А. Ю. Попов, О функциях сравнения, *Матем. заметки*, 1991, том 49, выпуск 5, 97–103

Математические заметки

том 49 выпуск 5 май 1991

О ФУНКЦИЯХ СРАВНЕНИЯ

А. Ю. Попов

В настоящей статье рассматриваются некоторые свойства множеств функций сравнения. Функции сравнения — целые функции специального вида — играют заметную роль в анализе, являясь одновременно и эталонами роста целых функций,и основным инструментом для их интегрального представления.

Напомним несколько определений. Символом H обозначим класс всех целых функций.

Определение 1. Функция

$$A(z)=\sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n \in H$$

называется функцией сравнения, если ее тейлоровы коэффициенты имеют следующие свойства:

$$1)\ A_n > 0, \quad n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,$$
$$2)\ A_{n+1}/A_n \searrow 0 \quad (n\to\infty). \tag{1}$$

Класс всех функций сравнения обозначим через $\mathfrak{A}$.

Определение 2. Функция

$$a(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in H$$

называется сравнимой с функцией A, $A\in\mathfrak{A}$, если существует такое число $\tau=\tau(a)$, $0<\tau<\infty$, что для всех $z\in\mathbf{C}$ выполнено неравенство

$$|a(z)|\leqslant MA(\tau|z|) \tag{2}$$

с некоторым $M=M(a,\tau)>0$.

Определение 3. Нижняя грань чисел τ, для которых выполнено (2), называется A-типом функции a. Известна теорема, назовем ее теоремой об A-типе, которая утверждает, что функция $a\in H$ сравнима с $A\in\mathfrak{A}$ и имеет A-тип, равный σ, тогда и только тогда, когда

$$\limsup_{n\to\infty}|a_n/A_n|^{1/n}=\sigma. \tag{3}$$

Отсюда следует, что всякая функция $a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, имеющая A-тип, равный σ, допускает представление

$$a(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=\sigma+\varepsilon} A(zt)\,\gamma(t)\,\mathrm{d}t \tag{4}$$

при $\forall \varepsilon > 0$, $\gamma(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{A_n} t^{-n-1}$, γ аналитична в области $|t| > \sigma$ и обращается в нуль на бесконечности. Представление (4) широко используется в теории интерполяции аналитических функций. См. по этому поводу [1, 2, 3]. Информация о функциях сравнения приведена в [4].

Из определения 1 видно, что $\mathfrak{A}$ является достаточно обширным подмножеством H. Как показывают примеры (один из них мы приведем ниже), условия 1) и 2) в (1) не запрещают тэйлоровым коэффициентам A_n убывать в определенном смысле нерегулярно. Но так как функции сравнения нужны нам как эталоны роста, то естественно попытаться «проредить» $\mathfrak{A}$, оставив в нем лишь «хорошо» ведущие себя функции, но такие, чтобы они смогли как эталоны роста эффективно «обслужить» весь класс H. В связи с этим дадим следующее определение.

Определение 4. Назовем множество $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{A}$ эффективным, если для всякой отличной от полинома функции a, $a \in H$ существует $A \in \mathfrak{U}$ такая, что a сравнима с A, и A-тип функции a положителен.

Нетрудно показать, что само $\mathfrak{A}$ эффективно. Мы выделяем некоторое эффективное подмножество функций сравнения такое, что функции, в него входящие, обладают достаточной регулярностью убывания коэффициентов своих степенных рядов. А именно, доказана

ТЕОРЕМА 1. *Пусть числовая последовательность* $\{\varphi_n\}$ *удовлетворяет условиям*

$$\varphi_n \searrow 0, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n < +\infty. \tag{5}$$

Тогда подмножество всевозможных функций сравнения $A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n$ *таких, что*

$$A_{n+2} A_n / A_{n+1}^2 \leqslant \exp(-\varphi_{n+2}), \tag{6}$$

является эффективным.

Замечание. Из условия (1) следует лишь, что

$$A_{n+2} A_n / A_{n+1}^2 \leqslant 1.$$

Для доказательства этой теоремы предлагается следующий метод «сглаживания» коэффициентов степенного ряда функции сравнения. Если имеется $a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in H$ отличная от полинома, то подбираем гладкую функцию Φ, имеющую не слишком маленькую положительную вторую производную, растущую достаточно быстро, но все же такую, что функция

$$b(z)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n, \quad b_n = a_n \exp(\Phi(n)),$$

является целой. Строим для нее такую функцию сравнения (это возможно, поскольку $\mathfrak{A}$ эффективно) $B(z)=\sum_{n=0}^{\infty} B_n z^n$, что B-тип $b(z)$ равен σ, $0<\sigma<\infty$, а потом полагаем

$$A_n = B_n \exp(-\Phi(n)).$$

Последовательность $\{B_n\}$ удовлетворяет условиям (1), а дополнительный множитель $\exp(-\Phi(n))$ существенно улучшает регулярность убывания A_n. Нетрудно показать, что $A(z)=\sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n \in \mathfrak{A}$, а их построения $A(z)$ и теоремы об A-типе заключаем, что A-тип функции $a(z)$ равен $\sigma>0$. Отметим, что построенная этим методом функция сравнения отличается достаточно быстрым убыванием абсолютных величин членов своего степенного ряда вокруг центрального индекса.

Приведем одно интересное приложение теоремы 1. В работе [3] Ю. А. Казьмин получил по существу окончательное решение «усредненной проблемы Уолша» (см. [5, 6]) — задачи об интерполировании целой функции f числами

$$S(f, r_n)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(r_n \exp(2\pi i k/n)), \quad n \in \mathbf{N}.$$

Для решения этой задачи Ю. А. Казьмин использовал интегральное представление (4) и результаты сформулировал в терминах функций сравнения. Однако в доказанной им теореме на функцию $A \in \mathfrak{A}$, с которой сравнима f, налагается дополнительное условие

$$A_{3n}A_n/A_{2n}^2 \to 0 \quad (n\to\infty). \tag{7}$$

Большинство ранее широко использовавшихся функций сравнения обладает свойством (7). В их числе функции Миттаг — Леффлера $E_\rho(z)$, $\rho>0$, функции $\sum_{n=0}^{\infty} q^{-n(n+1)/2} z^n$, $|q|>1$ из [2] и др. Однако примеры показывают, что свойство (7) для некоторых функций сравнения может не выполняться. Пусть $A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n$, где

$$A_n = \exp(-\lambda_k(n-x_k)), \; n \in [4^k, 4^{k+1}), \tag{8}$$

а $\{\lambda_k\}$ — произвольная числовая последовательность, удовлетворяющая следующему условию

$$\lambda_k>0, \quad \lambda_k \uparrow \infty, \tag{9}$$

и x_k подобраны так, что ломаная $L(x)=\lambda_k(x-x_k)$, $x \in [4^k, 4^{k+1})$ является непрерывной на λ_k. Из (8), (9) и определения 1 легко следует, что $A\in\mathfrak{A}$. Но если $m=4^k$, то для всех $k\in\mathbf{N}$

имеет место равенство

$$A_{3m}A_m/A_{2m}^2 = 1.$$

С помощью теоремы 1 доказывается

ТЕОРЕМА 2. *Пусть* $\varepsilon > 0$. *Тогда существует такое эффективное множество* $\mathfrak{A}_\varepsilon \subset \mathfrak{A}$, *что для каждой* $A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n Z^n$ *из этого множества при* $\forall n \quad n > n_0(\varepsilon)$ *справедливы неравенства*

$$\frac{A_{3n}A_n}{A_{2n}^2} < \exp\left(-\frac{n}{\ln^{1+\varepsilon} n}\right).$$

Таким образом, для тейлоровых коэффициентов функций сравнения, принадлежащих некоторому эффективному множеству, условие (7) выполнено, и, более того, стремление к нулю отношения $A_{3n}A_n/A_{2n}^2$ происходит достаточно быстро. Поэтому условие (7), наложенное на функции сравнения в [3], оказывается необременительным: функции из $\mathfrak{A}$, не удовлетворяющие (7), можно без потерь удалить.

Перейдем к доказательству сформулированных предложений.

Доказательство теоремы 1. Из теоремы об A-типе и определения 4 заключаем, что для доказательства теоремы 1 достаточно для каждой функции $a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in H$, отличной от полинома, и данной последовательности φ_n, удовлетворяющей (5), построить функцию сравнения $A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n$ с условием (6) и

$$\limsup_{n\to\infty} |a_n/A_n|^{1/n} = \sigma, \qquad 0 < \sigma < \infty.$$

Так как $a \in H$, то $a'_n/n \to +\infty$, где

$$a'_n = \begin{cases} -\ln|a_n|, & a_n \neq 0, \\ +\infty, & a_n = 0. \end{cases}$$

Построим непрерывную на $[0, +\infty)$ функцию φ, которая линейна на отрезках $[n-1, n]$, $n \in \mathbb{N}$, и $\varphi(n) = \varphi_n$. Очевидно, что $\int_0^{+\infty} \varphi(x)\,\mathrm{d}x = k < +\infty$. Положим

$$\Phi_1(x) = \int_0^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t, \quad \Phi_2(x) = \int_0^x \Phi_1(t)\,\mathrm{d}t.$$

Ясно, что $\Phi_2(x) \leqslant kx$. Поэтому

$$(a'_n - \Phi_2(n))/n \to \infty \qquad (n \to \infty).$$

Следовательно,

$$b(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n, \qquad b_n = a_n \exp(\Phi_2(n)),$$

является целой функцией. Так как множество $\mathfrak{A}$ эффективно, то существует

$$B(z)=\sum_{n=0}^{\infty} B_n z^n \in \mathfrak{A},$$

$$\limsup_{n\to\infty} |b_n/B_n|^{1/n}=\sigma, \qquad 0<\sigma<\infty.$$

Теперь положим

$$A_n = B_n \exp(-\Phi_2(n)). \tag{10}$$

Легко убедиться в том, что свойство (1) для коэффициентов A_n выполнено, так что

$$A(z)=\sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n \in \mathfrak{A}.$$

Очевидно также, что

$$\limsup_{n\to\infty} |a_n/A_n|^{1/n}=\sigma.$$

Докажем, что построенная функция сравнения обладает свойством (6). Из (10) находим, что

$$\frac{A_{n+2}A_n}{A_{n+1}^2}=\frac{B_{n+2}B_n}{B_{n+1}^2}\exp(-(\Phi_2(n+2)+\Phi_2(n)-2\Phi_2(n+1))),$$

где B_n — коэффициенты функции сравнения. Следовательно, соотношения (1) для них выполнены. Поэтому $B_{n+2}B_n/B_{n+1}^2 \leqslant 1$. Ввиду того, что $\Phi_2 \in C^2(0, +\infty)$, справедливо равенство

$$\Phi_2(n+2)+\Phi_2(n)-2\Phi_2(n+1)=$$
$$=\Phi_2''(\xi)=\varphi(\xi), \qquad n<\xi<n+2.$$

Отсюда и из монотонности φ находим, что

$$A_{n+2}A_n/A_{n+1}^2 \leqslant \exp(-\varphi_{n+2}).$$

Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Перепишем неравенство (6) в другом виде

$$\frac{A_{n+2}}{A_{n+1}} \leqslant \frac{A_{n+1}}{A_n}\exp(-\varphi_{n+2}).$$

Значит, при всех целых неотрицательных n и k имеют место неравенства

$$\frac{A_{n+k+2}}{A_{n+k+1}} \leqslant \frac{A_{n+k+1}}{A_{n+k}}\exp(-\varphi_{n+k+2}). \tag{11}$$

Применяя (11) последовательно n раз от $k=m$ до $k=n+m-1$, $m\geqslant 0$, получим

$$\frac{A_{2n+m+1}}{A_{2n+m}} \leqslant \frac{A_{n+m+1}}{A_{n+m}}\exp\left(-\sum_{k=m}^{n+m+1}\varphi_{n+k+2}\right).$$

Вместе с тем монотонность последовательности $\{\varphi_n\}$ приводит к соотношениям

$$\frac{A_{2n+m+1}}{A_{2n+m}} \leqslant \frac{A_{n+m+1}}{A_{n+m}} \exp(-n\varphi_{n+m+1}). \tag{12}$$

Перемножая (12) по m от 0 до $n-1$, находим

$$\frac{A_{3n}}{A_{2n}} \leqslant \frac{A_{2n}}{A_n} \exp\left(-n \sum_{m=0}^{n-1} \varphi_{2n+m+1}\right) \leqslant \frac{A_{2n}}{A_n} \exp(-n^2\varphi_{3n}).$$

Взяв, в частности, в качестве φ_n числа

$$\varphi_n = 1/n\,(\ln n)^{1+\varepsilon/2}, \qquad n \geqslant 2, \quad \varepsilon > 0,$$

(для них (5) выполнено), получим, что при любом $\varepsilon > 0$, $n > n_0(\varepsilon)$

$$\frac{A_{3n}A_n}{A_{2n}^2} < \exp\left(-\frac{n}{(\ln n)^{1+\varepsilon}}\right) \to 0 \qquad (n \to \infty),$$

что справедливо для коэффициентов всех функций сравнения, принадлежащих некоторому эффективному множеству. Теорема 2 доказана.

В заключение коснемся вопроса о построении функции сравнения для функций $a(z)$ конечного порядка $\rho > 0$. Если

$$\limsup_{R\to\infty} \frac{\ln M(R)}{R^\rho} = \tau, \qquad 0 < \tau < \infty,$$

$$M(R) = \max_{|z|\leqslant R} |a(z)|,$$

то в качестве эталонов сравнения используются классические функции Миттаг — Леффлера

$$E_\rho(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k/\Gamma\left(1 + \frac{k}{\rho}\right), \quad A_\rho(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k/(k!)^{1/\rho},$$

причем A_ρ-тип σ функции a связан с ее классическим типом τ соотношением $\tau\rho = \sigma^\rho$. Однако если $\tau = 0$, то и A_ρ-тип функции a равен нулю; если же $\tau = +\infty$, то функция a с функцией A_ρ несравнима. В этих случаях можно строить функции сравнения, относительно которых тип $a(z)$ положителен, используя описанный выше метод. Если $\tau = +\infty$, то в качестве «сглаживающей» функции Φ можно взять

$$\Phi(n) = \lambda n \ln n, \qquad 0 < \lambda < 1/\rho,$$

а если $\tau = 0$, то годится

$$\Phi(n) = \rho^{-1} n \ln n.$$

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступило 19.12.88

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] К а з ь м и н Ю. А. Общая проблема моментов в комплексной области. // Proceedings of the Conference on Constructive Theory of Functions.— Budapest, 1969.— P. 225—254.

[2] К а з ь м и н Ю. А. Об одной задаче А. Г. Гельфонда. // Мат. сб. 1973. Т. 90, № 4. С. 509—530.

[3] К а з ь м и н Ю. А. Об интерполировании средними. // Доклады АН СССР. 1987. Т. 2295, № 5. С. 1050—1053.

[4] К а з ь м и н Ю. А. Функции сравнения. // Математическая энциклопедия. Т. 5. С. 160.

[5] У о л ш Дж. Л. Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области.— М.: ИЛ, 1961.

[6] S h u l l C. S. F. Mean interpolation of entire functions. // J. Approxim. Theory. 1980. V. 30, No. 1. P. 41—52.