Н. П. Беляева, М. Г. Дмитриев, Построение приближенного решения начальных задач с параметром на основе Паде-аппроксимации и асимптотических разложений, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 2004, том 44, номер 1, 123–135

ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2004, том 44, № 1, с. 123–135

УДК 519.624.2

ПОСТРОЕНИЕ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ НАЧАЛЬНЫХ ЗАДАЧ С ПАРАМЕТРОМ НА ОСНОВЕ ПАДЕ-АППРОКСИМАЦИИ И АСИМПТОТИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЙ

© 2004 г. Н. П. Беляева*, М. Г. Дмитриев**

(*152140 Переславль-Залесский, Ярославская обл., ИПС РАН;
**107150 Москва, ул. Лосиноостровская, 24, МГСУ)
E-mail: mdmitriev@mail.ru

Поступила в редакцию 11.01.2000 г.
Переработанный вариант 16.05.2003 г.

Предлагаются методы построения параметрических семейств приближенных решений начальных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) с параметром на основе двух асимптотик при малых значениях параметра и при больших значениях параметра с помощью Паде-преобразования, которое, таким образом, является своеобразным "мостом" между асимптотиками. Устанавливается существование Паде-аппроксимации при условиях, гарантирующих построение необходимых асимптотических приближений для начальных задач с параметром. Библ. 8.

1. ВВЕДЕНИЕ

Известна роль асимптотического анализа для построения численно-аналитических решений прикладных задач, описываемых дифференциальными уравнениями с параметром. Асимптотические разложения решений начальных и краевых задач ведутся на основе гипотезы о наличии малого параметра с использованием при этом того или иного формализма построения асимптотики. Точность аппроксимации решения с помощью асимптотики и само существование асимптотического решения для конкретного значения параметра связаны с предположением, что данное значение параметра является достаточно малым или большим. Однако априори нет уверенности, что это так, и поэтому такие построения, несмотря на их теоретическую строгость, имеют эвристический характер для приложений.

Асимптотические методы решения регулярно возмущенных задач с параметром разработаны достаточно хорошо [1], [2]. Гораздо сложнее обстоит дело с сингулярно возмущенными задачами, описывающими различные явления в приложениях. Основы асимптотических методов решения сингулярно возмущенных задач заложены работами [3]–[6].

Как правило, значения параметра, для которых имеются утверждения об асимптотическом характере приближения, оказываются слишком малыми, чтобы иметь практический смысл для приложений, но тем не менее зачастую эти асимптотические приближения или функции от них оказываются удовлетворительными приближениями и вне зоны строгого математического анализа.

В работе предлагается подход к построению параметрического семейства приближенных решений начальных задач с параметром на основе двух "граничных" асимптотик – при малом и при большом значениях параметра. Таким интерполяционным "мостом" между асимптотиками служит модификация так называемой Паде-аппроксимации (см. [7]) начальной задачи с параметром. Численные расчеты в [8] показывают, что Паде-аппроксимация может как раз и являться некоторым оператором от асимптотических разложений, расширяющих зону их действия.

2. ФОРМАЛИЗМ ПОСТРОЕНИЯ ПАДЕ-АППРОКСИМАЦИИ НАЧАЛЬНЫХ ЗАДАЧ С ПАРАМЕТРОМ

Рассмотрим начальную задачу

$$\varepsilon\frac{dz}{dt} = F(z, y, t), \quad \frac{dy}{dt} = f(z, y, t), \quad t \in [0, T], \tag{1}$$

$$y(0, \varepsilon) = y^0, \quad z(0, \varepsilon) = z^0, \tag{2}$$

где z, F суть M-мерные, y, f суть m-мерные вектор-функции, параметр $\varepsilon \in [0, \infty)$.

Пусть выполнены следующие условия (см. [5]).

Условие I. Функции $F(z, y, t)$, $f(z, y, t)$ – достаточное число раз дифференцируемые функции в некоторой открытой области G пространства переменных (z, y, t),

Условие II. Уравнение $F(z, y, t) = 0$ относительно z имеет в некоторой ограниченной замкнутой области $\bar{D}$ пространства переменных (y, t) решение (корень) $z = \varphi(y, t)$ такое, что, во-первых, $z = \varphi(y, t)$ – непрерывная функция в $\bar{D}$, во-вторых, точки $(\varphi(y, t), y, t) \in G$ при $(y, t) \in \bar{D}$, в-третьих, корень $z = \varphi(y, t)$ является изолированным в $\bar{D}$, т.е. существует такое $\eta > 0$, что $F(z, y, t) \neq 0$ при $0 < \|z - \varphi(y, t)\| < \eta$, $(y, t) \in \bar{D}$.

Условие III. Система (1), (2) имеет единственное решение $\bar{y}(t)$ на сегменте, $0 \le t \le 1$, причем точки $(\bar{y}, t) \in D$ при $t \in [0, 1]$. Кроме того, предположим, что $f(\varphi(y, t), y, t)$ непрерывно дифференцируема по y в $\bar{D}$. Введем так называемую (по терминологии Тихонова) присоединенную систему

$$d\tilde{z}/d\tau = F(\tilde{z}, y, t), \quad \tau \ge 0, \tag{3}$$

в которой y и t рассматриваются как параметры. В силу условия II, $\tilde{z} = \varphi(y, t)$ является изолированной точкой покоя системы (3) при $(y, t) \in \bar{D}$.

Условие IV. Точка покоя $\tilde{z} = \varphi(y, t)$ системы (3) устойчива по первому приближению, что означает следующее.

Введем $\lambda_i(y, t)$ $(i = \overline{1, M})$ – собственные значения матрицы $\bar{F}_z(t) = F_z(\varphi(\bar{y}, t), \bar{y}, t)$, где $\bar{y}(t)$, $\bar{z}(t)$ – решение вырожденной системы

$$0 = F(\bar{z}, \bar{y}, t), \quad d\bar{z}/d\tau = f(\bar{z}, \bar{y}, t), \quad \bar{y} = y^0. \tag{4}$$

Пусть выполняется условие устойчивости

$$\operatorname{Re}\lambda_i(t) < 0, \quad 0 \le t \le 1, \quad i = \overline{1, M}. \tag{5}$$

Условие V. Решение $\tilde{z}(\tau)$ присоединенной системы (3) при $y = y^0$, $t = 0$

$$d\tilde{z}/d\tau = F(\tilde{z}, y^0, 0), \quad \tau \ge 0, \quad \tilde{z}(0) = z^0 \tag{6}$$

удовлетворяет таким требованиям:

1) $\tilde{z}(\tau) \longrightarrow (y^0, 0)$ при $\tau \longrightarrow \infty$,

2) точки $(\tilde{z}(\tau), y^0, 0) \in G$ при $\tau \ge 0$.

Пусть $x_n(t, \varepsilon)$ – частичная сумма ряда $\bar{x}(t, \varepsilon) + \Pi x(\tau, \varepsilon)$, $\tau = t/\varepsilon$, где $\bar{x}(t, \varepsilon) = \bar{x}_0(t) + \varepsilon\bar{x}_1 + \ldots$ $\ldots + \varepsilon^n\bar{x}_n(t) + \ldots$ – регулярный ряд по ε с коэффициентами, зависящими от t, а $\Pi x(\tau, \varepsilon) = \Pi_0 x(\tau) +$ $+ \varepsilon\Pi_1 x(\tau) + \ldots + \varepsilon^n\Pi_n x(\tau) + \ldots$ – погранслойный ряд по ε с коэффициентами, зависящими от τ, и компенсирует невязку, которую дает регулярный ряд в окрестности границы $t = 0$.

Введем в рассмотрение кривую L_0, состоящую из двух кривых:

$$L_{01} = \{(z, y, t) : z = \bar{z}_0(0) + \Pi_0 z(\tau);\ \tau \ge 0,\ y = \bar{y}_0(0),\ t = 0\},$$

$$L_{02} = \{(z, y, t) : z = \bar{z}_0(t),\ y = \bar{y}_0(0),\ 0 \le t \le 1\}.$$

Теорема 1 (см. [5]). *При выполнении условий* I–V *найдутся постоянные* $\varepsilon_0 > 0$, $\delta > 0$, $c > 0$ *такие, что при* $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$ *в* δ*-трубке кривой* L_0 *существует единственное решение* $x(t, \varepsilon)$ *начальной задачи* (1), (2) *и имеет место представление*

$$x_{\varepsilon \to 0}(t, \varepsilon) = x_n(t, \varepsilon) + O(\varepsilon^{n+1}), \quad 0 \le t \le 1. \tag{7}$$

При больших ε ($\varepsilon \longrightarrow \infty$) задача (1), (2) регулярно возмущенная, поэтому асимптотику решения (1), (2) построим в виде

$$x_{\varepsilon \to \infty}(t, \varepsilon) = X_0(t) + \frac{1}{\varepsilon}X_1(t) + \ldots + \frac{1}{\varepsilon^n}X_n(t) + O\left(\frac{1}{\varepsilon^{n+1}}\right). \tag{8}$$

Здесь и далее будем под вектором x понимать $(M + m)$-мерный вектор, составленный из компонент векторов z и y.

Построим систему уравнений для нахождения коэффициентов аппроксимации Паде порядка $[n/n]$ решения задачи (1), (2) на основе двух асимптотических приближений $x_{\varepsilon \to 0}(t, \varepsilon)$ и $x_{\varepsilon \to 0}(t, \varepsilon)$.

Определение. Паде-аппроксимация порядка $[n/n]$ решения сингулярно возмущенной начальной задачи (1), (2) есть конструкция вида

$$x_{[n/n]} = \frac{[a_n(t) + \tilde{a}_n(\tau)]\varepsilon^n + \ldots + [a_0(t) + \tilde{a}_0(\tau)]}{b_n(t)\varepsilon^n + b_{n-1}(t)\varepsilon^{n-1} + \ldots + b_1(t)\varepsilon + 1}. \tag{9}$$

Здесь $\tau = t/\varepsilon$, а коэффициенты в (9) есть неизвестные гладкие функции своих аргументов, которые подбираются таким образом, чтобы сумма n членов разложения выражения (9) по параметру ε при $\varepsilon \longrightarrow 0$ совпадала с частичной суммой $x_n(t, \varepsilon)$ из (7), а сумма n членов разложения выражения (9) по $1/\varepsilon$ при $\varepsilon \longrightarrow \infty$ совпадала с частичной суммой из (8). Отметим, что число неизвестных функций в (9) равно $3n + 2$.

Каждое из выражений $x_{[n/n]}$, $x_{\varepsilon \to 0}$ представим в виде двух слагаемых – регулярного, не содержащего переменной τ, и погранслойного, содержащего переменную τ:

$$x_{[n/n]}^{\text{синг}} = \frac{\tilde{a}_n(\tau)\varepsilon^n + \tilde{a}_{n-1}(\tau)\varepsilon^{n-1} + \ldots + \tilde{a}_0(\tau)}{b_n(\tau\varepsilon)\varepsilon^n + b_{n-1}(\tau\varepsilon)\varepsilon^{n-1} + \ldots + b_1(\tau\varepsilon)\varepsilon + 1},$$

$$x_{[n/n]}^{\text{рег}} = \frac{a_n(\tau)\varepsilon^n + a_{n-1}(\tau)\varepsilon^{n-1} + \ldots + a_0(\tau)}{b_n(t)\varepsilon^n + b_{n-1}(t)\varepsilon^{n-1} + \ldots + b_1(t)\varepsilon + 1},$$

$$x_{\varepsilon \to 0}^{\text{рег}} = \bar{x}_0(t) + \varepsilon\bar{x}_1(t) + \ldots + \varepsilon^n\bar{x}_n(t) + O(\varepsilon^{n+1}),$$

$$x_{\varepsilon \to 0}^{\text{синг}} = \Pi_0 x(\tau) + \varepsilon\Pi_1 x(\tau) + \ldots + \varepsilon^n\Pi_n x(\tau) + O(\varepsilon^{n+1}).$$

Построим невязки $\Delta_{\varepsilon \to 0}^{\text{рег}} = x_{\varepsilon \to 0}^{\text{рег}} - x_{[n/n]}^{\text{рег}}$, $\Delta_{\varepsilon \to 0}^{\text{синг}} = x_{\varepsilon \to 0}^{\text{синг}} - x_{[n/n]}^{\text{синг}}$, $\Delta_{\varepsilon \to \infty} = x_{\varepsilon \to \infty} - x_{[n/n]}$.

Считая коэффициенты $\bar{x}_k(t)$, $\Pi_k x(\tau)$, $X_k(t)$, где $k = \overline{0, n}$, известными (см. [5]), будем искать неизвестные коэффициенты $\tilde{a}_k(\tau)$, $a_k(t)$, где $k = \overline{0, n}$, и $b_k(t)$, где $k = \overline{1, k}$, в (9), потребовав выполнения условий

$$\Delta_{\varepsilon \to 0}^{\text{рег}} = O(\varepsilon^{n+1}), \quad \Delta_{\varepsilon \to 0}^{\text{синг}} = O(\varepsilon^{n+1}), \quad \Delta_{\varepsilon \to 0} = O(1/\varepsilon^{n+1}).$$

Для этого разложим выражение $\Delta_{\varepsilon \to 0}^{\text{рег}}$ в ряд по ε при $\varepsilon \longrightarrow 0$. Делая подстановку $t = \varepsilon\tau$, разлагаем выражение $\Delta_{\varepsilon \to 0}^{\text{синг}}$ в ряд по ε при $\varepsilon \longrightarrow 0$. Делая замену $\tau = t/\varepsilon$, разлагаем выражение $\Delta_{\varepsilon \to \infty}$ в ряд по $1/\varepsilon$ при $\varepsilon \longrightarrow \infty$. Приравнивая последовательно коэффициенты при одинаковых степенях ε в невязках $\Delta_{\varepsilon \to 0}^{\text{рег}}$, $\Delta_{\varepsilon \to 0}^{\text{синг}}$, $\Delta_{\varepsilon \to \infty}$, получаем систему из $3n + 2$ уравнений для $3n + 2$ неизвестных коэффициентов $a_n(t), a_{n-1}(t), \ldots, a_0(t), \tilde{a}_n(\tau), \tilde{a}_{n-1}(\tau), \ldots, \tilde{a}_0(\tau), b_n(t), b_{n-1}(t), \ldots, b_1(t)$. Итак, сначала имеем

$$\frac{\tilde{a}_n(t)\varepsilon^n + a_{n-1}(t)\varepsilon^{n-1} + \ldots + a_0(t)}{b_n(t)\varepsilon^n + b_{n-1}(t)\varepsilon^{n-1} + \ldots + b_1(t)\varepsilon + 1} = \bar{x}_0(t) + \ldots + \varepsilon^n\bar{x}_n(t) + O(\varepsilon^{n+1}), \tag{10}$$

$$\frac{\tilde{a}_n(\tau)\varepsilon^n + \tilde{a}_{n-1}(\tau)\varepsilon^{n-1} + \ldots + \tilde{a}_0(\tau)}{b_n(\tau\varepsilon)\varepsilon^n + b_{n-1}(\tau\varepsilon)\varepsilon^{n-1} + \ldots + b_1(\tau\varepsilon)\varepsilon + 1} = \Pi_0 x(\tau) + \ldots + \varepsilon^n\Pi_n x(\tau) + O(\varepsilon^{n+1}), \tag{11}$$

$$\frac{\{a_n(t)+\tilde{a}_n(t/\varepsilon)\varepsilon^n+[a_{n-1}(t)+\tilde{a}_{n-1}(t/\varepsilon)]\varepsilon^{n-1}+\ldots+a_0(t)+\tilde{a}_0(t/\varepsilon)\}}{b_n(t)\varepsilon^n+b_{n-1}(t)\varepsilon^{n-1}+\ldots+b_1(t)\varepsilon+1}= \\ = X_0(t)+\frac{1}{\varepsilon}X_1(t)+\ldots+\frac{1}{\varepsilon^{n-1}}X_{n-1}(t)+O\left(\frac{1}{\varepsilon^n}\right). \tag{12}$$

Умножая обе части выражения (10) на знаменатель, а затем раскрывая скобки и приравнивая коэффициенты при соответствующих степенях ε до порядка n включительно, получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} a_0(t) &= \bar{x}_0(t), \\ a_1(t) &= \bar{x}_0(t)b_1(t)+\bar{x}_1(t), \\ a_2(t) &= \bar{x}_0(t)b_2(t)+\bar{x}_1(t)b_1(t)+\bar{x}_2(t), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n(t) &= \bar{x}_0(t)b_n(t)+\bar{x}_1(t)b_{n-1}(t)+\bar{x}_{n-1}(1)b_1(t)+\bar{x}_n(t). \end{aligned} \tag{13}$$

Введем следующие обозначения для векторов:

$$a(t)=\begin{pmatrix} a_0(t) \\ \ldots \\ a_n(t) \end{pmatrix}, \quad \tilde{a}(\tau)=\begin{pmatrix} \tilde{a}_0(\tau) \\ \ldots \\ \tilde{a}_n(\tau) \end{pmatrix}, \quad b(t)=\begin{pmatrix} b_0(t) \\ \ldots \\ b_n(t) \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Введем матрицу

$$\bar{X}_0(t)=\begin{pmatrix} \bar{x}_0(t) & & & & 0 \\ \bar{x}_1(t) & \bar{x}_0(t) & & & \\ \bar{x}_2(t) & \bar{x}_1(t) & \bar{x}_0(t) & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \bar{x}_n(t) & \bar{x}_{n-1}(t) & \bar{x}_{n-2}(t) & \bar{x}_{n-3}(t) \;\ldots & \bar{x}_0(t) \end{pmatrix}. \tag{15}$$

Заметим, что матрица $\bar{X}_0(t)$ невырожденная и ее определитель равен $\bar{x}_0(t)^{n+1}$, если $\bar{x}_0(t) \neq 0$ при $t \in [0, T]$.

Систему (13) можно переписать в матричном виде:

$$a(t)=\bar{X}_0(t)b(t). \tag{16}$$

Умножая обе части выражения (11) на знаменатель и раскладывая коэффициенты $b_1(\tau\ \varepsilon)$, … …, $b_n(\tau\ \varepsilon)$ в ряды по ε в окрестности $\varepsilon = 0$, а затем раскрывая скобки и приравнивая коэффициенты при соответствующих степенях ε до порядка n включительно, получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \tilde{a}_0(\tau) &= \Pi_0 x(\tau), \\ \tilde{a}_1(\tau) &= \Pi_1 x(\tau)+\Pi_0 x(\tau)b_1(0), \\ \tilde{a}_2(\tau) &= \Pi_2 x(\tau)+\Pi_1 x(\tau)b_1(0)+\Pi_0 x(\tau)(b_1'(0)\tau+b_2(0)), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \tilde{a}_n(\tau) &= \Pi_n x(\tau)+\Pi_{n-1}x(\tau)b_1(0)+\Pi_{n-2}x(\tau)[b_1'(0)\tau+b_2(0)]+\ldots \\ &\ldots+\Pi_0 x(\tau)\left(\frac{1}{(n-1)!}b_1^{(n-1)}(0)\tau^{n-1}+\frac{1}{(n-2)!}b_2^{(n-2)}(0)\tau^{n-2}+\ldots+b_{n-1}'(0)\tau+b_n(0)\right). \end{aligned} \tag{17}$$

Введем матрицу

$$\Pi_0(\tau) = \begin{pmatrix} \Pi_0x(\tau) & & & & \\ \Pi_1x(\tau) & \Pi_0x(\tau) & & \mathbf{0} & \\ \Pi_2x(\tau) & \Pi_1x(\tau) & \Pi_0x(\tau) & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Pi_nx(\tau) & \Pi_{n-1}x(\tau) & \Pi_{n-2}x(\tau) & \dots & \Pi_0x(\tau) \end{pmatrix}. \tag{18}$$

Заметим, что эта матрица невырожденная и ее определитель равен $[\Pi_0x(\tau)]^{n+1}$, если $\Pi_0x(\tau) \neq 0$ при $\tau \in [0, \infty)$. Обозначим через $\Pi_1(\tau)$ матрицу, получающуюся из матрицы $\Pi_0(\tau)$ сдвигом на одну строку вниз, т.е. дописыванием нулевой первой строки и вычеркиванием последней:

$$\Pi_1(\tau) = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ \Pi_0x(\tau) & 0 & & \mathbf{0} & \\ \Pi_1x(\tau) & \Pi_0x(\tau) & 0 & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Pi_{n-1}x(\tau) & \Pi_{n-2}x(\tau) & \Pi_{n-3}x(\tau) & \Pi_{n-4}x(\tau) & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Аналогично обозначим через $\Pi_2(\tau)$ матрицу, получающуюся из матрицы $\Pi_1(\tau)$ сдвигом на одну строку вниз, через $\Pi_k(\tau)$ – матрицу, получающуюся из матрицы $\Pi_{k-1}(\tau)$ сдвигом на одну строку вниз. При таком определении матриц легко видеть, что k сдвигов матрицы $\Pi_0(\tau)$ превращают последнюю в матрицу, состоящую из одних нулевых строк. Тогда систему (17) можно переписать в матричном виде:

$$\tilde{a}(\tau) = \Pi_0(\tau)b(0) + \tau\Pi_1(\tau)b'(0) + \dots + \frac{1}{(n-1)!}\tau^{n-1}\Pi_{n-1}(\tau)b^{(n-1)}(0).$$

Введем матрицу размерности $(n+1) \times (n+1)$:

$$L = \begin{pmatrix} 0 & & & \mathbf{0} \\ 1 & 0 & & \\ & & \dots & \\ \mathbf{0} & & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда легко видеть, что выполняется

$$\Pi_1(\tau) = \Pi_0(\tau)L, \quad \Pi_2(\tau) = \Pi_1(\tau)L = \Pi_0(\tau)L^2, \dots, \Pi_k(\tau) = \Pi_0(\tau)L^k.$$

Необходимое уравнение для нахождения $\tilde{a}(t)$ можно записать, используя только матрицы $\Pi_0(\tau)$ и L:

$$\tilde{a}(\tau) = \Pi_0(\tau)b(0) + \tau\Pi_0(\tau)Lb'(0) + \dots + \frac{\tau^{n-1}}{(n-1)!}\Pi_0(\tau)L^{n-1}b^{(n-1)}(0), \tag{19}$$

или

$$\tilde{a}(\tau) = \sum_{i=0}^{n-1}\frac{\tau^i}{i!}\Pi_0(\tau)L^ib^{(i)}(0).$$

В (12) сделаем замену $\varepsilon = 1/\mu$, а затем, умножая и числитель, и знаменатель дроби в левой части соотношения (12) на μ^m, получаем

$$\begin{gathered} \frac{a_n(t) + \tilde{a}_n(t\mu) + [a_{n-1}(t) + \tilde{a}_{n-1}(t\mu)]\mu + \dots + [a_0(t) + \tilde{a}_0(t\mu)]\mu^n}{b_n(t)\varepsilon^n + b_{n-1}(t)\mu + \dots + b_1(t)\mu^{n-1} + \mu^n} = \\ = X_0(t) + X_1(t)\mu + \dots + X_{n-1}(t)\mu^{n-1} + O(\mu^n). \end{gathered} \tag{20}$$

Умножая обе части выражения (20) на знаменатель и раскладывая коэффициенты $\tilde{a}_0(t, \mu)$, ..., $\tilde{a}_n(t, \mu)$ в ряды по μ в окрестности $\mu = 0$, а затем раскрывая скобки и приравнивая коэффициенты при соответствующих степенях μ до порядка $n - 1$ включительно, получаем следующую систему уравнений:

$$
\begin{gathered}
X_0(t)b_n(t) - a_n(t) + \tilde{a}_n(0), \\
X_1(t)b_n(t) + X_0(t)b_{n-1}(t) = a_{n-1}(t) + \tilde{a}_{n-1}(0) + ta_n'(0), \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
X_n(t)b_n(t) + X_{n-1}(t)b_{n-1}(t) + \ldots + X_1(t)b_1(t) + X_0(t) = a_0(t) + \tilde{a}_0(0) + ta_0'(0) + \frac{t^2}{2!}a_2''(0) + \ldots + \frac{t^n}{n!}\tilde{a}_n^{(n)}(0).
\end{gathered}
\tag{21}
$$

Заметим, что матрица $X_\infty(t)$ невырожденная и ее определитель равен $[-X_0(t)]^{n+1}$, если $X_0(t) \neq 0$ при $t \in [0, T]$.

Введем матрицу размерности $(n + 1) \times (n + 1)$:

$$
M_0 = \begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & \therefore & \\ 1 & & 0 \end{pmatrix}.
$$

Обозначим через M_1 матрицу, получающуюся из матрицы M_0 сдвигом на одну строку вниз:

$$
M_1 = \begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ & & 0 & 1 \\ & & \therefore & \\ 0 & 1 & & 0 \end{pmatrix}.
$$

Аналогично обозначим через M_2 матрицу, получающуюся из матрицы M_1 сдвигом на одну строку вниз, через M_k – матрицу, получающуюся из матрицы M_{k-1} сдвигом на одну строку вниз. Тогда систему (21) можно переписать в матричном виде:

$$
X_\infty(t)b(t) = M_0a(t) + M_0\tilde{a}(0) + tM_1a'(0) + \frac{1}{2!}t^2M_2\tilde{a}''(0) + \ldots + \frac{t^{n-1}}{(1-n)!}M_{n-1}\tilde{a}^{(n-1)}(0). \tag{22}
$$

Легко видеть, что выполняются следующие соотношения:

$$
M_1 = LM_0, \quad M_2 = LM_1 = L^2M_0, \ldots, M_k = L^kM_0.
$$

Тогда уравнение можно записать, используя только матрицы M и L:

$$
X_\infty(t)b(t) = M_0a(t) + M_0\tilde{a}(t) + tLM_1a'(t) + \frac{t^2}{2!}L^2M_0\tilde{a}''(0) + \ldots + \frac{t^{n-1}}{(1-n)!}L^{n-1}M_0\tilde{a}^{(n-1)}(0)
$$

или

$$
X_\infty(t)b(t) = M_0a(t) + \sum_{i=0}^{n-1}\frac{t^i}{i!}L^iM_0\tilde{a}^{(i)}(0).
$$

Итак, матричную систему уравнений для определения неизвестных коэффициентов в разложении Паде можно записать так:

$$
\begin{gathered}
a(t) = \bar{X}_0(t)b(t), \\
\tilde{a}(\tau) = \sum_{i=0}^{n-1}\frac{\tau^i}{i!}L^ib^{(i)}(0), \\
X_\infty(t)b(t) = M_0a(t) + \sum_{i=0}^{n-1}\frac{t^i}{i!}L^i\tilde{a}^{(i)}(0).
\end{gathered}
\tag{23}
$$

Под $a^{(k)}(t)$ понимаем вектор, составленный из компонент, являющихся k-ми производными компонент вектора $a(t)$ в точке t соответственно. Коэффициенты $a(t)$ и $\tilde{a}(\tau)$ линейным образом выражаются через $b(t)$. Таким образом, задача разрешимости построения Паде-аппроксимации порядка $[n/n]$ сводится к задаче нахождения $b(t)$ из третьего уравнения системы (23). Подставляя выражения для $a(t)$ и $\tilde{a}(\tau)$ из (23) в третье уравнение системы (23), получаем линейное уравнение относительно коэффициентов $b(t)$ и их производных в точке $t = 0$.

Чтобы упростить полученное уравнение, получим явные выражения для значений производных $\tilde{a}(\tau)$ до $(n-1)$-го порядка включительно в точке $\tau = 0$. Так как

$$\tilde{a}(\tau) = \sum_{i=0}^{n-1}\frac{\tau^i}{i!}\Pi_0(\tau)L^i b^{(i)}(0),$$

то

$$\tilde{a}(0) = \Pi_0(0)b(0),$$

$$\tilde{a}'(\tau) = \sum_{i=0}^{n-1}\frac{\tau^i}{i!}\Pi_0'(\tau)L^i b^{(i)}(0) + \sum_{i=0}^{n-1}\frac{\tau^{i-1}}{(i-1)!}\Pi_0(\tau)L^i b^{(i)}(0),$$

$$\tilde{a}'(0) = \Pi_0'(0)b(0) + \Pi_0(0)b'(0),$$

$$\tilde{a}''(\tau) = \sum_{i=0}^{n-1}\frac{\tau^i}{i!}\Pi_0''(\tau)L^i b^{(i)}(0) + 2\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\tau^{i-1}}{(i-1)!}\Pi_0'(\tau)L^i b^{(i)}(0) + \sum_{i=2}^{n-1}\frac{\tau^{i-2}}{(i-2)!}\Pi_0(\tau)L^i b^{(i)}(0),$$

$$\tilde{a}''(0) = \Pi_0''(0)b(0) + 2\Pi_0 Lb'(0) + \Pi_0(0)L^2 b''(0).$$

Вычисляя следующие по порядку производные $\tilde{a}^{(k)}(0)$, нетрудно вывести общую формулу

$$\tilde{a}^{(k)}(0) = \sum_{j=0}^{k} C_k^j \Pi_0^{(k-j)}(0)L^j b^{(j)}(0), \tag{24}$$

где $C_k^j = k!/[j!(k-j)!]$ – биномиальные коэффициенты, а $0! = 1$. После подстановки $\tilde{a}^{(k)}(0)$ уравнение для нахождения $b(t)$ принимает вид

$$[X_\infty(t) - M_0\bar{X}_0(t)]b(t) = \sum_{i=0}^{n-1}\frac{t^i}{i!}L^i M_0\left(\sum_{j=0}^{i} C_i^j \Pi_0^{(i-j)}(0)L^j b^{(j)}(0)\right). \tag{25}$$

Итак, задача построения аппроксимации Паде сводится к вопросу о разрешимости системы (25).

Перейдем к анализу разрешимости системы (25).

Введем обозначение $R(t) = X_\infty(t) - M_0\bar{X}_0(t)$ и исследуем матрицу $R(t)$. В силу определенной гладкости правых частей решения уравнений в вариациях, коэффициенты регулярных асимптотических разложений также имеют определенные свойства гладкости. Поэтому матрица $R(t)$, коэффициенты которой состоят из членов регулярных разложений, является достаточно гладкой.

Далее рассуждения необходимо проводить для всех случаев построения Паде-аппроксимации:

1) построение Паде-аппроксимации для k-й компоненты быстрой переменной в случае существенного пограничного слоя (главный член погранслойного ряда отличен от нуля);

2) построение Паде-аппроксимации для k-й компоненты быстрой переменной в случае несущественного пограничного слоя (главный член погранслойного ряда равен нулю);

3) построение Паде-аппроксимации для k-й компоненты медленной переменной.

Вернемся к анализу разрешимости системы (25). Сначала надо определить значения $b(0)$ и производные $b^k(0)$, где $k = \overline{1, n-1}$, а затем определить $b(t)$ при $t > 0$.

Если матрица $R(t) = X_\infty(t) - M_0\bar{X}_0(t)$ обратима при $t = 0$, то, по непрерывности, существует отрезок $[0, T1] \subseteq [0, T]$, на котором $R(t)$ обратима для любого $t \in [0, T_1]$.

Случай 1. Пусть переменная, для которой строится Паде-аппроксимация (9), является компонентой быстрых движений z_k ($k = \overline{1, M}$) и $z_k^0 \neq 0$.

Тогда $\Pi_0 z_k(0) = z_k^0 - \bar{z}_k(0) \neq 0$ ($\bar{z}_k(0) = \varphi_k(y^0, 0)$), т.е. имеется существенный погранслой, а для поправок $X_i(0)$, где $i = \overline{1, n}$, выполняется $X_i(0) = 0$; следовательно, соответствующая матрица $R(0)$ равна верхней треугольной матрице

$$\begin{pmatrix} -\bar{x}_n(0) & -\bar{x}_{n-1}(0) & \dots & -\bar{x}_2(0) & -\bar{x}_1(0) & X_0(0) - \bar{x}_0(0) \\ -\bar{x}_{n-1}(0) & -\bar{x}_{n-2}(0) & \dots & -\bar{x}_1(0) & X_0(0) - \bar{x}_0(0) & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ X_0(0) - \bar{x}_0(0) & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где по диагонали находятся элементы $X_0(0) - \bar{x}_0(0) = Z_0^k(0) - \bar{z}_k^0(0) = z_k^0 - \bar{z}_k(0) = \Pi_0 z_k(0) \neq 0$. Итак, в этом случае матрица $R(0)$ обратима и, следовательно, вектор $b(t)$ может быть найден единственным образом из системы (25), если известны $b(0)$ и производные $b^k(0)$, где $k = \overline{1, n-1}$. Для разрешимости (25) осталось лишь показать, что таким образом найденное $b(t)$ согласовано со всеми производными $b^{(k)}(0)$, $k = \overline{1, n-1}$, в правой части системы (25), т.е. k-я производная $b(t)$, вычисленная при $t = 0$, совпадает со своим значением $b^k(0)$.

Подставив $t = 0$ в уравнение (25), получим

$$[X_\infty(0) - M_0\bar{X}_0(0)]b(0) = M_0\Pi_0(0)b(0),$$

или

$$X_\infty(0)b(0) = M_0[\bar{X}_0(0) + \Pi_0(0)]b(0).$$

Учитывая начальные условия (2) для нахождения коэффициентов асимптотических разложений, получаем

$$X_\infty(0) = \begin{pmatrix} 0 & & x^0 \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ x^0 & & 0 \end{pmatrix}; \quad (26)$$

с другой стороны, для матрицы $[\bar{X}_0(0) + \Pi_0(0)]$ получаем

$$\bar{X}_0(0) + \Pi_0(0) = \begin{pmatrix} \bar{x}_0(0) + \Pi_0 x(0) & & & 0 \\ \bar{x}_1(0) + \Pi_1 x(0) & \bar{x}_0(0) + \Pi_0 x(0) & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \bar{x}_n(0) + \Pi_n x(0) & \bar{x}_{n-1}(0) + \Pi_{n-1}x(0) & \dots & \bar{x}_0(0) + \Pi_0 x(0) \end{pmatrix}.$$

В силу (2), $\bar{x}_0(0) + \Pi_0 x(0) = x^0$, $\bar{x}_i(0) + \Pi_i x(0) = 0$ для $i = \overline{1, n}$ поэтому уравнение

$$X_\infty(0)b(0) = M_0[\bar{X}_0(0) + \Pi_0(0)]b(0) \quad (27)$$

выполняется для любого $b_i(0)$ и можно положить $b_i(0) = 1$ для $i = \overline{0, n}$. Заметим, что

$$X_\infty(0) - M_0\bar{X}_0(0) = M_0\Pi_0(0). \quad (28)$$

Дифференцируя уравнение (25) по t и подставляя в него $t = 0$, получаем

$$[X_\infty(0) - M_0\bar{X}_0(0)]b'(0) + [X'_\infty(0) - M_0\bar{X}'_0(0)]b(0) = LM_0\Pi'_0(0)b(0) + LM_0\Pi_0(0)Lb'(0),$$

или

$$[X_\infty(0) - M_0\bar{X}_0(0)]b'(0) - LM_0\Pi_0(0)b'(0) = -[X'_\infty(0) - M_0\bar{X}'_0(0)]b(0) + LM_0\Pi'_0(0)b'(0),$$

что в силу (28) преобразуется к виду

$$[M_0\Pi_0(0) - LM_0\Pi_0(0)L]b'(0) = -[X'_\infty(0) - M_0\bar{X}'_0(0)]b(0) + LM_0\Pi'_0(0)b'(0).$$

Продолжая последовательно дифференцировать уравнение (25) по t и подставлять в него $t = 0$, нетрудно получать рекуррентные формулы для вычисления компонент вектора $b^i(0)$, $i = \overline{0, n-1}$. После k-го дифференцирования имеем

$$\sum_{i=0}^{k} C_k^i (X_\infty(t) - M_0\bar{X}_0(t))^{k-i} b^{(i)}(t) = \sum_{i=k}^{n-1} \frac{t^{i-k}}{(i-k)!} L^i M_0 \left[\sum_{j=0}^{k} C_k^j \Pi_0^{(k-j)}(0) L^j b^{(j)}(0)\right].$$

Подставив $t = 0$ и выделив слагаемые, в которые входит старшая производная, получим

$$[X_\infty(0) - M_0\bar{X}_0]b^{(k)}(0) + \sum_{i=0}^{k-1} C_k^i [X_\infty(0) - M_0\bar{X}_0(0)]^{(k-i)} b^{(i)}(0) =$$

$$= L^k M_0 \Pi_0(0) L^k b^{(k)}(0) + L^k M_0 \left[\sum_{j=0}^{k-1} C_k^j \Pi_0^{(k-j)}(0) L^j b^{(j)}(0)\right].$$

Учитывая (28), можем написать

$$[M_0\Pi_0(0) - L^k M_0\Pi_0(0)L^k]b^{(k)}(0) =$$

$$= -\sum_{i=0}^{k-1} C_k^i [X_\infty(0) - M_0\bar{X}_0(0)]^{(k-i)} b^{(i)}(0) + L^k M_0 \left[\sum_{j=0}^{k-1} C_k^j \Pi_0^{(k-j)}(0) L^j b^{(j)}(0)\right]. \tag{29}$$

Итак, нам нужно исследовать систему (29) на разрешимость для каждого $k = \overline{1, n}$. Матрица $M_0\Pi_0(0)$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \Pi_n x(0) & \Pi_{n-1}x(0) & \Pi_{n-2}x(0) & \dots & \Pi_1 x(0) & \Pi_0(x) \\ \Pi_{n-1}x(0) & \Pi_{n-2}x(0) & \Pi_{n-3}x(0) & \dots & \Pi_0 x(0) & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Pi_0 x(0) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и ее определитель равен $(-1)^{n+1}[\Pi_0 x(0)]^{n+1}$ и (так как мы рассматриваем существенный погранслой) отличен от нуля. Исследуем структуру матрицы $L^k M_0 \Pi_0(0) L^k$ для каждого $k = \overline{1, n}$. Как уже выше было указано, умножение матрицы $M_0\Pi_0(0)$ на L^k слева эквивалентно дописыванию k нулевых строк сверху и вычеркиванию последних k строк. Непосредственной проверкой легко убедиться, что умножение матрицы $M_0\Pi_0(0)$ на L^k справа эквивалентно дописыванию k нулевых столбцов справа и вычеркиванию первых k строк слева. Выпишем матрицы $L^k M_0 \Pi_0(0) L^k$ в явном виде для различных k:

$$LM_0\Pi_0(0)L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \Pi_{n-1}x(0) & \Pi_{n-2}x(0) & \Pi_{n-3}x(0) & \dots & \Pi_0x(0) & 0 \\ & & & & & \\ \Pi_1x(0) & \Pi_0x(0) & 0 & & \mathbb{O} & \\ \Pi_0x(0) & 0 & & & & \end{pmatrix},$$

$$L^2M_0\Pi_0(0)L^2 = \begin{pmatrix} & & \mathbb{O} & \\ & & & \\ \Pi_1x(0) & \Pi_0x(0) & 0 & 0 \\ \Pi_0x(0) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

....

$$L^nM_0\Pi_0(0)L^n = \begin{pmatrix} & \mathbb{O} & \\ \Pi_0x(0) & 0 \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Учитывая структуру матрицы $M_0\Pi_0(0)$, получаем, что матрица $L^kM_0\Pi_0(0)L^k$ получается из матрицы $M_0\Pi_0(0)$ заменой первых k строк на нулевые.

Если мы докажем разрешимость системы (29) для случая $k = n + 1$, то этим докажем и разрешимость для $k < n + 1$, так как система (29) для $k = i - 1$ ($i = \overline{2, n + 1}$) получается из той же системы для поиска следующей производной $b^{(k+1)}(0)$ отбрасыванием последнего уравнения.

Легко видеть, что определитель M_0 отличен от нуля в силу определения M_0, а определитель Π_0 отличен от нуля, так как мы рассматриваем существенный погранслой, поэтому система (29) разрешима для всех $k = \overline{1, n-1}$. Отсюда следует, что $b^{(k+1)}(0)$ рекуррентно выражается единственным образом через младшие производные вектора $b(t)$ в точке $t = 0$, поэтому матрица $R(t)$ на отрезке $[0, T_1] \subseteq [0, T]$ обратима для любого $t \in [0, T_1]$.

С другой стороны, так как $b_i(0) = 1$, $i = \overline{0, n}$, полином $b_n(t)\varepsilon^n + b_{n-1}(t)\varepsilon^{n-1} + \dots + b_1(t)\varepsilon + 1$ при $t = 0$ строго положителен, а поэтому, по непрерывности, существует отрезок $[0, T_2] \subseteq [0, T]$, на котором он не имеет нулей. Выберем $\tilde{T} = \min(T_1, T_2)$. Тогда на отрезке $[0, \tilde{T}] \subseteq [0, T]$ аппроксимация Паде (9) для компоненты быстрых движений вектора решения задачи (1), (2) существует.

Таким образом, если для компоненты быстрых движений z_k имеет место существенный погранслой, то существует отрезок $[0, \tilde{T}] \subseteq [0, T]$, на котором аппроксимация Паде (9) существует.

Случай 2а. Пусть переменная, для которой строится Паде-аппроксимация (9), является компонентой быстрых движений z_k ($k = \overline{1, M}$), но $\Pi_0z_k(0) = \overset{0}{z_k} - \bar{z}_0(0) = 0$, $\Pi_1z_k(0) = -\bar{z}_{k1}(0) \neq 0$. Для поправок $X_i(0)$, где $i = \overline{1, n}$, выполняется $X_i(0) = 0$, следовательно, соответствующая матрица $R(0)$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} -\bar{x}_n(0) & -\bar{x}_{n-1}(0) & \dots & \bar{x}_2(0) & -\bar{x}_1(0) & 0 \\ -\bar{x}_{n-1}(0) & -\bar{x}_{n-2}(0) & \dots & -\bar{x}_1(0) & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

а ее ранг равен n. Матрица $M_0\Pi_0(0)$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \Pi_n x(0) & \Pi_{n-1}x(0) & \Pi_{n-2}x(0) & \dots & \Pi_1 x(0) & 0 \\ \Pi_{n-1}x(0) & \Pi_{n-2}x(0) & \Pi_{n-3}x(0) & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Pi_1 x(0) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Сразу же заметим, что матрицы $R(0)$ и $M_0\Pi_0(0)$ с точностью до обозначения $\Pi_i x(0) = -\bar{x}_i(0)$ совпадают.

Обозначим через $\tilde{R}(0)$ матрицу, получающуюся из $R(0)$ вычеркиванием последней строки и последнего столбца. По предположению, $\bar{x}_1(0) \neq 0$, следовательно, $\det[\tilde{R}(0)] = (-1)^n \bar{x}_1(0)^n \neq 0$. Легко видеть, что матрицы $R(0)$ и $\tilde{R}(0)$ симметрические. Обозначим через $h(t)$ вектор, получающийся из вектора, стоящего в правой части (29), отбрасыванием последней компоненты. Таким образом, здесь надо доказать, что система $R(0)b(0) = h(0)$ разрешима в точке $t = 0$, а следовательно, и в некоторой ее окрестности система $R(t)b(t) = h(t)$ разрешима (доказательство аналогично случаю 1). Для доказательства разрешимости системы (29) относительно $b(t)$ воспользуемся теоремой Фредгольма. Решим систему

$$R^{\mathrm{T}}(0)y = R(0)y = 0. \tag{30}$$

В силу определения матрицы $R(0)$, решение (30) есть $y = \begin{pmatrix} \tilde{y} \\ y_n \end{pmatrix}$, где $\tilde{y}$ – решение системы $\tilde{R}(0)\tilde{y} = 0$. Так как $\det[\tilde{R}(0)] \neq 0$, то система $\tilde{R}(0)\tilde{y} = 0$ имеет единственное решение $\tilde{y} = 0$, поэтому выполнение условия $(y, h(0)) = 0$ сводится к выполнению равенства $y_n \cdot h^n(0) = 0$. Так как $h(0) = M_0\Pi_0(0)b_0$, то $h_n(0) = \Pi_0 x(0)b_0 = 0$, следовательно, условие ортогональности $h(0)$ ядру сопряженного оператора выполняется.

Итак, существует $T_1 > 0$ такое, что $R(t)$ на отрезке $[0, T_1] \subseteq [0, T]$ обратима для любого $t \in [0, T_1]$.

Для согласованности $b(t)$ с правой частью в (29), так же как и в случае 1, достаточно потребовать, чтобы система $M_0\Pi_0(0)b^{(n)}(0) = 0$ (правая часть (29) после n дифференцирований будет равна 0) была разрешима относительно $b^{(n)}(0)$. Как уже указывалось, матрицы $R(0)$ и $M_0\Pi_0(0)$ с точностью до обозначения $\Pi_i x(0) = -\bar{x}_i(0)$ совпадают, поэтому разрешимость системы $M_0\Pi_0(0)b^{(n)}(0) = 0$ относительно $b^{(n)}(0)$ сводится к выполнению условия $y_n \cdot 0 = 0$, что, очевидно, имеет место.

Случай 2б. Пусть переменная, для которой строится Паде-аппроксимация (9), является компонентой быстрых движений z_k ($k = \overline{1, M}$), но $\Pi_i z_k(0) = z_k^0 - \bar{z}_{ki}(0) = 0$, $i = \overline{0, I}$, $\Pi_{I+1}z_k(0) = -\bar{z}_{k, I+1}(0) \neq$ $\neq 0$ (погранслой возникает только в $(I + 1)$-м приближении).

В этом случае в матрице $R(0)$ только главный минор $(n + 1 - I)$-го порядка отличен от нуля. Обозначив через $\tilde{\tilde{R}}(0)$ матрицу, получающуюся из $R(0)$ вычеркиванием последних I строк и I столбцов, и проведя рассуждения, аналогичные рассуждениям в случае 2а, получим, что условие $(y, h(0)) = 0$, где $y = (\tilde{\tilde{y}}, y_{n+1-I}, \dots, y_n)^{\mathrm{T}}$, $\tilde{\tilde{y}}$ – решение системы $\tilde{\tilde{R}}(0)\tilde{\tilde{y}} = 0$, т.е. $\tilde{\tilde{y}} = 0$, сводится к выполнению равенства

$$\sum_{i=n+1-I}^{n+1} y_i \cdot h_i(0) = 0.$$

Так как $h(0) = M_0\Pi_0(0)b_0(0)$, то

$$h_{n+1-i}(0) = \sum_{j=0}^{i+1} \Pi_j x(0)b_j(0), \quad i = \overline{0, I};$$

следовательно, $h_{n+1-i}(0) \equiv 0$ для $i = \overline{0, I}$, поэтому требуемое равенство выполняется.

Случай 3. Пусть переменная, для которой строится Паде-аппроксимация (9), является компонентой медленных движений y_k ($k = \overline{1, m}$). В этом случае выполняется $\Pi_0 y_k(\tau) \equiv 0$, а следовательно, $\Pi_0 y_k(\tau) = 0$, поэтому доказательство разрешимости задачи построения аппроксимации Паде в точности совпадает с доказательством для случая 2.

Итак, доказана теорема.

Теорема 2. *Пусть в задаче* (1), (2) *выполнены условия* I–V *и для i-й компоненты вектора решения система* (25) *разрешима относительно* $b(t)$ *таким образом, что полином* $b_n(t)\varepsilon^n + b_{n-1}(t)\varepsilon^{n-1} + \ldots + b_1(t)\varepsilon + 1$ *не имеет нулей при* $t \in [0, T]$. *Тогда аппроксимация Паде* (9) *для i-й компоненты вектора решения задачи* (1), (2) *существует на* [0, T] *и коэффициенты определяются из* (23).

Отметим, что первая группа условий совпадает с условиями теоремы А.Б. Васильевой (см. [5]) и таким образом погранслойная асимптотика является главенствующей при выделении класса задач. Вторая группа условий связана с разрешимостью системы (25) относительно $b(t)$ и отсутствием нулей в знаменателе.

3. ПРИМЕР

Первые расчеты для начальной задачи выполнены в [8]. Здесь рассмотрим начальную задачу

$$\varepsilon dx(t)/dt = -x(t) - e^{-t}, \quad x(0) = -1.$$

Задача имеет точное решение

$$x(t, \varepsilon) = -\frac{e^{-1/\varepsilon}\varepsilon - e^{-t}}{-1+\varepsilon}.$$

Легко видеть, что при $\varepsilon = 1$ точное решение имеет особенность в знаменателе, поэтому Паде-аппроксимация точного решения, имеющая ту же особенность в знаменателе, является более естественной, чем не имеющая особенностей. При малых ε, следуя методу пограничных функций, ищем асимптотическое приближение в виде

$$x(t) = \bar{x}_0(t) + \Pi_0 x(\tau) + \varepsilon[\bar{x}_1(t) + \Pi_1 x(\tau)] + \ldots .$$

Для нахождения членов нулевого порядка получаем систему

$$-\bar{x}_0(t) - e^{-t} = 0, \quad \frac{d}{d\tau}\Pi_0 x(\tau) = -\Pi_0 x(\tau), \quad \Pi_0 x(0) + \bar{x}_0(0) = 1,$$

решение которой есть $\bar{x}_0(t) = -e^{-t}$, $\Pi_0 x(\tau) = 0$.

Для нахождения членов первого порядка получаем систему

$$\frac{d}{dt}\bar{x}_1(t) = -\bar{x}_1(t), \quad \frac{d}{d\tau}\Pi_1 x(\tau) = -\Pi_1 x(\tau), \quad \Pi_1 x(0) + \bar{x}_1(0) = 0,$$

решение которой есть $\bar{x}_1(t) = e^{-t}$, $\Pi_1 x(\tau) = -e^{-\tau}$.

Итак, асимптотика при $\varepsilon \longrightarrow 0$ имеет вид $X_{\varepsilon \to 0} = -e^{-t} + \varepsilon e^{-t} - \varepsilon e^{-\tau}$.

Для коэффициентов асимптотики при $\varepsilon \longrightarrow \infty$ получаем

$$\frac{d}{dt}X_0(t) = 0, \quad X_0(0) = -1, \quad \frac{d}{dt}X_1(t) = -X_0(t) - e^{-t}, \quad X_1(0) = 0,$$

откуда $X_0(t) = 1$, $X_1(t) = t + e^{-t} - 1$.

Итак, асимптотика при $\varepsilon \longrightarrow \infty$ имеет вид $X_{\varepsilon \to 0} = 1 + (t + e^{-t} - 1)/\varepsilon$.

Для демонстрации удобства матричного формализма выпишем явные формулы для коэффициентов Паде в случае нахождения Паде-аппроксимации порядка [1/1]. Для построения Паде-аппроксимации порядка [1/1] решения начальной задачи (1), (2) нам потребуются найденные выше асимптотика первого порядка $x_{\varepsilon \to 0}$ при $\varepsilon \longrightarrow 0$ и асимптотика первого порядка $X_{\varepsilon \to 0}$ при $\varepsilon \longrightarrow \infty$.

Паде-аппроксимацию порядка [1/1] решения задачи (1), (2) ищем в виде

$$x_{[1/1]} = \frac{[a_1(t) + \tilde{a}_1(\tau)]\varepsilon + a_0(t) + \tilde{a}_0(\tau)}{b_1(t)\varepsilon + 1}.$$

Далее нам потребуются следующие матрицы и векторы:

$$a(t) = \begin{bmatrix} a_0(t) \\ a_1(t) \end{bmatrix}, \quad \tilde{a}(\tau) = \begin{bmatrix} \tilde{a}_0(\tau) \\ \tilde{a}_1(\tau) \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$b(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ b_1(t) \end{bmatrix}, \quad \bar{X}_0(t) = \begin{bmatrix} \bar{x}_0(t) & 0 \\ \bar{x}_1(t) & \bar{x}_0(t) \end{bmatrix},$$

$$\bar{X}_\infty(t) = \begin{bmatrix} 0 & \bar{X}_0(t) \\ \bar{X}_0(t) & \bar{X}_1(t) \end{bmatrix}, \quad \Pi_0(\tau) = \begin{bmatrix} \Pi_0 x(\tau) & 0 \\ \Pi_1 x(\tau) & \Pi_0 x(\tau) \end{bmatrix}.$$

Неизвестные коэффициенты Паде теперь можно выписать в виде явных формул:

$$b_1(t) = \frac{\Pi_0 x(0) + \bar{x}_1(t) + \Pi_1 x(0)}{X_0(t) - \bar{x}_0(t)},$$

$$\begin{bmatrix} a_0(t) \\ a_1(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{x}_0 \\ \bar{x}_1(t) + \bar{x}_0(t) b_1(t) \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{a}_0(\tau) \\ \tilde{a}_1(\tau) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Pi_0 x(\tau) \\ \Pi_1 x(\tau) + \Pi_0 x(\tau) b_1(0) \end{bmatrix}.$$

Итак, Паде-аппроксимация точного решения порядка [1/1], построенная на основании двух предельных асимптотик, совпадает с точным решением, поэтому нули знаменателя Паде-аппроксимации иногда могут быть естественными.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложенная процедура построения приближения к решениям начальных задач с параметром является по сути интерполяционной. Но оценки близости построенных приближений по параметру имеются фактически только в областях "действия" асимптотических приближений. Для средних значений параметра оценки близости отсутствуют и их, по-видимому, можно получить, только проводя аналогию со сплайн-конструкциями, значительно увеличивая число значений параметра, в окрестности которых будут задаваться не значения решения, а асимптотические приближения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Моисеев Н.Н.* Асимптотические методы нелинейной механики. М.: Наука, 1981.
2. *Федорюк М.В.* Асимптотические методы для обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1983.
3. *Тихонов А.Н.* Системы дифференциальных уравнений, содержащих малые параметры при производных // Матем. сб. 1952. Т. 31(73). № 3. С. 575–586.
4. *Понтрягин Л.С.* Асимптотическое поведение решений систем дифференциальных уравнений с малым параметром при высших производных // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1957. Т. 21. № 5. С. 605–627.
5. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973.
6. *Мищенко Е.Ф., Розов Н.Х.* Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания. М.: Наука, 1975.
7. *Бейкер Дж., Грейвс-Моррис П.* Аппроксимация Паде. М.: Мир, 1986.
8. *Дмитриев М.Г., Беляева Н.П.* Сращивание асимптотик решения начальной задачи с параметром на основе Паде-аппроксимации // Программные системы. М.: Наука, 1999. С. 66–71.