А. Б. Васильева, М. Г. Дмитриев, Ни Минь Кань, О контрастной структуре типа ступеньки для задачи вариационного исчисления, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 2004, том 44, номер 7, 1271–1280

ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2004, том 44, № 7, с. 1271–1280

УДК 519.6:517.972.2

О КОНТРАСТНОЙ СТРУКТУРЕ ТИПА СТУПЕНЬКИ ДЛЯ ЗАДАЧИ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

А. Б. Васильева*, М. Г. Дмитриев, Ни Минь Кань*****

(119899 Москва, Ленинские горы, МГУ, физ. фак;*
*** 107150 Москва, ул. Лосиноостровская, 24, МГСУ, каф. прикл. матем.;*
**** 152020 Переславль-Залесский, Ун-т, каф. матем.)*
e-mail: mdmitriev@mail.ru

Поступила в редакцию 10.11.2003 г.

Для простейшей вариационной задачи с закрепленными концами, в которой производная входит в интегрант с малым параметром, устанавливаются условия существования решения с внутренним переходным слоем типа ступеньки. Библ. 8.

1. ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим простейшую задачу вариационного исчисления о минимуме функционала

$$J[y] = \int_a^b f\left(y, \varepsilon\frac{dy}{dt}, t\right)dt \longrightarrow \min_y, \tag{1.1}$$

определенного на множестве функций $y(t) \in C^{(1)}[a, b]$, удовлетворяющих условиям

$$y(a, \varepsilon) = y^0, \quad y(b, \varepsilon) = y^1, \tag{1.2}$$

где $\varepsilon > 0$ – малый параметр.

Наряду с (1.1) будем использовать следующую запись:

$$J[y] = \int_a^b f(y, z, t)dt \longrightarrow \min_y, \tag{1.3}$$

$$\varepsilon\frac{dy}{dt} = z, \quad a < t < b. \tag{1.4}$$

Условие $\mathbb{A}_1$. Пусть функция $f(y, z, t)$ дважды непрерывно дифференцируема в области $D = \{a \le t \le b, |y| \le l_1, |z| \le l_2\}$.

Условие $\mathbb{A}_2$. Пусть $f_{zz}(y, z, t) > 0$ при $(y, z, t) \in D$.

Используя необходимое условие экстремума для функционала (1.3), получаем уравнение Эйлера

$$\varepsilon\frac{d}{dt}f_z(y, z, t) - f_y(y, z, t) = 0. \tag{1.5}$$

Если в (1.3), (1.4) положить формально $\varepsilon = 0$, то получается вырожденная вариационная задача

$$J[\bar{y}] = \int_a^b f(\bar{y}, \bar{z}, t)dt \longrightarrow \min_{\bar{y}}, \quad \bar{z} = 0.$$

Условие $\mathbb{A}_3$.

1. Пусть при $a \le t \le b$ существуют две функции $\bar{y} = \alpha(t)$ и $\bar{y} = \gamma(t)$ такие, что

$$\min_{\bar{y}} f(\bar{y}, 0, t) = \begin{cases} f(\alpha(t), 0, t), & a \le t \le t_0, \\ f(\gamma(t), 0, t), & t_0 \le t \le b. \end{cases}$$

2. $\lim\limits_{t \to t_0-} \alpha(t) = \alpha^- \neq \gamma^+ = \lim\limits_{t \to t_0+} \gamma(t)$.

3. $\alpha(a) = y^0$, $\gamma(b) = y^1$.

4. t_0 определяется уравнением

$$f(\alpha(t_0), 0, t_0) = f(\gamma(t_0), 0, t_0)$$

и при этом выполняется

$$f_t(\alpha(t_0), 0, t_0) \neq f_t(\gamma(t_0), 0, t_0).$$

Из условия A_3 следует, что

$$f_y(\alpha(t), 0, t) = 0, \quad f_{yy}(\alpha(t), 0, t) \geq 0, \quad a \leq t \leq t_0, \tag{1.6}$$

$$f_y(\gamma(t), 0, t) = 0, \quad f_{yy}(\gamma(t), 0, t) \geq 0, \quad t_0 \leq t \leq b. \tag{1.7}$$

Пользуясь условием A_2, вводим обозначения

$$A = -f_{yz}/f_{zz}, \quad B = f_y/f_{zz}, \quad C = f_{zt}/f_{zz}.$$

Уравнение Эйлера (1.5) записывается в виде системы

$$\varepsilon\frac{dz}{dt} = zA(y, z, t) + B(y, z, t) + \epsilon C(y, z, t), \tag{1.8}$$

$$\varepsilon\frac{dy}{dt} = z. \tag{1.9}$$

Докажем, что решение задачи (1.2), (1.8), (1.9) существует, и построим асимптотику этого решения по параметру ϵ.

Так как задача (1.2), (1.8), (1.9) сингулярно возмущенная и нелинейная, то может существовать несколько решений с пограничными и внутренними слоями (см. [1], [2]). Решение с пограничным слоем исследовано в [3]. В настоящей работе предлагается построить асимптотику решения с внутренним слоем.

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Рассмотрим задачу более общего вида, чем (1.2), (1.11), (1.12):

$$\varepsilon\frac{dz}{dt} = F(y, z, t, \varepsilon), \tag{2.1}$$

$$\varepsilon\frac{dy}{dt} = G(y, z, t, \varepsilon), \tag{2.2}$$

с краевыми условиями

$$y(a, \varepsilon) = y^0, \quad y(b, \varepsilon) = y^1. \tag{2.3}$$

В [4] показано, что задача (2.1)–(2.3) может иметь решение с внутренним слоем или контрастную структуру типа ступеньки. Приведем здесь условия и соответствующую теорему из [4].

Условие B_1. При каждом фиксированном $t = \bar{t} \in [a, b]$ присоединенная система

$$dz/dy = F(y, z, \bar{t}, 0)/G(y, z, \bar{t}, 0) \tag{2.4}$$

имеет первый интеграл вида

$$\Phi(y, z, \bar{t}) = C.$$

Условие B_2. Система (2.4) при фиксированном $\bar{t}$ имеет по крайней мере две особые точки M_1 и M_2 типа седла: $M_1(\varphi_1(\bar{t}), \psi_1(\bar{t}))$, $M_2(\varphi_2(\bar{t}), \psi_2(\bar{t}))$, где $(\varphi_1(\bar{t}), \psi_1(\bar{t}))$, $(\varphi_2(\bar{t}), \psi_2(\bar{t}))$ – два изолированных решения вырожденной системы

$$F(y, z, \bar{t}, 0) = 0,$$
$$G(y, z, \bar{t}, 0) = 0$$

такие, что характеристические числа λ_1, λ_2 основной функциональной матрицы для системы (2.1), (2.2)

$$\begin{pmatrix} \partial F/\partial z & \partial F/\partial y \\ \partial G/\partial z & \partial G/\partial y \end{pmatrix}$$

удовлетворяют условию $\mathrm{Re}\lambda_1 > 0$, $\mathrm{Re}\lambda_2 < 0$ (производные здесь вычислены вдоль аргумента $\bar{t}$ и корней $(\varphi_1(\bar{t}), \psi_1(\bar{t}), \bar{t})$ и $(\varphi_2(\bar{t}), \psi_2(\bar{t}), \bar{t})$).

Условие $\mathbb{B}_3$. При некотором значении $\bar{t} = t_0 \in [a, b]$ имеется сепаратриса, соединяющая седла M_1, M_2:

$$\Phi(\varphi_1(t_0), \psi_1(t_0), t_0) = \Phi(\varphi_2(t_0), \psi_2(t_0), t_0),$$

где сепаратрисы S_{M_1}, S_{M_2}, проходящие через седла M_1, M_2, удовлетворяют уравнениям ($\bar{t}$ фиксировано)

$$S_{M_1} : \Phi(y, z, \bar{t}) = \Phi(\varphi_1(\bar{t}), \psi_1(\bar{t}), \bar{t}), \tag{2.5}$$

$$S_{M_2} : \Phi(y, z, \bar{t}) = \Phi(\varphi_2(\bar{t}), \psi_2(\bar{t}), \bar{t}). \tag{2.6}$$

Условие $\mathbb{B}_4$. Пусть уравнения (2.5), (2.6) разрешимы относительно z в некоторой окрестности $y = [\varphi_1(\bar{t}) + \varphi_2(\bar{t})]/2$, $t_0 - \delta < \bar{t} < t_0 + \delta$:

$$S_{M_1} : z^{\text{л}} = V(y, \varphi_1(\bar{t}), \psi_1(\bar{t}), \bar{t}).$$

$$S_{M_2} : z^{\text{п}} = V(y, \varphi_2(\bar{t}), \psi_2(\bar{t}), \bar{t}).$$

Обозначим $H(\bar{t}) = z^{\text{п}} - z^{\text{л}}$. Имеем $H(t_0) = 0$.

Условие $\mathbb{B}_5$. Пусть $\dfrac{d}{d\bar{t}}H(t_0) \neq 0$.

Теорема 1. *При выполнении условий* B_1–B_5 *существует решение задачи* (2.1)–(2.3), *обладающее свойством*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} y(t, \varepsilon) = \begin{cases} \varphi_1(t), & t < t_0, \\ \varphi_2(t), & t > t_0, \end{cases}$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} z(t, \varepsilon) = \begin{cases} \psi_1(t), & t < t_0, \\ \psi_2(t), & t > t_0. \end{cases}$$

3. СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЯ ТИПА СТУПЕНЬКИ

Как было сказано выше, исследуемая задача (1.2), (1.8), (1.9) является частным случаем более общей задачи (2.1)–(2.3), поэтому для задачи (1.2), (1.8), (1.9) справедлив аналог теоремы 1, т.е. и решение вариационной задачи, и экстремаль (решение уравнения Эйлера) при соответствующих условиях будут содержать контрастную структуру типа ступеньки.

Итак, сначала покажем, что уравнение Эйлера (1.8), (1.9) имеет решение типа ступеньки. Для этого нужно условия теоремы 1 о предельном переходе сопоставить с условиями оптимальности.

Нетрудно видеть, что присоединенная к (1.8), (1.9) система

$$dz/d\tau = zA(y, z, \bar{t}) + B(y, z, \bar{t}), \tag{3.1}$$

$$dy/d\tau = z \tag{3.2}$$

имеет первый интеграл при фиксированном $\bar{t} \in [a, b]$:

$$zf_z(y, z, \bar{t}) - f(y, z, \bar{t}) = C, \tag{3.3}$$

где C – некоторая постоянная.

Лемма 1. *Пусть выполнены условия* A_1, A_2. *Тогда первый интеграл* (3.3) *можно разрешить явно относительно* z *при фиксированном* $\bar{t} \in [a, b]$ *и* $z \neq 0$.

Доказательство. Обозначим

$$g(y, z, \bar{t}) = zf_z(y, z, \bar{t}) - f(y, z, \bar{t}) - C.$$

По теореме существования неявной функции, уравнение $g(y, z, \bar{t}) = 0$ разрешимо относительно z:

$$z = h(y, \bar{t}, C), \quad (y, \bar{t}) \in D_1, \tag{3.4}$$

где $D_1 = \{a \le \bar{t} \le b; |y| \le l_1\}$, так как

$$g_z(y, z, \bar{t}) = zf_{zz}(y, z, \bar{t}) \neq 0, \quad (y, z, \bar{t}) \in D,$$

вследствие A_2 и $z \neq 0$.

Условие A_4. Пусть $h_y(\alpha(\bar{t}), \bar{t}, C) > 0$ и $h_y(\gamma(\bar{t}), \bar{t}, C) < 0$.

Лемма 2. *Пусть выполнены условия* A_1–A_3. *Тогда присоединенная система* (3.1), (3.2) *имеет две особые точки типа седла* $M_1(\alpha(\bar{t}), 0)$, $M_2(\gamma(\bar{t}), 0)$ *при фиксированном* $\bar{t} \in [a, b]$.

Доказательство. Очевидно, что $(\bar{y}_1, \bar{z}_1) = (\alpha(t), 0)$ и $(\bar{y}_2, \bar{z}_2) = (\gamma(t), 0)$ являются двумя изолированными решениями вырожденной системы

$$\bar{z}A(\bar{y}_i, \bar{z}_i, t) + B(\bar{y}_i, \bar{z}_i, t) = 0, \quad \bar{z}_i = 0, \quad i = 1, 2,$$

вследствие (1.6), (1.7) и при этом точки $M_1(\alpha(\bar{t}), 0)$, $M_2(\gamma(\bar{t}), 0)$ при фиксированном $\bar{t} \in [a, b]$ на фазовой плоскости (y, z) – особые точки типа седла, так как из структуры основной функциональной матрицы для системы (1.8), (1.9)

$$\begin{pmatrix} A(\bar{y}_i, \bar{z}_i, \bar{t}) + B_z(\bar{y}_i, \bar{z}_i, \bar{t}), & B_y(\bar{y}_i, \bar{z}_i, \bar{t}) \\ 1, & 0 \end{pmatrix} \tag{3.5}$$

и уравнения

$$\lambda^2 - [A(\bar{y}_i, \bar{z}_i, \bar{t}) + B_z(\bar{y}_i, \bar{z}_i, \bar{t})]\lambda - B_y(\bar{y}_i, \bar{z}_i, \bar{t}) = 0$$

для ее спектра следует, что произведение собственных значений матрицы (3.5) в этом случае принимает вид

$$\lambda_1\lambda_2 = -B_y(\bar{y}_i, \bar{z}_i, \bar{t}) = -f_{yy}(\bar{y}_i, \bar{z}_i, \bar{t})/f_{zz}(\bar{y}_i, \bar{z}_i, \bar{t}) = 0,$$

где производные взяты от аргументов и $(\alpha(\bar{t}), 0, \bar{t})$, $(\gamma(\bar{t}), 0, \bar{t})$.

Итак, условие B_2 выполнено. Продолжим далее проверку условий теоремы 1.

Очевидно теперь, что существуют две сепаратрисы S_{M_1}, S_{M_2}, проходящие через седла M_1, M_2 и удовлетворяющие уравнениям

$$S_{M_1}: zf_z(y, z, \bar{t}) - f(y, z, \bar{t}) = -f(\alpha(\bar{t}), 0, \bar{t}), \tag{3.6}$$

$$S_{M_2}: zf_z(y, z, \bar{t}) - f(y, z, \bar{t}) = -f(\gamma(\bar{t}), 0, \bar{t}). \tag{3.7}$$

Из (3.4) получим

$$z^{л}(\tau, \bar{t}) = h^{л}(y^{л}, \bar{t}, \alpha(\bar{t})), \quad z^{п}(\tau, \bar{t}) = h^{п}(y^{п}, \bar{t}, \gamma(\bar{t})).$$

Обозначим

$$H(\bar{t}) = z^{л}(0, \bar{t}) - z^{п}(0, \bar{t}) = h^{л}(\beta(\bar{t}), \bar{t}, \alpha(\bar{t})) - h^{п}(\beta(\bar{t}), \bar{t}, \gamma(\bar{t})),$$

где $y^{л}(0) = y^{п}(0) = \beta(\bar{t}) = [\alpha(\bar{t}) + \gamma(\bar{t})]/2$.

Лемма 3. *Пусть выполнены условия* A_1–A_3. *Тогда для выполнения равенства* $H(t_0) = 0$ *необходимо и достаточно выполнения равенства* $f(\alpha(t_0), 0, t_0) = f(\gamma(t_0), 0, t_0)$.

Доказательство. В (3.6), (3.7) при $\tau = 0$ и $\bar{t} = t_0$ получим

$$h^{\text{л}}(t_0)f_z(\beta(t_0), h^{\text{л}}(t_0), t_0) - f(\beta(t_0), h^{\text{л}}(t_0), t_0) = -f(\alpha(t_0), 0, t_0), \tag{3.8}$$

$$h^{\text{п}}(t_0)f_z(\beta(t_0), h^{\text{п}}(t_0), t_0) - f(\beta(t_0), h^{\text{п}}(t_0), t_0) = -f(\gamma(t_0), 0, t_0), \tag{3.9}$$

где

$$h^{\text{л}}(t_0) = h^{\text{л}}(\beta(t_0), t_0, \alpha(t_0)), \quad h^{\text{п}}(t_0) = h^{\text{п}}(\beta(t_0), t_0, \gamma(t_0)).$$

Необходимость получается прямо из равенств (3.8), (3.9). Достаточность следует из представления (3.4).

Лемма 4. *Пусть выполнены условия* A_1–A_3. *Тогда соотношение* $\frac{d}{d\bar{t}}H(t_0) \neq 0$ *имеет место тогда и только тогда, когда* $f_t(\alpha(t_0), 0, t_0) \neq f_t(\gamma(t_0), 0, t_0)$.

Доказательство. При $\tau = 0$ в (3.6), (3.7) получим

$$h^{\text{л}}(\bar{t})f_z(\beta(\bar{t}), h^{\text{л}}(\bar{t}), \bar{t}) - f(\beta(\bar{t}), h^{\text{л}}(\bar{t}), \bar{t}) = -f(\alpha(\bar{t}), 0, \bar{t}), \tag{3.10}$$

$$h^{\text{п}}(\bar{t})f_z(\beta(\bar{t}), h^{\text{п}}(\bar{t}), \bar{t}) - f(\beta(\bar{t}), h^{\text{п}}(\bar{t}), \bar{t}) = -f(\gamma(\bar{t}), 0, \bar{t}). \tag{3.11}$$

Дифференцируя (3.10), (3.11) по $\bar{t}$, получаем

$$h^{\text{л}}(\bar{t})f^{\text{п}}_{zy}(\bar{t})\beta_t(\bar{t}) + h^{\text{л}}(\bar{t})f^{\text{л}}_{zz}(\bar{t})\frac{d}{d\bar{t}}h^{\text{л}}(\bar{t}) + h^{\text{л}}(\bar{t})f^{\text{л}}_{zt}(\bar{t}) - f^{\text{л}}_y(\bar{t}) - f^{\text{л}}_t(\bar{t}) = -f_t(\alpha(\bar{t}), 0, \bar{t}),$$

$$h^{\text{п}}(\bar{t})f^{\text{п}}_{zy}(\bar{t})\beta_t(\bar{t}) + h^{\text{п}}(\bar{t})f^{\text{п}}_{zz}(\bar{t})\frac{d}{d\bar{t}}h^{\text{п}}(\bar{t}) + h^{\text{п}}(\bar{t})f^{\text{п}}_{zt}(\bar{t}) - f^{\text{п}}_y(\bar{t}) - f^{\text{п}}_t(\bar{t}) = -f_t(\gamma(\bar{t}), 0, \bar{t}),$$

где $f^{\text{л}}(\bar{t}) = f(\beta(\bar{t}), h^{\text{л}}(\bar{t}), \bar{t}), f^{\text{п}}(\bar{t}) = f(\beta(\bar{t}), h^{\text{п}}(\bar{t}), \bar{t})$.

Отсюда при $t = t_0$ имеем

$$h^{\text{л}}(t_0)f^{\text{л}}_{zz}(t_0)\frac{d}{d\bar{t}}H(t_0) = -[f_t(\alpha(t_0), 0, t_0) - f_t(\gamma(t_0), 0, t_0)],$$

т.е. утверждение леммы имеет место, так как $f^{\text{л}}_{zz}(t_0) > 0$ в силу A_2 и соотношение $h^{\text{л}}(t_0) \neq 0$ выполняется, так как сепаратриса в точке $y = \beta(t_0)$ не пересекает ось y.

Лемма 5. *Пусть выполнены условия* A_1–A_3. *Тогда существует момент времени* $\bar{t} = t_0$, *для которого в присоединенной системе* (3.1), (3.2) *имеется сепаратриса, соединяющая седла* $M_1(\alpha(t_0), 0)$, $M_2(\gamma(t_0), 0)$.

Утверждение следует непосредственно из лемм 3 и 4.

Итак, условие B_3 теоремы 1 следует из леммы 5, условие B_4 – из леммы 1, а условие B_5 – из леммы 4 и A_3.

Таким образом, для системы (1.8), (1.9) выполнены все условия теоремы 1 о предельном переходе. Поэтому задача (1.2), (1.8), (1.9) имеет экстремаль $y(t, \varepsilon)$ с контрастной структурой типа ступеньки.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* A_1–A_4. *Тогда при достаточно малых* $\varepsilon > 0$ *существует экстремаль* $y(t, \varepsilon)$ *для вариационной задачи* (1.1), (1.2) *с контрастной структурой типа ступеньки, т.е.*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} y(t, \varepsilon) = \begin{cases} \alpha(t), & t < t_0, \\ \gamma(t), & t > t_0. \end{cases}$$

Приведем достаточное условие Якоби о включении данной экстремали в поле экстремалей. Аналитически это условие выражается так: уравнение Якоби для данного функционала имеет неколеблющееся решение.

Для функционала (1.3) уравнение Якоби имеет вид

$$\varepsilon^2 \frac{d}{dt}(f_{zz}u') - \left(f_{yy} - \varepsilon \frac{d}{dt} f_{yz}\right)u = 0.$$

Сделав замену $\xi = \int dt/(\varepsilon^2 f_{zz})$, получим

$$\frac{d^2u}{d\xi^2} - \varepsilon^2 Q(y, z, t, \epsilon)u = 0, \tag{3.12}$$

где

$$Q = f_{zz}\left(f_{yy} - \varepsilon \frac{d}{dt} f_{yz}\right).$$

Положительное значение $Q(y, z, t, \varepsilon)$ обеспечивает отсутствие колеблющегося решения уравнения (3.12). Так как $f_{zz}(y, z, t) > 0$ из A_2, чтобы получить неравенство $Q(y, z, t, \varepsilon) > 0$ при достаточно малых ϵ, достаточно потребовать, чтобы выполнялось

Условие A_5. $f_{yy}(y, z, t) > 0$, $(y, z, t) \in D$.

Теперь очевидно, что условие Якоби выполнено.

Усиленное условие Лежандра следует из A_2.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* A_1–A_5. *Тогда при достаточно малых* $\epsilon > 0$ *экстремаль* $y(t, \epsilon)$ *с контрастной структурой типа ступеньки доставляет слабый минимум в задаче* (1.1), (1.2).

4. ГЛАВНЫЙ ЧЛЕН АСИМПТОТИКИ

Построим главный член асимптотики решения задачи (1.2)–(1.4) в виде

$$y(t, \epsilon) = \begin{cases} \bar{y}_0(t) + \Pi_0 y(\tau_0) + Q_0 y^{\text{л}}(\tau) + O(\epsilon), & t < t^*, \\ \bar{y}_0(t) + R_0 y(\tau_1) + Q_0 y^{\text{п}}(\tau) + O(\epsilon), & t > t^*, \end{cases} \tag{4.1}$$

$$\tau_0 = (t-a)\varepsilon^{-1}, \quad \tau = (t-t^*)\varepsilon^{-1}, \quad \tau_1 = (t-b)\varepsilon^{-1},$$

где $\Pi_0 y(\tau_0)$ – левая пограничная функция в окрестности $t = a$, $R_0 y(\tau_1)$ – правая пограничная функция в окрестности $t = b$, а $Q_0 y(\tau)$ – пограничная функция в окрестности точки перехода $t = t^*$. При этом значение $t^*(\varepsilon)$ будем искать в виде $t^*(\varepsilon) = t_0 + O(\varepsilon)$.

Для определения коэффициентов всех выписанных рядов надо (4.1) подставить в (1.3) и минимизировать по всем элементам асимптотики коэффициенты разложения функционала по степеням ε:

$$\inf_y J[y] = \inf_{y_0} J(y_0) + \sum_{i=1}^{n} \varepsilon^i \inf_{y_i} \tilde{J}_i(y_i) + \ldots,$$

где

$$\tilde{J}_i(y_i) = J_i(y_i, \tilde{y}_{i-1}, \ldots, \tilde{y}_0), \quad \tilde{y}_k = \arg\inf_y \tilde{J}_k(y), \quad k = \overline{0, i-1}.$$

При этом разложение (4.1) подставляется в (1.3), (1.4) и затем приравниваются слева и справа члены одинакового порядка по ϵ, в отдельности зависящие от t, τ_0, τ и τ_1. Это и даст вариационные задачи для определения каждого члена асимптотики (см. [5]–[7]).

Для определения $\bar{y}_0(t)$ получим

$$J_0(\bar{y}_0) = \int_a^b f(\bar{y}_0, 0, t)dt \longrightarrow \min_{\bar{y}_0}.$$

Из условия A_2 получим $\bar{y}_0(t) = \bar{y}(t)$.

Для определения $Q_0y^{\text{л}}(\tau)$ имеем

$$Q_0J^{\text{л}} = \int_{-\infty}^{0} \Delta_1 f(\alpha_0 + Q_0y^{\text{л}}, Q_0z^{\text{л}}, t_0)d\tau \longrightarrow \min_{Q_0y^{\text{л}}}, \tag{4.2}$$

$$\frac{d}{d\tau}Q_0y^{\text{л}}(\tau) = Q_0z^{\text{л}}(\tau), \tag{4.3}$$

$$Q_0y^{\text{л}}(0) = (\gamma_0 - \alpha_0)/2, \quad Q_0y^{\text{л}}(-\infty) = 0, \tag{4.4}$$

где

$$\Delta_1 f(\alpha_0 + Q_0y^{\text{л}}, Q_0z^{\text{л}}, t_0) = f(\alpha_0 + Q_0y^{\text{л}}, Q_0z^{\text{л}}, t_0) - f(\alpha_0, 0, t_0),$$

$\alpha_0 = \alpha(t_0)$, $\gamma_0 = \gamma(t_0)$.

Для определения $Q_0y^{\text{п}}(\tau)$ имеем

$$Q_0J^{\text{п}} = \int_{0}^{+\infty} \Delta_2 f(\gamma_0 + Q_0y^{\text{п}}, Q_0z^{\text{п}}, t_0)d\tau \longrightarrow \min_{Q_0y^{\text{п}}},$$

$$\frac{d}{d\tau}Q_0y^{\text{п}}(\tau) = Q_0z^{\text{п}}(\tau),$$

$$Q_0y^{\text{п}}(0) = (\alpha_0 - \gamma_0)/2, \quad Q_0y^{\text{п}}(+\infty) = 0,$$

где

$$\Delta_2 f(\gamma_0 + Q_0y^{\text{п}}, Q_0z^{\text{п}}, t_0) = f(\gamma_0 + Q_0y^{\text{п}}, Q_0z^{\text{п}}, t_0) - f(\gamma_0, 0, t_0).$$

Произведя замену переменных

$$\tilde{y}(\tau) = \alpha(t_0) + Q_0y^{\text{л}}(\tau), \quad \tilde{z}(\tau) = Q_0z^{\text{л}}(\tau)$$

в задаче (4.3)–(4.5), получим

$$\begin{gathered} Q_0J^{\text{л}} = \int_{-\infty}^{0} \Delta_1 f(\tilde{y}, \tilde{z}, t_0)dt \longrightarrow \min_{\tilde{y}}, \\ \frac{d}{d\tau}\tilde{y}(\tau) = \tilde{z}(\tau), \quad \tilde{y}(0) = (\alpha_0 + \gamma_0)/2, \quad \tilde{y}(-\infty) = \alpha_0, \end{gathered} \tag{4.5}$$

где $\Delta_1 f(\tilde{y}, \tilde{z}, t_0) = f(\tilde{y}, \tilde{z}, t_0) - f(\alpha_0, 0, t_0)$.

Аналогичную замену сделаем и для правого погранслоя:

$$\tilde{y}(\tau) = \gamma(t_0) + Q_0y^{\text{п}}(\tau), \quad \tilde{z}(\tau) = Q_0z^{\text{п}}(\tau);$$

получим

$$Q_0J^{\text{п}} = \int_{0}^{+\infty} \Delta_2 f(\tilde{y}, \tilde{z}, t_0)d\tau \longrightarrow \min_{\tilde{y}},$$

$$\frac{d}{d\tau}\tilde{y}(\tau) = \tilde{z}(\tau),$$

$$\tilde{y}(0) = (\alpha_0 + \gamma_0)/2, \quad \tilde{y}(+\infty) = \gamma_0,$$

где $\Delta_2 f(\tilde{y}, \tilde{z}, t_0) = f(\tilde{y}, \tilde{z}, t_0) - f(\gamma_0, 0, t_0)$.

В функционале (4.5), сделав замену $d\tau = d\tilde{y}/\tilde{z}$, получим функционал, не зависящий явно от τ:

$$Q_0J^{\text{л}} = \int_{\alpha_0}^{(\alpha_0+\gamma_0)/2} \Delta_1 f(\tilde{y}, \tilde{z}, t_0)/\tilde{z}d\tilde{y} \longrightarrow \min_{\tilde{z}}. \tag{4.6}$$

Необходимое условие минимума подынтегральной функции имеет вид

$$\tilde{z}\Delta_1 f_z(\tilde{y}, \tilde{z}, t_0) - \Delta_1 f(\tilde{y}, \tilde{z}, t_0) = 0,$$

или

$$\tilde{z} f_z(\tilde{y}, \tilde{z}, t_0) - f(\tilde{y}, \tilde{z}, t_0) = -f(\alpha_0, 0, t_0).$$

Учитывая (3.4), получаем, что $\tilde{z} = h(\tilde{y}, t_0, \alpha_0)$ является точкой минимума, если вдоль нее выполняется

$$\frac{d^2}{dz^2}(\Delta_1 f(\tilde{y}, \tilde{z}, t_0)/\tilde{z}) > 0.$$

Нетрудно видеть, что эта вторая производная имеет вид $f_{zz}(\tilde{y}, \tilde{z}, t_0)/\tilde{z}$ и при выполнении A_2 требуемое неравенство выполняется, если $\tilde{z} > 0$. Последнее имеет место, так как на плоскости $(\tilde{y}, \tilde{z})$ при изменении $\tilde{y}$ от начальной точки $(\alpha_0 + \gamma_0)/2$ до α_0 в (4.6) функция $\tilde{z}$, отвечающая верхней части ячейки (ячейка соединяет два седла $(\alpha_0, 0)$, $(\gamma_0, 0)$), является положительной.

Таким образом, для определения $\tilde{y}$ в левой окрестности точки перехода имеем дифференциальное уравнение

$$\frac{d}{d\tau}\tilde{y}(\tau) = h(\tilde{y}, t_0, \alpha_0).$$

Из условия A_4 (условие асимптотической устойчивости точки покоя α_0) имеем оценку

$$\left|Q_0 y^{\text{п}}(\tau)\right| \le C_1 e^{k_1\tau}, \quad k_1 > 0, \quad \tau \le 0.$$

Аналогичное рассуждение можно провести для $Q_0^{\text{п}} y(\tau)$ и получить оценку

$$\left|Q_0 y^{\text{п}}(\tau)\right| \le C_1 e^{-k_2\tau}, \quad k_2 > 0, \quad \tau \ge 0.$$

Подобные вариационные задачи и соответствующие экспоненциальные оценки получаются и для $\Pi_0 y(\tau_0)$, $R_0 y(\tau_1)$.

Отметим, что представление (4.1) нельзя считать окончательным, так как в него входит $\tau = (t - t^*)\varepsilon^{-1}$, а t^* известно лишь с точностью $O(\varepsilon)$. Если в выражении для τ заменить t^* на t_0, то в (4.1) потеряется точность $O(\varepsilon)$. Поэтому для написания окончательной асимптотики с остаточным членом $O(\varepsilon)$ необходимо найти следующий член разложения $t^*(\varepsilon)$ так, чтобы было справедливо представление $t^* = t_0 + \varepsilon t_1 + O(\varepsilon^2)$.

Можно показать тождественность главного члена, построенного выше, нулевому асимптотическому приближению к решению соответствующей краевой задачи для уравнения Эйлера, где построение асимптотики будем проводить по схеме из [1].

Краевая задача для уравнения Эйлера вариационной задачи (1.1), (1.2) является частным случаем сингулярно возмущенной краевой задачи, рассмотренной в [4]. Учитывая тождественность членов асимптотического разложения, получаемых методом пограничных функций в [1] и асимптотики, описанной в разд. 4, уточнение точки переключения можно проводить в рамках формализма разд. 4, где t_1 будет играть роль оптимизируемого параметра, однако выкладки здесь представляются весьма громоздкими и поэтому для точки t_1 воспользуемся формулой, приведенной в [8]:

$$t_1 = \left(-\int_{-\infty}^{+\infty}(zpF_t\tau + F_\varepsilon)d\tau\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty}(zpF_t)d\tau\right)^{-1}, \tag{4.7}$$

где $p = p(\tau) = \exp(-\int_0^\tau F_z d\tau)$, $F_t = zA_t(y, z, t_0) + B_t(y, z, t_0)$, $F_\varepsilon = C(y, z, t_0)$, $F_z = zA_z(y, z, t_0) + A(y, z, t_0) + B_z(y, z, t_0)$. Формула (4.7) имеет место при дополнительном условии A_6.

Условие A_6. Функция $p(\tau)$ ограничена при $\tau \longrightarrow \pm\infty$.

Отметим, что формула из [8] для t_1 у нас изменяется из-за регулярной зависимости правых частей уравнения Эйлера от малого параметра.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия* A_1–A_5. *Тогда при достаточно малых* $\varepsilon > 0$ *существует экстремаль* $y(t, \varepsilon)$ *типа ступеньки, доставляющая слабый минимум в задаче* (1.1), (1.2), *имеющая следующее асимптотическое представление*:

$$y(\tau, \varepsilon) = \begin{cases} \alpha(t) + \Pi_0 y(\tau_0) + Q_0 y^{\text{л}}(\tau) + O(\varepsilon), & t < t_0 + \varepsilon t_1, \\ [\alpha(t) + \gamma(t)]/2, & t = t_0 + \varepsilon t_1, \\ \gamma(t) + R_0 y(\tau_1) + Q_0 y^{\text{п}}(\tau) + O(\varepsilon), & t > t_0 + \varepsilon t_1. \end{cases}$$

Замечание. В условии A_5 неравенство $f_{yy}(y, z, t) > 0$ вдоль экстремали можно заменить условием $f_{yy}(\tilde{y}_0, \tilde{z}_0, t) > 0$, где $\tilde{y}_0$, $\tilde{z}_0$ – нулевой член асимптотики, т.е.

$$\tilde{y}_0 = \bar{y}_0(t) + \Pi_0 y(\tau_0) + Q_0 y^{\text{л}}(\tau) + Q_0 y^{\text{п}}(\tau) + R_0 y(\tau_1),$$

$$\tilde{z}_0 = \bar{z}_0(t) + \Pi_0 z(\tau_0) + Q_0 z^{\text{л}}(\tau) + Q_0 z^{\text{п}}(\tau) + R_0 z(\tau_1).$$

Это условие допускает дальнейшее упрощение. Следуя методу пограничных функций, можно получить представление

$$f_{yy}(\tilde{y}_0, \tilde{z}_0, t) = f_{yy}(\bar{y}_0, \bar{z}_0, t) + \Pi_0 f_{yy}(\tau_0) + Q_0 f_{yy}^{\text{л}}(\tau) + Q_0 f_{yy}^{\text{п}}(\tau) + R_0 f_{yy}(\tau_1),$$

где

$$\Pi_0 f_{yy}(\tau_0) = f_{yy}(\bar{y}_0 + \Pi_0 y, \bar{z}_0 + \Pi_0 z, a) - f_{yy}(\bar{y}_0, \bar{z}_0, a),$$

$$Q_0 f_{yy}^{\text{л, п}}(\tau) = f_{yy}(\bar{y}_0 + Q_0 y^{\text{л, п}}, \bar{z}_0 + Q_0 z^{\text{л, п}}, t_0) - f_{yy}(\bar{y}_0, \bar{z}_0, t_0),$$

$$R_0 f_{yy}(\tau_1) = f_{yy}(\bar{y}_0 + R_0 y, \bar{z}_0 + R_0 z, b) - f_{yy}(\bar{y}_0, \bar{z}_0, b).$$

Поэтому условие Якоби будет выполняться, если будет иметь место

$$\Pi_0 f_{yy}(\tau_0) + Q_0 f_{yy}^{\text{л}}(\tau) + Q_0 f_{yy}^{\text{п}}(\tau) + R_0 f_{yy}(\tau_1) > 0,$$

так как $f_{yy}(\bar{y}_0, \bar{z}_0, t) \geq 0$ вследствие (1.6), (1.7).

5. ПРИМЕР

Рассмотрим следующий пример, иллюстрирующий изложение

$$J[y] = \int_a^b (z^2 + z + w(y, t))dt \longrightarrow \min_y,$$

$$\varepsilon\frac{dy}{dt} = z, \quad a \leq t \leq b,$$

$$y(a, \varepsilon) = y^0, \quad y(b, \varepsilon) = y^1.$$

Предположим, что выполнены следующие условия:

1) функция $w(y, t)$ дважды непрерывно дифференцируема и $w_{yy}(y, t) > 0$ в области D_1;

2) существуют две функции $\bar{y} = \alpha(t)$ и $\bar{y} = \gamma(t)$ при $a \leq t \leq b$ такие, что

$$\min_{\bar{y}} w(y, t) = \begin{cases} w(\alpha(t), t), & a \leq t \leq t_0, \\ w(\gamma(t), t), & t_0 \leq t \leq b; \end{cases}$$

3) $\lim\limits_{t \to t_0-} \alpha(t) = \alpha^- \neq \gamma^+ = \lim\limits_{t \to t_0+} \gamma(t)$;

4) $\alpha(a) = y^0$, $\gamma(b) = y^1$;

5) t_0 определяется уравнением

$$w(\alpha(t_0), t_0) = w(\gamma(t_0), t_0),$$

а

$$w_t(\alpha(t_0), t_0) \neq w_t(\gamma(t_0), t_0).$$

Первый интеграл

$$z^2 - w(y, t) = C;$$

здесь C – некоторая постоянная. Сепаратрисы S_{M_1}, S_{M_2}, которые проходят через седла ($\alpha(t_0)$, 0), ($\gamma(t_0)$, 0) соответственно, получаются при зафиксированном значении $\bar{t} \in [a, b]$:

$$S_{M_1} : z^{\text{л}} = [w(y, \bar{t}) - w(\alpha(\bar{t}), \bar{t})]^{1/2},$$

$$S_{M_2} : z^{\text{п}} = [w(y, \bar{t}) - w(\gamma(\bar{t}), \bar{t})]^{1/2}.$$

Отсюда

$$H(t_0) = z^{\text{л}}(0, t_0) - z^{\text{п}}(0, t_0) = 0,$$

а

$$\frac{d}{dt}H(t_0) = [w_t(\gamma(t_0), t_0) - w_t(\alpha(t_0), t_0)][(w(y, t_0) - w(\alpha(t_0), t_0))]^{-1} \neq 0.$$

Легко проверить, что условия A_1–A_3, A_5, A_6 выполняются.

Условие A_4 также выполнено, так как нетрудно показать с помощью правила Лопиталя, что

$$h_y(\alpha(\bar{t}), \bar{t}) = \sqrt{w_{yy}(\alpha(\bar{t}), \bar{t})/2} > 0, \quad h_y(\gamma(\bar{t}), \bar{t}) = \sqrt{w_{yy}(\gamma(\bar{t}), \bar{t})/2} < 0.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М.: Высш. школа, 1990.
2. *Бутузов В.Ф., Васильева А.Б., Нефедов Н.Н.* Асимптотическая теория контрастных структур (обзор) // Автоматика и телемехан. 1997. № 7. С. 4–32.
3. *Багирова Н.Х.* О зависимости решений задачи вариационного исчисления от малого параметра //Вестн. МГУ. 1966. № 1. С. 33–41.
4. *Васильева А.Б.* О контрастных структурах типа ступеньки для системы сингулярно возмущенных уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1994. Т. 34. № 10. С. 1401–1411.
5. *Белокопытов С.В., Дмитриев М.Г.* Прямой метод решения задач оптимального управления с быстрыми и медленными движениями // Изв. АН СССР. Сер. Техн. кибернетика. 1985. № 3. С. 147–152.
6. *Белокопытов С.В., Дмитриев М.Г.* Решение классических задач оптимального управления с погранслоем //Автоматика и телемехан. 1989. № 7. С. 71–82.
7. *Ни Минь Кань, Дмитриев М.Г.* Контрастные структуры в простейшей векторной вариационной задаче и их асимптотика //Автоматика и телемехан. 1998. № 5. С. 41–52.
8. *Васильева А.Б., Давыдова М.А.* О контрастных структурах типа ступеньки для одного класса нелинейных сингулярно возмущенных уравнений второго порядка // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1998. Т. 38. № 6. С. 938–947.