М. Г. Дмитриев, А. М. Клишевич, Итерационные методы решения сингулярно возмущённых краевых задач условно устойчивого типа, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 1987, том 27, номер 12, 1812–1823

ЖУРНАЛ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Том 27, 1987 № 12

УДК 519.624

# ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ УСЛОВНО УСТОЙЧИВОГО ТИПА

*ДМИТРИЕВ М. Г., КЛИШЕВИЧ А. М.*

*(Красноярск)*

Для сингулярно возмущенных краевых задач условно устойчивого типа предлагаются последовательный и параллельный итерационные методы построения равномерных приближений к решению. Показана сходимость решений, полученных с помощью итерационных методов, к точным решениям со скоростью геометрической прогрессии. В основу рассматриваемых методов положен принцип декомпозиции исходной системы на подсистемы меньшей размерности.

## Введение

Рассматриваемые в работе сингулярно возмущенные краевые задачи условно устойчивого типа возникают как непосредственно при моделировании поведения реальных систем, так и в задачах оптимального управления [1]. Решение такого рода задач традиционными методами, не учитывающими их специфику, затруднено или практически невозможно из-за «жесткости» и условной устойчивости. Использование же специфических свойств сингулярно возмущенных задач дает возможность создавать различные специальные алгоритмы, основанные на асимптотике и итерационных методах. Ниже рассматривается класс задач, где успешно применяется для построения асимптотики метод пограничных функций из [2]. Идея использования асимптотики в итерационных методах последовательно проводилась в работах [3]—[5], посвященных итерационным методам решения сингулярно возмущенных задач. В результате такого объединения оказывается возможным на основе нулевого члена асимптотики получить произвольный порядок приближения при фиксированной гладкости данных, и при этом оценки близости между точным и приближенным решениями получаются равномерными в обычном смысле, а не в асимптотическом. Отметим также простоту реализации этих методов на ЭВМ.

В настоящей работе проведено дальнейшее развитие результатов из [3]—[5] для случая условной устойчивости сингулярно возмущенных краевых задач, а именно: рассмотрена более общая постановка краевых задач, которая потребовала введения дополнительных преобразований, и предложена, наряду с последовательной, новая параллельная итерационная схема. Для иллюстрации последней численно решается краевая задача и дается сравнение результатов с результатами, полученными методом квазилинеаризации.

## § 1. Постановка задачи

Будем рассматривать краевую задачу для системы дифференциальных уравнений вида

$$(1.1а)\qquad \dot y=f(y,z,t),\qquad Py(0)+(I_n-P)y(1)=0,$$

$$(1.1б)\qquad \varepsilon\dot z=F(y,z,t),\qquad Qz(0)+(I_m-Q)z(1)=0,$$

где $\varepsilon$ — малый положительный параметр, $t\in[0,1]$,

$$P=\begin{Vmatrix} I_l & 0\\ 0 & 0\end{Vmatrix},\qquad Q=\begin{Vmatrix} I_k & 0\\ 0 & 0\end{Vmatrix},\qquad 0<l<n,\qquad 0<k<m,$$

$I$ — единичная матрица соответствующего размера.

Относительно краевой задачи (1.1) будем предполагать выполненными следующие предположения.

Условие 1. Уравнение $F(y,z;t)=0$ имеет изолированный корень $z(t)=\varphi(y,t)$, определенный в области $D_0=\{(y,t):|y-y^0(t)|\leqslant\delta,\ 0\leqslant t\leqslant 1\}$, где $\delta$ — малое фиксированное положительное число; $y^0(t)$ — решение задачи

$$\dot y^0=f(y^0,\varphi(y^0,t),t),\qquad y^0(0)=y_0^*,$$

для которой предполагается существование и единственность решения на отрезке $0\leqslant t\leqslant 1$ для каждого $y_0^*$ из некоторого множества $D$, причем точки $(y^0(t),t)\in D_0$ при $t\in[0,1]$.

Введем обозначение $z^0(t)=\varphi(y^0(t),t)$. Решение $(y^0(t),z^0(t))$ будем называть вырожденным.

Условие 2. Основная функциональная матрица

$$F_z(t)=\frac{\partial F}{\partial z}(y^0(t),z^0(t),t)$$

имеет $k$ собственных значений таких, что $\operatorname{Re}\lambda(F_z(t))\leqslant-2\mu<0$, и $m-k$ собственных значений таких, что $\operatorname{Re}\lambda(F_z(t))\geqslant2\mu>0$ для всех $t\in[0,1]$, $\mu$ — положительное число.

Итак, имеем дело с условно устойчивым случаем (см. [2]).

Условие 3. а. $\det B_{11}(0)\neq0$. Здесь $B_{11}(t)$ — левый верхний блок размерности $k\times k$ матрицы

$$B(t)=\begin{Vmatrix} B_{11}(t) & B_{12}(t)\\ B_{21}(t) & B_{22}(t)\end{Vmatrix}$$

которая приводит к блочно-диагональному виду $F_z(t)$:

$$B^{-1}(t)F_z(t)B(t)=\begin{Vmatrix} C^-(t) & 0\\ 0 & C^+(t)\end{Vmatrix}$$

где $(k\times k)$-матрица $C^-(t)$ имеет собственные значения $\lambda_i(t)$, $i=1,2,\dots,k$, такие, что $\operatorname{Re}\lambda_i(t)\leqslant-2\mu<0$, а $[(m-k)\times(m-k)]$-матрица $C^+(t)$ имеет собственные значения $\lambda_i(t)$, $i=k+1,k+2,\dots,m$, $\operatorname{Re}\lambda_i(t)\geqslant2\mu>0$, $t\in[0,1]$.

б. $\det B_{22}(1)\neq0$.

Существование матрицы $B(t)$ той же степени гладкости, что и $F_z(t)$, следует из работы [6].

Условие 4. Системы

$$(1.2)\qquad d\zeta/d\tau_0=F(y^0(0),\ \zeta+z^0(0),\ 0),$$

$$(1.3)\qquad d\tilde\zeta/d\tau_1=F(y^0(1),\ \tilde\zeta+z^0(1),\ 1)$$

имеют интегральные многообразия $S^+$ и $S^-$ соответственно, которые в некоторых областях $G^+$ изменения $\zeta_1$ и $G^-$ изменения $\tilde{\zeta}_2$ представимы в виде $\zeta_2=\Phi(\zeta_1)$ и $\tilde{\zeta}_1=\Phi(\tilde{\zeta}_2)$, причем $Q[-z^0(0)]\in G^+$, $(I_m-Q)[-z^0(1)]\in G^-$, где

$$\tau_0=t/\varepsilon, \qquad \tau_1=(t-1)/\varepsilon, \qquad \zeta=\left\|\begin{matrix}\zeta_1\\ \zeta_2\end{matrix}\right\|, \qquad \tilde{\zeta}=\left\|\begin{matrix}\tilde{\zeta}_1\\ \tilde{\zeta}_2\end{matrix}\right\|.$$

Под интегральным многообразием $S^+$ понимаем [2] такое $m$-мерное интегральное многообразие, которое состоит из траекторий системы (1.2), стремящихся к началу координат при $\tau_0\to+\infty$; $S^-$ — интегральное многообразие для системы (1.3), обладающее аналогичным свойством при $\tau_1\to\to-\infty$.

Условие 5. Функции $f$ и $F\in C^2[D_1]$. Область $D_1$ определим следующим образом:

$$D_1=\{(y, z, t): |y-y^0(t)|\leqslant\delta,$$
$$[z-z^0(t)-\theta(\Pi_л(\tau_0)+\Pi_п(\tau_1))|\leqslant\delta,\ t,\ \theta\in[0, 1]\},$$

где $\delta$ — малое положительное число. Функции $\Pi_л(\tau_0)$ и $\Pi_п(\tau_1)$ называются левыми и правыми пограничными функциями соответственно.

Согласно условиям 1—5 существует непрерывная функция $\Pi_л(t, \varepsilon)$, $0\leqslant t\leqslant 1$,— решение уравнения $\varepsilon\dot{\Pi}_л=F(y^0(0), z^0(0)+\Pi_л, 0)$ с условиями $Q[z^0(0)+\Pi_л(0)]=0$, $\Pi_л(t, \varepsilon)=\Pi_л(\tau_0)\to 0$ при $\tau_0\to+\infty$ и непрерывная функция $\Pi_п(t, \varepsilon)$, $0\leqslant t\leqslant 1$,— решение уравнения $\varepsilon\dot{\Pi}_п=F(y^0(1), z^0(1)+\Pi_п, 1)$ с условиями $(I_m-Q)[z^0(1)+\Pi_п(0)]=0$, $\Pi_п(t, \varepsilon)=\Pi_п(\tau_1)\to 0$ при $\tau_1\to-\infty$.

Условие 6. Матрица $P\overline{Y}(0)+(I_n-P)\overline{Y}(1)$ имеет ограниченную обратную, где $\overline{Y}(t)$ — фундаментальная матрица следующей однородной системы:

$$\dot{\overline{Y}}=[f_y(y^0, z^0, t)-f_z(y^0, z^0, t)F_z^{-1}(y^0, z^0, t)F_y(y^0, z^0, t)]\overline{Y}.$$

Замечания. 1. Область $D$ в условии 1 задана неявно, и предполагается, что она содержит $y^0(0)$, где $y^0(0)$ находится из решения краевой задачи $\dot{y}^0=f(y^0, \varphi(y^0, t), t)$, $Py^0(0)+(I_n-P)y^0(1)=0$.

2. Условие 6 эквивалентно следующему: а) определитель $\Delta_0{}^0$, введенный в работах [2], [7], не вырожден; б) матрица $PY(0, \varepsilon)+(I_n-P)Y(1, \varepsilon)$ имеет равномерно ограниченную обратную для всех $\varepsilon\in(0, \varepsilon_0']$, где $\varepsilon_0'$ — достаточно малое положительное число, $Y(t, \varepsilon)$ — фундаментальная матрица однородной системы

$$\dot{Y}=[f_y(y^0, z^0+\Pi_л+\Pi_п, t)-f_z(y^0, z^0+\Pi_л+\Pi_п, t)L]Y. \tag{1.4}$$

Функция $L$ определена в § 2.

## § 2. Предварительные результаты

Приведем ряд утверждений, которыми в дальнейшем будем широко пользоваться. Условия 1—6 предполагаются выполненными.

Лемма 1. *Фундаментальная матрица $Z(t, \varepsilon)$ однородной системы*

$$\varepsilon\dot{z}=F_z(y^0(t), z^0(t)+\Pi_л(\tau_0)+\Pi_п(\tau_1), t)z \tag{2.1}$$

*существует, и для достаточно малых $\varepsilon$ справедливы оценки*

$$|Z(t, \varepsilon)QZ^{-1}(s, \varepsilon)|\leqslant C\exp[-\sigma(t-s)/\varepsilon], \qquad 0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1, \tag{2.2а}$$

$$|Z(t, \varepsilon)(I_m-Q)Z^{-1}(s, \varepsilon)|\leqslant C\exp[-\sigma(s-t)/\varepsilon], \qquad 0\leqslant t\leqslant s\leqslant 1, \tag{2.2б}$$

*а матрица*

$$(2.3)\qquad Z(t, \varepsilon)[QZ(0, \varepsilon)+(I_m-Q)Z(1, \varepsilon)]^{-1}$$

*равномерно ограничена по $t$ и $\varepsilon$ в области их изменения.*

Здесь $C$ и $\sigma$ — положительные постоянные, вообще говоря различные в оценках (2.2). Подобные постоянные, величина которых в рассуждениях существенной роли не играет, в дальнейшем обозначаются одними и теми же буквами.

Заметим, что матричная функция Грина $G(t, s, \varepsilon)$ для (2.1) может быть записана в виде (см. [8])

$$G(t,s,\varepsilon)=\begin{cases} Z(t,\varepsilon)QZ^{-1}(s,\varepsilon), & 0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1,\\ Z(t,\varepsilon)(I_m-Q)Z^{-1}(s,\varepsilon), & 0\leqslant t\leqslant s\leqslant 1,\end{cases}$$

Для нее же верны оценки (2.2), что показано для частного случая в [2], а для общего — в [9]. Равномерная ограниченность матрицы (2.3) устанавливается непосредственно, исходя из вида фундаментальной матрицы $Z(t, \varepsilon)$ в [9].

Лемма 2. *Решение задачи*

$$(2.4а)\qquad \varepsilon\dot{L}=F_z(y^0, z^0+\Pi_л+\Pi_п, t)L-F_y(y^0, z^0+\Pi_л+\Pi_п, t),$$

$$(2.4б)\qquad QL(0)+(I_m-Q)L(1)=0$$

*существует и ограниченно для всех $t\in[0, 1]$ равномерно по $\varepsilon$.*

Используя аналогичную фундаментальную матрицу однородной системы из леммы 1, перепишем задачу (2.4) в эквивалентной форме:

$$L(t,\varepsilon)=Z(t,\varepsilon)[QZ(0,\varepsilon)+(I_m-Q)Z(1,\varepsilon)]^{-1}\times$$
$$\times[QZ(0,\varepsilon)(I_m-Q)-(I_m-Q)Z(1,\varepsilon)Q]\int_0^1 Z^{-1}(s,\varepsilon)\times$$
$$\times[-F_y(y^0,z^0+\Pi_л+\Pi_п,s)\varepsilon^{-1}]ds+\int_0^t Z(t,\varepsilon)QZ^{-1}(s,\varepsilon)\times$$
$$\times[-F_y(y^0,z^0+\Pi_л+\Pi_п,s)\varepsilon^{-1}]ds-\int_t^1 Z(t,\varepsilon)(I_m-Q)Z^{-1}(s,\varepsilon)\times$$
$$\times[-F_y(y^0,z^0+\Pi_л+\Pi_п,s)\varepsilon^{-1}]ds,$$

откуда и следует существование решения, а полученные в лемме 1 оценки и условия на гладкость $F(y, z, t)$ (условие 5) гарантируют равномерную ограниченность решения $L(t, \varepsilon)$.

Лемма 3. *Решение задачи*

$$(2.5а)\qquad \varepsilon\dot{T}=F_zT-\varepsilon Tf_y+\varepsilon Tf_zT-F_y,\qquad QT(0)+(I_m-Q)T(1)=0,$$

$$(2.5б)\qquad \varepsilon\dot{S}=\varepsilon(f_y-f_zT)S-S(F_z+\varepsilon Tf_z)-f_z,\qquad PS(0)+(I_n-P)S(1)=0$$

*при достаточно малом $\varepsilon$ существует, единственно и ограниченно для всех $t\in[0, 1]$ равномерно по $\varepsilon$, где $f_y$, $f_z$, $F_y$, $F_z$ вычислены в точке $(y^0, z^0+\Pi_л+\Pi_п, t)$.*

Отметим, что задачу (2.5а) можно решать независимо от (2.5б). Поэтому сначала рассмотрим именно ее. Используя аналогичную фундаментальную матрицу однородной системы из леммы 1, запишем (2.5а) в эквивалентной интегральной форме:

$$T(t,\varepsilon)=Z(t,\varepsilon)[QZ(0,\varepsilon)+(I_m-Q)Z(1,\varepsilon)]^{-1}\times$$
$$\times[QZ(0,\varepsilon)(I_m-Q)-(I_m-Q)Z(1,\varepsilon)Q]\int_0^1 Z^{-1}(s,\varepsilon)\times$$
$$\times(-\varepsilon Tf_y+\varepsilon Tf_zT-F_y)\varepsilon^{-1}\,ds+\int_0^1 Z(t,\varepsilon)QZ^{-1}(s,\varepsilon)\times$$
$$\times(-\varepsilon Tf_y+\varepsilon Tf_zT-F_y)\varepsilon^{-1}\,ds-\int_0^1 Z(t,\varepsilon)(I_m-Q)\times$$
$$\times Z^{-1}(s,\varepsilon)(-\varepsilon Tf_y+\varepsilon Tf_zT-F_y)\varepsilon^{-1}\,ds=\mathcal{T}(T).$$

Покажем, что оператор $\mathcal{T}$ переводит замкнутое ограниченное множество в себя и является на этом множестве оператором сжатия. Определим множество $M=\{T:\|T\|\leqslant C_1$, равномерно по $\varepsilon$ для достаточно малых $\varepsilon\}$, где постоянную $C_1$ выберем позже (здесь и далее под $\|\cdot\|$ понимается равномерная норма в пространстве непрерывных функций). Используя результаты леммы 1, имеем

$$|\mathcal{T}(T)|\leqslant\left\{C_2\int_0^1\left\{C\exp\left(-\frac{\sigma s}{\varepsilon}\right)+C\exp\left[-\frac{\sigma(1-s)}{\varepsilon}\right]\right\}ds+\right.$$
$$\left.+C\int_0^t\exp\left[-\frac{\sigma(t-s)}{\varepsilon}\right]ds+C\int_t^1\exp\left[-\frac{\sigma(s-t)}{\varepsilon}\right]ds\right\}\times$$
$$\times\frac{C_3}{\varepsilon}(\varepsilon C_1+\varepsilon C_1^2+1)\leqslant C_3C_4(\varepsilon C_1^2+\varepsilon C_1+1),$$

где считаем, что все $f_y$, $f_z$, $F_y$ ограничены одной и той же постоянной $C_3$, постоянная $C_2$ — оценка матрицы (2.3), $C_4=2C(C_2+1)/\sigma$. Положим $C_1=2C_3C_4$; тогда для всех $\varepsilon\in(0,\varepsilon_1]$, где $\varepsilon_1=1/(C_1^2+C_1)$, справедливо $\mathcal{T}(M)\subset M$. Теперь покажем, что $\|\mathcal{T}(T_1)-\mathcal{T}(T_2)\|\leqslant q\|T_1-T_2\|$, где $q<1$. Используя представление (2.6), легко выяснить, что $|\mathcal{T}(T_1)-\mathcal{T}(T_2)|\leqslant\varepsilon(1+2C_1)C_3C_4\|T_1-T_2\|$. Из справедливости этого неравенства для любого $t\in[0,1]$ получаем $\|\mathcal{T}(T_1)-\mathcal{T}(T_2)\|\leqslant q_1\|T_1-T_2\|$, где $q=\varepsilon(1+2C_1)C_3C_4<1$ для всех $\varepsilon\in(0,\varepsilon_1]$. Таким образом, решение задачи (2.5а) существует, единственно и ограниченно для всех $t\in[0,1]$.

Рассуждения для задачи (2.5б) проводятся аналогично.

## § 3. Последовательный метод

Исходную краевую задачу (1.1) преобразуем с использованием следующей замены переменных:

$$(3.1)\qquad \tilde y=y-y^0,\qquad \tilde z=z-[z^0+\Pi_л(\tau_0)+\Pi_п(\tau_1)]+L(y-y^0),$$

где $L$ — решение краевой задачи (2.4). Отметим, что, в силу результатов работ [2], [7], [9] и леммы 2, при выполнении условий 1—6 для достаточно малых $\varepsilon$ имеем $\tilde y=O(\varepsilon)$, $\tilde z=O(\varepsilon)$. Замена (3.1) дает систему

$$(3.2а)\qquad \dot{\tilde y}=\tilde f(\tilde y,\tilde z,t,\varepsilon),$$

(3.2б) $\varepsilon\dot{\tilde{z}}=\tilde{F}(\tilde{y}, \tilde{z}, t, \varepsilon)$

с краевыми условиями

(3.2в) $P\tilde{y}(0)+(I_n-P)\tilde{y}(1)=0,$

(3.2г) $Q\tilde{z}(0)+(I_m-Q)\tilde{z}(1)=-Q\Pi_{п}(-\varepsilon^{-1})-(I_m-Q)\Pi_{л}(\varepsilon^{-1}).$

Для решения задачи (3.2) используем следующий итерационный метод:

(3.3а) $\dot{\tilde{y}}_{i-1}=\tilde{f}(\tilde{y}_{i-1}, \tilde{z}_{i-1}, t, \varepsilon), \qquad \varepsilon\dot{\tilde{z}}_i=\tilde{F}(\tilde{y}_{i-1}, \tilde{z}_i, t, \varepsilon),$

(3.3б) $P\tilde{y}_{i-1}(0)+(I_n-P)\tilde{y}_{i-1}(1)=0,$

(3.3в) $Q\tilde{z}_i(0)+(I_m-Q)\tilde{z}_i(1)=-Q\Pi_{п}(-\varepsilon^{-1})-(I_m-Q)\Pi_{л}(\varepsilon^{-1}),$

(3.3г) $\tilde{z}_0(t)\equiv 0, \qquad i=1, 2, \ldots, \quad t\in[0, 1],$

который назовем последовательным в силу того, что решение для быстрой подсистемы используется при нахождении решения для медленной подсистемы и наоборот.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* 1—6. *Тогда существует достаточно малое положительное число* $\varepsilon_0$ *такое, что для всех* $\varepsilon\in(0, \varepsilon_0]$ *решение* $(\tilde{y}^*, \tilde{z}^*)$ *задачи* (3.2) *существует, единственно в области* $\tilde{D}_1$ *и справедливы оценки*

(3.4) $\|\tilde{y}_i-\tilde{y}^*\|\leqslant Cq^{i+1}, \qquad \|\tilde{z}_i-\tilde{z}^*\|\leqslant Cq^{i+1},$

*где* $q=C\varepsilon$, $C\varepsilon_0<1$; *постоянная* $C$ *не зависит от* $\varepsilon$ *и* $i$; $D_1$ — *область пространства переменных* $(\tilde{y}, \tilde{z}, t)$, *отвечающая области* $D_1$ *с учетом замены* (3.1).

Доказательство теоремы базируется на двух следующих леммах.

Лемма 4. *Пусть выполнены условия* 1—6. *Тогда существуют* $\varepsilon_0'$ *и оператор* $T$, *разрешающий задачу* (3.2а, в) *при заданном* $\tilde{z}=\tilde{z}_{i-1}$, *т. е.* $T: S_1^\varepsilon=\{\tilde{z}: \|\tilde{z}\|\leqslant C_1\varepsilon\}\to S_2^\varepsilon=\{\tilde{y}: \|\tilde{y}\|\leqslant C_2\varepsilon\}$ *для всех* $\varepsilon\in(0, \varepsilon_0']$, $C_1$, $C_2$ — *постоянные, не зависящие от* $\varepsilon$.

Доказательство. Пусть $\tilde{z}_{i-1}\in S_1^\varepsilon$. При выполнении (3.2в) имеем

(3.5)
$$\dot{\tilde{y}}=[f_y(y^0, z^0+\Pi_{л}(\tau_0)+\Pi_{п}(\tau_1), t)-$$
$$-f_z(y^0, z^0+\Pi_{л}(\tau_0)+\Pi_{п}(\tau_1), t)L]\tilde{y}+G(\tilde{y}, \tilde{z}_{i-1}, t, \varepsilon),$$

где

$$G(\tilde{y}, \tilde{z}_{i-1}, t, \varepsilon)=\tilde{f}(\tilde{y}, \tilde{z}_{i-1}, t, \varepsilon)-[f_y(y^0, z^0+\Pi_{л}(\tau_0)+\Pi_{п}(\tau_1), t)-$$
$$-f_z(y^0, z^0+\Pi_{л}(\tau_0)+\Pi_{п}(\tau_1), t)L]\tilde{y}=$$
$$=f(y^0+\tilde{y}, z^0+\Pi_{л}(\tau_0)+\Pi_{п}(\tau_1)+\tilde{z}_{i-1}-L\tilde{y}, t)-f(y^0, z^0, t)-$$
$$-[f_z(y^0, z^0+\Pi_{л}(\tau_0)+\Pi_{п}(\tau_1), t)-f_z(y^0, z^0+\Pi_{л}(\tau_0)+\Pi_{п}(\tau_1), t)L]\tilde{y}.$$

Запишем (3.5) в интегральной форме:

(3.6)
$$\tilde{y}(t,\varepsilon)=-Y(t,\varepsilon)[PY(0,\varepsilon)+(I_n-P)Y(1,\varepsilon)]^{-1}(I_n-P)\times$$
$$\times\int_0^t Y(1,\varepsilon)Y^{-1}(s,\varepsilon)G(\tilde{y}(s,\varepsilon)\tilde{z}_{i-1}(s,\varepsilon), s,\varepsilon)ds+$$
$$+\int_0^t Y(t,\varepsilon)Y^{-1}(s,\varepsilon)G(\tilde{y}(s,\varepsilon)\tilde{z}_{i-1}(s,\varepsilon), s,\varepsilon)ds,$$

где $Y(t, \varepsilon)$ — фундаментальная матрица однородной системы (1.4). Для доказательства разрешимости интегрального уравнения (3.6) воспользуемся теоремой о неподвижной точке для сжимающего оператора. Для этого можно непосредственно показать, что оператор $T_1(\tilde{y})$, которым обозначена правая часть интегрального уравнения (3.6), переводит шар $S_2^\varepsilon$ в шар $S_2^\varepsilon$ и является оператором сжатия при достаточно малых $\varepsilon$. При этом используются: 1) ограниченность $|Y(t, \varepsilon)|$ и $|Y^{-1}(t, \varepsilon)|$ для всех $t\in[0, 1]$ и $\varepsilon\in(0, \varepsilon_0']$ — в силу свойств матрицы $(f_y-f_zL)$; 2) ограниченность $|(PY(0, \varepsilon)+(I_n-P)Y(1, \varepsilon))^{-1}|$ — в силу условия 6; 3) ограниченность $f_z$, $f_y$, $f_{yz}$, $f_{zz}$, $f_{yy}$ на $D_1$ — в силу условия 5; 4) оценки $|\Pi_л(\tau_0)+\Pi_п(\tau_1)|\leqslant \leqslant C\{\exp(-\sigma t/\varepsilon)+\exp[-\sigma(1-t)/\varepsilon]\}$, $|L|\leqslant C$ — в силу оценок на пограничные функции [6] и леммы 2. Таким образом показывается существование и единственность неподвижной точки, которая принадлежит $S_2^\varepsilon$, а из этого факта следует утверждение леммы.

Обозначим $\tilde{y}_{i-1}=T(\tilde{z}_{i-1})$.

Лемма 5. *Пусть выполнены условия* 1—6. *Тогда существуют* $\varepsilon_0''$ *и оператор* $U$, *разрешающий задачу* (3.2б, г) *при заданном* $\tilde{y}_{i-1}$, *такой, что* $U: S_2^\varepsilon\to S_1^\varepsilon$ *для всех* $\varepsilon\in(0, \varepsilon_0'']$.

Доказательство леммы 5 проводится по схеме доказательства леммы 4 с использованием фундаментальной матрицы $Z(t, \varepsilon)$ и ее свойства из леммы 1, а также представления задачи (3.2б, г) в эквивалентной интегральной форме по аналогии с (2.6).

Доказательство теоремы. Принимая во внимание операторы, введенные в леммах 4 и 5, можно рассматривать итерационный метод (3.3) как метод последовательных приближений для операторного уравнения $\tilde{z}=U(T(\tilde{z}))$. Поэтому для доказательства существования, единственности решения и справедливости соответствующих оценок достаточно показать, что оператор $UT$ является оператором сжатия и преобразует множество $S_1^\varepsilon$ в себя, но то, что $UT: S_1^\varepsilon\to S_1^\varepsilon$, непосредственно следует из лемм 4 и 5. Покажем, что

$$\|UT(\tilde{z}^1)-UT(\tilde{z}^2)\|\leqslant q\|\tilde{z}^1-\tilde{z}^2\|,\ \text{где}\ q<1,\quad \tilde{z}^1,\ \tilde{z}^2\in S_1^\varepsilon.$$

Действительно, операторы $UT(\tilde{z}^i)$, $i=1, 2$, определяются с помощью задач

$$\varepsilon\dot{\tilde{z}}^{*,i}=\tilde{F}(T(\tilde{z}^i),\ \tilde{z}^{*,i},\ t,\ \varepsilon),$$
$$Q\tilde{z}^{*,i}(0)+(I_m-Q)\tilde{z}^{*,i}(1)=-Q\Pi_п(-\varepsilon^{-1})-(I_m-Q)\Pi_л(\varepsilon^{-1}),$$

где $\tilde{z}^{*,i}=UT(\tilde{z}^i)$. Далее имеем

$$\varepsilon\dot{\tilde{z}}^{*,1}-\varepsilon\dot{\tilde{z}}^{*,2}=\tilde{F}(T(\tilde{z}^1),\tilde{z}^{*,1},t,\varepsilon)-\tilde{F}(T(\tilde{z}^2),\tilde{z}^{*,2},t,\varepsilon), \tag{3.7а}$$
$$Q(\tilde{z}^{*,1}-\tilde{z}^{*,2})(0)+(I_m-Q)(\tilde{z}^{*,1}-\tilde{z}^{*,2})(1)=0, \tag{3.7б}$$

где правую часть системы представим в виде

$$F_z(y^0,\ z^0+\Pi_л(\tau_0)+\Pi_п(\tau_1),\ t)(\tilde{z}^{*,1}-\tilde{z}^{*,2})+$$
$$+[\tilde{F}(T(\tilde{z}^1),\ \tilde{z}^{*,1},\ t,\ \varepsilon)-\tilde{F}(T(\tilde{z}^2),\ \tilde{z}^{*,2},\ t,\ \varepsilon)-$$
$$-F_z(y^0,\ z^0+\Pi_л(\tau_0)+\Pi_п(\tau_1),\ t)(\tilde{z}^{*,1}-\tilde{z}^{*,2})],$$

обозначив при этом выражение, стоящее в квадратных скобках, через $H(T(\tilde{z}^1),\ T(\tilde{z}^2),\ \tilde{z}^{*,1},\ \tilde{z}^{*,2},\ t,\ \varepsilon)$. Применение формулы Тейлора к этому выражению дает оценки

$$|H(T(\tilde{z}^1),\ T(\tilde{z}^2),\ \tilde{z}^{*,1},\ \tilde{z}^{*,2},\ t,\ \varepsilon)|\leqslant C_3\varepsilon(|T(\tilde{z}^1)-T(\tilde{z}^2)|+$$
$$+|\tilde{z}^{*,1}-\tilde{z}^{*,2}|)$$

для таких $\varepsilon\in(0,\ \varepsilon_0]$, что все необходимые нам точки в разложении $H(T(\tilde z^1),\ T(\tilde z^2),\ \tilde z^{*,1},\ \tilde z^{*,2},\ t,\ \varepsilon)$ лежат в области $D_1$ и $\varepsilon_0\leqslant\min\{\varepsilon_0',\ \varepsilon_0''\}$. Опираясь на эту оценку и используя интегральное представление задачи (3.7) (по типу представления (2.6)), непосредственно получаем

$$\|\tilde z^{*,1}-\tilde z^{*,2}\|\leqslant\varepsilon C_3[\|T(\tilde z^1)-T(\tilde z^2)\|+\|\tilde z^{*,1}-\tilde z^{*,2}\|],$$

откуда для достаточно малого $\varepsilon_0$ следует, что для всех $\varepsilon\in(0,\ \varepsilon_0]$ справедливо неравенство

$$(3.8)\qquad \|\tilde z^{*,1}-\tilde z^{*,2}\|\leqslant\varepsilon C_4\|T(\tilde z^1)-T(\tilde z^2)\|,$$

причем $C_4=C_3/(1-\varepsilon_0C_3)$. Аналогично можно показать справедливость

$$(3.9)\qquad \|T(\tilde z^1)-T(\tilde z^2)\|\leqslant C_5\|\tilde z^1-\tilde z^2\|.$$

Объединение (3.8) и (3.9) доказывает сжимаемость оператора $UT$. Следовательно, решение $(\tilde y^*,\ \tilde z^*)$ задачи (3.2) существует, единственно в области $\tilde D_1$, итерационный процесс (3.3) сходится и, кроме этого, для достаточно малых $\varepsilon\in(0,\ \varepsilon_0]$ справедлива оценка $\|\tilde z_i-\tilde z^*\|\leqslant\varepsilon C_4C_5\|\tilde z_{i-1}-\tilde z^*\|\leqslant Cq^{i+1}$, где $q=\varepsilon C_4C_5<1$. Здесь использовалось то, что $\|\tilde z_0-\tilde z^*\|=\|z^*-(z^0+\Pi_л(\tau_0)+\Pi_п(\tau_1))\|\leqslant C\varepsilon$. Использование же (3.9) дает $\|\tilde y_i-\tilde y^*\|\leqslant Cq^{i+1}$. Теорема доказана.

В соответствии с заменой (3.1) положим $y_i=\tilde y_i-y^0$, $z_i=\tilde z_i+[z^0+\Pi_л(\tau_0)+\Pi_п(\tau_1)]-L\tilde y_i$. Заметим, что если $(y^*,\ z^*)$ — точное решение задачи (1.1), то $\tilde y^*=y^*-y^0$, $\tilde z^*=z^*-[z^0+\Pi_л(\tau_0)+\Pi_п(\tau_1)]+L(y^*-y^0)$.

С л е д с т в и е 1. В предположениях теоремы 1, для всех $\varepsilon\in(0,\ \varepsilon_0]$ решение задачи (1.1) существует, единственно на $D_1$ и справедливы оценки $\|y_i-y^*\|\leqslant Cq^{i+1}$, $\|z_i-z^*\|\leqslant Cq^{i+1}$, где $q=C\varepsilon$, $C\varepsilon_0<1$; постоянная $C$ не зависит от $\varepsilon$ и $i$.

## § 4. Параллельный метод

Будем искать решение задачи (1.1) в тех же предположениях о выполнении условий 1—6, но на основе другого итерационного процесса. Для этого к (1.1) применим замену переменных вида

$$(4.1а)\qquad \tilde y=(I+\varepsilon ST)(y-y^0)+\varepsilon S[z-z^0-\Pi_л(\tau_0)-\Pi_п(\tau_1)],$$

$$(4.1б)\qquad \tilde z=T(y-y^0)+I[z-z^0-\Pi_л(\tau_0)-\Pi_п(\tau_1)],$$

где матрицы $S$ и $T$ — решение задачи (2.5). После замены приходим к задаче

$$(4.2а)\qquad \dot{\tilde y}=\tilde f(\tilde y,\ \tilde z,\ t,\ \varepsilon)=(f_y-f_zT)\tilde y+\hat f(\tilde y,\ \tilde z,\ t,\ \varepsilon),$$

$$(4.2б)\qquad \varepsilon\dot{\tilde z}=\tilde F(\tilde y,\ \tilde z,\ t,\ \varepsilon)=F_z\tilde z+\hat F(\tilde y,\ \tilde z,\ t,\ \varepsilon)$$

с краевыми условиями (3.2в, г), где $\hat f(\tilde y,\ \tilde z,\ t,\ \varepsilon)=\tilde f(\tilde y,\ \tilde z,\ t,\ \varepsilon)-(f_y-f_zT)\tilde y$, $\hat F(\tilde y,\ \tilde z,\ t,\ \varepsilon)=\tilde F(\tilde y,\ \tilde z,\ t,\ \varepsilon)-F_z\tilde z$. Для определения решения задачи (4.2) применим следующий итерационный метод:

$$(4.3а)\qquad \dot{\tilde y}_i=(f_y-f_zT)\tilde y_i+\hat f(\tilde y_{i-1},\ \tilde z_{i-1},\ t,\ \varepsilon),$$

$$(4.3б)\qquad \varepsilon\dot{\tilde z}_i=F_z\tilde z_i+\hat F(\tilde y_{i-1},\ \tilde z_{i-1},\ t,\ \varepsilon),$$

$$(4.3в)\qquad P\tilde y_i(0)+(I_n-P)\tilde y_i(1)=0,$$

$$(4.3г)\qquad Q\tilde z_i(0)+(I_m-Q)\tilde z_i(1)=-Q\Pi_п(-\varepsilon^{-1})-(I_m-Q)\Pi_л(\varepsilon^{-1}),$$

(4.3д) $\quad \tilde{y}_0(t)\equiv 0, \quad \tilde{z}_0(t)\equiv 0, \quad i=1, 2, \ldots, \quad t\in[0, 1],$

который называется параллельным в силу того, что интегрирование быстрой и медленной подсистем на каждом шаге итерации можно производить независимо одна от другой в одно и то же время.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* 1—6. *Тогда существует такое достаточно малое положительное число* $\varepsilon_0$, *что для всех* $\varepsilon\in(0, \varepsilon_0]$ *решение* $(\tilde{y}^*, \tilde{z}^*)$ *задачи* (4.2) *существует, единственно в области* $\tilde{D}_1$ *и справедливы оценки* (3.4); $\tilde{D}_1$ — *область пространства переменных* $(\tilde{y}, \tilde{z}, t)$, *отвечающая области* $D_1$ *с учетом замены* (4.1).

Доказательство. Перейдем в (4.2) к интегральной форме:

(4.4а)
$$\tilde{y}(t,\varepsilon)=-Y(t,\varepsilon)[PY(0,\varepsilon)+(I_n-P)Y(1,\varepsilon)]^{-1}\times$$
$$\times(I_n-P)\int_0^1 Y(1,\varepsilon)Y^{-1}(s,\varepsilon)\hat{f}(\tilde{y}(s,\varepsilon),\tilde{z}(s,\varepsilon),s,\varepsilon)\,ds+$$
$$+\int_0^t Y(t,\varepsilon)Y^{-1}(s,\varepsilon)\hat{f}(\tilde{y}(s,\varepsilon),\tilde{z}(s,\varepsilon),s,\varepsilon)\,ds,$$

(4.4б)
$$\tilde{z}(t,\varepsilon)=Z(t,\varepsilon)[QZ(0,\varepsilon)+(I_m-Q)Z(1,\varepsilon)]^{-1}\times$$
$$\times\Big\{-Q\Pi_\text{п}(-\varepsilon^{-1})-(I_m-Q)\Pi_\text{л}(\varepsilon^{-1})+[QZ(0,\varepsilon)(I_m-Q)-$$
$$-(I_m-Q)Z(1,\varepsilon)Q]\int_0^1 Z^{-1}(s,\varepsilon)\hat{F}(\tilde{y}(s,\varepsilon),\tilde{z}(s,\varepsilon),s,\varepsilon)\varepsilon^{-1}\,ds\Big\}+$$
$$+\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t Z(t,\varepsilon)QZ^{-1}(s,\varepsilon)\hat{F}(\tilde{y}(s,\varepsilon),\tilde{z}(s,\varepsilon),s,\varepsilon)\,ds-$$
$$-\frac{1}{\varepsilon}\int_t^1 Z(t,\varepsilon)(I_m-Q)Z^{-1}(s,\varepsilon)\hat{F}(\tilde{y}(s,\varepsilon),\tilde{z}(s,\varepsilon),s,\varepsilon)\,ds.$$

Здесь $Y(t, \varepsilon)$ — фундаментальная матрица однородной системы $\dot{Y}=[f_y(y^0, z^0+\Pi_\text{л}+\Pi_\text{п}, t)-f_z(y^0, z^0+\Pi_\text{л}+\Pi_\text{п}, t)T]Y$.

Рассмотрим теперь банахово пространство $W$ непрерывных функций $w=(\tilde{y}, \tilde{z}):[0, 1]\to\mathbb{R}^{n+m}$ с равномерной нормой. Тогда решение задачи (4.2) эквивалентно нахождению неподвижной точки $w$ оператора

(4.5) $\quad T:W\to W, \quad w\to(T_1(w), T_2(w)),$

где $T_1(w)$, $T_2(w)$ — правые части уравнений (4.4а) и (4.4б) соответственно. Итерационный метод (4.3) — это метод последовательных приближений, примененный к оператору $T$. По аналогии с рассуждениями § 3 можно показать, что существует $\varepsilon_0$ такое, что для всех $\varepsilon\in(0, \varepsilon_0]$ оператор $T$, определенный выражением (4.5), является оператором сжатия на шаре $S_1^\varepsilon=\{w:\|w\|\leqslant C\varepsilon\}\subset W$ и $T(S_1^\varepsilon)\subset S_1^\varepsilon$.

В силу принципа сжатых отображений, задача (4.4), а значит, и (4.2) имеют единственные решения. Последовательные приближения $w_i=(\tilde{y}_i, \tilde{z}_i)$, определенные в (4.3), сходятся к $w^*=(\tilde{y}^*, \tilde{z}^*)$ и при этом $\|w_i-w^*\|=\|T(w_{i-1})-T(w^*)\|\leqslant q\|w_{i-1}-w^*\|$, откуда получаем $\|w_i-w^*\|\leqslant q^i\|w_0-w^*\|\leqslant Cq^{i+1}$.

Для оценки $\|w_0-w^*\|=\|w^*\|$ были использованы соотношения (4.1) при $y=y^*$ и $z=z^*$ и следующие оценки из [6]: $\|y^*-y^0\|\leqslant C\varepsilon$, $\|z^*-z^0-\Pi_\text{л}(\tau_0)-\Pi_\text{п}(\tau_1)\|\leqslant C\varepsilon$. Доказательство теоремы завершено.

В соответствии с заменой (4.1) положим

(4.6а) $\tilde{y}_i=(I+\varepsilon ST)(y_i-y^0)+\varepsilon S(z_i-z^0-\Pi_л(\tau_0)-\Pi_п(\tau_1))$,

(4.6б) $\tilde{z}_i=T(y_i-y^0)+I[z_i-z^0-\Pi_л(\tau_0)-\Pi_п(\tau_1)]$.

Заметим, что если $(y^*, z^*)$ — точное решение задачи (1.1), то

(4.7а) $\tilde{y}^*=(I+\varepsilon ST)(y^*-y^0)+\varepsilon S[z^*-z^0-\Pi_л(\tau_0)-\Pi_п(\tau_1)]$,

(4.7б) $\tilde{z}^*=T(y^*-y^0)+I[z^*-z^0-\Pi_л(\tau_0)-\Pi_п(\tau_1)]$.

Из (4.6) и (4.7) получаем

$$\tilde{y}_i-\tilde{y}^*=(I+\varepsilon ST)(y_i-y^*)+\varepsilon S(z_i-z^*),$$
$$\tilde{z}_i-\tilde{z}^*=T(y_i-y^*)+I(z_i-z^*).$$

Следствие 2. Пусть выполняются условия теоремы 1. Тогда для всех $\varepsilon\in(0, \varepsilon_0]$ решение $(y^*, z^*)$ задачи (1.1) существует, единственно на $D_1$ и справедливы оценки $\|y_i-y^*\|\leqslant Cq^{i+1}$, $\|z_i-z^*\|\leqslant Cq^{i+1}$, где $q=C\varepsilon$, $C\varepsilon_0<1$; постоянная $C$ не зависит от $\varepsilon$ и $i$.

Замечания. 3. При численной реализации рассматриваемых итерационных методов (3.3) и (4.3) решение вспомогательных задач (описанных в леммах 2 и 3) достаточно найти с точностью до $O(\varepsilon)$.

4. Если правые части $f$ и $F$ системы (1.1) зависят также от параметра $\varepsilon$: $f=f(y, z, t, \varepsilon)$, $F=F(y, z, t, \varepsilon)$, причем эта зависимость достаточно гладкая и такова, что собственные значения матрицы $(\partial F/\partial z)(y^0(t), \varphi(y^0(t), t), t, 0)$, где $y^0(t)$, $z^0(t)=\varphi(y^0(t), t)$ — решение вырожденной задачи

$$\dot{y}^0=f(y^0, \varphi(y^0, t), t, 0), \qquad 0=F(y^0, z^0, t, 0),$$
$$Py^0(0)+(I_n-P)y^0(1)=0,$$

которое по-прежнему удовлетворяет условию 2, то результаты § 3 и 4 остаются справедливыми с соответствующим изменением правых частей.

5. Результаты § 3 и 4 справедливы и при зависимости краевых условий от $\varepsilon$, если отличие от исходной задачи порядка $O(\varepsilon)$.

## § 5. Числовой пример

Для иллюстрации возможностей и преимуществ предложенных итерационных методов решения сингулярно возмущенных краевых задач условно устойчивого типа рассмотрена следующая задача:

(5.1а) $\dot{y}_1=y_2,\quad y_1(0)=0,\qquad \dot{y}_2=y_2+z_1^2+F_1(t, \varepsilon),\quad y_2(1)=0$,

(5.1б) $\varepsilon\dot{z}_1=y_1^2+z_2+F_2(t, \varepsilon),\qquad z_1(0)=\varepsilon+\varepsilon\exp(-1/\varepsilon)$,

(5.1в) $\varepsilon\dot{z}_2=z_1,\qquad z_2(1)=\varepsilon-\varepsilon\exp(-1/\varepsilon)$,

где

$$F_1(t, \varepsilon)=-\varepsilon^2\left[\exp\left(-\frac{t}{\varepsilon}\right)+\exp\left(\frac{t-1}{\varepsilon}\right)\right]-\frac{\pi^2}{4}\varepsilon\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)-$$
$$-\frac{\pi}{2}\varepsilon\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right),$$
$$F_2(t, \varepsilon)=-[\varepsilon\sin(\pi t/2)]^2.$$

Легко проверить, что настоящий пример удовлетворяет условиям 1—6, а замены переменных (3.1) и (4.1) превращаются в тождественные. Для приведенного примера известно точное решение:

$$y_1=\varepsilon\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right), \qquad y_2=\frac{\pi}{2}\varepsilon\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right),$$

$$z_1=\varepsilon\left[\exp\left(-\frac{t}{\varepsilon}\right)+\exp\left(\frac{t-1}{\varepsilon}\right)\right],\qquad z_2=\varepsilon\left[-\exp\left(\frac{-t}{\varepsilon}\right)+\right.$$
$$\left.+\exp\left(\frac{t-1}{\varepsilon}\right)\right].$$

Нулевое равномерное приближение к решению есть вектор с нулевыми компонентами.

Пример для различных $\varepsilon$ решался на ЭВМ ЕС-1052 двумя итерационными методами: методом квазилинеаризации и параллельным методом из § 4. При этом итерации для метода квазилинеаризации применительно к примеру (5.1) имеют вид (см., например, [10])

(5.2а) $\qquad \dot y_{1i}=y_{2i},\qquad y_{1i}(0)=0,$

(5.2б) $\qquad \dot y_{2i}=y_{2i}-z_{1,i-1}^2+2z_{1,i-1}z_{1i}+F_1(t,\varepsilon),\qquad y_{2i}(1)=0,$

(5.2в) $\qquad \varepsilon\dot z_{1i}=z_{2i}-y_{1,i-1}^2+2y_{1,i-1}y_{1i}+F_2(t,\varepsilon),\qquad z_{1i}(0)=\varepsilon+\varepsilon\exp(-1/\varepsilon),$

(5.2г) $\qquad \varepsilon\dot z_{2i}=z_{1i},\qquad z_{2i}(1)=\varepsilon-\varepsilon\exp(-1/\varepsilon),\qquad i=1,2,\ldots.$

За начальное приближение для итерационного метода (5.2) были взяты равномерное нулевое приближение и приближение, удовлетворяющее краевым условиям. Так как результаты расчетов получились близкими, то в таблице приведены данные только для первого случая.

| Метод | Итерации | $\varepsilon=1.0$ | $\varepsilon=0.5$ | $\varepsilon=0.1$ | $\varepsilon=0.01$ |
|---|---|---|---|---|---|
| (5.2) | 1 | 1.014023 | 0.15534 | 0.009548 | 0.008613 |
| | 2 | 0.089187 | 0.002494 | 0.000845 | 0.008646 |
| | 3 | 0.000928 | 0.000033 | 0.000845 | 0.008646 |
| (5.3) | 1 | 1.014370 | 0.155256 | 0.009500 | 0.000285 |
| | 2 | 0.625449 | 0.044418 | 0.000072 | 0.000002 |
| | 3 | 0.332997 | 0.006349 | 0.000027 | 0.000000 |

Для метода (4.3) итерации применительно к (5.1) выглядят следующим образом:

(5.3а) $\qquad \dot y_{1i}=y_{2i},\quad y_{1i}(0)=0,\qquad \dot y_{2i}=y_{2i}+z_{1,i-1}^2+F_1(t,\varepsilon),\quad y_{2i}(1)=0,$

(5.3б) $\qquad \varepsilon\dot z_{1i}=z_{2i}+y_{1,i-1}^2+F_2(t,\varepsilon),\qquad z_{1i}(0)=\varepsilon+\varepsilon\exp(-\varepsilon^{-1}),$

(5.3в) $\qquad \varepsilon\dot z_{2i}=z_{1i},\qquad z_{2i}(1)=\varepsilon-\varepsilon\exp(-\varepsilon^{-1}),$

$$y_{10}(t)\equiv y_{20}(t)\equiv z_{10}(t)\equiv z_{20}(t)\equiv 0,\qquad t\in[0,1].$$

Легко заметить, что в (5.3) по сравнению с (5.2) появилась возможность независимого (параллельного) интегрирования на каждой итерации подсистем меньшей размерности, которые описывают, соответственно, медленные и быстрые движения. Это, в свою очередь, дает возможность понизить порядок интегрирования систем на каждой итерации. При получении решения исходной задачи появляется возможность интегрировать медленную подсистему с более крупным шагом без потери точности.

В таблице для различных значений $\varepsilon$ приведено максимальное расхождение между численным и аналитическим решениями задачи (5.1). Это подтверждает необходимость применения разработанных итерационных методов для сингулярно возмущенных задач условно устойчивого типа при достаточно малом $\varepsilon$. Результаты, приведенные в таблице, указывают также на сходимость итерационных методов со скоростью геометрической прогрессии, где в качестве знаменателя выступает величина $C\varepsilon$.

### Литература


1. *Васильева А. Б., Дмитриев М. Г.* Сингулярные возмущения в задачах оптимального управления // Матем. анализ. (Итоги науки и техн. Т. 20) М.: ВИНИТИ АН СССР, 1982. С. 3–77.
2. *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973.
3. *Боглаев Ю. П.* Итерационный метод приближенного решения сингулярно возмущенных задач // Докл. АН СССР. 1976. Т. 227. № 5. С. 1033–1036.
4. *Боглаев Ю. П.* Итерационный метод прогонки приближенного решения нелинейных сингулярно возмущенных краевых задач // Докл. АН СССР. 1977. Т. 235. № 6. С. 1241–1244.
5. *Боглаев Ю. П.* О численных методах решения сингулярно возмущенных задач // Дифференц. ур-ния. 1985. Т. 21. № 10. С. 1804–1806.
6. *Sibuja J.* Some global properties of matrices of functions of one variable // Math. Ann. 1965. V. 161. P. 67–77.
7. *Есипова В. А.* Асимптотика решения общей краевой задачи для сингулярно возмущенных систем обыкновенных дифференциальных уравнений условно устойчивого типа // Дифференц. ур-ния. 1975. Т. 11. № 11. С. 1956–1966.
8. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970.
9. *Васильева А. Б., Есипова В. А.* О расширении класса условно устойчивых сингулярно возмущенных систем, допускающих применение метода пограничных функций // Дифференц. ур-ния. 1975. Т. 11. № 7. С. 1159–1174.
10. *Беллман Р., Калаба Р.* Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи. М.: Мир, 1968.



Поступила в редакцию 28.VII.1986
Переработанный вариант 13.II.1987