А. Ю. Попов, Об обращении обобщённого преобразования Бореля, *Фундамент. и прикл. матем.*, 1999, том 5, выпуск 3, 817–841

Об обращении обобщённого преобразования Бореля*

А. Ю. ПОПОВ
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

УДК 517.547.2

Ключевые слова: целая функция, обобщённое преобразование Бореля, функция сравнения, аналитическое продолжение.

Аннотация

В теории целых функций широко применяется обобщённое преобразование Бореля, которое определено на пространстве функций, аналитических в некоторой окрестности бесконечно удалённой точки и равных нулю на бесконечности, и принимает значения на классах $[A, +\infty)$ (A — функция сравнения). В работе получено интегральное представление для обратного к обобщённому преобразованию Бореля для плотного класса функций сравнения. Это представление позволило установить аналог теоремы Пойа об аналитическом продолжении прообразов преобразования Бореля из $[A, +\infty)$ для A из плотного класса функций сравнения бесконечного порядка.

Abstract

A. Yu. Popov, On inversion of the generalized Borel transform, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika vol. 5 (1999), № 3, p. 817–841.

The generalized Borel transform has a lot of applications in the theory of entire functions. It is defined on the space of functions analytic in a neighborhood of infinity and vanishing at infinity and takes values on a class $[A, +\infty)$, where A is a comparison function. In this paper we obtain an integral representation of inverse generalized Borel transform for a dense class of comparison functions. This allows us to prove an analog of Polya theorem on analytic continuation of inverse Borel transform of functions of $[A, +\infty)$ for A from a dense class of comparison functions of infinite order.

В теории целых функций первого порядка нормального типа широко используется следующее интегральное преобразование. Если дана целая функция $a(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, имеющая экспоненциальный тип $\sigma < +\infty$, то

$$a(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|t|=r>\sigma} e^{zt} \gamma(t)\, dt, \quad \text{где} \quad \gamma(t) = \sum_{n=0}^{\infty} n! a_n t^{-n-1}. \tag{1}$$

*Работа частично поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (96–01–00378).

Фундаментальная и прикладная математика 1999, том 5, № 3, с. 817–841.

Интегральное представление (1) функции $a(z)$ называется преобразованием Бореля.

Для исследования целых функций порядка ρ нормального типа привлекаются интегральные преобразования, которые служат обобщением представления (1). Пусть

$$E_\rho(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n/\Gamma((n+1)/\rho), \quad \rho > 0,$$

а функция

$$\gamma(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \Gamma((n+1)/\rho) t^{-n-1} \tag{2}$$

голоморфна в некоторой окрестности бесконечности $|t| > \sigma$. Тогда для целой функции $a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ имеет место представление

$$a(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|t|=r>\sigma} E_\rho(zt)\gamma(t)\,dt. \tag{3}$$

(Очевидно, что $E_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n/n! = e^z$.) Интегральным преобразованиям (3) и связанным с ними вопросам посвящена монография [1].

Как известно, представление (3) допускает дальнейшее обобщение. Прежде всего напомним несколько определений. Класс всех целых функций в дальнейшем будем обозначать через H.

Определение 1. Функция

$$A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n \in H$$

называется функцией сравнения, если её тейлоровы коэффициенты имеют следующие свойства

$$1)\ A_n > 0,\ n = 0, 1, 2, \ldots; \qquad 2)\ A_{n+1}/A_n \searrow 0 \ \ (n \to \infty). \tag{4}$$

Класс всех функций сравнения обозначим через $\mathfrak{A}$.

Определение 2. Функция

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in H$$

называется сравнимой с функцией A, $A \in \mathfrak{A}$, если существует такое число $\tau = \tau(a)$, $0 < \tau < \infty$, что для всех $z \in \mathbb{C}$ выполнено неравенство

$$|a(z)| \leqslant CA(\tau|z|) \tag{5}$$

с некоторой постоянной $C = C(a, \tau) > 0$.

Определение 3. Нижняя грань чисел τ, для которых выполнено (5), называется A-типом функции a.

Известна теорема — назовем её теоремой об A-типе, — которая утверждает, что функция $a \in H$ сравнима с $A \in \mathfrak{A}$ и имеет A-тип, равный σ, тогда и только тогда, когда

$$\limsup_{n\to\infty} |a_n/A_n|^{1/n} = \sigma, \quad 0 \leqslant \sigma < +\infty. \tag{6}$$

Множество всех целых функций, сравнимых с $A(z) \in \mathfrak{A}$, будем обозначать $[A, +\infty)$. (Вследствие (6) все такие функции имеют только конечный A-тип.) Из (6) также следует, что всякая функция $a(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, имеющая A-тип, равный σ, допускает представление

$$a(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|t|=r>\sigma} A(zt)\gamma(t)\,dt, \tag{7}$$

где

$$\gamma(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{A_n} t^{-n-1}. \tag{8}$$

Из (6) вытекает, что функция γ в (7) аналитична в области $|t| > \sigma$ и обращается в нуль на бесконечности. Функцию $\gamma(t)$ назовем A-ассоциированной с функцией $a(z)$. Представление (7) называется обобщённым преобразованием Бореля. (Представление (3) является частным случаем (7) при $A(z) = E_\rho(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n/\Gamma((n+1)/\rho)$.) Обобщённое преобразование Бореля также используется в теории интерполяции аналитических функций (см., например, [2, 3]). Информация о функциях сравнения приведена в [4] и [5]. Отметим, что множество всех функций сравнения $\mathfrak{A}$ является «всеобъемлющей» системой эталонов роста целых функций, которая «эффективно обслуживает» всё H. Точнее говоря, для любой целой функции $a(z)$, отличной от полинома, существует функция $A \in \mathfrak{A}$, такая что A-тип $a(z)$ конечен и положителен. Это обстоятельство даёт возможность с помощью интегральных преобразований (7) решать некоторые интерполяционные задачи в классах целых функций любого роста (см. [3]). В то же время, функции сравнения $\{E_\rho\}_{\rho>0}$ иногда оказываются мало полезными, даже если изучаются целые функции конечного положительного порядка, но имеющие либо минимальный, либо максимальный тип.

Хорошо известно, что классическое преобразование Бореля (1) допускает обращение

$$\gamma(w) = w^{-1} \int\limits_0^{+\infty} a(t/w)e^{-t}\,dt, \quad |w| > \sigma, \tag{9}$$

которое называется преобразованием Лапласа. Обычно его принято записывать в виде

$$\gamma(w) = \int\limits_0^{+\infty e^{i\varphi}} a(z) e^{-zw}\, dz, \tag{10}$$

где интегрирование ведется по лучу $z = Re^{i\varphi}$, $0 \leqslant R < +\infty$, и $\mathrm{Re}(we^{i\varphi}) > h(\varphi)$, $h(\varphi)$ — индикатриса роста $a(z)$. ((9) получается из (10), если положить $z = t/w$, $\varphi = -\arg w$.) Но здесь отдано предпочтение форме записи (9), так как обобщению именно этой формулы и будет посвящена наша работа.

По-видимому, первое обобщение представления (9) было дано в работе А. Дж. Макинтайра [6]. Он показал, что функция γ, заданная рядом Лорана (2) и участвующая в интегральном преобразовании (3), может быть выражена следующим образом:

$$\gamma(w) = w^{-1}\rho \int\limits_0^{+\infty} a(t/w) \exp(-t^{\rho})\, dt, \quad |w| > \sigma. \tag{11}$$

При доказательстве соотношения (11) решающим является то обстоятельство, что обратные величины тейлоровых коэффициентов функции $E_{\rho}(z)$ являются моментами функции $\rho \exp(-t^{\rho})$ на $[0, +\infty)$, то есть

$$\Gamma((n+1)/\rho) = \rho \int\limits_0^{+\infty} t^n \exp(-t^{\rho})\, dt, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Естественно, что возникает вопрос об обращении обобщённого преобразования Бореля, то есть о выражении функции $\gamma(t)$, определенной равенством (8), через функции $a(z)$ и $A(z)$ каким-либо способом, аналогичным (9) и (11). Следует особо подчеркнуть важность обращения преобразования Бореля именно посредством интегральных представлений (9)–(11). Ведь обобщённые преобразования Бореля и Лапласа могут быть рассматриваемы чисто формально, как сопоставление друг другу степенных рядов

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{A_n} t^{-n-1}. \tag{12}$$

Но это «алгебраическое» соответствие зачастую не позволяет судить о связи между аналитическими свойствами функций, изображаемых рядами (12). В то же время запись как классических, так и обобщённых преобразований Бореля и Лапласа в форме (1), (3), (7) и (9)–(11) позволила доказать ряд глубоких теорем (см., например, [1–7]).

По аналогии с известными представлениями (9) и (11) обращение обобщённого преобразования Бореля (7) следует искать в виде

$$\gamma(w) = w^{-1} \int_0^{+\infty} a(t/w)\, d\mu_A(t),$$

где $\mu_A(t)$ — некоторая мера на $[0,+\infty)$, зависящая от функции $A(z)$. Дадим строгое определение.

Через $\mathfrak{M}$ обозначим множество всех функций сравнения $A(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} A_n z^n$, для которых существует функция $\mu = \mu_A$, имеющая ограниченную вариацию на $[0,+\infty)$, такая что какова бы ни была функция $a(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, имеющая A-тип, равный σ, $0 \leqslant \sigma < +\infty$, при всех $w \in \mathbb{C}$, $|w| > \sigma$, справедливо равенство

$$\gamma(w) = w^{-1} \int_0^{+\infty} a(t/w)\, d\mu(t). \tag{13}$$

Другими словами, $\mathfrak{M}$ — множество всех функций сравнения, для которых обобщённое преобразование Бореля (7) обратимо в форме (13).

Легко заметить, полагая в (13) $a(z) = z^n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, что включение $A \in \mathfrak{M}$ влечет за собой равенства

$$\frac{1}{A_n} = \int_0^{+\infty} t^n\, d\mu_A(t) \quad \forall n \in \mathbb{N}_0. \tag{14}$$

Таким образом, справедливость соотношений (14) является необходимым условием для обращения преобразования (7) в форме (13).

Отметим, что подобные соображения, высказанные, правда, в несколько менее общей форме, присутствовали и ранее (см., например, [8]). Но в [8] М. А. Евграфов решал проблему обращения обобщённого преобразования Бореля только для целых функций конечного и положительного порядка (этот подкласс H мы обозначим через G). Вопрос об обширности множества $\mathfrak{M}$ в [8] не рассматривался. Такая задача стала изучаться позже, но и то лишь для подкласса $\mathfrak{M} \cap G$. Об этом будет сказано ниже подробнее.

Как известно (см. [9]), для любой последовательности комплексных чисел $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ существует функция $\varphi \in C^{\infty}[0,+\infty)$, имеющая на $[0,+\infty)$ заданные моменты:

$$\int_0^{+\infty} t^n \varphi(t)\, dt = c_n \quad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

Поэтому мера μ, даже бесконечно гладкая, удовлетворяющая условиям (14), всегда существует. И на первый взгляд может показаться, что $\mathfrak{M}$ совпадает с $\mathfrak{A}$. Действительно, формальное интегрирование (без обоснования законности перемены местами порядка суммирования и интегрирования) даёт

$$w^{-1}\int_0^{+\infty} a(t/w)\,d\mu(t) = w^{-1}\int_0^{+\infty}\sum_{n=0}^{\infty} a_n\frac{t^n}{w^n}\,d\mu(t) =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{w^{n+1}}\int_0^{+\infty} t^n\,d\mu(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{A_n}w^{-n-1} = \gamma(w).$$

На самом же деле столь поспешное заключение неверно, и в § 1 показано, что $\mathfrak{M} \neq \mathfrak{A}$. Но в таком случае возникает задача выяснить, сколь «много» существует функций сравнения, для которых обобщённое преобразование Бореля имеет обратное в интегральной форме (13). Основное достижение этой работы состоит в доказательстве того, что $\mathfrak{M}$ является плотным классом сравнения в H. Дадим строгое определение этого понятия.

Определение 4. Назовем множество $\mathcal{U} \subset \mathfrak{A}$ плотным классом сравнения, если для всякой отличной от полинома функции $a(z)$, $a(z) \in H$, существует функция $A \in \mathcal{U}$, такая что $a(z)$ сравнима с $A(z)$ и A-тип функции $a(z)$ положителен.

Другими словами, свойство множества $\mathcal{U}$ быть плотным классом сравнения означает справедливость равенства

$$H \setminus \mathbb{C}[z] = \bigcup_{A\in\mathcal{U}} A(0,+\infty). \tag{15}$$

Через $A(0,+\infty)$ здесь обозначено множество целых функций, имеющих конечный и положительный A-тип, а через $\mathbb{C}[z]$ — как обычно — множество всех многочленов. (Очевидно, что всякий полином имеет A-тип, равный нулю для любой $A \in \mathfrak{A}$.) Целесообразность рассмотрения в (15) классов $A(0,+\infty)$, а не $[A,+\infty)$ продиктована недостаточностью информации о $a(z)$ в том случае, когда A-тип $a(z)$ равен нулю. В этой ситуации для $|a(z)|$ имеется лишь некоторая оценка сверху. Так, например, в класс функций экспоненциального типа нуль входят, в частности, все функции, имеющие порядок, меньший 1, а они, как известно, весьма различны по своим свойствам. Напротив, если A-тип функции $a(z)$ равен σ, $0 < \sigma < +\infty$, то, во-первых, на рост $a(z)$ имеется оценка не только сверху, но и снизу: существует последовательность комплексных чисел $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, такая что $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty$ и при любом $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a(z_n)|}{A((\sigma-\varepsilon)|z_n|)} = +\infty.$$

Во-вторых, на окружности $|w| = \sigma$ функция $\gamma(w)$, A-ассоциированная с $a(z)$, имеет хотя бы одну особую точку. Отметим, что с помощью изучения множества особых точек функции $\gamma(w)$ в классическом случае $A(z) = E_\rho(z)$ было получено много интересных результатов (см. [1,5]). В нашей работе этим методом, применяемым в общей ситуации, в § 5 дополнена теорема А. О. Гельфонда о плотности тейлоровых коэффициентов периодических целых функций из [10].

Итак, ниже показано, что $\mathfrak{M}$ — плотный класс сравнения. Иначе говоря, справедливо равенство

$$H \setminus \mathbb{C}[z] = \bigcup_{A \in \mathfrak{M}} A(0, +\infty).$$

Таким образом, можно утверждать, что проблема обращения обобщённого преобразования Бореля в определенном смысле решена во всем классе H. Но вполне естественно стремиться сделать функцию μ в (13) возможно более гладкой и аналитически «просто устроенной». В связи со сказанным возникает задача об исследовании возможно более узких подмножеств $\mathfrak{M}$, являющихся плотными классами сравнения.

Через $\mathfrak{M}^+$ обозначим множество тех функций сравнения, тейлоровы коэффициенты которых допускают представление (14) с положительной мерой μ. Через $\mathfrak{M}^+_{\mathcal{A}}$ обозначим подмножество $\mathfrak{M}^+$, состоящее из тех функций сравнения, для которых меру μ в (14) можно взять не только положительной, но и аналитической на $(0, +\infty)$.

Большинство широко использовавшихся ранее функций сравнения принадлежат именно классу $\mathfrak{M}^+_{\mathcal{A}}$. В их числе функции $E_\rho(z)$, а также $Q_q(z) = \sum_{n=0}^{\infty} q^{-n(n-1)/2} z^n$, $q > 1$, из [2] и др. (Легко проверяется справедливость равенств

$$q^{n(n-1)/2} = q\kappa^{-1} \int_0^{+\infty} t^n \widehat{Q}_q^{-1}(qt)\, dt, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

где $\kappa = \int_0^{+\infty} \widehat{Q}_q^{-1}(t)\, dt$, $\widehat{Q}_q(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} q^{-n(n-1)/2} t^n$.)

Следующая теорема является основным результатом этой работы.

Теорема 1.

1) *множество* $\mathfrak{M}^+_{\mathcal{A}}$ *является плотным классом сравнения;*

2) *если* $A \in \mathfrak{M}^+$, *то какова бы ни была функция, имеющая* A*-тип, равный* σ, *ее преобразование Бореля обратимо в форме* (13).

Отметим, что утверждение 1) теоремы 1 является новым только для целых функций бесконечного и нулевого порядков. Для функций из G (конечного и положительного порядка) проблема обращения обобщённого преобразования Бореля в известном смысле уже была решена. М. А. Евграфов в [8] выделил некоторый подкласс в $\mathfrak{M}^+_{\mathcal{A}}$ и доказал, что для этих функций сравнения обобщённое преобразование Бореля обратимо в интегральной форме (13). А в [11] на стр. 24 была предложена схема доказательства того, что выделенное в [8] подмножество функций сравнения является в нашей терминологии плотным классом сравнения в G. Однако методы, использованные в цитированных работах, по-видимому, для функций из $H \setminus G$ неприменимы.

Несколько слов о структуре работы. В § 1 дается достаточное условие принадлежности функции сравнения классу $\mathfrak{M}$ и доказывается неравенство

$\mathfrak{M} \neq \mathfrak{A}$; § 2 посвящен вопросам, связанным с плотными классами сравнения. В § 4 доказываются предложения, из которых вытекает справедливость теоремы 1. Для их доказательства необходимы различные вспомогательные утверждения, которые изложены в § 3. В § 5 рассматриваются некоторые приложения полученных в §§ 1–4 результатов.

§ 1. Достаточные условия обращения обобщённого преобразования Бореля

Обозначим через $\widetilde{\mathfrak{M}}$ класс всех функций сравнения $A(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} A_n z^n$, тейлоровы коэффициенты которых являются обратными величинами моментов некоторой функции μ, имеющей ограниченную вариацию на $\mathbb{R}_+$,

$$\frac{1}{A_n} = \int\limits_0^{+\infty} t^n \, d\mu(t), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \tag{1.1}$$

и моменты вариации меры μ растут «не слишком быстро»:

$$\lim_{n\to\infty} \left(A_n \int\limits_0^{+\infty} t^n \, |d\mu(t)| \right)^{1/n} = 1. \tag{1.2}$$

Замечание 1. Если $\mu(t)$ является неубывающей функцией, то (1.2) следует из (1.1). Действительно, в этом случае при любом $b \in \mathbb{N}_0$

$$A_n \int\limits_0^{+\infty} t^n \, |d\mu(t)| = A_n \int\limits_0^{+\infty} t^n \, d\mu(t) = 1.$$

Предложение 1. *Пусть* $A(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} A_n z^n \in \widetilde{\mathfrak{M}}$, *то есть существует мера* μ *на* $[0, +\infty)$, *такая что выполнены соотношения* (1.1) *и* (1.2). *Пусть также* $a(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in [A, +\infty)$ *имеет* A*-тип, равный* σ. *Тогда* A*-ассоциированная с* $a(z)$ *функция* $\gamma(w) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{A_n} w^{-n-1}$ *при* $|w| > \sigma$ *может быть выражена следующим образом:*

$$\gamma(w) = w^{-1} \int\limits_0^{+\infty} a(t/w) \, d\mu(t). \tag{1.3}$$

Доказательство. Ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (t/w)^n$ абсолютно сходится в каждой точке $t \in (0, +\infty)$ к $a(t/w)$ при любом фиксированном w, $w \neq 0$. Последовательность частичных сумм этого ряда ограничена по абсолютной величине функцией

$u(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n|(t/|w|)^n$, суммируемой при $|w| > \sigma$ на $[0, +\infty)$ по вариации меры μ:

$$\int\limits_0^{+\infty} u(t)|\,d\mu(t)| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a_n|}{|w|^n} \int\limits_0^{+\infty} t^n\,|d\mu(t)| =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a_n|\exp(o(n))}{A_n|w|^n} \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\sigma}{|w|}\right)^n \exp(o(n)) < +\infty.$$

(Здесь перемена местами порядка суммирования и интегрирования возможна вследствие положительности функции $u(t)$ и меры $|d\mu(t)|$.) Поэтому по теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла получаем

$$\gamma(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{A_n} w^{-n-1} = w^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n w^{-n} \int\limits_0^{+\infty} t^n\,d\mu(t) =$$
$$= w^{-1} \int\limits_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{t}{w}\right)^n d\mu(t) = w^{-1} \int\limits_0^{+\infty} a(t/w)\,d\mu(t).$$

Предложение доказано. С учетом принятой в нашей статье терминологии предложение 1 можно сформулировать следующим эквивалентным образом: $\widetilde{\mathfrak{M}} \subset \mathfrak{M}$. Ввиду очевидного включения $\mathfrak{M}^+_{\mathcal{A}} \subset \mathfrak{M}^+ \subset \widetilde{\mathfrak{M}}$ (см. замечание 1 и определение множеств $\mathfrak{M}^+$ и $\mathfrak{M}^+_{\mathcal{A}}$ во введении) получаем

Предложение 2. $\mathfrak{M}^+_{\mathcal{A}} \subset \mathfrak{M}^+ \subset \widetilde{\mathfrak{M}} \subset \mathfrak{M}$.

Автору неизвестно, справедливо ли равенство $\widetilde{\mathfrak{M}} = \mathfrak{M}$, то есть являются ли дополнительные ограничения (1.2) на меру μ, для которой выполнены соотношения (1.1), не только достаточными, но и необходимыми для того, чтобы равенство (13) было справедливо для всех $a(z) \in [A, \sigma]$, $0 \leqslant \sigma < +\infty$, и $\forall w$, $|w| > \sigma$. По-видимому, эта задача не является легкой.

Предложение 3. $\mathfrak{M} \neq \mathfrak{A}$.

Доказательство поведем от противного. Предположим, что $\mathfrak{A}$ совпадает с $\mathfrak{M}$. Рассмотрим функцию $F(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n/p_n$, где

$$p_n = \begin{cases} n!, & n \neq 4; \\ 25, & n = 4. \end{cases} \tag{1.4}$$

Включение $F(z) \in \mathfrak{A}$ легко проверяется. Согласно сделанному предположению $F \in \mathfrak{M}$. Это означает, что существует μ — мера на $[0, +\infty)$, такая что для любой целой функции $a(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in [F, \sigma]$, $0 \leqslant \sigma < +\infty$, при всех $w \in \mathbb{C}$,

$|w| > \sigma$, справедливо тождество

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n a_n w^{-n} = \int_0^{+\infty} a(t/w)\, d\mu(t). \tag{1.5}$$

Кроме того (см. (9)), при $\forall w$, $|w| > \sigma$, имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty} n! a_n w^{-n} = \int_0^{+\infty} a(t/w)\, d(-e^{-t}). \tag{1.6}$$

(Очевидно, что классы функций $[\exp, \sigma]$ и $[F, \sigma]$ совпадает при любых σ, $0 \leqslant \sigma < +\infty$.) Вычитая (1.6) из (1.5) и учитывая (1.4), находим

$$a_4 w^{-4} = \int_0^{+\infty} a(t/w)\, d(\mu(t) + e^{-t}) \quad \forall w \in \mathbb{C},\ |w| > \sigma.$$

Положим теперь $a(z) = \exp z$, $1/w = \alpha$,

$$\nu(t) = \begin{cases} \mu(t) + e^{-t}, & t \geqslant 0, \\ \mu(0) + 1, & t < 0. \end{cases}$$

Получим тождество: $\forall \alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| < 1$,

$$\int_0^{+\infty} e^{\alpha t}\, d\nu(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\alpha t}\, d\nu(t) = \alpha^4/4!. \tag{1.7}$$

Нетрудно сообразить, что если интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \exp(\alpha t)\, d\nu(t)$ сходится при некотором $\alpha_0 \in \mathbb{C}$, то он сходится равномерно по α на любом компакте, лежащем в полосе $\{\alpha\colon\ \operatorname{Re}\alpha < \operatorname{Re}\alpha_0\}$, и, следовательно, представляет из себя функцию, аналитическую в этой полосе. Из сказанного следует справедливость тождества (1.7) при всех $\alpha \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}\alpha < 1$. Положив $\alpha = iy$, $y \in \mathbb{R}$, получим

$$\forall\, y \in \mathbb{R} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iyt}\, d\nu(t) = y^4/24.$$

Таким образом, преобразование Фурье меры ν оказалось многочленом, не являющимся константой. Но такой меры ν не существует, поскольку преобразование Фурье от многочлена степени $\geqslant 1$ является обобщённой функцией, действие которой на основные функции нельзя представить как интеграл по мере. (Аккуратные доказательства имеются в учебнике [12].) Полученное противоречие доказывает предложение 3.

§ 2. О плотных классах сравнения

Предложение 4. *Множество $\mathfrak{A}$ является плотным классом сравнения.*

Доказательство. Чтобы убедиться в справедливости сформулированного предложения, достаточно для любой целой функции $a(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, отличной от полинома, построить функцию $A(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} A_n z^n \in \mathfrak{A}$, тейлоровы коэффициенты которой обладают следующими свойствами:

1) $A_n \geqslant |a_n|$ $\forall n \in \mathbb{N}_0$,
2) уравнение $A_n = |a_n|$ имеет бесконечно много решений в натуральных числах n.

Действительно, тогда будем иметь

$$\limsup_{n\to\infty} |a_n/A_n|^{1/n} = 1,$$

откуда по теореме об A-типе можно заключить, что A-тип $a(z)$ равен 1. Следовательно, для любой функции $a(z) \in H \setminus \mathbb{C}[z]$ нашлась функция сравнения $A(z)$, относительно которой $a(z)$ имеет конечный и положительный тип. Согласно определению 4 это и означает, что множество $\mathfrak{A}$ является плотным классом сравнения.

Перейдем к построению искомой функции $A(z)$. Положим

$$a'_n = \begin{cases} \ln|1/a_n|, & a_n \neq 0, \\ +\infty, & a_n = 0. \end{cases}$$

Поскольку $a(z) \in H$, то

$$\lim_{n\to\infty} (a'_n/n) = +\infty. \tag{2.1}$$

А так как $a(z)$ не является многочленом, то среди величин a'_n имеется бесконечно много не равных $+\infty$. Построим непрерывную на $[0, +\infty)$ ломаную $L(x)$, являющуюся в определенном смысле огибающей для последовательности $\{a'_n\}$. Пусть

$$\mu_0 = \min_{n\in\mathbb{N}_0} a'_n, \tag{2.2}$$

а n_0 — наибольшее из чисел n, для которых выполняется равенство $a'_n = \mu_0$. (Ввиду (2.1) μ_0 и n_0 существуют.) Положим $L(x) = \mu_0$ при $0 \leqslant x \leqslant n_0$. В силу (2.2) и выбора n_0 имеем

$$a'_n > a'_{n_0} = \mu_0 \quad \forall n > n_0. \tag{2.3}$$

А так как среди величин a'_n имеется бесконечно много отличных от $+\infty$, то, учитывая (2.1) и (2.3), находим, что существует

$$\mu_1 = \min_{n>n_0}\bigl((a'_n - a'_{n_0})/(n - n_0)\bigr), \quad 0 < \mu_1 < +\infty.$$

Пусть n_1 — наибольшее из чисел n, для которых справедливо равенство $(a'_n - a'_{n_0})/(n-n_0) = \mu_1$. Положим

$$L(x) = \mu_0 + \mu_1(x-n_0), \quad n_0 < x \leqslant n_1.$$

Отметим, что функция L непрерывна в точке n_0, $L(n_0) = a'_{n_0}$, $L(n_1) = a'_{n_1}$, $L(n) \leqslant a'_n$ при всех $n \leqslant n_1$, а при всех $n > n_1$ выполнено соотношение

$$(a'_n - a'_{n_1})/(n-n_1) > \mu_1.$$

Пусть $k \in \mathbb{N}$ и имеются числа $n_s \in \mathbb{N}$ и $\mu_s > 0$, $1 \leqslant s \leqslant k$, а функция $L(x)$ задана на $[0, n_k]$. Пусть также выполнены условия $L(n_k) = a'_{n_k}$, $(a'_n - a'_{n_k})/(n-n_k) > \mu_k$ при любом $n > n_k$. Проводя те же рассуждения, что и в случае $k=0$, находим

$$\mu_k < \mu_{k+1} = \min_{n>n_k}((a'_n - a'_{n_k})/(n-n_k)) < +\infty.$$

Через n_{k+1} обозначим наибольшее из чисел n, для которых $(a'_n - a'_{n_k})/(n-n_k) = \mu_{k+1}$. Положим

$$L(x) = L(n_k) + \mu_{k+1}(x-n_k), \quad n_k < x \leqslant n_{k+1}.$$

Очевидно, что функция L непрерывна на $[n_k, n_{k+1}]$, $L(n_{k+1}) = a'_{n_{k+1}}$ и $L(n) \leqslant a'_n$, $n_k, n \leqslant n_{k+1}$. В силу выбора n_{k+1} имеем также

$$(a'_n - a'_{n_{k+1}})/(n-n_{k+1}) > \mu_{k+1} \quad \forall n > n_{k+1}.$$

Таким образом, по индукции определены последовательность натуральных чисел n_k, действительных чисел μ_k и непрерывная на $[0, +\infty)$ функция $L(x)$. Согласно построению имеем

$$\begin{aligned} L(n) &\leqslant a'_n \quad \forall n \in \mathbb{N}_0, \\ L(n_k) &= a'_{n_k} \quad \forall k \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Имеем также

$$L(n+1) - L(n) = \begin{cases} \mu_k, & n_{k-1} \leqslant n < n_k, \ k \in \mathbb{N}, \\ 0, & 0 \leqslant n < n_0. \end{cases}$$

Так как последовательность $\{\mu_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ строго возрастает, а в силу (2.1) и (2.4) она не ограничена, то приходим к соотношению

$$L(n+1) - L(n) \nearrow +\infty, \quad n \to \infty. \tag{2.5}$$

Полагая $A_n = \exp(-L(n))$, из (2.5) получаем включение $A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n \in \mathfrak{A}$, а из (2.4) следуют свойства 1 и 2 последовательности A_n. Предложение 4 доказано.

Замечание 2. Предложение 4 (правда, сформулированное в других терминах) и схема его доказательства содержатся в [13]. Функция $L(x)$ названа там ломаной Ньютона, а Валирон в [14] упоминает её как ломаную Адамара. Аккуратное доказательство предложения 4 приведено здесь лишь для удобства читателя.

Предложение 5. *Всякий плотный класс сравнения имеет мощность континуума.*

Доказательство проведем от противного. Предположим, что нашлось подмножество $\mathcal{U} \subset \mathfrak{A}$, являющееся плотным классом сравнения и имеющее мощность, меньшую, чем мощность континуума. Рассмотрим семейство целых функций

$$E = \left\{ a_\tau(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n/(n!)^\tau \mid \tau \in (0, +\infty) \right\}.$$

Очевидно, $\operatorname{Card} E = \operatorname{Card} \mathbb{R}$. Если $\mathcal{U}$ — плотный класс сравнения и $\operatorname{Card} \mathcal{U} < \operatorname{Card} E$, то найдется функция $B(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} B_n z^n \in \mathcal{U}$, такая что по крайней мере две функции $a_{\tau_1}(z)$ и $a_{\tau_2}(z)$, $\tau_1 < \tau_2$, имеют относительно $B(z)$ конечный и положительный B-тип, то есть

$$0 < \limsup_{n\to\infty} ((n!)^{-\tau_1}/B_n)^{1/n} < +\infty, \tag{2.6}$$

$$0 < \limsup_{n\to\infty} ((n!)^{-\tau_2}/B_n)^{1/n} < +\infty, \tag{2.7}$$

Из (2.6) находим, что при всех натуральных n с некоторой постоянной c выполняется неравенство

$$(B_n)^{-1/n} < cn^{\tau_1}.$$

отсюда следует равенство

$$\lim_{n\to\infty} (n^{-\tau_2}(B_n)^{-1/n}) = 0. \tag{2.8}$$

Соотношения (2.7) и (2.8) несовместны. Полученное противоречие доказывает предложение.

Для дальнейшего потребуется

Определение 5. Две функции сравнения $A(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} A_n z^n$ и $B(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} B_n z^n$ назовем эквивалентными, если выполнено соотношение

$$\lim_{n\to\infty} (A_n/B_n)^{1/n} = 1.$$

Предложение 6. *Пусть $\mathcal{U} \subset \mathfrak{A}$ и для любой функции $B(z) \in \mathfrak{A}$ существует эквивалентная ей функция $A(z) \in \mathcal{U}$. Тогда множество $\mathcal{U}$ является плотным классом сравнения.*

Предложение 6 непосредственно следует из предложения 4, определений 4, 5 и теоремы об A-типе.

§ 3. Вспомогательные утверждения

Лемма 1. *Пусть $B(z) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} B_m z^m \in \mathfrak{A}$,*

$$R_m = B_m/B_{m+1}, \quad m = 0, 1, 2, \ldots \tag{3.1}$$

Тогда при любых $p \in \mathbb{N}_0$, $\nu \in \mathbb{N}$ и $R > 0$ справедливо равенство

$$B_{p+\nu} R^{p+\nu} \prod_{k=0}^{\nu-1} \left(\frac{R_{p+k}}{R} \right) = B_p R^p. \tag{3.2}$$

Доказательство. При любых $p \in \mathbb{N}_0$ и $\nu \in \mathbb{N}$ имеем

$$\frac{B_{p+\nu}}{B_p} = \prod_{k=1}^{\nu} \left(\frac{B_{p+k}}{B_{p+k-1}} \right) = \prod_{k=0}^{\nu-1} R_{p+k}^{-1}. \tag{3.3}$$

Умножив обе части (3.3) на $B_p R^p \prod\limits_{k=0}^{\nu-1} R_{p+k}$, получим (3.2). Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Пусть выполнены условия леммы 1. Пусть затем $n \in \mathbb{N}$, $0 < \varepsilon < 1/(2n)$, $t = R_n(1-\varepsilon)$. Тогда справедливо неравенство*

$$B(t) < B_n t^n (2n + 1/\varepsilon). \tag{3.4}$$

Доказательство. Воспользуемся очевидным представлением $B(t) = S_1(t) + S_2(t)$, где

$$S_1(t) = \sum_{m=0}^{n-1} B_m t^m, \quad S_2(t) = \sum_{m=n}^{\infty} B_m t^m.$$

Положив в (3.2) $p = m$ и $\nu = n - m$ при $0 \leqslant m < n$, $R = R_n$, получим, учитывая монотонность $\{R_m\}$ (см. (3.1) и (4)), следующее неравенство:

$$B_m R_n^m \leqslant B_n R_n^n, \quad 0 \leqslant m \leqslant n-1.$$

Отсюда

$$S_1(t) < S_1(R_n) \leqslant n B_n R_n^n = n B_n t^n (R_n/t)^n = \\ = n B_n t^n (1-\varepsilon)^{-n} \leqslant n B_n t^n (1 - 1/(2n))^{-n} \leqslant 2n B_n t^n.$$

При $p = n$, $\nu \geqslant 0$ (пустое произведение считаем равным 1) из (3.2) находим

$$S_2(t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} B_{n+\nu} t^{n+\nu} = \sum_{\nu=0}^{\infty} B_n t^n \prod_{k=0}^{\nu-1} \left(\frac{t}{R_{n+k}} \right) \leqslant \\ \leqslant B_n t^n \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{t}{R_n} \right)^{\nu} = B_n t^n \sum_{\nu=0}^{\infty} (1-\varepsilon)^{\nu} = \frac{1}{\varepsilon} B_n t^n.$$

Складывая оценки для S_1 и S_2, приходим к неравенству (3.4).

Лемма 3. *Пусть μ — неубывающая на $\mathbb{R}_+$ функция, для которой все интегралы*

$$V_n = \int_0^{+\infty} t^n \, d\mu(t), \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

сходятся и $\int\limits_x^{+\infty} d\mu(t) > 0$ *при всех* $x > 0$. *Тогда при любых* $n \in \mathbb{N}_0$ *справедливы неравенства*

$$V_{n+2}V_n > V_{n+1}^2.$$

Доказательство. Для $n = 0$ утверждение леммы установлено Стилтьесом в [15]. Для того чтобы перейти к общему случаю, положим $\mu_n(x) = \int\limits_0^x t^n\,d\mu(t)$. Очевидно, что функции μ_n также удовлетворяют условиям леммы. Имеем

$$W_{n,k} = V_{n+k} = \int\limits_0^{+\infty} t^k\,d\mu_n(t), \quad k - 0, 1, 2, \dots$$

и согласно доказанному в [15]

$$W_{n,2}W_{n,0} > W_{n,1}^2.$$

Отсюда получаем утверждение леммы при всех $n \in \mathbb{N}$.

§ 4. Доказательство центрального результата

В этом параграфе доказывается утверждение, составляющее основное содержание работы.

Теорема 2. *Какова бы ни была функция* $B(z) \in \mathfrak{A}$, *существует эквивалентная ей функция сравнения* $A(z) \in \mathfrak{M}_{\mathcal{A}}^+$.

Поясним, что означает формулировка теоремы 2 в свете принятой в статье терминологии и доказанных выше предложений 1 и 2.

Пусть $B(z)$ — некоторая произвольная функция сравнения. Теорема 2 утверждает, что существует $A(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} A_n z^n \in \mathfrak{A}$, обладающая следующими свойствами:

1) $A(z)$ «классифицирует по росту» целые функции точно так же, как и $B(z)$. А именно, любая целая функция $a(z)$ сравнима с $B(z)$ в том и только в том случае, если $a(z)$ сравнима с $A(z)$, то есть $[B, +\infty) = [A, +\infty)$. Более того, если $a \in [B, +\infty)$, то A-тип функции $a(z)$ равен ее B-типу;

2) если $a(z)$ имеет A-тип, равный σ, $0 \leqslant \sigma < +\infty$, то ее обобщённое преобразование Бореля

$$a(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|t|=r>\sigma} A(zt)\gamma(t)\,dt$$

имеет обратное следующего вида:

$$\gamma(w) = w^{-1} \int\limits_0^{+\infty} a(t/w) g(t)\,dt, \quad |w| > \sigma,$$

где g — некоторая функция, положительная и аналитическая на $(0,+\infty)$, для которой справедливы равенства

$$\frac{1}{A_n} = \int\limits_0^{+\infty} t^n g(t)\,dt \quad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

Изложенные выше результаты позволяют без труда получить теорему 1, сформулированную в конце введения. Действительно, обратимость обобщённого преобразования Бореля в интегральной форме в классах $[A,+\infty)$, $A \in \mathfrak{M}^+$, следует из предложений 1 и 2. То, что множество $\mathfrak{M}^+_{\mathcal{A}}$ является плотным классом сравнения, следует из теоремы 2 и предложения 6.

Доказательство теоремы 2. Пусть $B(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} B_n z^n$ — некоторая функция сравнения. Согласно определению 1 выполнены соотношения

$$B_n > 0, \quad n = 0,1,2,\dots, \tag{4.1}$$

$$R_n = B_n/B_{n+1} \nearrow +\infty. \tag{4.2}$$

Пусть также

$$r_n = R_n(1-1/4n), \quad \delta_n = (r_n - 1/4n, r_n),$$
$$\varphi(t) = \exp(-t^2), \quad \varphi_n(t) = \varphi(t - r_n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Легко проверяется справедливость неравенств

$$\int\limits_0^{+\infty} \varphi_n(t)\,dt < \sqrt{\pi}, \quad \int\limits_{\delta_n} \varphi_n(t)\,dt > \frac{1}{8n}. \tag{4.3}$$

При любом $\lambda > 0$ имеем

$$\max_{|\operatorname{Im} z| \leqslant \lambda} |\varphi_n(z)| = \exp(\lambda^2),$$

а это влечет за собой равномерную сходимость ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(t)/n^2 = \psi(t) \tag{4.4}$$

на множестве $|\operatorname{Im} z| \leqslant \lambda \ \forall \lambda > 0$. Отсюда следует, что ψ является целой функцией.

Определим последовательность чисел $\{A_n\}$ формулами

$$\frac{1}{A_n} = \int\limits_0^{+\infty} t^n \frac{\psi(t)}{B(t)}\,dt, \quad n = 0,1,2,\dots \tag{4.5}$$

Если будет установлена справедливость соотношения

$$\lim_{n\to\infty} (B_n/A_n)^{1/n} = 1, \tag{4.6}$$

то тем самым теорема будет доказана. Действительно, неравенства $A_n > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}_0$ вытекают из положительности на $(0, +\infty)$ подынтегральной функции в (4.5). Монотонное убывание отношения $A_{n+1}/A_n \to 0$ следует из леммы 3, а (4.6) вместе с (4.2) даст $A_{n+1}/A_n \to 0$ $(n \to \infty)$. Таким образом, свойства (4) для последовательности $\{A_n\}$ выполнены. Следовательно, $A(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} A_n z^n$ — функции сравнения, эквивалентные $B(z)$ в силу (4.6) и определения 5. Очевидно также включение $A(z) \in \mathfrak{M}^+_{\mathcal{A}}$.

Перейдем к доказательству соотношения (4.6). Положим $d_n = B_n/A_n$. Из (4.1) и (4.3)–(4.5) находим

$$d_n = \int\limits_0^{+\infty} \frac{B_n t^n}{B(t)} \psi(t)\, dt < \int\limits_0^{+\infty} \psi(t)\, dt = \\ = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \int\limits_0^{+\infty} \varphi_m(t)\, dt < \sqrt{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} < 4. \qquad (4.7)$$

С другой стороны, ввиду положительности всех функций φ_m на вещественной оси, с учетом (4.3)–(4.5) имеем

$$d_n \geqslant \int\limits_{\delta_n} \frac{B_n t^n}{B(t)} \psi(t)\, dt \geqslant n^{-2} \int\limits_{\delta_n} \frac{B_n t^n}{B(t)} \varphi_n(t)\, dt \geqslant \\ \geqslant \int\limits_{\delta_n} \varphi_n(t)\, dt/(n^2 M_n) \geqslant 1/(8n^3 M_n), \qquad (4.8)$$

где $M_n = \max\limits_{t \in \delta_n} (B(t)/B_n t^n)$. Так как $r_n \to +\infty$ $(n \to \infty)$, то при достаточно больших n выполняются соотношения

$$\delta_n = (r_n - 1/(4n), r_n) \subset (r_n(1 - 1/(4n)), r_n) = \\ = \left(R_n \left(1 - \frac{1}{4n}\right)^2, R_n \left(1 - \frac{1}{4n}\right) \right) \subset \\ \subset (R_n(1 - 1/(2n)), R_n(1 - 1/(4n))) = \delta'_n.$$

Поэтому по лемме 2

$$M_n \leqslant M'_n = \max_{t \in \delta'_n} (B(t)/B_n t^n) \leqslant 6n.$$

Отсюда и из (4.8) находим

$$d_n \geqslant 1/(48n^4). \qquad (4.9)$$

Сравнивая оценки (4.9) и (4.7), приходим к (4.6). Теорема 2 доказана.

§ 5. Некоторые приложения

В работе [15], используя классические преобразования Бореля (1) и Лапласа (9), (10), Пойа доказал следующую теорему.

Пусть $a \in [\exp, +\infty)$, $h(\vartheta)$ — индикатриса роста $a(z)$, $k(\vartheta)$ — опорная функция множества особых точек функции $\gamma(w)$, ассоциированной по Борелю с $a(z)$. (Определения $h(\vartheta)$ и $k(\vartheta)$ см. в [17], стр. 278 и 358.) Тогда справедливо равенство $h(\vartheta) = k(-\vartheta)$ $\forall \vartheta \in (-\pi, \pi]$.

Впоследствии (см. [1, гл. 6]) с помощью интегральных преобразований (3) и (11) эта теорема была обобщена на классы функций $[E_\rho, +\infty)$ (обычно эти классы обозначают $[\rho, +\infty)$).

Пусть $a \in [\rho, +\infty)$, $0 < \rho < +\infty$,

$$h(\vartheta) = \limsup_{r \to \infty} \frac{\ln |a(re^{i\vartheta})|}{r^\rho}, \tag{5.1}$$

$k(\vartheta)$ — ρ-опорная функция K — наименьшего ρ-выпуклого множества, на дополнении к которому функция $\gamma(w)$, определенная соотношением (2), допускает аналитическое продолжение. А именно,

$$k(\vartheta) = \max_{w \in K_\vartheta} \operatorname{Re}((we^{-i\vartheta})^\rho),$$

где K_ϑ — пересечение множества K с углом $|\arg(we^{i\vartheta})| \leqslant \min(\pi, \pi/2\rho)$.

Теорема А ([1]). *При всех $\vartheta \in (-\pi, \pi]$ справедливо неравенство $h(\vartheta) \leqslant k(-\vartheta)$. Это неравенство является равенством в каждой точке ϑ, в которой $h(\vartheta) \geqslant 0$.*

М. А. Евграфов в [8] перенес теорему А на некоторый более широкий класс функций сравнения, имеющих уточненный порядок $\rho(r)$, $\lim\limits_{r\to\infty} \rho(r) = \rho$, $0 < \rho < +\infty$. Формулировка его результата почти дословно совпадает с теоремой А, нужно лишь в (5.1) число ρ заменить на функцию $\rho(r)$, а под $\gamma(w)$ понимать функцию, ассоциированную с $a(z)$ относительно некоторой функции сравнения $B(z)$, определяющей уточненной порядок $\rho(r)$: $\lim\limits_{r\to\infty} (\ln B(r)/r^{\rho(r)}) = 1$. Однако исследование обширности множества уточненных порядков, для которых справедливо обобщение теоремы А, в работе [8] не проводилось. В частности, долгое время невыясненным оставался следующий вопрос. Для каждой ли целой функции $a(z)$ конечного и положительного порядка существует уточнённый порядок $\rho(r)$, относительно которого $a(z)$ имеет конечный и положительный тип и справедлив цитированный выше результат из [8]? И только в [11] на этот вопрос был дан положительный ответ. Таким образом, в классе целых функций конечного порядка к настоящему времени почти полностью* описана связь между индикатором целой функции и расположением особенностей её обобщённого преобразования Бореля, действующего в пространствах $[A, +\infty)$, где семейство $\{A(z)\}$ образует плотный

*Равенство $h(\vartheta) = k(-\vartheta)$ пока не доказано, если $h(\vartheta) < 0$, и $\rho \neq 1$.

в G класс сравнения. Что же касается целых функций бесконечного порядка, то хотя для некоторых их подклассов и определялись аналоги индикатора [18], но, по-видимому, никаких аналогов теоремы Пойа для них вообще не было известно.

Развитый в предыдущих параграфах аппарат позволяет доказать аналог теоремы A (в несколько ослабленной форме) для плотного класса функций сравнения. Тем самым впервые получена теорема об аналитическом продолжении A-ассоциированной функции с целой функции $a(z)$ бесконечного порядка, где $A \in \mathfrak{M}^+$, $a \in A(0, +\infty)$.

Пусть $A \in \mathfrak{A}$, $a \in [A, +\infty)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $0 < \beta - \alpha < 2\pi$. Определим величину $\sigma_{\alpha,\beta}(a)$ как нижнюю грань тех положительных чисел τ, при которых функция $|a(z)|/A(\tau|z|)$ ограничена в угле $\alpha \leqslant \operatorname{Arg} z \leqslant \beta$. Наконец, положим

$$\mathcal{H}_A(a, \vartheta) = \mathcal{H}_A(\vartheta) = \lim_{\varepsilon \to +0} \sigma_{\vartheta - \varepsilon, \vartheta + \varepsilon}(a). \tag{5.2}$$

Этот предел существует и неотрицателен ввиду того, что $\sigma_{\vartheta-\varepsilon,\vartheta+\varepsilon}$ — неубывающая функция от ε на $(0, \pi)$, ограниченная снизу нулем, а сверху — A-типом функции $a(z)$.

Замечание 3. Если $A(z) = E_\rho(z)$, то функции, определенные в (5.2) и (5.1), связаны тождеством

$$(\mathcal{H}_{E_\rho}(\vartheta))^\rho = \max(0, h(\vartheta)).$$

Замечание 4. Аналог функции $h(\vartheta)$ в общем случае приходится определять посредством (2.2), поскольку ([17, стр. 325]) существуют целые функции, ограниченные на любом луче.

Основным результатом § 5 является

Теорема 3. *Пусть* $A(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} A_n z^n \in \mathfrak{M}^+$, $a(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in [A, +\infty)$. *Тогда A-ассоциированная с $a(z)$ функция* $\gamma(w) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{A_n} w^{-n-1}$ *допускает аналитическое продолжение в область*

$$\mathcal{D} = \{w \in \mathbb{C} \mid |w| > \mathcal{H}_A(a, -\vartheta),\ \vartheta = \arg w,\ -\pi < \vartheta \leqslant \pi\}.$$

Самое существенное состоит в том, что теорема 3 доказана для множества функций $\{A(z)\}$, образующего плотный класс функций сравнения. Именно это и позволило доказать целый ряд приводимых ниже предложений о свойствах целых функций, задаваемых лакунарными степенными рядами, без каких бы то ни было ограничений на их рост.

Доказательство теоремы 3. Поскольку $A \in \mathfrak{M}^+$, то существует неубывающая на $[0, +\infty)$ функция μ, такая что

$$\frac{1}{A_n} = \int\limits_0^{+\infty} t^n \, d\mu(t), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

В § 1 было доказано, что при всех w, $|w|>\sigma$, справедливо равенство

$$\gamma(w)=w^{-1}\int\limits_0^{+\infty} a(t/w)\,d\mu(t). \tag{5.3}$$

Покажем, что в действительности интеграл (5.3) абсолютно сходится всюду в $\mathcal{D}$. Более того, каждая точка из $\mathcal{D}$ обладает окрестностью, лежащей в $\mathcal{D}$, в которой этот интеграл сходится равномерно. Отсюда будет вытекать, что $\mathcal{D}$ является областью (связность $\mathcal{D}$ очевидна) и что интеграл (5.3) представляет собой функцию, аналитическую в области $\mathcal{D}$.

Зафиксируем точку $w_0=r_0e^{i\vartheta_0}\in\mathcal{D}$. Поскольку $\mathcal{H}(-\vartheta_0)<r_0$, то существует $\varepsilon>0$, такое что $(\mathcal{H}(-\vartheta_0)+\varepsilon)/r_0=\lambda<1$. Ввиду (5.2) при некотором $\alpha>0$

$$\sigma_{-\vartheta_0-\alpha,-\vartheta_0+\alpha}(a)\leqslant\mathcal{H}(-\vartheta_0)+\varepsilon/2. \tag{5.4}$$

А это согласно определению A-типа в угле означает, что существует постоянная $c_1>0$, такая что при любом $R>0$

$$|a(Re^{-i\vartheta_0})|\leqslant c_1A((\mathcal{H}(-\vartheta_0)+\varepsilon)R)\quad\forall\vartheta\in[\vartheta_0-\alpha,\vartheta_0+\alpha].$$

Из (5.4) и определения функции $\mathcal{H}$ вытекает, что при $\forall\vartheta\in(\vartheta_0-\alpha,\vartheta_0+\alpha)$ выполняется неравенство $\mathcal{H}(-\vartheta)\leqslant\mathcal{H}(-\vartheta_0)+\varepsilon/2<\lambda r_0$. Поэтому окрестность точки w_0

$$U=\{w=re^{i\vartheta}\mid r\in(\lambda r_0,r_0+1),\ \vartheta\in(\vartheta_0-\alpha,\vartheta_0+\alpha)\}$$

целиком лежит в $\mathcal{D}$. Кроме того, при всех

$$w\in U_1=\{re^{i\vartheta}\mid r\in(\sqrt{\lambda}r_0,r_0+1),\ \vartheta\in(\vartheta_0-\alpha,\vartheta_0+\alpha)\}$$

и $t>0$ имеем

$$\begin{aligned}\left|a\left(\frac{t}{w}\right)\right|=\left|a\left(\frac{t}{r}e^{-i\vartheta}\right)\right|\leqslant c_1A\left(\frac{t}{r}(\mathcal{H}(-\vartheta_0)+\varepsilon)\right)\leqslant&\\ \leqslant c_1A\left(\frac{t\lambda r_0}{\sqrt{\lambda}r_0}\right)=c_1A(t\sqrt{\lambda})=c_1A(\lambda_1t),&\end{aligned}$$

где $\lambda_1=\sqrt{\lambda}<1$.

Из доказанного вытекает, что при всех w, лежащих в окрестности U_1 точки w_0, и любом $t>0$ подынтегральная функция в (5.3) мажорируется по абсолютной величине функцией $c_1A(\lambda_1t)$, суммируемой по мере μ на $\mathbb{R}_+$:

$$\int\limits_0^{+\infty}A(\lambda_1t)\,d\mu(t)=\int\limits_0^{+\infty}\sum_{n=0}^{\infty}A_n\lambda_1^nt^n\,d\mu(t)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n\lambda_1^n\int\limits_0^{+\infty}t^nd\mu(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_1^n<+\infty.$$

(Здесь перестановка местами операций суммирования и интегрирования возможна ввиду положительности меры μ и всех слагаемых ряда $A(\lambda_1 t)$ при любом $t > 0$.) Ввиду сказанного интеграл (5.3) сходится в U_1 равномерно. Как было отмечено выше, это целиком доказывает теорему 3.

Замечание 5. Формулировка теоремы 3 состоит из двух частей: 1) множество $\mathcal{D}$ открыто; 2) функция $\gamma(w)$ аналитична в $\mathcal{D}$. В доказательстве первой части принадлежность функции сравнения $A(z)$ классу $\mathfrak{M}^+$ нигде не использовалась. Поэтому справедливо

Следствие 1. *Пусть $B(z) \in \mathfrak{A}$, $a(z) \in [B, +\infty)$, B-тип $a(z)$ равен σ. Тогда функция $\mathcal{H}_B(\vartheta) = \mathcal{H}_B(a, \vartheta)$ является полунепрерывной сверху на $[-\pi, \pi]$ и достигает в некоторой точке максимума, который равен σ.*

Следствие 1 почти очевидно. Полунепрерывность сверху функции $\mathcal{H}_B(\vartheta)$ в каждой точке ϑ_0 (т. е. справедливость равенства $\limsup\limits_{\vartheta\to\vartheta_0} \mathcal{H}_B(\vartheta) \leqslant \mathcal{H}_B(\vartheta_0)$) эквивалентна тому, что множество $\{re^{i\vartheta} \mid r > \mathcal{H}(-\vartheta)\}$ открыто. Ввиду этого $\mathcal{H}(\vartheta)$ достигает максимума. Обозначим этот максимум через σ_1. Случай $\sigma_1 > \sigma$ невозможен ввиду тривиального неравенства $\mathcal{H}_B(\vartheta) \leqslant \sigma\ \forall \vartheta \in [-\pi, \pi]$. Предположим теперь, что $\sigma_1 < \sigma$. По теореме 2 существует $A \in \mathfrak{M}^+$, $A \sim B$. Очевидно, что $\mathcal{H}_A(a, \vartheta) = \mathcal{H}_B(a, \vartheta)\ \forall \vartheta \in [-\pi, \pi]$. И если при всех $\vartheta \in [-\pi, \pi]$ $\mathcal{H}_A(a, \vartheta) \leqslant \sigma_1 < \sigma$, то по теореме 3 A-ассоциированная с $a(z)$ функция $\gamma(w) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{A_n} w^{-n-1}$ будет аналитической в области $|w| > \sigma_1$. Но поскольку $\sigma = \limsup\limits_{n\to\infty} |a_n/A_n|^{1/n}$, то на этой окружности $\gamma(w)$ имеет особую точку. Полученное противоречие приводит к равенству $\sigma_1 = \sigma$.

Замечание 6. Индикаторы некоторых функций бесконечного порядка имеют точки разрыва. В [17] на стр. 324–325 приводится пример целой функции, не являющейся константой, которая ограничена вне любого из углов $|\arg z| < \delta$, $0 < \delta < \pi$. Пусть $A(z)$ — функция сравнения, относительно которой $a(z)$ имеет тип, равный 1 (см. предложение 4 в § 2). Тогда, очевидно, имеем $\mathcal{H}_A(a, \vartheta) = 0$, если $\vartheta \in [-\pi, \pi] \setminus \{0\}$, и $\mathcal{H}_A(a, \vartheta) = 1$.

Замечание 7. Существуют функции сравнения, для которых вторая часть теоремы 3 неверна. Пусть $F(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n/((1 + x_n)n!)$, где

$$x_n = \begin{cases} n^{-2}, & n = 4^k,\ k \in \mathbb{N}, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Коэффициенты ряда Маклорена F положительны, а отношение

$$R_n = \frac{(n+1)!(1 + x_{n+1})}{n!(1 + x_n)} = (n+1)\frac{1 + x_{n+1}}{1 + x_n}$$

стремится к $+\infty$ и строго возрастает, поскольку

$$R_n/R_{n+1} = \frac{n+1}{n}\frac{(1+x_{n+1})(1+x_{n-1})}{(1+x_n)^2} \geqslant \frac{n+1}{n(1+1/n^2)^2} = \frac{n+1}{n+2/n+1/n^3} > 1$$

при $n \geqslant 3$.

При $n = 1$ и $n = 2$ имеем $R_n/R_{n-1} = (n+1)/n > 1$. Отсюда вытекает включение $F \in \mathfrak{A}$. F-ассоциированной функцией для e^z является

$$\gamma(w) = \sum_{n=0}^{\infty}(1+x_n)w^{-n-1} = \frac{1}{w-1} + \frac{1}{w}\psi\left(\frac{1}{w}\right),$$

где $\psi(t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} 16^{-k}t^{4^k}$. Радиус сходимости степенного ряда для ψ равен 1, а поскольку плотность его коэффициентов равна нулю, то (см. [16]) все точки единичной окружности являются особыми для функции ψ. Следовательно, функцию $\gamma(w)$ нельзя продолжить внутрь единичного круга. В то же время ввиду того, что $F(z) \sim e^z$, имеем очевидное тождество

$$\mathcal{H}_F(e^z,\vartheta) = \mathcal{H}_{e^z}(e^z,\vartheta) = \max(0,\cos\vartheta).$$

Приведенный пример подтверждает целесообразность выделения класса $\mathfrak{M}^+$, который является плотным классом функций сравнения.

В дальнейшем будет предполагаться, что

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{\lambda_n} \in H, \qquad \forall n \in \mathbb{N}_0 \ \ b_n \neq 0,$$

λ_n — строго возрастающая последовательность целых неотрицательных чисел. Через $d(f)$ обозначим верхнюю плотность коэффициентов ряда Маклорена функции f: $d(f) = \limsup\limits_{n\to\infty}(n/\lambda_n)$, а через $Md(f)$ — максимальную плотность, которая по определению равна нижней грани плотностей измеримых (т. е. имеющих плотность) подпоследовательностей $\mathbb{N}_0$, содержащих λ_n. Хорошо известно, что $Md(f) \geqslant d(f)$.

Следствие 2. *Пусть $B \in \mathfrak{A}$, f имеет B-тип, равный σ, $0 < \sigma < +\infty$. Пусть затем существуют $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $0 < \beta - \alpha < 2\pi$, такие что при любых $\vartheta \in (\alpha,\beta)$ справедливо неравенство*

$$\mathcal{H}_B(f,\vartheta) \leqslant \sigma_1 < \sigma.$$

Тогда $Md(f) \geqslant (\beta-\alpha)/(2\pi)$.

Доказательство. По теореме 2 $\exists A(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} A_n z^n \in \mathfrak{M}^+$, $A(z) \sim B(z)$. Очевидно, что A-тип $f(z)$ равен σ и $\mathcal{H}_A(f,\vartheta) \equiv \mathcal{H}_B(f,\vartheta)$. По теореме 3 A-ассоциированная с f функция $\gamma(w) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{A_{\lambda_n}} w^{-\lambda_n-1}$ аналитична в области $\{w = re^{-i\vartheta} \mid r > \sigma_1,\ \alpha < \vartheta < \beta\}$. По теореме об A-типе степенной ряд $c(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{A_{\lambda_n}} t^{\lambda_n}$ имеет радиус сходимости $1/\sigma$, а ввиду сказанного функция, представляемая им в круге $|t| < 1/\sigma$, является аналитической в секторе

$\{t = re^{i\vartheta} \mid 0 \leqslant r \leqslant 1/\sigma_1,\ \alpha < \vartheta < \beta\}$. В частности, эта функция аналитична в точках окружности $\sigma^{-1}e^{i\vartheta}$, $\alpha < \vartheta < \beta$. Поэтому по теореме Пойа [16] максимальная плотность коэффициентов степенного ряда $c(t)$, равная $Md(f)$, не меньше, чем $(\beta - \alpha)/(2\pi)$.

Обозначим

$$M(f, R) = \max_{|z| \leqslant R} |f(z)|,$$
$$M(f, R, \alpha, \beta) = \max_{z \in \Delta(R)} |f(z)|,$$

где $\Delta(R) = \Delta(R, \alpha, \beta)$ — сектор $\{z = re^{i\vartheta} \mid 0 \leqslant r \leqslant R,\ \alpha \leqslant \vartheta \leqslant \beta\}$.

Следствие 3. *Если существуют числа $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $0 < \beta - \alpha < 2\pi$, $C > 0$, $\xi \in (0, 1)$, такие что при $R > C$ справедливо неравенство*

$$M(f, R, \alpha, \beta) \leqslant M(f, \xi R), \tag{5.5}$$

то $Md(f) \geqslant (\beta - \alpha)/(2\pi)$.

Доказательство. Пусть $B(z)$ — функция сравнения, относительно которой f имеет тип, равный 1 (см. предложение 4 в § 2). Исходя из определения B-типа и индикатриссы роста $\mathcal{H}_B(f, \vartheta)$, нетрудно сообразить, что соотношение (5.5) влечет за собой неравенство $\mathcal{H}_B(f, \vartheta) \leqslant \xi < 1\ \forall \vartheta \in (\alpha, \beta)$. Остается лишь воспользоваться уже доказанным следствием 2.

Из следствия 3 непосредственно вытекает

Следствие 4. *Если $n/\lambda_n \to 0$, $n \to \infty$, то при любых $\xi \in (0, 1)$, $\alpha, \beta \in (-\pi, \pi]$, $\alpha < \beta$, существует последовательность комплексных чисел z_n, обладающая следующими свойствами:*

1) $\lim\limits_{n \to \infty} |z_n| = +\infty$, $\alpha < \arg z_n < \beta$,
2) $|f(z_n)| > M(f, \xi |z_n|)$.

Следствие 4 дополняет проводимые различными авторами исследования роста в углах лакунарных степенных рядов. (См. об этом в [19].)

Важное место в комплексном анализе занимает подкласс целых функций, в которых входят функции, ограниченные в любой полосе $\{\operatorname{Im} z| \leqslant y\}$, наибольший рост которых в кругах $|z| \leqslant R$ достигается в «малом» секторе, содержащем мнимую ось.

Определение 6. Будем говорить, что целая функция $f \in X$ в том и только в том случае, если при любом $\lambda > 1$ величина

$$\sup_{x \in \mathbb{R},\ |y| < R} \frac{|f(x + iy)}{M(f, \lambda R)}$$

ограничена при $R \in (1, +\infty)$.

В классе X лежат все целые хребтовые функции (см. [20]), целые функции с вещественным периодом и многие другие.

Следствие 5. *Если $f \in X$, то $Md(f) \geqslant 1/2$.*

Доказательство. Из определение класса X немедленно вытекает, что если $f \in X$, а B — функция сравнения, относительно которой f имеет B-тип, равный 1, то для индикатриссы роста f справедлива оценка

$$\mathcal{H}_B(f,\vartheta) \leqslant |\sin\vartheta|, \quad \vartheta \in (-\pi,\pi].$$

Положив $\alpha = -\pi/2+\varepsilon$, $\beta = \pi/2-\varepsilon$, $\varepsilon > 0$, и применив следствие 2, получаем, что $Md(f) \geqslant 1/2 - \varepsilon/\pi$. Поскольку $\varepsilon > 0$ можно взять произвольным, то приходим к неравенству $Md(f) \geqslant 1/2$, а это и требовалось доказать.

Следствие 6. *Если функция f периодична, то $Md(f) \geqslant 1/2$. В частности, $d(f) > 0$.*

Доказательство. Пусть $\omega \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ — период функции f. Тогда функция $f_1(z) = f(\omega z)$ имеет период, равный 1, и те же ненулевые коэффициенты ряда Маклорена, что и $f(z)$. В силу сказанного выше $f_1 \in X$. Остается теперь применить следствие 5.

Следствие 7. *Если коэффициенты степенного ряда целой непостоянной периодической функции имеют плотность, то эта плотность не меньше $1/2$.*

Следствия 6 и 7 дополняют результат А. О. Гельфонда [10], который другим методом показал, что верхняя плотность тейлоровых коэффициентов целой непостоянной периодической функции конечного порядка ρ не меньше, чем $1/(2\rho)$. Подчеркнем, что случай $\rho = +\infty$ А. О. Гельфонд не рассматривал и методы работы [10] для функций бесконечного порядка, по-видимому, неприменимы. В следствиях 2–7 никаких ограничений на рост максимума модуля $f(z)$ не накладывается. Ранее математики, изучая свойства целых функций бесконечного порядка, задаваемых степенными рядами с пропусками, требовали от последовательность λ_n бóльшую, чем в следствиях 2–7 лакунарность. Например, они накладывали условие $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-1} < +\infty$ или требовали определенной скорости стремления к нулю отношения n/λ_n. Правда, и постановки задач были несколько иными. Об этих исследованиях см. [19].

Эту работу автор посвящает памяти профессора Юрия Александровича Казьмина. Именно Ю. А. Казьмин поставил в конце 80-х годов ряд задач, связанных с обращением обобщённого преобразования Бореля в интегральной форме и его приложениями в теории целых функций. Решением этих задач и являются доказанные здесь теоремы.

Примечания при корректуре.

После того как эта работа была сдана в печать, автору стало известно, что приведенный в § 5 результат М. А. Евграфова (теорема А), опубликованный в 1976 г., был опубликован в 1973 г. Л. С. Майергойзом в работе «Аналог теоремы Полиа для целых функций уточнённого порядка», вышедшей в сборнике «Некоторые свойства голоморфных функций многих комплексных переменных», Красноярск, Сибирское отделение АН СССР, институт физики им. Л. В. Киренского, стр. 109–121. Эта статья Майергойза содержала в себе также добавления к упомянутому результату Евграфова, сделанному авторами обзора [11].

Литература

[1] Джрбашян М. М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. — М.: Наука, 1966.

[2] Казьмин Ю. А. Об одной задаче А. О. Гельфонда // Матем. сборник. — 1973. — Т. 90, № 4. — С. 509–530.

[3] Казьмин Ю. А. Об интерполировании средними // ДАН СССР. — 1987. — Т. 295, № 5. — С. 1050–1053.

[4] Казьмин Ю. А. Функции сравнения // Математическая энциклопедия. Т. 5. — М.: Советская энциклопедия, 1983. — С. 160.

[5] Казьмин Ю. А. Методы интерполирования аналитических функций и их приложения: Дис... докт. физ.-мат. наук. — М., 1972.

[6] Macintyre A. J. Laplace's transformations and integral functions // Proc. London Math. Soc. — 1938. — V. 45 (2). — P. 1–20.

[7] Widder D. The Laplace transform. — Princeton Univ. Press, 1941.

[8] Евграфов М. А. Обобщённое преобразование Бореля. Препринт ИПМ № 35. — 1976.

[9] Duran A. J. The Stieltjes moment problem for rapidly decreasing functions // Proc. Amer. Math. Soc. — 1989. — V. 107, No. 3. — P. 731–741.

[10] Гельфонд А. О. О коэффициентах периодических функций // Изв. АН СССР, сер. матем. — 1941. — № 5. — С. 95–98.

[11] Гольдберг А. А, Левин Б. Я., Островский И. В. Целые и мероморфные функции. Итоги науки и техники. Сер. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 85. — М.: 1991. — С. 5–185.

[12] Владимиров В. С. Обобщённые функции в математической физике. — М.: Наука, 1979.

[13] Hadamar J. Essai sur l'etude des fonctions données par leur developpement de Taylor // J. Math. Pures. Appl. Ser. 4. — 1892. — V. 8. — P. 101–186.

[14] Валирон Ж. Аналитические функции. — М.: ГИТТЛ, 1957.

[15] Stieltjes T. J. Recherches sur les fractions continues // Annales de la Faculte des Sciences de Toulouse. — 1884. — V. 8. — P. 1–122.

[16] Polya G. Untersuchungen über Lucken und Singularitäten von Potenzreihen // Math. Z. — 1929. — P. 549–640.

[17] Маркушевич А. И. Краткий курс теории аналитических функций. — М.: Наука, 1978.

[18] Осколков В. А. Задача Абеля–Гончарова для целых функций бесконечного порядка // Сиб. матем. журнал. — 1975. — Т. 16, № 1. — С. 75–85.

[19] Шеремета М. Н. Рост в угле целых функций, заданных лакунарными степенными рядами // ДАН СССР. — 1977. — Т. 236, № 3. — С. 558–560.

[20] Линник Ю. В., Островский И. В. Разложения случайных величин и векторов. — М.: Наука, 1972.

Статья поступила в редакцию в декабре 1996 г.