 < \eta < 2 \cdot 10^{-5}$ находим

$$\frac{C}{R'} \leq \frac{\eta_1}{\pi - \eta_1} \leq \frac{3.1\eta}{\pi - 3.1\eta} < \frac{3.1\eta}{3.14 - 10^{-4}} < \frac{3.1\eta}{3.13} < \eta,$$

а это и требовалось доказать.

Список литературы

1. Стечкин С. Б. О ряде Фарея // Матем. заметки. 1997. Т. 61. № 1. С. 91–113.
2. Постников А. Г. Введение в аналитическую теорию чисел. М.: Наука, 1971.
3. Конягин С. В., Попов А. Ю. О скорости расходимости некоторых интегралов // Матем. заметки. 1995. Т. 58. № 2. С. 243–255.
4. Титчмарш Е. К. Теория дзета-функции Римана. М.: ИЛ, 1953.
5. Леонтьев А. Ф. Об интерполяции в классе целых функций конечного порядка нормального типа // ДАН СССР. 1949. Т. 66. № 2. С. 153–156.
6. Леонтьев А. Ф. Ряды экспонент. М.: Наука, 1976.
7. Маркушевич А. И. Дополнительные главы теории аналитических функций. М.: Наука, 1976.
8. Бибербах Л. Аналитическое продолжение. М.: Наука, 1967.
9. Попов А. Ю. Экстремальные задачи в теории аналитического продолжения // Матем. сб. 1999. Т. 190. № 5. С. 113–138.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило в редакцию
13.XII.2001