М. Г. Дмитриев, А. А. Павлов, А. П. Петров, Модель «власть-общество-экономика» для случая слабокоррумпированной дискретной иерархии, *Матем. моделирование*, 2012, том 24, номер 2, 120–128

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ 2012 год, том 24, номер 2, стр. 120-128

МОДЕЛЬ «ВЛАСТЬ-ОБЩЕСТВО-ЭКОНОМИКА» ДЛЯ СЛУЧАЯ СЛАБОКОРРУМПИРОВАННОЙ ДИСКРЕТНОЙ ИЕРАРХИИ

© *2012 г.* ***М.Г. Дмитриев*[1,2]*, А.А. Павлов*[1]*, А.П. Петров*[3,4]**

[1] Институт системного анализа РАН
[2] НИУ Высшая школа экономики
[3] Институт прикладной математики им. М.В.Келдыша РАН; ale_petrov@mail.ru
[4] Социологический ф-т МГУ им. М.В. Ломоносова

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 10-01-00332-а).

В рамках дискретной цепочечной модели системы «власть-общество-экономика» в случае слабокоррумпированной иерархии изучается задача нахождения распределения власти, максимизирующего удельное потребление в стационарном режиме. Данная задача сводится к нахождению максимума нелинейной функции многих переменных с малым параметром и линейными ограничениями. С помощью асимптотического разложения целевой функции выписывается задача линейного программирования для определения членов асимптотики первого порядка. Решение полученных экстремальных задач приводит к приближенному нахождению стационарного распределения власти, оптимального в смысле максимума удельного потребления. Приведен иллюстративный пример.

Ключевые слова: модель «власть-общество-экономика», линейное программирование, малый параметр, асимптотическое разложение.

THE "POWER-SOCIETY-ECONOMY" MODEL WITH A SLIGHTLY CORRUPT DISCRETE HIERARCHY

***M.G. Dmitriev*[1,2]*, A.A. Pavlov*[1]*, A.P. Petrov*[3,4]**

[1] Institute for System Analysis of the Russian Academy of Sciences
[2] National Research University "Higher School of Economics"
[3] Keldysh Institute of Applied Mathematics RAS
[4] Moscow State University, Faculty of Sociology

For the "power-society-economy" discrete chain model in the case of a slightly corrupt hierarchy the problem of finding the distribution of power, maximizing per capita consumption in steady state is considered. This problem reduces to finding the maximum of a nonlinear function of many variables with a small parameter and linear constraints. With the help of the asymptotic expansion of the objective function has constructed a linear programming problem to determine the terms of the asymptotic of the first order. The obtained extreme problems lead to an approximate stationary distribution of power maximizing per capita consumption. An illustrative example is given.

Key words: "Power-Society-Economics model", linear programming, small parameter, asymptotic expansion.

В работе развивается модель «власть-общество-экономика» [1-3], построенная в результате объединения давно ставшей классической модели Солоу [4] и модели А.П. Михайлова «власть-общество» [5,6]. При этом, в отличие от работ [1-3], иерархия в настоящей работе принимается не непрерывной, а дискретной.

В модели А.П. Михайлова «власть-общество» в качестве субъекта власти рассматривается властная иерархия – упорядоченная по старшинству совокупность инстанций. При этом количество власти, которое имеет та или иная инстанция, изменяется с течением времени. Эта изменчивость называется динамикой власти. Причины динамики могут быть как внутренними, так и внешними по отношению к самой иерархии. Внутренние причины связаны с организационными процессами внутри иерархии, с перетеканием полномочий от одних инстанций к другим. Внешние причины динамики власти связаны с реакцией гражданского общества как на общий уровень власти, находящейся в распоряжении всей иерархической структуры, так и на распределение власти внутри иерархии.

В настоящей работе рассматривается модель с дискретной цепочечной иерархией. Все инстанции нумеруются от 1 до n в порядке убывания позиции в иерархии. Количество власти, реализуемое i-й инстанцией в момент времени t, обозначим через $p_i(t)$. Уравнения модели «власть-общество» с коррумпированной иерархией имеют вид

$$\begin{cases} \dfrac{dp_1}{dt} = \kappa_1\left(p_2 - p_1\right) + F_1\left(p_1, t\right), \\ \dfrac{dp_i}{dt} = \kappa_i\left(p_{i+1} - 2p_i + p_{i-1}\right) + F_i\left(p_i, t\right), \qquad i = 2,\dots,n-1, \\ \dfrac{dp_n}{dt} = \kappa_n\left(p_{n-1} + p_n\right) + F_n\left(p_n, t\right) \end{cases} \tag{1}$$

и дополняются начальными условиями

$$p_1(0) = p_1^0, \dots, p_n(0) = p_n^0,$$

где κ_i $(i = 1,\dots,n)$ – положительные параметры, учитывающие коррумпированность инстанций, и связанные с длиной иерархии, степенью ее безответственности, коэффициентом усиления реакции гражданского общества (см., напр., [1-3,5,7]), $F_i\left(p_i, t\right)$, $i = 1,\dots,n$ – функция, описывающая реакцию гражданского общества на текущее количество власти, реализуемой i-й инстанцией.

В модель Солоу при построении модели «власть-общество-экономика», вернее, ее базового варианта, вводятся следующие изменения. Помимо промежуточного продукта, инвестиций и потребления, вводится статья расходов, связанная с содержанием властной иерархии. Расходы на иерархию принимаются пропорциональными как выпуску X, так и общему количеству власти иерархии $P(t) = \sum_{i=1}^{n} p_i(t)$.

Замечание 1. В рамках данного подхода рассматриваются лишь совокупные расходы на содержание всей иерархии, хотя представляет интерес также и более сложная задача исследования модели, учитывающей распределение расходов по иерархическим уровням.

Помимо этого, вводится зависимость выпуска X от общего количества власти $P(t)$, а именно предполагается, что выпуск обращается в нуль при нулевом и при некотором достаточно большом общем количестве власти в иерархии.

Более конкретно, будем рассматривать производственную функцию вида

$$X = \begin{cases} \left(A_1 P - A_2 P^2\right) K^{\alpha} L^{1-\alpha}, & P \le A_1 / A_2, \\ 0, & P > A_1 / A_2, \end{cases}$$

где X – выпуск, A_1, A_2 – положительные постоянные, K – количество основных фондов, L – количество труда, $0 < \alpha < 1$.

При построении модели «власть-общество» с учетом коррупции определенным образом видоизменяется основное уравнение модели (см. [6,7]), а также вводится величина, называемая степенью коррумпированности или уровнем коррупции иерархии. Для модели с дискретной иерархией она имеет вид

$$Q(t) = \left[\sum_{i=1}^{n} q_i(t)\, p_i(t)\right] \Big/ \sum_{i=1}^{n} p_i(t),$$

где $q_i(t)$ – коррумпированность i-й инстанции, задаваемая экзогенно.

В базовую модель «власть-общество-экономика» в целях учета коррумпированности вводятся следующие изменения.

Во-первых, предполагается, что на промежуточный продукт, инвестиции, расходы на содержание власти и потребление распределяется не весь выпуск X, а его часть, остающаяся после изъятия коррупционерами доли $k_2 QP$. Таким образом, предполагается, что коррупционное изъятие пропорционально самому выпуску X, количеству реализуемой власти P и уровню коррупции Q.

Во-вторых, общая производительность факторов в производственной функции принимается зависящей от уровня коррупции – чем больше коррупция, тем ниже выпуск. При этом конкретный вид этой зависимости может быть выбран различным: $A(P,Q) = \; = \left(A_1 P - A_2 P^2\right)\left(1 - k_3 Q\right)$ либо $A(P,Q) = \dfrac{A_1 P - A_2 P^2}{1 + k_3 Q}$. Заметим, что в случае малой коррупции ($Q \ll 1$) эти представления эквивалентны с точностью до членов порядка $O(Q^2)$.

Схема модели, учитывающей коррумпированность иерархии, приведена на рис.1, причем сохранены традиционные обозначения модели «власть-общество-экономика»: I – инвестиции, ρ – норма накопления, a – коэффициент прямых затрат, ωP – доля выпуска, направляемая на содержание иерархии.

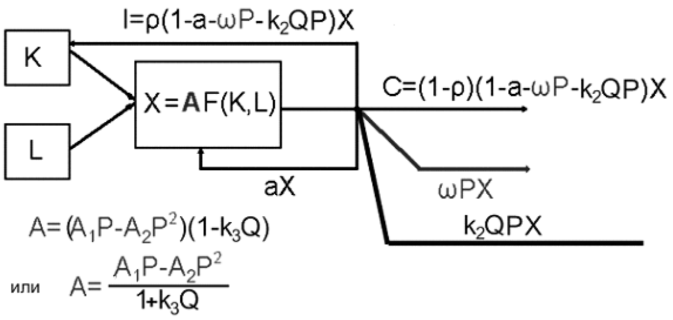

Рис.1. Схема варианта модели «власть-общество-экономика», учитывающего коррумпированность иерархии.

Итак, рассматриваемая далее модель имеет вид

$$\frac{dp_1}{dt} = \left[\kappa_1\left(p_2 - p_1\right) + F_1\left(p_1, t\right)\right]\frac{\gamma L}{C},$$

$$\frac{dp_i}{dt} = \left[\kappa_i\left(p_{i+1} - 2p_i + p_{i-1}\right) + F_i\left(p_i, t\right)\right]\frac{\gamma L}{C}; \qquad i = 2, ..., n-1,$$

$$\frac{dp_n}{dt} = \left[\kappa_n\left(p_{n-1} + p_n\right) + F_N\left(p_n, t\right)\right]\frac{\gamma L}{C},$$

$$L = L_0 e^{\nu t},$$

$$\frac{dK}{dt} = -\mu K + \rho\left[(1-a) - \omega P - k_2 QP\right]X,$$

$$X = \left[A_1 P - A_2 P^2\right]\left(1 - k_3 Q\right)K^{\alpha} L^{1-\alpha},$$

$$C = \left(1 - \rho\right)\left[(1-a) - \omega P - k_2 QP\right]X,$$

где P – общее количество власти, реализуемое властной иерархией. Заметим, что при отсутствии коррупции ($Q = 0$) модель вырождается в базовую модель «власть-общество-экономика».

После введения удельных переменных (в частности, $c = C / L$), получаем, что удельное потребление в стационарном режиме $c_{st}\left(\rho, p_1, ..., p_n\right)$ достигает максимума при $\rho = \alpha$ (т.е. имеет место так называемое «золотое правило Солоу») и при тех же значениях $p_1, ..., p_n$, что и функция $c_{st}^*\left(p_1, ... p_n\right) = c_{st}\left(\alpha, p_1, ... p_n\right)$, имеющая вид

$$c_{st}^*\left(p_1, ... p_N\right) = \frac{(1-\alpha)\alpha^{\alpha/(1-\alpha)}}{(\mu+\nu)^{\alpha/(1-\alpha)}}\left(\frac{\left[(1-a) - \omega P - k_2 QP\right]\left[A_1 P - A_2 P^2\right]}{\left(1 + k_3 Q\right)}\right)^{1/(1-\alpha)}.$$

Таким образом, задача нахождения распределения власти, максимизирующего удельное потребление в стационарном режиме, сводится к задаче максимизации функции многих переменных

$$f\left(p_1,...,p_n\right)=\frac{\left[(1-a)-\omega\sum_{i=1}^{n}p_i-k_2\sum_{i=1}^{n}q_ip_i\right]\cdot\left[A_1\sum_{i=1}^{n}p_i-A_2\left(\sum_{i=1}^{n}p_i\right)^2\right]}{1+k_3\sum_{i=1}^{n}q_ip_i\Big/\sum_{i=1}^{n}p_i}$$

при наличии ограничений типа двухсторонних неравенств

$$p_{i,\min}\le p_i\le p_{i,\max}.$$

Далее будем рассматривать случай малой коррупции, положив $q_i=\varepsilon\sigma_i$, где ε – малый положительный параметр.

Перепишем целевую функцию в виде

$$f\left(p_1,...,p_n,\varepsilon\right)=\frac{\left[(1-a)-\omega P-k_2\sum_{i=1}^{n}\varepsilon\sigma_ip_i\right]\cdot\left[A_1P-A_2P^2\right]}{1+k_3\sum_{i=1}^{n}\varepsilon\sigma_ip_i\Big/P}.$$

Будем искать асимптотику (по малому параметру) стационарного количества власти, реализуемого i-й инстанцией в виде

$$p_i\left(\varepsilon\right)=p_{i0}+\varepsilon p_{i1}+\varepsilon^2p_{i2}+O\left(\varepsilon^3\right). \qquad (2)$$

Соответственно для общего стационарного количества власти всех инстанций иерархии имеет место асимптотическое представление

$$P\left(\varepsilon\right)=P_0+\varepsilon P_1+\varepsilon^2P_2+O\left(\varepsilon^3\right), \qquad (3)$$

где $P_j=\sum_{i=1}^{n}p_{ij}$.

Замечание 2. Ограничивая себя анализом ситуаций, при которых количество власти P не приближается слишком близко к «крайним» с политологической точки значениям, будем считать, что области значений переменных $P,P_1,...,P_n$ являются открытыми интервалами.

Для целевой функции с учетом (2) имеем асимптотическое разложение

$$f\left(p_1,...,p_n,\varepsilon\right)=\frac{\left[(1-a)-\omega P-\varepsilon k_2\sum_{i=1}^{n}\sigma_ip_i\right]\cdot\left[A_1P-A_2P^2\right]}{1+\varepsilon k_3\sum_{i=1}^{n}\sigma_ip_i\Big/P}=$$

$$
\begin{aligned}
&= f_0(P_0) + \varepsilon f_1(p_{10}, p_{20}, ..., p_{n0}, P_0, P_1) + \\
&+ \varepsilon^2 f_2(p_{10}, p_{20}, ..., p_{n0}, p_{11}, p_{21}, ..., p_{n1}, P_0, P_1, P_2) + O(\varepsilon^3),
\end{aligned} \tag{4}
$$

где

$$
f_0(P_0) = \omega A_2 P_0^3 + \left[-\omega A_1 - (1-a) A_2\right] P_0^2 + P_0 (1-a) A_1 ,
$$

$$
\begin{aligned}
&f_1(p_{10}, p_{20}, ..., p_{n0}, P_0, P_1) = \\
&= P_1 \left\{-\omega\left[A_1 P_0 - A_2 P_0^2\right] + \left[1 - a - \omega P_0\right](A_1 - 2A_2 P_0)\right\} + \\
&+ \sum_{i=1}^{n} \sigma_i p_{i0} \left\{-k_2\left[A_1 P_0 - A_2 P_0^2\right] - k_3\left[1 - a - \omega P_0\right]\left[A_1 - A_2 P_0\right]\right\}
\end{aligned} \tag{5}
$$

и

$$
\begin{aligned}
&f_2(p_{10}, p_{20}, ..., p_{n0}, p_{11}, p_{21}, ..., p_{n1}, P_0, P_1, P_2) = \\
&= P_2 \left\{3\omega A_2 P_0^2 - 2\left[A_2(1-a) + A_1\omega\right] P_0 + A_1(1-a)\right\} + \\
&+ \left\{P_0 A_2 \omega - \omega(A_1 - A_2 P_0) + A_2\left[P_0\omega - (1-a)\right]\right\} P_1^2 + \\
&+ \sum_{i=1}^{n} \sigma_i p_{i0} P_1 \left\{P_0 A_2 k_2 + \omega \cdot k_3 (A_1 - A_2 P_0) - k_3 (A_1 - A_2 P_0) - k_3 A_2\left[P_0\omega - (1-a)\right]\right\} - \\
&- \left\{P_0 A_1 k_2 + P_0^2 A_2 k_2 + k_3 \cdot (A_1 - A_2 P_0)\left[P_0 - (1-a)\right]\right\} \cdot \sum_{i=1}^{n} \sigma_i p_{i1} + \\
&+ \left\{k_3^2 (A_1 - A_2 P_0) - \frac{k_3^2}{P_0}(A_1 - A_2 P_0)\left[P_0 - (1-a)\right]\right\} \left(\sum_{i=1}^{n} \sigma_i p_{i0}\right)^2 .
\end{aligned} \tag{6}
$$

В соответствии с прямой схемой построения асимптотического приближения, предложенной в [8], максимизация целевой функции сводится к последовательной максимизации членов асимптотического разложения (4).

Рассмотрим последовательно получающиеся экстремальные задачи. В нулевом приближении (случай отсутствия коррупции) получаем задачу

$$
f_0(P_0) = \omega A_2 P_0^3 + \left[-\omega A_1 - (1-a) A_2\right] P_0^2 + P_0 (1-a) A_1 \to \max .
$$

Искомое $P_0 = P_0^*$ находится из уравнения $df_0 / dP_0 = 0$, т.е.

$$
3\omega A_2 P_0^2 + 2\left[-\omega A_1 - (1-a) A_2\right] P_0 + (1-a) A_1 = 0 . \tag{7}
$$

Имеем

$$
P_0^* = \frac{\omega A_0 + (1-a) A_1 - \sqrt{\left(\omega A_0 - (1-a) A_1\right)^2 + \omega (1-a) A_0 A_1}}{3 A_1 \omega} .
$$

Как и следовало ожидать, получаемое из (7) значение $P_0 = P_0^*$ оказывается тем же, что и в базовой модели «власть-общество-экономика» (т.е. задаче без коррупции, см. [3]). Заметим, что на данном шаге удается определить нулевое приближение не для распределения власти между инстанциями, а лишь для общего количества власти, реализуемого иерархией.

В первом приближении получаем задачу (теперь $P_0 = P_0^*$ является известной величиной)

$$f_1\left(p_{10}, p_{20}, ..., p_{n0}, P_0^*, P_1\right) =$$
$$= P_1\left\{-\omega\left[A_1 P_0^* - A_2 P_0^{*2}\right] + \left[1 - a - \omega P_0^*\right]\left(A_1 - 2A_2 P_0^*\right)\right\} +$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} \sigma_i p_{i0}\left\{-k_2\left[A_1 P_0^* - A_2 P_0^{*2}\right] - k_3\left[1 - a - \omega P_0^*\right]\left[A_1 - A_2 P_0^*\right]\right\} \to \max.$$

Заметим, что скобка при P_1 – левая часть выражения (7) при $P_0 = P_0^*$. Она равна нулю, и поэтому последняя экстремальная задача упрощается

$$f_1\left(p_{10}, p_{20}, ..., p_{n0}, P_0^*, P_1\right) =$$
$$= \left\{-k_2\left[A_1 P_0^* - A_2 P_0^{*2}\right] - k_3\left[1 - a - \omega P_0^*\right]\left[A_1 - A_2 P_0^*\right]\right\} \sum_{i=1}^{n} \sigma_i p_{i0} \to \max.$$

Так как $A_1 - A_2 P_0^* > 0$ (что имеет смысл положительности выпуска), то фигурная скобка отрицательна, и максимизация потребления в первом приближении, т.е. максимизация функции $f_1\left(p_{10}, p_{20}, ..., p_{n0}, P_0^*, P_1\right)$ сводится к задаче линейного программирования на минимум для распределения власти, максимизирующего удельное потребление в стационарном режиме

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} \sigma_i p_{i0} \to \min, \\
&\sum_{i=1}^{n} p_{i0} = P_0, \qquad\qquad (8)\\
&p_{i,\min} \le p_{i0} \le p_{i,\max},
\end{aligned}$$

где $p_{i,\min}, p_{i,\max}$ – это заданные границы, в которых может находиться власть i-й инстанции. Заметим, что минимизируется линейная комбинация, в которой реализуемые инстанциями количества власти берутся с коэффициентами, пропорциональными коррумпированности инстанций.

Решая задачу (8), получаем распределение власти в нулевом приближении $p_{i0} = p_{i0}^*$.

В следующем приближении по малому параметру, рассматривая функцию (6) и учитывая (7), приходим к выводу, что максимизация члена при ε^2 в разложении (4) приводит к следующей задаче:

$$f_2\left(p_{10}^*, p_{20}^*, ..., p_{N0}^*, p_{11}, p_{21}, ..., p_{n1}, P_0^*, P_1, P_2\right) =$$
$$= \left\{P_0^* A_2 \omega - \omega(A_1 - A_2 P_0^*) + A_2\left[P_0^* \omega - (1-a)\right]\right\}(\sum_{i=1}^{n} \sigma_i p_{i1})^2 +$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} \sigma_i p_{i0}^* \cdot (\sum_{i=1}^{n} \sigma_i p_{i1}) \cdot \left\{P_0^* A_2 k_2 + \omega k_3 (A_1 - A_2 P_0^*) - k_3 (A_1 - A_2 P_0^*) -\right.$$
$$\left.- k_3 A_2\left[P_0^* \omega - (1-a)\right]\right\} -$$
$$- \left\{P_0^* A_1 k_2 + P_0^{*2} A_2 k_2 + k_3 \cdot (A_1 - A_2 P_0^*)\left[P_0^* - (1-a)\right]\right\} \cdot \sum_{i=1}^{n} \sigma_i p_{i1} \to \max_{p_{11}, p_{21}, ..., p_{n1}}$$

при ограничениях

$$p_{i,\min} \le p_{i0}^* + \varepsilon p_{i1} \le p_{i,\max}, \quad i = 1, ..., n,$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_{i1} = P_1,$$

т.е. относительно неизвестных получается задача квадратичного программирования с линейными ограничениями на переменные.

Специфика модели «власть-общество-экономика» заключается, прежде всего, в том, что, как правило, $p_{i,\min}$ и $p_{i,\max}$ убывают с ростом номера *i*.

Поэтому в широком классе случаев решение будет являться дискретной контрастной структурой, т.е. содержать участки, где могут присутствовать переходные слои.

Пример. Пусть $\sigma_i = ai + b$, $p_{i,\min} = 7 - i$, $p_{i,\max} = 10 - i$. Тогда

$$\sum_{i=1}^{6} \left(ai + b\right) p_{i0} \to \min,$$
$$\sum_{i=1}^{6} p_{i0} = 29, \qquad 7 - i \le p_{i0} \le 10 - i.$$

Тогда, если низшие инстанции более коррумпированы, чем верхние ($a > 0$), то

$$\sum_{i=1}^{6} i p_{i0} \to \min, \qquad \sum_{i=1}^{6} p_{i0} = 29, \qquad 7 - i \le p_{i0} \le 10 - i, \tag{9}$$

а если – менее ($a < 0$), то

$$\sum_{i=1}^{6} i p_{i0} \to \max,$$
$$\sum_{i=1}^{6} p_{i0} = 29, \qquad 7 - i \le p_{i0} \le 10 - i.$$

Рассмотрим задачу (9). Нетрудно показать, что ее решение имеет вид

$$p_{10} = 9, \quad p_{20} = 8, \quad p_{30} = 6, \quad p_{40} = 3, \quad p_{50} = 2, \quad p_{60} = 1,$$

т.е. является дискретной контрастной структурой с переходом вниз (рис.2). При таком распределении верхние (наименее коррумпированные) инстанции должны иметь максимально возможное количество власти, а нижние (наиболее коррумпированные) – минимально возможное.

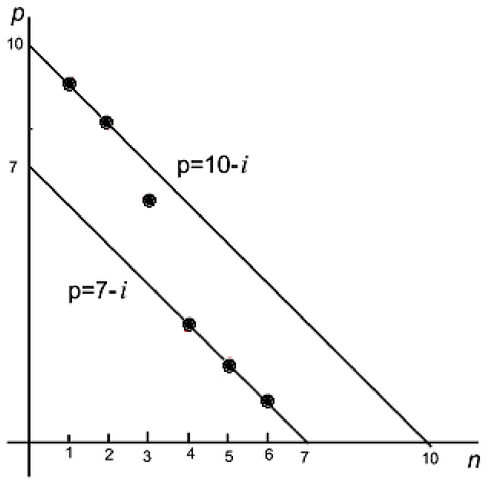

Рис.2

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Дмитриев М.Г., Петров А.П.* Математическая модель «Власть-общество-инфраструктура-производство» // В сб. «Тезисы докладов и выступлений Всероссийского социологического конгресса. Глобализация и социальные изменения в современной России, т.11, 3-5 октября 2006 года». – М.: Альфа-М, 2006, с.123-124.
2. *Дмитриев М.Г., Павлов А.А., Петров А.П.* Макромодель взаимоотношений бизнеса и власти // Социальная политика и социология. Междисциплинарный научно-практический журнал. Изд-во РГСУ, 2007, №3, с.219-231
3. *Дмитриев М.Г., Павлов А.А., Петров А.П.* Оптимальный объем властных полномочий в социально-экономической иерархии по критерию удельного потребления // Информационные технологии и вычислительные системы, 2007, №4, с.4-11.
4. *Solow R.* A contribution to the theory of growth // Quaterly Journal of Economist, 1956, v.70, p.65-94.
5. *Михайлов А.П.* Математическое моделирование власти в иерархических структурах // Матем. моделирование, 1994, т.6, №6, с.108-138.
6. *Михайлов А.П.* Исследование системы «власть-общество». – М.: Физматлит, 2006, 144 с.
7. *Михайлов А.П.* Модель коррумпированных властных иерархий // Матем. моделирование, 1999, т.11, №1, с.3-19.
8. *Белокопытов С.В., Дмитриев М.Г.* Решение классических задач оптимального управления с погранслоем // Автоматика и телемеханика, 1989, №7, с.71-82.

Поступила в редакцию 20.06.2011