М. Г. Дмитриев, М. В. Нестерова, В. П. Гердт, Применение базисов Грёбнера для решения полиномиально-нелинейных краевых задач с приближённо-заданными граничными условиями, *Фундамент. и прикл. матем.*, 1999, том 5, выпуск 3, 675–686

Применение базисов Грёбнера для решения полиномиально-нелинейных краевых задач с приближённо-заданными граничными условиями

М. Г. ДМИТРИЕВ, М. В. НЕСТЕРОВА
Институт программных систем РАН, Переславль-Залесский

В. П. ГЕРДТ
Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

УДК 519.624.2

Ключевые слова: нелинейные краевые задачи, безусловный экстремум, компьютерная алгебра, нелинейные алгебраические уравнения, базисы Грёбнера, метод штрафных функций, метод Ритца.

Аннотация

В данной работе представлен алгоритм построения приближенных решений краевых задач для полиномиально-нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, таких что одно или оба граничных условия заданы приближённо. Алгоритм основан на введении квадратичного штрафа для приближённо-заданных граничных условий и решении соответствующей задачи на безусловный экстремум. Возникающие при этом нелинейные алгебраические уравнения на коэффициенты разложения решения по подходящему набору базисных функций решаются путем построения лексикографического базиса Грёбнера. Показано, что построение такого базиса позволяет развить пертурбативную схему по обратным степеням параметров штрафа. Работа предложенного алгоритма проиллюстрирована на примере одной из краевых задач с использованием системы аналитических вычислений Reduce. Получаемая точность вычислений анализируется в сравнении с некоторыми другими методами решения данной задачи.

Abstract

M. G. Dmitriev, M. V. Nesterova, V. P. Gerdt, Application of Gröbner bases for solving polynomial-nonlinear boundary problems with inexactly known boundary conditions, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika vol. 5 (1999), № 3, p. 675–686.

In the present paper an algorithm is presented for constructing approximate solutions of boundary problems for second-order polynomial-nonlinear ordinary differential equations such that one of the boundary conditions or both of them are inexactly known. The algorithm is based on the use of the quadratic penalty functions for the approximately given boundary conditions and solving the corresponding unconditional extremum problem. The arising system of nonlinear algebraic equations in the coefficients of expansion of the solution for some appropriate basic

Фундаментальная и прикладная математика 1999, том 5, № 3, с. 675–686.

functions set is solved by the construction of a lexicographical Gröbner basis. It is shown that the construction of such a basis allows one to develop a perturbation scheme in the inverse degrees of the penalty parameters. The proposed algorithm is illustrated by an example of the boundary problem with the use of computer algebra system Reduce. The accuracy obtained is analyzed in comparison with some other methods used to solve that particular boundary problem.

1. Введение

В последнее время резко возрос интерес к применению методов компьютерной алгебры к обработке математических выражений, числовые коэффициенты которых заданы приближённо, т. е. с некоторой погрешностью. Это обусловлено, с одной стороны, огромной практической важностью такого рода преобразований, а с другой, быстрым прогрессом в развитии программных средств для интеграции аналитических и численных методов. Практически все современные системы компьютерной алгебры общематематического назначения, такие как Maple, Mathematica, Reduce, MuPAD, Macsyma и Axiom, имеют ряд встроенных процедур для приближённых численных расчетов. Кроме того, разработан целый ряд инструментальных средств для интерфейса указанных систем с развитыми библиотеками численных программ, в частности Axiom с NAG, и специализированными системами для численного анализа, например Maple и Mathematica с Matlab.

При работе с указанным классом математических выражений традиционными методами компьютерной алгебры возникают, однако, серьёзные проблемы анализа и верификации полученных результатов, которые часто выявляют сильную неустойчивость по отношению к малым вариациям числовых коэффициентов [1]. Простейшим нетривиальным классом математических выражений, которые выявляют подобную неустойчивость классических алгоритмов компьютерной алгебры, являются многочлены. Уже для приближённого вычисления наибольшего общего делителя двух многочленов с неточно известными коэффициентами, в том числе и многочленов от одной переменной, необходимо разрабатывать специальные алгоритмы [2, 3].

Еще более трудной задачей является преобразование систем нелинейных алгебраических уравнений к треугольному виду с целью нахождения их общих корней, что в случае точно известных коэффициентов достигается путем построения лексикографического базиса Грёбнера [4]. В случае приближённо-заданных коэффициентов здесь требуются весьма тонкие численные методы анализа результатов [5]. В принципе, вместо неточно-заданных коэффициентов можно вводить параметры и после вычисления соответствующего параметрического базиса Грёбнера задавать исходные численные значения параметров. Однако на этом пути могут возникнуть серьезные осложнения: во-первых, вычисления с параметрическими коэффициентами обычно гораздо более трудоемки, чем с числовыми; во-вторых, специализация параметров может разрушить структуру базиса Грёбнера [6].

В настоящей работе, являющейся продолжением работы [7], показано, что использование параметрических базисов Грёбнера позволяет строить приближённые решения другого класса задач с неточно-известными числовыми данными. Имеются в виду краевые задачи, описываемые полиномиально-нелинейными обыкновенными дифференциальными уравнениями второго порядка, такими что одно или оба граничных условия известны с некоторой небольшой погрешностью. Для построения решений таких краевых задач они формулируются в виде задачи минимизации некоторого функционала, включающего квадратичные штрафные функции для неточно известных граничных условий. В таком подходе числовые значение штрафных параметров характеризуют отклонение решения на границе интервала от задаваемого граничного значения.

Базисные функции, в виде разложения по которым ищется решение исходной краевой задачи, подбираются таким образом, чтобы условия экстремума имели вид нелинейных алгебраических уравнений на коэффициенты разложения. Тем самым задача сводится к решению системы нелинейных алгебраических уравнений, коэффициенты которых зависят от параметров штрафа. Последние учитывают погрешность в задании граничных условий и асимптотически, когда штрафные параметры стремятся к бесконечности, дают решение, точно удовлетворяющее граничным условиям.

Для решения полученных нелинейных алгебраических уравнений используется метод базисов Грёбнера. Показано, что построение лексикографического базиса позволяет развить схему вычислений по обратным степеням штрафных параметров и тем самым контролировать отклонение решений от граничных значений в пределах погрешности последних. При этом наличие параметров в базисе не опасно с точки зрения их специализации, поскольку не происходит разрушение треугольной структуры базиса, что и определяет всю схему вычислений.

Предложённый метод иллюстрируется на хорошо известной в литературе краевой задаче и сравнивается с рядом других численных методов. Показано, что благодаря технике базисов Грёбнера предлагаемый метод позволяет добиться приемлемой точности без специального подбора базисных функций, ориентированного именно на данную задачу, что на практике не всегда оказывается возможным.

2. Нелинейные краевые задачи второго порядка и метод штрафных функций

Будем рассматривать краевые задачи следующего вида:

$$\Phi(y'', y', y, x) = 0, \quad y(a) = y_a, \quad y(b) = y_b \quad (-\infty < a < b < \infty), \tag{1}$$

где $y(x)$ — вещественная функция, Φ — полином от своих аргументов с рациональными коэффициентами и числа a, b, y_a, y_b также предполагаются рациональными. В дальнейшем мы будем рассматривать только такие граничные задачи (1), которые имеют конечное число решений в $C_3[a, b]$.

Хотя не существует универсальных методов решения краевых задач, в особенности нелинейных, на практике используются различные подходы [8]. Все эти подходы так или иначе сводят исходную задачу к решению некоторой нелинейной системы уравнений. Наиболее прямым образом это делается при использовании хорошо известных вариационных методов, в частности методов Ритца, Галёркина, метода наименьших квадратов и метода штрафных функций. В этих случаях простейшим нетривиальным примером возникающих нелинейных уравнений являются уравнения полиномиального типа, для решения которых имеется такой универсальный метод, как метод базисов Грёбнера [4].

Метод штрафных функций обычно рассматривается в вычислительной математике как приводящий к бо́льшим погрешностям вычислений по сравнению с другими оптимизационными методами. В настоящей работе мы покажем, однако, что метод введения квадратичного штрафа для граничных условий в сочетании с методом Ритца и при использовании техники базисов Грёбнера может быть достаточно эффективным для получения приближённых решений нелинейных граничных задач.

Метод граничных штрафных функций может быть особенно полезен в случае, когда граничные условия известны с некоторой малой (экспериментальной) ошибкой. В сочетании с методом Ритца этот метод допускает следующую вариационную формулировку:

$$F(\{c_i\}, \alpha, \beta) = \int_a^b \phi(\tilde{y}\,'', \tilde{y}\,', \tilde{y}, x)dx + \alpha[\tilde{y}(a) - y_a]^2 + \beta[\tilde{y}(b) - y_b]^2 \implies \min_{\{c_i\}}, \tag{2}$$

$$y \approx \tilde{y} = \sum_{i=1}^{n} c_i v_i(x), \tag{3}$$

где

$$\Phi(y'', y', y, x) = 0 \iff \frac{d}{dx}\,\frac{d\phi}{dy'} - \frac{d}{dy}\,\phi = 0 \tag{4}$$

и v_i — базисные функции, выбранные подходящим образом [9], а α, β — неотрицательные штрафные параметры.

В пределе

$$\alpha \to \infty, \quad \beta \to \infty$$

данный метод сводится к методу Ритца. Однако для больших, но ограниченных α и β метод граничного штрафа позволяет применить методы теории возмущений по обратным степеням штрафных параметров. При этом символьные вычисления начинают играть очень важную роль, как мы покажем ниже.

3. Описание алгоритма

В данном параграфе описан достаточно простой универсальный алгоритм для приближённого решения полиномиально-нелинейных граничных задач второго порядка в форме (1) с помощью введения квадратичного граничного штрафа и вариационной формулировки (2).

Решающую роль здесь играет решение системы нелинейных алгебраических уравнений с параметрическими коэффициентами, которая получается из условий экстремума

$$\frac{\partial F}{\partial c_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n. \tag{5}$$

Неизвестными здесь являются коэффициенты c_i разложения (3).

В общем случае корни параметрической полиномиальной системы не могут быть вычислены алгебраически. Однако в данном случае можно попытаться построить разложение корней по обратным значениям параметров α, β.

Применим технику базиса Грёбнера для приведения начальной полиномиальной системы к треугольному виду, вычисляя лексикографический базис Грёбнера. Это позволяет свести параметрическую задачу с несколькими переменными к задаче с одной переменной, которая может быть решена численно с помощью метода последовательных приближений по обратным значениям штрафных параметров.

Основные шаги алгоритма

1. Выбрать некоторое подходящее множество базисных функций $v_i(x)$ в (3), обеспечивающее точное вычисление интегралов

$$\int_a^b \frac{\partial \phi}{\partial c_i} dx \quad (i = 1, \dots, n)$$

как полиномов от c_i с рациональными коэффициентами.

2. Зафиксировать n и вычислить

$$f_i = \frac{\partial F}{\partial c_i}, \quad i = 1, \dots, n.$$

3. Вычислить лексикографический базис Грёбнера для идеала, порождённого множеством полиномов $\{f_1, \dots, f_n\} \subseteq Q(\alpha, \beta)[c_1, \dots, c_n]$ при некотором упорядочении переменных c_i, например,

$$c_1 \succ c_2 \succ \dots \succ c_n.$$

4. Поскольку в соответствии с нашим предположением на структуру решений (1) порождённый полиномиальный идеал является нульмерным, выделить из базиса Грёбнера одну переменную, которая является младшей относительно упорядочения, и найти все вещественные корни в пределе

$$\alpha \to \infty,\ \beta \to \infty \iff \varepsilon_\alpha = \frac{1}{\alpha} \to 0,\ \varepsilon_\beta = \frac{1}{\beta} \to 0.$$

Вычислить значения остальных переменных c_i в нулевом приближении $\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\beta$. При этом наборе решений выражение (3) точно удовлетворяет граничным условиям.

5. Для каждого вещественного корня, полученного на шаге 4, вычислить поправки высших порядков по ε_α и ε_β. Зафиксировать значения α и β так, чтобы обеспечить приемлемое отклонение приближённого решения от граничных условий y_a и y_b соответственно.

4. Иллюстративный пример

В качестве примера рассмотрим следующее нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка, хорошо изученное в литературе [11]. Все последующие вычисления были выполнены на IBM PC 486 66 Mhz с помощью компьютерной системы Reduce 3.6 [10].

$$y'' = \frac{3}{2}y^2, \quad y(0) = 4, \quad y(1) = 1. \tag{6}$$

Задача (6) была исследована в книге [11] различными численными методами. Позднее в работе [12] методы Ритца и Галёркина были применены, с помощью системы компьютерной алгебры muMATH, для получения нелинейных алгебраических уравнений на коэффициенты a_i в разложении

$$y_n = 4 - 3x + \sum_{i=1}^{n} a_i v_i, \quad v_i = x - x^{i+1}. \tag{7}$$

В этом случае граничные условия точно удовлетворены для любого n. Заметим также, что в обеих вышеупомянутых статьях базисные функции v_i были специально подобраны для задачи (6), что дало довольно небольшие относительные ошибки на интервале $[0, 1]$, максимальные значения которых составили 2%, 0,25% и 0,06% для $n = 2,\ 3$ и 4 соответственно. Оценка относительной ошибки была получена с помощью точного решения

$$y = 4/(1+x)^2.$$

В работе [7] задача (6) была исследована методом штрафных функций в вариационной формулировке, вытекающей из метода наименьших квадратов. Здесь мы применим метод Ритца, что уменьшает на единицу степень получаемых нелинейных алгебраических уравнений, и соответственно позволяет продвинуться в практических расчетах к большим величинам n.

Применим данный метод к задаче (6) при условии, что левое граничное условие $y(0)$ удовлетворено точно, а правое контролируется единственным штрафным параметром α:

$$F(\{c_i\},\alpha) = \int_0^1 [y'^2 + y^3]\,dx + \alpha[y(1)-1]^2 \implies \min_{\{c_i\}}. \tag{8}$$

Теперь следуем описанному выше алгоритму.

1. В отличие от (7), выберем простейшие базисные функции в виде степеней x без какой-либо специальной подстройки к задаче (6),

$$y = 4 + \sum_{i=1}^{n} c_i x^i, \quad c_i \in \mathbb{R}. \tag{9}$$

2. Простейшая нетривиальная аппроксимация получается из (9) с $n = 2$. В этом случае уравнения (3) представляют собой систему из двух кубических уравнений с двумя неизвестными c_1 и c_2

$$2\alpha c_1 + 2\alpha c_2 + 6\alpha + \frac{3}{4}c_1^2 + \frac{6}{5}c_1c_2 + 10c_1 + \frac{1}{2}c_2^2 + 8c_2 + 24 = 0, \tag{10}$$

$$2\alpha c_1 + 2\alpha c_2 + 6\alpha + \frac{3}{5}c_1^2 + c_1c_2 + 8c_1 + \frac{3}{7}c_2^2 + \frac{112}{15}c_2 + 16 = 0. \tag{11}$$

Цель вычислений заключается в нахождении решения c_1 и c_2 уравнений (10)–(11) как функций штрафного параметра α. Учитывая, что параметр α должен быть достаточно большим, введём новую переменную $\varepsilon = 1/\alpha$ и перейдём к пределу $\varepsilon \to 0$. Однако попытка перейти к пределу непосредственно в системе (10)–(11) приводит к одинаковому виду $c_1 + c_2 + 3 = 0$ для обоих уравнений. Таким образом, аппроксимация нулевого порядка по ε для корней c_1 и c_2 не может быть получена прямым переходом к пределу в (10)–(11).

В отличие от этого, лексикографический базис Грёбнера допускает непосредственный переход к пределу.

3. Выберем упорядочение $c_1 \succ c_2$. При этом лексикографический базис Грёбнера, вычисленный с помощью системы Reduce, имеет вид

$$\begin{aligned}
g_1 = {} & -35280c_1\varepsilon^2 - 104370c_1\varepsilon - 12600c_1 - 15c_2^3\varepsilon^2 + 1512c_2^2\varepsilon^2 - 270c_2^2\varepsilon - \\
& -202160c_2\varepsilon^2 - 99890c_2\varepsilon - 12600c_2 + 470400\varepsilon^2 - 310800\varepsilon - 37800, \\
g_2 = {} & 15c_2^4\varepsilon^2 - 1512c_2^3\varepsilon^2 + 420c_2^3\varepsilon + 176960c_2^2\varepsilon^2 + 10220c_2^2\varepsilon + 6300c_2^2 - \\
& -1411200c_2\varepsilon^2 - 803600c_2\varepsilon - 343000c_2 + 2822400\varepsilon^2 + 2587200\varepsilon + 984900.
\end{aligned}$$

Вычисленный базис имеет треугольную форму, в которой один из полиномов зависит только от одной переменной c_2. Его коэффициенты являются полиномами по ε степени не выше чем 2. Второй полином базиса линеен по c_1, кубичен по c_2 и квадратичен по ε.

Из структуры базиса Грёбнера ясно видно, что идеал, порождённый левыми частями (10)–(11), является радикалом для любого значения параметра ε.

4. В отличие от (10)–(11), базис Грёбнера позволяет перейти к пределу при $\varepsilon \to 0$, что приводит к системе

$$c_1 + c_2 + 3 = 0,$$
$$9c_2^2 - 490c_2 + 1407 = 0$$

с единственным вещественным корнем

$$c_1 = -6{,}04131964637291, \quad c_2 = 3{,}04131964637291, \tag{12}$$

который может быть легко вычислен с помощью встроенной функции *solve* системы Reduce.

Отметим, что решение (12), являющееся решением нулевого порядка по ε, для двухчленной аппроксимации (9) приводит к относительной ошибке $\approx 9{,}64\%$ и точно удовлетворяет правому граничному условию. Эта аппроксимация хуже, чем аналогичная двухчленная аппроксимация в (7). В последнем случае, однако, благодаря специальному подбору базисных функций v_i второй член суммы включает кубичную зависимость от x в отличие от нашего случая, где мы принимаем во внимание только линейные и квадратичные зависимости.

5. Найдя лексикографический базис Грёбнера и значения нулевого порядка для c_1 и c_2, легко вычислить степенные поправки по ε. С учетом поправок первого порядка получаем

$$\begin{aligned} c_1 &= -6{,}04131964637291 + 0{,}247454508554786\varepsilon + \ldots, \\ c_2 &= 3{,}04131964637291 + 0{,}819030667164968\varepsilon + \ldots \end{aligned} \tag{13}$$

6. Выберем значение ε таким образом, чтобы обеспечить минимальное отклонение между точным решением и первым порядком двухчленной аппроксимации. Это достигается при $\varepsilon = 0{,}061$. Такой выбор уменьшает относительную ошибку до $\approx 6{,}55\%$ на интервале $[0, 1]$. Последующие поправки по ε не приводят к заметному уменьшению этой ошибки из-за малости ε. Следовательно, для дальнейшего улучшения нашей аппроксимации (9) мы должны принять в рассмотрение члены третьей степени по x.

5. Аппроксимации высших порядков

5.1. Аппроксимация третьего порядка

Выбор $n = 3$ в (9) приводит к однопараметрической системе из трёх уравнений 3-й степени по c_1, c_2, c_3.

С помощью встроенного пакета GROEBNER системы Reduce 3.6 оказалось невозможным вычислить соответствующий лексикографический базис Грёбнера на персональном компьютере из-за нехватки требуемых компьютерных ресурсов. Вычисление, выполненное на компьютере IBM R/6000 в

Эколь Политехник, Франция заняло более недели. С другой стороны, пакет ASYS [13], также написанный на языке Reduce, вычислил базис всего за 87 секунд на компьютере MS DOS 66 Мгц.

Соответствующее нулевое приближение по ε приводит к решению

$$c_1 = -7{,}34959501120727, \quad c_2 = 7{,}07003620112185, \quad c_3 = -2{,}72044118991458.$$

При этом относительная ошибка составляет $\approx 1{,}39\%$.

Решение первого порядка по ε имеет вид

$$\begin{aligned} c_1 &= -7{,}34959501120727 + 0{,}433263712745478\varepsilon,\\ c_2 &= +7{,}07003620112185 + 0{,}104168440940020\varepsilon,\\ c_3 &= -2{,}72044118991458 + 0{,}462740250587637\varepsilon \end{aligned}$$

с минимальной относительной ошибкой $1{,}24\%$ при $\varepsilon = 0{,}01$.

5.2. Аппроксимация четвертого порядка

Поскольку прямое вычисление однопараметрического лексикографического базиса Грёбнера для четырёхчленного приближения требует чрезвычайно больших машинных ресурсов, применим следующий приём. В дополнение к системе из 4-х квадратичных уравнений по c_1, c_2, c_3, c_4, которые вытекают из условия (8) с опущенным граничным членом, поскольку ищется приближение нулевого порядка по ε, рассмотрим линейное соотношение

$$c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + 3 = 0.$$

Это соотношение обеспечивает точное выполнение правого граничного условия. Расширенная таким образом система сводится к системе трёх квадратичных уравнений с тремя неизвестными. Для полученной системы удалось вычислить лексикографический базис Грёбнера с помощью пакета GROEBNER. Единственное вещественное решение имеет вид

$$\begin{aligned} c_1 &= -7{,}81450634755475, & c_2 &= 9{,}83187436577715,\\ c_3 &= -7{,}32914747940513, & c_4 &= 2{,}31177946118274 \end{aligned}$$

и даёт относительную ошибку $0{,}35\%$.

6. Сравнение полученной точности вычислений с ранее полученными данными

В нижеприведенной таблице показано сравнение точности результатов, полученных выше с помощью комбинации метода штрафных функций и метода Ритца (МР) с данными, полученными в [7] при введении штрафных функций в рамках метода наименьших квадратов (МНК) и данными работы [12], где использовалась комбинация методов Ритца и Галёркина (МРГ). При этом, как уже отмечалось выше, в работе [7] и в настоящей работе в качестве базисных функций брались простые степени x, в то время как в работе [12] были выбраны функции (7), специально подобранные для данной задачи.

В первой колонке таблицы показано число членов разложения в (3) и в отдельные колонки вынесены результаты, полученные в нулевом и первом приближении по ε.

n	МНК [7] (ε^0)	МНК [7] (ε^1)	МР (ε^0)	МР (ε^1)	МРГ [12]
2	15,8%	11,2%	9,64%	6,55%	2%
3	4,5%	–	1,39%	1,24%	0,25%
4	1,3%	–	0,35%	–	0,06%

Оценку точности с $\varepsilon = 1$ у метода наименьших квадратов и метода Ритца при $n = 3, 4$ и $n = 4$ соответственно не удалось получить из-за слишком большого объема вычислений, необходимого для построения соответствующих базисов Грёбнера.

7. Заключение

Сделанный выше анализ нелинейной граничной задачи (6) показывает, что, используя метод граничного штрафа в вариационной формулировке, можно построить приближённое решение с относительной ошибкой порядка 0,06 для двухчленной аппроксимации и порядка 0,0035 для четырехчленной. Важно подчеркнуть, что при этом делается наиболее примитивный выбор множества базисных функций, в виде степеней x, без какой-либо их специальной подстройки к задаче. Хорошо известно, что такие базисные функции обычно являются наихудшими в смысле точности аппроксимации.

Основная трудность при применении метода граничного штрафа возникает из-за высокой практической сложности построения лексикографического базиса Грёбнера с параметрическими коэффициентами. Теоретическая оценка числа операций, требуемых для вычисления базиса Грёбнера в упорядочении сначала по полной степени, а затем по обратной лексикографии с последующим преобразованием к лексикографическому базису Грёбнера, составляет d^n [14]. Здесь d — максимальная степень мономов в системе и n — число переменных. При такой оценке не принимаются в расчёт арифметические операции с коэффициентами многочленов. В параметрическом же случае эти операции оказываются весьма трудоёмкими. По этой причине удаётся выполнить необходимые вычисления с четырьмя квадратичными уравнениями от четырёх неизвестных без параметра в коэффициентах, а в параметрическом случае эта задача оказывается непреодолимой, по крайней мере для персонального компьютера.

В отличие от исходных полиномиальных уравнений, лексикографический базис Грёбнера позволяет построить асимптотическое разложение вещественных корней по обратным степеням штрафного параметра и, следовательно, подобрать его наиболее оптимальное значение в пределах погрешности граничного условия, если последнее задано с некоторой ошибкой.

Литература

[1] H. J. Stetter. Verification in computer algebra systems // Validation Numerics / R. Albrecht, G. Alefeld, H. J. Stetter, eds. Computing Suppl. V. 9. — 1993. — P. 247–263.

[2] M.-T. Noda, T. Sasaki. Approximate GCD and its application to ill-conditioned algebraic equations // J. Comp. & Appl. Math. — 1991. — V. 38. — P. 335–351.

[3] R. M. Corless, P. M. Gianni, B. M. Trager, S. M. Watt. The singular value decomposition for polynomial systems // Proceedings of «ISSAC'95», International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation. — ACM Press, 1995. — P. 195–207.

[4] T. Becker, V. Weispfenning, H. Kredel. Gröbner Bases. A Computational Approach to Commutative Algebra. Graduate Texts in Mathematics. V. 141. — New York: Springer-Verlag, 1993.

[5] H. J. Stetter. Analysis of zero clasters in maltivariate polynomial systems // Proceedings of «ISSAC'96», International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation. — ACM Press, 1996. — P. 127–135.

[6] V. Weispfenning. Comprehensive Gröbner bases // J. Symb. Comp. — 1992. — V. 14. — P. 1–29.

[7] M. G. Dmitiriev, M. V. Nesterova. On penalty function method in nonlinear boundary problems and computer algebra // Proceedings of 5th Rhine Workshop on Computer Algebra / A. Carrière, L. R. Oudin (eds.). — Saint-Louis: ISL, 1996. — P. 15.1–15.4.

[8] Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков. Численные методы. — М.: Наука, 1987.

[9] К. Ректорис. Вариационные методы в математической физике и технике. — М.: Мир, 1985.

[10] A. C. Hearn, J. P. Fitch. Reduce User's Manual. Version 3.6. — RAND Publication CP78 (Rev. 7/95). — 1995.

[11] L. Collatz. The Numerical Treatment of Differential Equations. — Berlin: Springer-Verlag, 1960.

[12] R. D. Mills. Using a small algebraic manipulation system to solve differential and algebraic equations by variational and approximaion techniques // J. Symb. Comp. — 1987. — V. 3. — P. 291–301.

[13] V. P. Gerdt, N. V. Khutornoy, A. Yu. Zharkov. ASYS2: A new version of computer algebra package ASYS for analysis and simplification of polynomial systems // Proceedings of 4th Rhine Workshop on Computer Algebra / J. Calmet (ed.). — IACS, University of Karsruhe, 1994. — P. 162–181, 15.1–15.4.

[14] J. C. Faugère, P. Gianni, D. Lazard, N.Mora. Efficient computation of zero-dimensional Gröbner bases by change of ordering // J. Symb. Comp. — 1993. — V. 16. — P. 329–344.

Статья поступила в редакцию в апреле 1997 г.