

Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

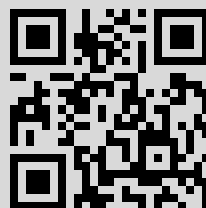
С. В. Белокопытов, М. Г. Дмитриев, Решение классических задач оптимального управления с погранслоем, *Автомат. и телемех.*, 1989, выпуск 7, 71–82

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 95.129.140.250

23 ноября 2015 г., 15:17:18



РЕШЕНИЕ КЛАССИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ПОГРАНСЛОЕМ

БЕЛОКОПЫТОВ С. В., ДМИТРИЕВ М. Г.

(Красноярск, Ашхабад)

Рассматривается применение метода пограничных функций в задачах оптимального управления с быстрыми и медленными движениями. Этот подход связан с прямым разложением исходной задачи в последовательность вариационных задач. Устанавливается релаксационность и субоптимальность асимптотических приближений.

1. Введение

Одним из классов задач управления большой размерности, успешно изучающимся в литературе с точки зрения получения способов декомпозиции и приближенных методов решения, является класс сингулярно возмущенных задач управления [1–3]. Рассмотрение сингулярно возмущенных моделей вызывается необходимостью повышения качества управления и требует в связи с этим более полного учета различных малых параметров (малые постоянные времени, малые моменты инерции, малые массы, индуктивности и т. д.). Сингулярные возмущения могут быть введены в задачу управления искусственным образом, например для регуляризации особых импульсных управлений [4] и при получении эффективных законов синтеза с большим коэффициентом усиления [3].

Сингулярно возмущенные задачи [4, 5] характеризуются наличием резко различающихся по темпу движений, что приводит к «жесткости» при вычислениях. Задачи с быстрым изменением ряда компонент вблизи границы удобно исследовать с помощью метода пограничных функций (МПФ) [4]. В задачах оптимального управления его применение в основном [1] связано с получением асимптотического разложения решений соответствующих соотношений Эйлера, полученных для классических задач на условный экстремум. В настоящей статье развивается предложенная в [6–8] прямая схема применения МПФ в задачах оптимального управления. Эта схема заключается в разложении условий задачи в постулируемый ряд МПФ, в получении серии вариационных задач для определения каждого приближения и выяснения условий субоптимальности получающихся приближенных решений. В отличие от [6, 8] указывается правило построения высших приближений, а в отличие от [8] — независимая вариационная схема доказательств.

Отметим, что явно или неявно формализм прямой схемы присутствовал в работах [9–11], где рассматривались слабо управляемые системы на уровне первого приближения, и в [9, 12], посвященных прямому усреднению управляемых систем на уровне нулевого приближения.

2. Формализм прямой схемы

Рассмотрим задачу P_ϵ :

$$(1) \quad J_\epsilon(u) = G(x(T), y(T)) + \int_0^T F(x, y, u, t) dt \rightarrow \min_u,$$

$$(2) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= f(x, y, u, t), \quad x(0) = x^0, \quad x \in \mathbb{R}^N, \\ \varepsilon \dot{y} &= g(x, y, u, t), \quad y(0) = y^0, \quad y \in \mathbb{R}^M, \\ u &\in \mathbb{R}^r, \quad 0 < \varepsilon \ll 1, \end{aligned}$$

где T — заданный момент времени, все функции, входящие в (1), (2), достаточное число раз непрерывно дифференцируемые по своим аргументам.

Следуя МПФ [4], решение задачи P_ε будем искать в виде

$$(3) \quad z(t, \varepsilon) = z_0 + \varepsilon z_1 + \dots + \varepsilon^n z_n + O(\varepsilon^{n+1}), \quad z = (x', y', u')',$$

где штрих означает транспонирование, $z_i(t, \varepsilon) = \bar{z}_i(t) + \Pi_i z(\tau_0) + Q_i z(\tau_1)$; $\bar{z}_i(t)$, $\Pi_i z(\tau_0)$; $Q_i z(\tau_1)$ — регулярный, левый пограничный и правый пограничный члены i -го приближения, $\tau_0 = t/\varepsilon$, $\tau_1 = (t-T)/\varepsilon$.

Кроме этого,

$$(4) \quad \|\Pi_i z\| \leq C e^{-a\tau_0}, \quad \|Q_i z\| \leq C e^{a\tau_1}; \quad C, a > 0.$$

Формализм прямой схемы состоит в следующем: подставляем (3) в (2) и проводим обычные преобразования техники сингулярных возмущений, т. е. раскладываем левые и правые части в (2) в степенные ряды по ε и приравниваем слева и справа члены одного порядка по ε , отдельно зависящие от t , τ_0 и τ_1 . Таким образом, получаются уравнения состояния и начальные условия для приближенных задач декомпозиции. Для определения критериев оптимальности подставляем (3) в (1) и раскладываем G и F в степенные ряды по ε . Имеем

$$(5) \quad J_\varepsilon = J_0 + \varepsilon J_1 + \dots + \varepsilon^m J_m + O(\varepsilon^{m+1}), \quad m = 2n + 1.$$

Учитывая (4) и соотношения $d\Pi_0 x/d\tau_0 = 0$, $dQ_0 x/d\tau_1 = 0$, получаем, что $\Pi_0 x = 0$, $Q_0 x = 0$. Таким образом, для определения нулевого члена регулярного ряда $\bar{z}_0(t)$ получаем так называемую вырожденную задачу P_0 :

$$\begin{aligned} J_0 &= G(\bar{x}_0(T), y_0^T) + \int_0^T F(\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{u}_0, t) dt \rightarrow \min_{(\bar{y}_0, \bar{u}_0)}, \\ \dot{\bar{x}}_0 &= f(\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{u}_0, t), \quad \bar{x}_0(0) = x^0, \\ 0 &= g(\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{u}_0, t), \quad y_0^T = \arg \min_y G(\bar{x}_0(T), y). \end{aligned}$$

Пусть $(\bar{y}_0, \bar{u}_0)$ — оптимальное управление задачи P_0 . Предположим, что $(\bar{y}_0, \bar{u}_0)$ удовлетворяет определенным необходимым условиям оптимальности:

$$(6) \quad \bar{H}_y(t) = H_y(\bar{z}_0, \bar{p}_0, \bar{q}_0, t) = 0, \quad \bar{H}_u(t) = H_u(\bar{z}_0, \bar{p}_0, \bar{q}_0, t) = 0,$$

где $H(z, p, q, t) = p' f(x, y, u, t) + q' g(x, y, u, t) - F(x, y, u, t)$,

$$(7) \quad \dot{\bar{p}}_0 = -\bar{H}_x(t), \quad \bar{p}_0(T) = -G_x(\bar{x}_0(T), y_0^T).$$

Учитывая (6), (7) и соотношения

$\bar{y}_0(0) + \Pi_0 y(0) = y^0$, $\bar{y}_0(T) + Q_0 y(0) = y_0^T$, $G_y(\bar{x}_0(T), y_0^T) = 0$, определяем представление для J_1 :

$$J_1 = \bar{G}_x x_1^T + \bar{G}_y y_1^T + \int_0^T F \bar{z}_1 dt + \int_0^\infty (F(\tau_0) - \bar{F}(0)) d\tau_0 -$$

$$\begin{aligned}
& - \int_0^{-\infty} (F(\tau_1) - \bar{F}(T)) d\tau_1 = \bar{G}_x x_1^T - \int_0^T (\bar{H}_z(\bar{z}_0, \bar{p}_0, \bar{q}_0, t) \bar{z}_1 - \\
& - \bar{p}_0' \bar{f}_z \bar{z}_1 - \bar{q}_0' \bar{g}_z \bar{z}_1) dt + \int_0^\infty (F(\tau_0) - F(0)) d\tau_0 - \\
& - \int_0^\infty (F(\tau_1) - F(0)) d\tau_1 = \bar{G}_x x_1^T - \int_0^T [(\bar{H}_x(t) + \dot{\bar{p}}_0') \bar{x}_1 - \\
& - (\dot{\bar{p}}_0' \bar{x}_1 + \bar{p}_0' \dot{\bar{x}}_1) + (\bar{H}_y(t) \bar{y}_1) + \bar{H}_u(t) \bar{u}_1] dt + \int_0^T \bar{q}_0' \dot{\bar{y}}_0 dt + \\
& + \int_0^\infty \Pi_0 F(\tau_0) d\tau_0 - \int_0^{-\infty} Q_0 F(\tau_1) d\tau_1 = (\bar{G}_x + \bar{p}_0(T)) x_1^T - \\
& - \bar{p}_0'(T) Q_1 x(0) - \bar{p}_0' \bar{x}_1(0) + \bar{q}_0'(T) \bar{y}_0(T) - \bar{q}_0'(0) \bar{y}_0(0) - \\
& - \int_0^T \dot{\bar{q}}_0' \bar{y}_0 dt + \int_0^\infty \Pi_0 F(\tau_0) d\tau_0 - \int_0^{-\infty} Q_0 F(\tau_1) d\tau_1 = \bar{q}_0'(T) y_0^T - \\
& - \bar{q}_0'(0) y_0' \int_0^T \dot{\bar{q}}_0' \bar{y}_0 dt + \int_0^\infty (F(\tau_0) - \bar{F}(0) - \bar{p}_0'(0) \frac{d\Pi_1 x}{d\tau_0} - \\
& - \bar{q}_0'(0) \frac{d\Pi_0 y}{d\tau_0}) d\tau_0 - \int_0^{-\infty} (F(\tau_1) - F(T) - \bar{p}_0'(T) \frac{dQ_1 x}{d\tau_1} - \\
& - \bar{q}_0'(T) \frac{dQ_0 y}{d\tau_1}) d\tau_1.
\end{aligned}$$

Преобразованное значение J_1 обозначим $\mathcal{J}_1$. Итак,

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_1 = & \bar{q}_0'(T) y_0^T - \bar{q}_0' y_0' - \int_0^T \dot{\bar{q}}_0' \bar{y}_0 dt - \int_0^\infty (H(\tau_0) - \bar{H}(0)) d\tau_0 + \\
& + \int_0^{-\infty} (H(\tau_1) - \bar{H}(T)) d\tau_1,
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
H(\tau_0) &= H(\bar{z}_0(0) + \Pi_0 z(\tau_0), \bar{p}_0(0), \bar{q}_0(0), 0), \\
H(\tau_1) &= H(\bar{z}_0(T) + Q_0 z(\tau_1), \bar{p}_0(T), \bar{q}_0(T), T).
\end{aligned}$$

Таким образом, неизвестными в $\mathcal{J}_1$ являются $\Pi_0 z(\tau_0)$ и $Q_0 z(\tau_1)$ и для их определения надо решить нелинейные задачи оптимальной стабилизации:

$$\Pi_0 P : \Pi_0 J = - \int_0^\infty (H(\tau_0) - \bar{H}(0)) d\tau_0 \rightarrow \min_{\Pi_0 u},$$

$$d\Pi_0 y/d\tau_0 = g(x^0, \bar{y}_0(0) + \Pi_0 y, \bar{u}_0(0) + \Pi_0 u, 0), \\ \Pi_0 y(0) = y^0 - \bar{y}_0(0);$$

$$Q_0 P: Q_0 J = \int_0^{-\infty} (H(\tau_1) - \bar{H}(T)) d\tau_1 \rightarrow \min_{Q_0 u},$$

$$dQ_0 y/d\tau_1 = g(\bar{x}_0(T), \bar{y}_0(T) + Q_0 y, \bar{u}_0(T) + Q_0 u, T), \\ Q_0 y(0) = y_0^T - \bar{y}_0(T).$$

Отметим, что в линейно-квадратичном случае задачи $\Pi_0 P$ и $Q_0 P$ совпадают с задачами в погранслоях, впервые полученными в [13]. Нелинейные задачи оптимальной стабилизации рассматривались многими авторами и при этом, наряду с условиями разрешимости, разрабатывались методы приближенного решения, заключающиеся в разложении оптимального управления в степенной ряд по фазовой переменной.

Продолжим изложение формализма. Пусть для всех $i < n$ коэффициенты z_i разложения (3) определены. Тогда J_{2n} в качестве неизвестных содержит $\bar{z}_n(t)$, а $J_{2n+1} - \Pi_n z(\tau_0)$ и $Q_n z(\tau_1)$. Отметим, что J_{2n} и J_{2n+1} получаются из J_{2n} и J_{2n+1} , соответственно, с помощью преобразований, использующих необходимые условия оптимальности в задачах приближенной декомпозиции в предыдущих приближениях. Это обстоятельство позволяет определить главное звено формализма — последовательную минимизацию коэффициентов разложения (5). Справедлива

Лемма 1. Для достаточно малых $\varepsilon > 0$

$$\min \left(\sum_{i=0}^m \varepsilon^i J_i + O(\varepsilon^{m+1}) \right) = \sum_{i=0}^m \varepsilon^i \min J_i + \\ + O(\varepsilon^{m+1}), \quad m = 2n+1,$$

где $\min J_i$ для $i = 2k$ берется по $(\bar{y}_i, \bar{u}_i)$, а для $i = 2k+1$ — по $(\Pi_i u, Q_i u)$.

Таким образом можно определить три задачи декомпозиции для нахождения $\bar{z}_n(t)$, $\Pi_n z(\tau_0)$, $Q_n z(\tau_1)$.

Лемма 2. Для нахождения $\bar{z}_n(t)$ необходимо решить задачу

$$P_n: J_n = \bar{G}_n(x_n^T, y_n^T) - \int_0^T (\frac{1}{2} \bar{z}_n' \bar{H}_{zz} \bar{z}_n + \bar{H}_n' \bar{z}_n) dt \rightarrow \min_{(\bar{y}_n, u_n)}, \\ \dot{\bar{x}}_n = \bar{f}_z(t) \bar{z}_n + \bar{f}_n(t), \quad \bar{x}_n(0) = -\Pi_n x(0), \quad x_n^T = \bar{x}_n(T) + Q_n x(0), \\ 0 = \bar{g}_z(t) \bar{z}_n + \bar{g}_n(t), \quad y_n^T = \arg \min_y \bar{G}_n(x_n^T, y),$$

где критерий J_n получен из J_{2n} , функции

$$\bar{H}_n(t), \bar{f}_n(t), \bar{g}_n(t), \bar{G}_n$$

выражаются в терминах задач

$$P_i, i < n (\bar{f}_z(t) = f_z(\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{u}_0, t), \bar{g}_z(t) = g_z(\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{u}_0, t)).$$

Для нахождения $\Pi_n z(\tau_0)$, $Q_n z(\tau_1)$ необходимо решить задачи

$$\Pi_n P: \Pi_n J = \int_0^{\infty} (\frac{1}{2} \Pi_n' z \mathcal{H}_{zz}(\tau_0) \Pi_n z + \bar{\Pi}_n'(\tau_0) \Pi_n z) d\tau_0 \rightarrow \min_{\Pi_n u},$$

$$\begin{aligned} d\Pi_n x/d\tau_0 &= f_z(\tau_0) \Pi_{n-1} z + f_n(\tau_0), \\ d\Pi_n y/d\tau_0 &= g_z(\tau_0) \Pi_n z + g_n(\tau_0), \quad \Pi_n y(0) = -\bar{y}_0(0); \end{aligned}$$

$$Q_n P: Q_n J = \int_0^{\infty} (1/2 Q_n' z \mathcal{H}_{zz}(\tau_1) Q_n z + \bar{Q}_n'(\tau_1) Q_n z) d\tau_1 \rightarrow \min_{Q_n u}$$

$$\begin{aligned} dQ_n x/d\tau_1 &= f_z(\tau_1) Q_{n-1} z + f_n(\tau_1), \\ dQ_n y/d\tau_1 &= g_z(\tau_1) Q_n z + g_n(\tau_1), \quad Q_n y(0) = y_n^T - \bar{y}_n(T). \end{aligned}$$

Здесь $\mathcal{H}(\tau_0)$, $\mathcal{H}(\tau_1)$ — гамильтонианы для задач $\Pi_0 P$, $Q_0 P$ соответственно, функции

$$\bar{\Pi}_n(\tau_0), f_n(\tau_0), g_n(\tau_0), \bar{Q}_n(\tau_1), f_n(\tau_1), g_n(\tau_1)$$

вычисляются с помощью решения задач P_i , $\Pi_i P$, $Q_i P$, $i < n$ и $f_z(\tau_0) = f_z(x^0, y_0(0) + \Pi_0 y(\tau_0), \bar{u}_0(0) + \Pi_0 u(\tau_0), 0)$, $f_z(\tau_1) = f_z(\bar{x}_0(T), \bar{y}_0(T) + Q_0 y(\tau_1), \bar{u}_0(T) + Q_0 u(\tau_1), T)$, аналогично определяются функции $g_z(\tau_0)$, $g_z(\tau_1)$.

Замечание 1. Укажем конкретный вид функций, определяющих задачи P_i , $\Pi_i P$ и $Q_i P$. Имеем

$$\begin{aligned} G_1(x_1^T, y_1^T) &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x_1^T \\ y_1^T \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} \bar{G}_{xx} & \bar{G}_{xy} \\ \bar{G}_{yx} & \bar{G}_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^T \\ y_1^T \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} T \\ q_0 \end{pmatrix}' y_1^T + Q_1 P(0) x_1^T \\ (q_0^T &= \bar{q}_0(T) + Q_0 q(0), dQ_0 q/d\tau_1 = -\bar{H}_y(z_0(T) + \\ &+ Q_0 z, p(T), \bar{q}_0(T) + Q_0 q, T), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_1 p &= - \int_{\tau_1}^{-\infty} (\mathcal{H}_x(\tau_1) - \bar{H}_x(T)) d\tau_1, \quad \mathcal{H}(\tau_1) = H(\bar{z}_0(T) + Q_0 z, \bar{p}_0(T), \\ &\bar{q}_0(T) + Q_0 q, T) = H(\tau_1) + (Q_0 q)' g(\tau_1). \end{aligned}$$

Далее

$$\begin{aligned} \bar{H}_1' \bar{z}_1 &= (\bar{q}_0')' \bar{y}_1, \bar{f}_1 = 0, \bar{g}_1 = -\bar{y}_0', \bar{\Pi}_1'(\tau_0) = \\ &= (\bar{z}_1(0) + \tau_0 \bar{z}_0(0))' (\mathcal{H}_{zz}(\tau_0) - \bar{H}_{zz}(0)) + \\ &+ \bar{\Pi}_1' p(\tau_0) f_z(\tau_0) + \tau_0 (\mathcal{H}_{iz}(\tau_0) - \bar{H}_{iz}(0))' + \\ &+ (\bar{p}_1(0) + \tau_0 \bar{p}_0(0))' (f_z(\tau_0) - \bar{f}_z(0)) + (\bar{q}_1'(0) + \\ &+ \tau_0 \bar{q}_0'(0)) (g_z(\tau_0) - \bar{g}_z(0)), \bar{Q}_1'(\tau_1) = (\bar{z}_1'(T) + \\ &+ \tau_1 \bar{z}_0'(T) (\mathcal{H}_{zz}(\tau_1) - \mathcal{H}_{zz}(T)) + Q_1' p(\tau_1) f_z(\tau_1) + \\ &+ \tau_1 (\mathcal{H}_{iz}(\tau_1) - \bar{H}_{iz}(T))' + (\bar{p}_1'(T) + \\ &+ \tau_1 \bar{p}_0'(T)) (f_z(\tau_1) - \bar{f}_z(T)) + (\bar{q}_1'(T) + \\ &+ \tau_1 \bar{q}_0'(T)) (g_z(\tau_1) - \bar{g}_z(T)), \end{aligned}$$

а функции f_1 , g_1 определяются, как и соответствующие функции в [4].

Таким образом, для определения $z_n(t, \varepsilon)$ построен итерационный процесс, имеющий $(n+1)$ шаг. Каждый шаг имеет две стадии: на первой находим y_i^T и решаем задачу P_i , на второй решаем задачи $\Pi_i P$ и $Q_i P$.

Введем

$$(8) \quad \tilde{u}_n(t, \varepsilon) = \sum_{i=0}^n \varepsilon^i u_i(t, \varepsilon), u_i = \bar{u}_i(t) + \Pi_i u(t/\varepsilon) + Q_i u((t-T)/\varepsilon).$$

Теорема 1. Пусть все промежуточные задачи прямой схемы, необходимые для определения $\tilde{u}_n(t, \varepsilon)$, разрешимы. И пусть $\operatorname{Re} \lambda(\bar{g}_y(t)) < 0$. Тогда существует $\varepsilon_0 > 0$, такое, что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$

$$J_\varepsilon(\tilde{u}_n) \leq J_\varepsilon(\tilde{u}_{n-1} + \varepsilon^n \bar{u}_n) \leq J_\varepsilon(\tilde{u}_{n-1}) \leq J_\varepsilon(\tilde{u}_0) \leq J_\varepsilon(\bar{u}_0).$$

Итак, $\tilde{u}_n$ обладает релаксационностью. Отметим, что каждая стадия прямой схемы может привести к уменьшению функционала. На примерах можно показать, что прямая схема позволяет приближенно строить и минимизирующие последовательности, например в задачах с импульсными и особыми управлениями [8].

3. Асимптотические оценки

Приведем условия, обеспечивающие разрешимость промежуточных задач прямой схемы.

I. Функции G, F, f, g ($m+2$) раза непрерывно дифференцируемы по своим аргументам в некоторой окрестности решения $(\bar{y}_0, \bar{u}_0)$ задачи P_0 , которое существует, единственно и является изолированным решением системы (6).

II. Вдоль решения задачи P_0 выполняется усиленное условие Лежандра — Клебша, т. е.

$$\begin{pmatrix} \bar{H}_{yy} & \bar{H}_{yu} \\ \bar{H}_{uy} & \bar{H}_{uu} \end{pmatrix} < 0, \text{ а также } \bar{H}_{xx} \leq 0, \bar{G}_{xx} \geq 0, \bar{G}_{yy} > 0.$$

III. Для каждого $t \in [0, T)$ пара $\{\bar{A}(t), \bar{B}(t)\}$ вполне управляема, где $\bar{A} = \bar{g}_y, \bar{B} = \bar{g}_u$.

В условиях I—III ($m=1$) существуют (теорема 2.7 из [13]) условно устойчивые интегральные многообразия S^+ и S^- для задач P_0P и Q_0P соответственно, такие, что если $y_0 - \bar{y}_0(0) \in G^+, y_0^T - \bar{y}_0(T) \in G^-$, где G^+ и G^- — некоторые окрестности начала координат в $\mathbb{R}^M$ — области притяжения для задач P_0P и Q_0P , то решения задач P_0P и Q_0P существуют, единственные и

$$\|P_0 z\| \leq C e^{-a\tau_0}, \|Q_0 z\| \leq C e^{a\tau_1}; C, a > 0.$$

Поэтому введем еще одно условие

$$\text{IV. } y^0 - \bar{y}_0(0) \in G^+, y_0^T - \bar{y}_0(T) \in G^-.$$

Заметим, что условия II—III можно значительно ослабить, но тогда должен исследоваться вопрос существования S^+ и S^- .

Лемма 3. Пусть выполнены условия I—IV ($m > 0$). Тогда для любого $n \leq m$ решения задач декомпозиции n -го приближения существуют, единственны и

$$\|P_n z\| \leq C e^{-a\tau_0}, \|Q_n z\| \leq C e^{a\tau_1}, C, a > 0.$$

Предшествующие результаты позволяют получить основное утверждение.

Теорема 2. Пусть $\operatorname{Re} \lambda(\bar{g}_y(t)) < 0$. Тогда в условиях I—IV ($m > 0$) для каждого $n \leq m$ существуют некоторая окрестность D решения задачи P_0 и постоянные $C > 0, \varepsilon_0 > 0$, такие, что для $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ решение z^* задачи P_ε существует и единственно в D и

$$\begin{aligned} \|x^*(t, \varepsilon) - \tilde{x}_n(t, \varepsilon)\|_C &\leq C \varepsilon^{n+1}, \\ \|y^*(t, \varepsilon) - \tilde{y}_n(t, \varepsilon)\|_C &\leq C \varepsilon^{n+1}, \end{aligned}$$

$$\|u^*(t, \varepsilon) - \tilde{u}_n(t, \varepsilon)\|_{L_2} \leq C\varepsilon^{n+1},$$

$$J_\varepsilon(\bar{u}_n) - J_\varepsilon^* \leq C\varepsilon^{2n+1},$$

где $\tilde{u}_n$ определяется из (8), а $\tilde{x}_n, \tilde{y}_n$ — траектории (2), отвечающие $\tilde{u}_n$.

Замечание 2. Условие $\operatorname{Re} \lambda(\bar{g}_y) < 0$ помогает доказать, что $\tilde{u}_n$ является допустимым управлением для P_ε , т. е. что имеет смысл $J_\varepsilon(\tilde{u}_n)$. Далее это условие используется при разрешимости алгебраических уравнений и при получении различных оценок в леммах ПЗ и П4.

Пусть условие $\operatorname{Re} \lambda(\bar{g}_y) < 0$ не выполнено. Тогда в теоремах 1 и 2 в качестве последовательности допустимых управлений следует взять последовательность управлений в виде неполной обратной связи

$$u = \tilde{v}_n = -Ky + \omega_n, \quad \omega_n = \tilde{u}_n + K\tilde{y}_n,$$

$$\tilde{y}_n = \sum_{i=0}^n \varepsilon^i (\bar{y}_i(t) + \Pi_i y(t/\varepsilon) + Q_i y((t-T)/\varepsilon)),$$

где $\tilde{u}_n$ определяется формулой (8), $(r+M)$ матрица $K(t)$ обладает свойством $\operatorname{Re} \lambda(\bar{g}_y + \bar{g}_u K) < 0$. В силу условий II—III такая матрица существует. Укажем свойства неполной обратной связи. По определению имеем:

$$1) \tilde{v}_n(\tilde{y}_n, t) = \tilde{u}_n; \quad 2) \|v_n(y, t) - \tilde{u}_n\|_C \leq C\|y - \tilde{y}_n\|_C.$$

Рассмотрим замкнутую систему

$$\dot{x}_\varepsilon = \tilde{f}(x_\varepsilon, y_\varepsilon, t) = f(x_\varepsilon, y_\varepsilon, \tilde{v}_n(y_\varepsilon, t), t), \quad x_\varepsilon(0) = x^0,$$

$$\varepsilon \dot{y}_\varepsilon = \tilde{g}(x_\varepsilon, y_\varepsilon, t) = g(x_\varepsilon, y_\varepsilon, \tilde{v}_n(y_\varepsilon, t), t), \quad y_\varepsilon(0) = y^0.$$

Очевидно, что $\operatorname{Re} \lambda(\bar{g}_y) < 0$ и на основании первого свойства имеем

$$\tilde{x}_n = \tilde{f}(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n, t) + O(\varepsilon^{n+1}), \quad \tilde{x}_n(0) = x^0 + O(\varepsilon^{n+1}),$$

$$\varepsilon \tilde{y}_n = \tilde{g}(\tilde{x}_n, \tilde{v}_n, t) + O(\varepsilon^{n+1}), \quad y_n(0) = y^0 + O(\varepsilon^{n+1}),$$

где $\tilde{x}_n$ и $\tilde{y}_n$ те же, что и в теореме 2. Тогда по теореме Васильевой А. Б. [4] решение замкнутой системы существует и единственно при достаточно малых, положительных ε и, кроме того,

$$\|x_\varepsilon(\tilde{v}_n) - \tilde{x}_n\|_C \leq C\varepsilon^{n+1}, \quad \|y_\varepsilon(\tilde{v}_n) - \tilde{y}_n\|_C \leq C\varepsilon^{n+1}.$$

Таким образом, $\tilde{v}_n(y_\varepsilon, t)$ — допустимое управление в задаче P_ε и для него имеет место оценка (третье свойство неполной обратной связи)

$$3) \|\tilde{v}_n(y_\varepsilon, t) - \tilde{u}_n\|_C \leq C\varepsilon^{n+1}.$$

Нетрудно убедиться, что леммы 1 и 2 выполнены для $u = \tilde{v}_n(y, t)$. Из первого свойства $\tilde{v}_n$ следует, что задачи $P_i, \Pi_i P$ и $Q_i P$ совпадают для $\tilde{v}_n$ и u_n . Далее из лемм 1, 2 следует, что

$$J_\varepsilon(\tilde{v}_n(y, \cdot)) = \sum_{i=0}^{2n+1} J_i + O(\varepsilon^{2n+1}),$$

где $J_{2k} = J_{2k}(\bar{u}_k)$, $J_{2k+1} = J_{2k+1}(\Pi_k u, Q_k u)$. Следовательно, при дополнительном условии существования неполной обратной связи утверждение теоремы 1 о релаксационности имеет место, т. е.

$$J_\varepsilon(\tilde{v}_n(y, \cdot)) \leq \dots \leq J_\varepsilon(\tilde{v}_1(y, \cdot)) \leq J_\varepsilon(\tilde{v}_0(y, \cdot)).$$

Очевидно, далее, что утверждения леммы 3 также имеют место вдоль $u = \tilde{v}_n(y, t)$. Поэтому справедливо

Следствие. Пусть выполнены условия I–IV ($m > 0$), тогда для каждого $n \leq m$ и $u = v_n(y, t)$ существуют окрестность D решения задачи P_0 и постоянные $C > 0$, $\varepsilon_0 > 0$, такие, что для $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ решение z_ε^* задачи P_ε существует и единственно в D . Кроме этого,

$$J_\varepsilon(\tilde{v}_n(y, \cdot)) - J_s^* \leq C\varepsilon^{2(n+1)}.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство лемм 1 и 2. Воспользуемся следующим фактором.

Лемма П.1. Пусть $L(x_0, \dots, x_n, \varepsilon): \mathbb{R}^{k \times (n+1)+1} \rightarrow \mathbb{R}$, $x_i \in \mathbb{R}^k$, $i = \overline{0, n}$, $L(x_0, \dots, x_n, \varepsilon) = L(x_0) + \varepsilon L_1(x_0, x_1) + \dots + \varepsilon^n L_n(x_0, \dots, x_n) + O(\varepsilon^{n+1})$.

Тогда для достаточно малых $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} \min_{(x_0, \dots, x_n)} L(x_0, \dots, x_n, \varepsilon) &= \min_{x_0} L_0(x_0) + \varepsilon \min_{x_1} L(\bar{x}_0, x_1) + \dots \\ &\dots + \varepsilon^n \min_{x_n} L(\bar{x}_0, \dots, \bar{x}_{n-1}, x_n) + O(\varepsilon^{n+1}), \end{aligned}$$

где $\bar{x}_i = \arg \min_{x_i} L(x_0, \dots, \bar{x}_{i-1}, x_i)$, $i = \overline{0, n}$.

Докажем следующие свойства J_i в разложении (5):

$$(П.1) \quad \begin{aligned} J_i &= J_k(\bar{u}_k) + J_i, \quad i = 2k; \\ J_i &= \Pi_k J(\Pi_k u) + Q_k J(Q_k u) + J_i, \quad i = 2k+1, \end{aligned}$$

где J_1 зависят от $z_i(t)$, $\Pi_k z(\tau_0)$, $Q_k z(\tau_1)$, $i = \overline{0, k-1}$. Для этого воспользуемся математической индукцией. Пусть для $k < n$ выполнены следующие условия.

П.1. Задачи P_k , $\Pi_k P$ и $Q_k P$ разрешимы и имеют вид, указанный в лемме 2.

П.2. Краевые задачи принципа максимума (КЗПМ) для P_k , $\Pi_k P$ и $Q_k P$ совпадают с краевыми задачами, полученными в результате асимптотики КЗПМ для P_ε в k -м приближении.

П.3. J_i , $i = \overline{0, 2k+1}$ обладают свойствами (П.1).

Очевидно, условия П.1–П.3 выполнены для $k = \overline{0, 1}$.

Пусть

$$(П.2) \quad \begin{aligned} \tilde{x}_{n-1} &= \sum_{i=0}^{n-1} \varepsilon^i (\bar{x}_i + \Pi_i x + Q_i x) + \varepsilon^n (\Pi_n x + Q_n x), \\ \tilde{y}_{n-1} &= \sum_{i=0}^{n-1} \varepsilon^i (\bar{y}_i + \Pi_i y + Q_i y), \\ \tilde{u}_{n-1} &= \sum_{i=0}^{n-1} \varepsilon^i (\bar{u}_i + \Pi_i u + Q_i u), \\ \tilde{p}_{n-1} &= \sum_{i=0}^{n-1} \varepsilon^i (\bar{p}_i + \Pi_i p + Q_i p) + \varepsilon^n (\Pi_n p + Q_n p), \\ \tilde{q}_{n-1} &= \sum_{i=0}^{n-1} \varepsilon^i (\bar{q}_i + \Pi_i q + Q_i q), \end{aligned}$$

$\bar{z}_i, \Pi_i z, Q_i z$ — решение задач $P_i, \Pi_i P$ и $Q_i P$ соответственно, $(\bar{p}_i, \bar{q}_i), (\Pi_i p, \Pi_i q), (Q_i p, Q_i q)$ — соответствующие сопряженные переменные.

Тогда в силу (4) и П.И имеем

$$\begin{aligned} \ddot{x}_{n-1} &= f(\tilde{x}_{n-1}, \tilde{y}_{n-1}, \tilde{u}_{n-1}, t) + O(\varepsilon^n), \quad x_{n-1}(0) = x^0 + O(\varepsilon^n), \\ \varepsilon \dot{\tilde{y}}_{n-1} &= g(\tilde{x}_{n-1}, \tilde{y}_{n-1}, \tilde{u}_{n-1}, t) + O(\varepsilon^n), \quad \tilde{y}_{n-1}(0) = y^0 + O(\varepsilon^n), \\ \ddot{p}_{n-1} &= -H_x(\tilde{z}_{n-1}, \tilde{p}_{n-1}, \tilde{q}_{n-1}, t) + O(\varepsilon^n), \\ \dot{\tilde{p}}_{n-1}(T) &= -G_x(\tilde{x}_{n-1}(T), \tilde{y}_{n-1}(T)) + O(\varepsilon^n), \\ \varepsilon \dot{\tilde{q}}_{n-1} &= -H_y(\tilde{z}_{n-1}, \tilde{p}_{n-1}, \tilde{q}_{n-1}, t) + O(\varepsilon^n), \\ \varepsilon \dot{\tilde{q}}_{n-1}(T) &= -G_y(\tilde{x}_{n-1}(T), \tilde{y}_{n-1}(T)) + O(\varepsilon^n), \\ 0 &= -H_u(\tilde{z}_{n-1}, \tilde{p}_{n-1}, \tilde{q}_{n-1}, t) + O(\varepsilon^n), \end{aligned} \quad (\text{П.3})$$

где $\tilde{z}'_{n-1} = (\tilde{x}'_{n-1}, \tilde{y}'_{n-1}, \tilde{u}'_{n-1})$.

Пусть

$$J_{n-1} = G(\tilde{x}_{n-1}(T), \tilde{y}_{n-1}(T)) + \int_0^T F(\tilde{x}_{n-1}, \tilde{y}_{n-1}, \tilde{u}_{n-1}, t) dt. \quad (\text{П.4})$$

Тогда, обозначив $\Delta z = z(t, \varepsilon) - \tilde{z}_{n-1}$, получаем

$$\begin{aligned} J_\varepsilon(u(\cdot, \varepsilon)) &= J_{n-1} + J_\varepsilon(u(\cdot, \varepsilon)) - J_{n-1} = (G_x + \tilde{p}_{n-1}(T)) \Delta x(T) + \\ &+ (G_y + \varepsilon \tilde{q}_{n-1}(T)) \Delta y(T) + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \Delta x(T) \\ \Delta y(T) \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} G_{xx} & G_{xy} \\ G_{yx} & G_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x(T) \\ \Delta y(T) \end{pmatrix} - \\ &- \int_0^T ((H_x + \tilde{p}_{n-1} \Delta x + (H_y + \varepsilon \tilde{q}_{n-1}) \Delta y + H_u \Delta u + 1/2 \Delta z' H_{zz} \Delta z) dt + O(\|\Delta z\|^3) + J_{n-1} = \Delta J_\varepsilon + J. \end{aligned} \quad (\text{П.5})$$

Здесь волна сверху означает вычисление функций на (П.2). Так как из (3) и (П.2) имеем $\Delta z = O(\varepsilon^n)$, то $J = J_{n-1} + O(\|\Delta z\|^3)$ в (П.5) содержит известные функции, а также функции порядка ε^{3n} .

Из (П.3) находим

$$\Delta J_\varepsilon = O(\varepsilon^{2n}). \quad (\text{П.6})$$

Рассмотрим задачу ΔP_ε :

$$\begin{aligned} \Delta J_\varepsilon &\rightarrow \min_{\Delta u}, \\ \Delta \dot{x} &= f(\tilde{x}_{n-1} + \Delta x, \tilde{y}_{n-1} + \Delta y, \tilde{u}_{n-1} + \Delta u, t) - \\ &- \tilde{x}_{n-1}, \quad \Delta x(0) = x^0 - \tilde{x}_{n-1}(0), \\ \varepsilon \Delta \dot{y} &= g(\tilde{x}_{n-1} + \Delta x, \tilde{y}_{n-1} + \Delta y, \\ &\tilde{u}_{n-1} + \Delta u, t) - \varepsilon \tilde{y}_{n-1}, \quad \Delta y(0) = y^0 - \tilde{y}_{n-1}(0). \end{aligned}$$

Поскольку по построению $\Delta z = \varepsilon^n (\tilde{z}_n + \Pi_n z + Q_n z) + O(\varepsilon^{n+1})$, учитывая (П.6), получаем

$$\Delta J_\varepsilon = \varepsilon^{2n} (\Delta J_0 + \varepsilon \Delta J_1 + O(\varepsilon^2)). \quad (\text{П.7})$$

Теперь, действуя аналогично, как и для P_ε , можно выписать задачи $\Delta P_0, \Delta \Pi_0 P$ и $\Delta Q_0 P$ для нахождения $z_n, \Pi_n z$ и $Q_n z$, причем ΔJ_0 совпадает с J_{2n} , а ΔJ_1 с J_{2n+1} с точностью до известных слагаемых, а $\Delta J_0 = \Delta J_0(u_n)$, $\Delta J_1 = \Delta \Pi_0 J(\Pi_n u) + \Delta Q_0 J(Q_n u) + J_1$.

Таким образом, условие П.И доказано для $k=n$ и в силу леммы П.1 лемма 1 доказана.

Условия П.1 и П.И для $k=n$ очевидным образом следуют из (П.5) и аналогичных, как и для J_1 в (5), преобразований ΔJ_1 в (П.7), причем из (П.5) можно выписать явно формулы коэффициентов задач $P_n, \Pi_n P$ и $Q_n P$. Итак, лемма 2 доказана.

Доказательство теоремы 1. Пусть J_{n-1} определено формулой (П.4), тогда из условия $\operatorname{Re} \lambda(\bar{g}_y(t)) < 0$, лемм 1 и 2 имеем

$$\begin{aligned} J_\varepsilon(\tilde{u}_{n-1}) &= J_{n-1} + \varepsilon^{2n}(\bar{J}_n(0) + \bar{J}_{2n}) + O(\varepsilon^{2n+1}), \\ J_\varepsilon(\tilde{u}_{n-1} + \varepsilon^n \bar{u}_n) &= J_{n-1} + \varepsilon^{2n}(\bar{J}_n(\bar{u}_n) + \bar{J}_{2n}) + \\ &+ \varepsilon^{2n+1}(\Pi_n J(0) + QJ(0) + \bar{J}_{2n+1}) + O(\varepsilon^{2(n+1)}), \\ J_\varepsilon(\tilde{u}_n) &= J_{n-1} + \varepsilon^{2n}(\bar{J}_n(\bar{u}_n) + \bar{J}_{2n}) + \\ &+ \varepsilon^{2n+1}(\Pi_n J(\Pi_n u) + Q_n J(Q_n u) + \bar{J}_{2n+1}) + O(\varepsilon^{2(n+1)}). \end{aligned}$$

Тогда для достаточно малых $\varepsilon > 0$

$$J_\varepsilon(\tilde{u}_{n-1}) - J_\varepsilon(\tilde{u}_{n-1} + \varepsilon^n \bar{u}_n) = \varepsilon^{2n}(\bar{J}_n(0) - \bar{J}_n(\bar{u}_n)) + O(\varepsilon^{2n+1}) \geq 0,$$

так как $\tilde{u}_n$ доставляет минимум $\bar{J}_n$ и $J_\varepsilon(\tilde{u}_{n-1} + \varepsilon^n \bar{u}_n) - J_\varepsilon(\tilde{u}_n) = \varepsilon^{2n+1}(\Pi_n J(0) - \Pi_n J(\Pi_n u) + Q_n J(0) - Q_n J(Q_n u)) + O(\varepsilon^{2(n+1)}) \geq 0$.

Поскольку $\Pi_n u$ и $Q_n u$ доставляют минимум $\Pi_n J$ и $Q_n J$ соответственно, теорема 1 доказана.

Доказательство леммы 3. Доказательство непосредственно следует из вида задач P_i , $\Pi_i P$ и $Q_i P$ и условий II–IV.

Доказательство теоремы 2. Пусть $\tilde{x}_n$, $\tilde{y}_n$, $\tilde{p}_n$ и $\tilde{q}_n$ – решение исходной и сопряженной систем, соответствующее $\tilde{u}_n$, т. е.

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_n &= f(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n, \tilde{u}_n, t), \quad \tilde{x}_n(0) = x^0, \\ \varepsilon \dot{\tilde{y}}_n &= q(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n, \tilde{u}_n, t), \quad \tilde{y}_n(0) = y^0, \\ \dot{\tilde{p}}_n &= -H_x(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n, \tilde{u}_n, t), \quad \tilde{p}_n(T) = -G_x(\tilde{x}_n(T), \tilde{y}_n(T)), \\ \varepsilon \dot{\tilde{q}}_n &= -H_y(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n, \tilde{u}_n, t), \quad \varepsilon \tilde{q}_n(T) = -G_y(\tilde{x}(T), \tilde{y}_n(T)). \end{aligned} \quad (\text{П.8})$$

Лемма П.2. Для достаточно малых $\varepsilon > 0$

$$(\text{П.9}) \quad \|H_u(\tilde{z}_n, \tilde{p}_n, \tilde{q}_n, t)\| \leq C_0 \varepsilon^{n+1}, \quad C_0 > 0.$$

Лемма П.3. Существуют $\Delta_0 > 0$, $\varepsilon_0 > 0$ (Δ_0 не зависит от ε), такие, что для любого $u \in B = \{v \mid \|v - \tilde{u}_n\|_{L_2} \leq \Delta_0\}$ и для любого $\varepsilon \in (0, \varepsilon]$

$$(\text{П.10}) \quad \|x - \tilde{x}_n\| \leq C_1 \|u - \tilde{u}_n\|_{L_2}, \quad \|y - \tilde{y}_n\| \leq C_1 \|u - \tilde{u}_n\|_{L_2}, \quad C_1 > 0,$$

где (x, y) – решение (2), соответствующее $u \in B$.

Пусть $\Delta z = z - \tilde{z}_n$. Тогда из (П.8), (П.10) получаем

$$\begin{aligned} (\text{П.11}) \quad J_\varepsilon(u) &= J_\varepsilon(\tilde{u}_n) + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \Delta x(T) \\ \Delta y(T) \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} G_{xx} & G_{xy} \\ G_{yx} & G_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x(T) \\ \Delta y(T) \end{pmatrix} - \\ &- \int_0^T \left(\frac{1}{2} \Delta z H_{zz} \Delta z + H_u \Delta u \right) dt + O(\|\Delta u\|_{L_2}^2) = J_n + \Delta J_\varepsilon(\Delta u), \end{aligned} \quad (\text{П.11})$$

где волна обозначает вычисление функций на решении (П.8),

$$J_n = J_\varepsilon(\tilde{u}_n) + O(\|\Delta u\|_{L_2}^3).$$

Рассмотрим задачу

$$\begin{aligned} \Delta J_\varepsilon(\delta u) &\rightarrow \min_{\delta u}, \\ (\text{П.12}) \quad \delta \dot{x} &= \tilde{f}_x \delta x + \tilde{f}_y \delta y + \tilde{f}_u \delta u, \quad \delta x(0) = 0, \\ \varepsilon \delta \dot{y} &= \tilde{g}_x \delta x + \tilde{g}_y \delta y + \tilde{g}_u \delta u, \quad \delta y(0) = 0. \end{aligned}$$

Лемма П.4. Для Δ_0 и ε_0 из леммы П.3 при $\delta u = \Delta u = u - \tilde{u}_n$ имеем

$$\begin{aligned} (\text{П.13}) \quad \|\delta x - \Delta x\| &\leq C_2 \|\Delta u\|_{L_2}^2, \\ \|\delta y - \Delta y\| &\leq C_2 \|\Delta u\|_{L_2}^2, \quad C_2 > 0. \end{aligned}$$

Очевидно, из условия II следует, что ΔJ_ε — сильно выпуклый функционал.

Лемма П5. Существуют $\Delta_1 > 0$, $\varepsilon_1 > 0$, такие, что для любого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1]$ $J_\varepsilon(u)$ — сильно выпуклый функционал в L_2 на множестве $B = \{v \mid \|v - \tilde{u}_n\|_{L_2} \leq \Delta_1\}$ и, следовательно, достигает на B своей нижней грани J_ε^* на единственном u^* .

Доказательство непосредственно следует из оценок (П.13) и сильной выпуклости ΔJ_ε .

Из леммы П.5 следует, что существует $k > 0$, такое, что

$$(П.14) \quad k \|u^* - \tilde{u}_n\|_{L_2}^2 \leq J_\varepsilon^* - J_\varepsilon(\tilde{u}_n) + \int_0^T \tilde{H}_u(u^* - \tilde{u}_n) dt \leq \int_0^T \tilde{H}_u(u^* - \tilde{u}_n) dt.$$

Учитывая (П.9), (П.14), имеем

$$(П.15) \quad \|u^* - \tilde{u}_n\|_{L_2} \leq C_3 \varepsilon^{n+1}, \quad C_3 > 0.$$

Пусть $\varepsilon_1 : C_3 \varepsilon_1^{n+1} \leq \Delta_1$, тогда, применяя лемму П3, получаем

$$(П.16) \quad \|x^* - \tilde{x}_n\| \leq C_4 \varepsilon^{n+1}, \quad \|y^* - \tilde{y}_n\| \leq C_4 \varepsilon^{n+1}, \quad C_4 > 0, \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_1].$$

Докажем субоптимальность $\tilde{u}_n$. Учитывая (П.14), (П.15), (П.16), находим

$$\begin{aligned} J_\varepsilon^* - J_\varepsilon(\tilde{u}_n) &= \tilde{G}_x \Delta x(T) + \tilde{G}_y \Delta y(T) + \tilde{p}_n(T) \delta x(T) + \varepsilon \tilde{q}_n(T) \delta y(T) - \\ &\quad - \int_0^T \tilde{H}_u \Delta u dt + O(\varepsilon^{2(n+1)}), \end{aligned}$$

где $\Delta z = z^* - \tilde{z}_n$, $(\delta x, \delta y)$ — решение (П.12), соответствующее $\delta u = \Delta u$. Теперь, учитывая (П.8), (П.9), (П.13), (П.15), имеем

$$(П.17) \quad J_\varepsilon(\tilde{u}_n) - J_\varepsilon^* = \int_0^T \tilde{H}_u \Delta u dt + O(\varepsilon^{2(n+1)}) = O(\varepsilon^{2(n+1)}).$$

Итак, из (П.15), (П.16), (П.17) следует, что теорема 2 полностью доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Васильева А. Б., Дмитриев М. Г. Сингулярные возмущения в задачах оптимального управления // Мат. анализ. Итоги науки. М.: ВИНТИ, 1982. Т. 20. С. 3–78.
2. Sakena V. R., O'Reilly J., Kokotović P. V. Singular perturbations and time-scale methods in control theory: Survey 1976–1983 // Automatica. 1983. V. 20. № 3. P. 273–293.
3. Уткин В. И. Скользящие режимы в задачах оптимизации и управления. М.: Наука, 1981.
4. Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973.
5. Ломов С. А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений. М.: Наука, 1981.
6. Дмитриев М. Г. Сингулярные возмущения в задачах оптимального управления: Автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук. М.: МГУ, 1984.
7. Белокопытов С. В., Дмитриев М. Г. Прямой метод решения задач оптимального управления с быстрыми и медленными движениями // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1985. № 3. С. 147–152.
8. Belokopytov S. V., Dmitriev M. G. Direct scheme in optimal control problems with fast and slow motions // System and Control Letters. 1986. V. 8. № 2. P. 129–135.
9. Мoiseев Н. Н. Асимптотические методы нелинейной механики. М.: Наука, 1969.
10. Черноусько Ф. Л. Некоторые задачи оптимального управления с малым параметром // ПММ. 1968. Т. 32. Вып. 1. С. 15–26.
11. Первозванский А. А., Гайцгори В. Г. Декомпозиция, агрегирование и приближенная оптимизация. М.: Наука, 1979.
12. Плотников В. А. Метод усреднения в задачах управления // Дифференц. уравнения. 1985. Т. 21. № 10. С. 1713–1717.

13. Wilde R. R., Kokotovic P. V. Optimal open-and closed-loop control of singularly perturbed linear system // IEEE Trans. Automat. Control. 1973. V. 18. № 6. P. 616–626.
14. Lukes D. L. Optimal regulation of nonlinear dynamical systems // SIAM J. Control. 1969. V. 7. № 1. P. 75–100.

Поступила в редакцию
13.1.1988

SOLUTION OF CLASSICAL OPTIMAL CONTROL PROBLEMS WITH A BOUNDARY LAYER

Belokopytov S. V., Dmitriev M. G.

A natural way is developed of applying the boundary layer functions method to optimal control problems with fast and slow motions. In this approach the problem is directly decomposed into a sequence of lower-order variational problems. The relaxation and suboptimality of asymptotic approximations are proved.

УДК 519.853:62-506

ДЕФОРМАЦИОННЫЙ МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ ЗАДАЧ НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ. I

БОБЫЛЕВ Н. А.

(Москва)

Предлагается новый подход к анализу экстремалей задач нелинейного программирования. Этот подход основан на деформации изучаемой задачи к более простой задаче, допускающей исследование. Основной результат работы составляет следующий деформационный принцип минимума: если в процессе деформации экстремаль остается изолированной и реализует минимум эталонной задачи, то она реализует минимум изучаемой задачи. Указываются приложения к проблеме исследования вырожденных экстремалей оптимизационных задач, задачам классического анализа и др.

1. Введение

К настоящему времени методы ряда разделов нелинейного программирования (например, методы квадратичного и выпуклого программирования) сформировались и приобрели устойчивые очертания. В то же время методы анализа невыпуклых задач нелинейного программирования находятся в стадии развития и весьма далеки от завершения. Так, например, к настоящему времени не разработаны алгоритмы исследования вырожденных экстремалей задач нелинейного программирования, отсутствуют эффективные признаки глобального минимума. Известные методы второго порядка связаны с повышенной гладкостью данных задачи и становятся неприменимыми, если нужная гладкость отсутствует.

В настоящей работе предлагается новый подход к анализу невыпуклых задач нелинейного программирования. Этот подход не связан с повышенной гладкостью данных задачи и эффективен в вырожденных ситуациях.

2. Деформационная теорема

Рассмотрим задачу нелинейного программирования

$$(1) \quad \begin{aligned} g_0(x) &\rightarrow \min, \\ g_i(x) &\leq 0 \quad (x \in R^N; \quad i=1, \dots, m). \end{aligned}$$