

Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Б. Васильева, М. Г. Дмитриев, Сингулярные возмущения в задачах оптимального управления, *Итоги науки и техн. Сер. Мат. анализ*, 1982, том 20, 3–77

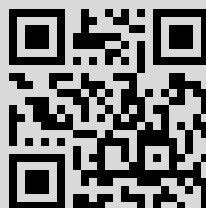
Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 95.129.140.250

23 ноября 2015 г., 15:07:37



СИНГУЛЯРНЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ В ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

А. Б. Васильева, М. Г. Дмитриев

ВВЕДЕНИЕ

В последние десятилетия интенсивно развивалась математическая теория оптимальных процессов. Большое внимание при этом уделялось задачам с малыми возмущениями. Использование методов теории возмущений (асимптотических методов) в задачах оптимального управления оказывается полезным по следующим причинам.

1. При математическом моделировании зачастую пренебрегают различными малыми величинами и в итоге оперируют с идеализированными моделями. Теория возмущений позволяет установить соответствие между точной (возмущенной) и упрощенной (невозмущенной, вырожденной) моделями. Это соответствие устанавливается изучением предельного перехода от решения возмущенной задачи к решению невозмущенной. Теория возмущений позволяет получить поправки к решению упрощенной задачи (асимптотическое разложение) и позволяет изучить чувствительность решения точной задачи к малым возмущениям.

2. Асимптотическая теория дает возможность получить качественную картину решения.

3. Знание асимптотики позволяет предложить экономичные вычислительные процедуры для приближенного решения исходных задач оптимального управления, решение которых затруднено, либо практически невозможно из-за нелинейности, вычислительной неустойчивости (вследствие «жесткости»), высокой размерности и т. д.

4. Малые возмущения в задачах оптимального управления могут быть введены искусственно, и тогда теория возмущений выступает как метод исследования исходной, в некотором смысле, «плохой» (например, некорректной) задачи.

Исследование задач оптимального управления методами теории возмущений представляет также интерес и для самой теории возмущений, так как появляющиеся при этом разнообразные новые задачи стимулируют ее развитие. Различным аспектам регулярных возмущений и метода осреднения в задачах

оптимального управления посвящен обзор Ф. Л. Черноусько, В. Б. Колмановского [136] (см. также монографии Н. Н. Моисеева [107, 108], А. А. Первозванского, В. Г. Гайцгори [112], В. А. Плотникова [113], Ф. Л. Черноусько, Л. Д. Акуленко, Б. Н. Соколова [135]). В данной статье авторы делают попытку обзора работ, связанных с изучением задач управления методами теории сингулярных возмущений. Отметим, что в этом направлении имеются более ранние обзоры Кокотовича, О'Молли, Сэннучи [200], О'Молли [217], А. Б. Васильевой, М. Г. Дмитриева [25, 243].

Настоящий обзор посвящен детерминированным объектам, описываемым системами обыкновенных дифференциальных или разностных уравнений. Стохастические объекты и объекты, описываемые уравнениями в частных производных, фактически в обзоре не рассматриваются. Библиография, приведенная в данном обзоре, не претендует на абсолютную полноту. Дополнительную библиографию можно найти в работах, цитируемых в обзоре. Укажем некоторые определения и обозначения, которые используются в данной работе. Символом P_* будем обозначать возмущенную задачу оптимального управления, а P_0 — невозмущенную задачу оптимального управления, и при этом I_*^* , I^* или $(I_0^*$ — минимальное значение критерия оптимальности в задачах P_* и P_0 , соответственно. Если оптимальное управление в этих задачах не существует, тогда под этими символами понимаем соответствующие точные нижние грани. Оптимальное управление и оптимальная траектория в задаче P_* также обозначается звездочкой сверху и в низу, а соответствующие величины в задаче P_0 — черточкой сверху (или нулем внизу) и звездочкой сверху. Штрих обозначает транспонирование.

Для положительно определенной (положительно полуопределенной) матрицы A будем употреблять обозначение $A > 0$ (≥ 0).

Для линейной системы

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad x \in R^n, \quad u \in R^r, \quad t \in [0, T], \quad (1)$$

$$y = C(t)x \quad (2)$$

будем говорить, что: а) система (1) управляема (вполне управляема) или пара $\{A(t), B(t)\}$ управляема (вполне управляема), если из любого состояния $x(0)$ система (1) с помощью кусочно-непрерывных управлений может быть переведена в любое другое состояние $x(T)$; б) система (1) или пара $\{A(t), B(t)\}$ стабилизируема, если существует обратная связь $u = M(t)x$ такая, что замкнутая система $\dot{x} = (A(t) + B(t)M(t))x$ асимптотически устойчива; в) система (1) наблюдаема по выходу (2) или пара матриц $\{C(t), A(t)\}$ наблюдаема, если система

$$\dot{z} = A'(t)z + C'(t)v,$$

или пара $\{A'(t), C'(t)\}$ управляема; г) система (1) или пара

матриц $\{C, A\}$ детектируема, если система

$$\dot{z} = A'(t)z + C'(t)v$$

или пара $\{A'(t), C'(t)\}$ стабилизируема.

Сущность этих определений раскрывается в [35, 75, 85, 128].

Управление v в задаче P_ε будем называть субоптимальным, если $I_\varepsilon(v) - I_\varepsilon^* \rightarrow 0$, при $\varepsilon \rightarrow 0$. Если $I_\varepsilon(v) - I_\varepsilon^* \leq C\varepsilon^\alpha$, где α — некоторое положительное число, то α будем называть степенью или порядком субоптимальности управления v в задаче P_ε .

Нумерация формул в каждом параграфе независимая. При ссылке на формулу из другого параграфа к ее номеру добавляется номер параграфа.

§ 1. СИНГУЛЯРНЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ

1. Введение. Цель этого параграфа дать представление о математической теории сингулярных возмущений.

Пусть имеется возмущенная задача R_ε , разрешимая на множестве $\mathfrak{M}$.

Определение 1 [11, 101]. Задачу R_ε будем называть сингулярно возмущенной по отношению к задаче R_0 и возмущения сингулярными, если задача R_0 не разрешима на $\mathfrak{M}$.

Примерами сингулярно возмущенных задач могут служить следующие.

1. $R_\varepsilon: \varepsilon \dot{x} = -x + 1, \quad x(0) = 2, \quad \mathfrak{M} = \{x(t) \in C_{[0,T]}^1: x(0) = 2\};$
 $R_0: 0 = -x + 1, \quad \bar{x} = 1$ — ее решение, но $\bar{x} \notin \mathfrak{M}$, так как $\bar{x}(0) = 1 \neq 2$.

2. $R_\varepsilon: x(t + \varepsilon) = 2^{-1}x(t) + 1, \quad x(0) = 5, \quad t \in I_\varepsilon = \{0, \varepsilon, \dots, (N-1)\varepsilon\},$
 $N = \frac{1}{\varepsilon}.$

$\mathfrak{M}$ — множество кусочно-постоянных функций с возможными точками разрыва из I_ε и $x(0) = 5$. Очевидно, что решение задачи P_0 не принадлежит $\mathfrak{M}$, так как $\bar{x}(t) = -1$ и $\bar{x}(0) = -1 \neq 5$.

В этих примерах при вырождении (при $\varepsilon = 0$) теряется часть дополнительных (начальных, краевых) условий, необходимых для однозначного определения решения.

Основная черта сингулярных возмущений — решение возмущенной задачи (которая часто называется вырожденной, так как в задаче R_0 тип уравнений может измениться, по сравнению с возмущенной задачей) — не удовлетворяет всем условиям для возмущенной, вследствие этого в решениях задачи R_ε наблюдается явление пограничного слоя — быстрое изменение вблизи тех точек, где заданы дополнительные условия, исчезающие при вырождении.

К сингулярно возмущенным системам относят начальные и краевые задачи для систем уравнений с малым параметром при

производных, дифференциально-разностных уравнений с малым запаздыванием, в частности, дискретных систем с малым шагом, интегро-дифференциальных уравнений с малым параметром при производных и др.

Теория сингулярных возмущений интенсивно развивается многими исследователями. В настоящее время имеется ряд монографий и обзоров А. Б. Васильевой [16, 19], А. Б. Васильевой, В. М. Волосова [24], А. Б. Васильевой, В. Ф. Бутузова [22, 23], С. А. Ломова [101], Е. Ф. Мищенко, Н. Х. Розова [106], В. А. Треногина [125], В. Вазова [15], О'Молли [213] и др.

2. Теорема Тихонова. Основополагающими в теории сингулярных возмущений явились работы А. Н. Тихонова [121—123]. Им была рассмотрена начальная задача для системы дифференциальных уравнений с малым параметром $\varepsilon > 0$ при части производных

$$\dot{y} = f(y, z, t), \quad y \in R^n, \quad (1)$$

$$\varepsilon \dot{z} = g(y, z, t), \quad z \in R^m,$$

$$y|_{t=0} = y^0, \quad z|_{t=0} = z^0. \quad (2)$$

При $\varepsilon = 0$ получается невозмущенная (вырожденная) система уравнений

$$\frac{d\bar{y}}{dt} = f(\bar{y}, \bar{z}, t), \quad (3)$$

$$0 = g(\bar{y}, \bar{z}, t).$$

А. Н. Тихоновым был дан ответ на вопрос о том, к какому из решений $\bar{x}(t)$ системы (3) стремится при $\varepsilon \rightarrow 0$ решение $x(t, \varepsilon)$ задачи (1), (2) (x означает y и z в совокупности).

Перечислим основные условия А. Н. Тихонова.

1. Уравнение $g(y, z, t) = 0$ имеет изолированный корень относительно z : $z = \varphi(y, t)$.

2. Корень $z = \varphi(y, t)$ является устойчивым: точка покоя $\bar{z} = \varphi(y, t)$ так называемой присоединенной системы

$$\frac{d\tilde{z}}{d\tau} = g(\tilde{z}, y, t), \quad \tau \geq 0, \quad (4)$$

является асимптотически устойчивой по Ляпунову равномерно относительно (y, t) в некоторой области.

Достаточным условием для выполнения 2 является условие

$$\operatorname{Re} \lambda(g_z) < 0, \quad (5)$$

где под символом $\lambda(g_z)$ будем понимать спектр матрицы $g_z = g_z(\varphi(y, t), y, t)$ (эту матрицу будем в дальнейшем называть основной функциональной матрицей). Заметим также, что требование (5) можно ослабить, вычисляя спектр вдоль вырожденного решения, т. е. на множестве $\varphi(\bar{y}, t), \bar{y}, t, 0 \leq t \leq T$, где $\bar{y}$ определяется ниже (см. (6)).

3. Начальное значение z^0 принадлежит области влияния точки покоя $\bar{z} = \varphi(y^0, 0)$ системы (4) при $y = y^0$, $t = 0$, т. е. решение системы (4), удовлетворяющее начальному условию $\bar{z}_{\tau=0} = z^0$, стремится к $\varphi(y^0, 0)$ при $\tau \rightarrow \infty$. При этих условиях справедлив предельный переход $x(t, \varepsilon) \rightarrow \bar{x}(t)$, причем $\bar{y}(t)$ определяется как решение начальной задачи

$$\frac{d\bar{y}}{dt} = f(\bar{y}, \varphi(\bar{y}, t), t), \quad \bar{y}(0) = y^0, \quad (6)$$

а

$$\bar{z}(t) = \varphi(\bar{y}(t), t). \quad (7)$$

Предельный переход для y является равномерным по t на $[0, T]$, а для $\bar{z}$ — неравномерным, так как $\bar{z}(0) = \varphi(y^0, 0)$, вообще говоря, не равно z^0 . Проиллюстрируем этот факт на примере скалярного уравнения $\varepsilon \frac{dz}{dt} = g(z, t)$.

На рис. 1 изображен устойчивый корень $\varphi(t)$ ($g_z = \frac{\partial g}{\partial z} \varphi(t)$, $t) < 0$). Знаки «+» и «-» указывают знак функции $g(z, t)$.

Стрелками отмечено поле направлений. При малых ε стрелки направлены почти вертикально. Геометрически ясно, что интегральная кривая, начинающаяся в точке $(z^0, 0)$, вначале идет почти вертикально, пока не попадает в достаточно малую окрестность корня $\varphi(t)$, после чего остается вблизи этого корня. Так будет вести себя любая интегральная кривая, у которой $\varphi_1(0) < z^0 < \varphi_2(0)$. Интервал $(\varphi_1(0), \varphi_2(0))$ является в данном случае областью влияния точки покоя $\bar{z} = \varphi(0)$. На рисунке наглядно видно, что предельный переход для z не является равномерным по t на $[0, T]$. В малой окрестности точки $t=0$ решение $z(t, \varepsilon)$ сильно отличается от $\bar{z}(t)$. Эта окрестность называется пограничным слоем.

Решение вырожденной системы (6), (7) аппроксимирует решение задачи (1), (2) с точностью $O(\varepsilon)$, причем для z это справедливо вне пограничного слоя. Возникает задача построения приближения для $z(t, \varepsilon)$ в пограничном слое. Следующая задача заключается в построении равномерного на $[0, T]$ приближения для решения с произвольной точностью по ε .

Эти вопросы, а также аналогичные вопросы для многих других сингулярно возмущенных задач: краевые задачи, интегро-

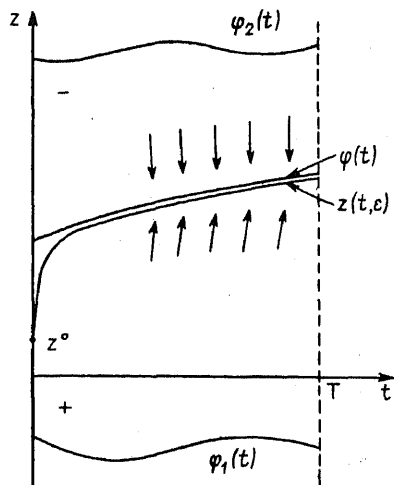


Рис. 1

дифференциальные уравнения, дифференциально-разностные уравнения с малым запаздыванием, уравнения с частными производными и др. рассматривались в работах как учеников А. Н. Тихонова, так и других авторов. Подробно ознакомиться с этими задачами и методами их решения можно по указанным выше обзорам и монографиям.

3. Метод пограничных функций. Эффективным методом решения широкого класса сингулярно возмущенных задач является метод пограничных функций. Он заключается в том, что асимптотическое разложение решения задачи (1), (2) разыскивается в виде

$$x(t, \varepsilon) = \bar{x}(t, \varepsilon) + \Pi x(\tau, \varepsilon), \quad (8)$$

где

$$\bar{x}(t, \varepsilon) = \bar{x}_0(t) + \varepsilon \bar{x}_1(t) + \dots \quad (9)$$

есть так называемый регулярный ряд — степенной ряд по ε с коэффициентами, зависящими от t , а

$$\Pi x(\tau, \varepsilon) = \Pi_0 x(\tau) + \varepsilon \Pi_1 x(\tau) + \dots \quad (10)$$

есть так называемый пограничный ряд — тоже степенной ряд по ε , но коэффициенты его зависят не от t , а от $\tau = t/\varepsilon$. Коэффициенты этого ряда называются пограничными функциями. Пограничные функции вместе с членами регулярного ряда описывают поведение решения в пограничном слое, а вне пограничного слоя они быстро убывают, что выражается оценкой

$$\|\Pi_i x(\tau)\| \leq C \exp(-\chi\tau), \quad \tau \geq 0, \quad (11)$$

где $C > 0$, $\chi > 0$ — некоторые постоянные, $\|\cdot\|$ — евклидова норма вектора. В [22] подробно изложен алгоритм получения произвольного члена разложения (8).

Выпишем нулевое приближение. Главный член регулярного ряда $\bar{x}_0(t)$ является решением вырожденной задачи (6), (7), т. е.

$$\bar{y}_0 = \bar{y}(t), \quad \bar{z}_0 = \bar{z}(t) = \varphi(\bar{y}(t), t). \quad (12)$$

Далее имеем $\Pi_0 y(\tau) = 0$, а $\Pi_0 z(\tau)$ удовлетворяет системе

$$\frac{d}{d\tau} \Pi_0 z = g(y^0, \bar{z}_0(0) + \Pi_0 z, 0),$$

$$\Pi_0 z|_{\tau=0} = z^0 - \bar{z}_0(0)$$

замена переменных $\tilde{z} = \bar{z}_0(0) + \Pi_0 z$ приводит к присоединенной системе отнесенной к точке $y = y^0$, $t = 0$. Требование (5) обеспечивает оценку (11) для $\Pi_0 z$.

Итак, в нулевом приближении разложение (8) дает

$$y(t, \varepsilon) \cong \bar{y}_0(t) = \bar{y}(t),$$

$$z(t, \varepsilon) \cong \bar{z}_0(t) + \Pi_0 z = \varphi(\bar{y}(t), t) + \Pi_0 z.$$

Выше говорилось о том, что $\bar{y}(t)$ является равномерным приближением для $y(t, \varepsilon)$, а $\bar{z}(t)$ не является таковым. Добавление слагаемого $\Pi_0 z$ осуществляет для z приближение, которое уже является равномерным. Имеют место оценки

$$\begin{aligned} \max_{t \in [0, T]} \|y(t, \varepsilon) - \bar{y}_0(t)\| &< C\varepsilon, \\ \max_{t \in [0, T]} \|z(t, \varepsilon) - \bar{z}_0(t) - \Pi_0 z\| &< C\varepsilon, \end{aligned} \quad (13)$$

где C — постоянная, не зависящая от ε при достаточно малых ε .

Частичная сумма k -го порядка $X_k(t, \varepsilon)$ разложения (8) обеспечивает равномерное приближение с точностью $O(\varepsilon^{k+1})$, т. е. при достаточно малых ε справедливо неравенство

$$\max_{[0, T]} \|x(t, \varepsilon) - X_k(t, \varepsilon)\| < C\varepsilon^{k+1}$$

4. Задачи с начальным скачком. В задачах управления нередко встречаются случаи, когда краевое условие зависит от ε и притом сингулярным образом. В случае сингулярных начальных условий метод пограничных функций не всегда применим. Рассмотрим тип уравнения, для которого можно пользоваться методом пограничных функций, а именно, рассмотрим систему, линейную по переменной z

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= A_1(y, t)z + B_1(y, t), \\ \varepsilon \frac{dz}{dt} &= A_2(y, t)z + B_2(y, t). \end{aligned} \quad (14)$$

Зададим начальные условия

$$y(0, \varepsilon) = y^0, \quad z(0, \varepsilon) = \frac{z^{-1}}{\varepsilon}. \quad (15)$$

При выполнении условия устойчивости (5) и в этом случае может иметь место предельный переход при $\varepsilon \rightarrow 0$, где $\bar{z}(t) = -A_2^{-1}(\bar{y}, t)B_2(\bar{y}, t)$, а $\bar{y}(t)$ удовлетворяет вырожденной системе (3), имеющей в данном случае вид

$$\frac{d\bar{y}}{dt} = -A_1 A_2^{-1} B_2 + B_1, \quad (16)$$

но решение ее $\bar{y}(t)$ определяется уже не начальным условием $\bar{y}(0) = y^0$, а видоизмененным начальным условием $\bar{y}(0) = y^0 + \Delta y^0$, где Δy^0 определяется коэффициентами системы (14) при $t=0$ и значением z^{-1} . Таким образом, $y(t, \varepsilon)$ в пределе испытывает скачок в начальной точке, и поведение этой компоненты напоминает поведение $z(t, \varepsilon)$, в задаче (1), (2), т. е. у y -компоненты появляется пограничный слой в окрестности $t=0$. Это вызвано наличием бесконечно больших значений z в окрестности $t=0$. В случае, если y и z — скалярные величины, можно

дать простую формулу для определения Δy^0 :

$$-\int_{y^0}^{y^0+\Delta y^0} \frac{A_2(y, 0)}{A_1(y, 0)} dy = z^{-1}. \quad (17)$$

Подробное исследование задачи (14), (15) можно найти в [18] и [22]. Заметим при этом, что пограничный ряд для z начинается с члена порядка $\frac{1}{\varepsilon}$, т. е. с члена $\frac{1}{\varepsilon} \Pi_{-1} z$.

В условиях работы [18] можно получить дифференциальные соотношения для скачка. А именно, имеет место следующее утверждение: начальное условие $\bar{y}(0)$ для вырожденной системы (16) определяется как значение одного из решений начальной задачи

$$\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \Delta_2} A_2(\tilde{\Phi}, 0) \Delta_2 = A_1(\tilde{\Phi}, 0) \Delta_2, \quad (18)$$

$$\tilde{\Phi}(z^{-1}) = y^0 \quad (19)$$

при $\Delta_2 = 0$, т. е. $\bar{y}(0) = \tilde{\Phi}(0)$. Здесь $\tilde{\Phi}$ — n -мерная вектор функция m -мерного аргумента и поэтому $\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \Delta_2}$ — прямоугольная матрица.

Разрешимость задачи (18), (19) очевидно следует из разрешимости следующей системы Пфаффа

$$\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \Delta_2} = A_1(\tilde{\Phi}, 0) A_2^{-1}(\tilde{\Phi}, 0), \quad (18')$$

$$\tilde{\Phi}(z^{-1}) = y^0. \quad (19')$$

Вводя «обратное время» $s = z^{-1} - \Delta_2$, имеем

$$\frac{\partial \alpha}{\partial s} = -A_1(\alpha, 0) A_2^{-1}(\alpha, 0), \quad (20)$$

$$\alpha(0) = y^0 \quad (21)$$

и при этом $\bar{y}(0) = \alpha(z^{-1})$. В скалярном случае ($m=1$), полагая $s = 1 - \frac{\Delta_2}{z^{-1}}$, вместо (20), (21) получаем

$$\frac{d\alpha}{ds} = -A_1(\alpha, 0) A_2^{-1}(\alpha, 0) z^{-1}, \quad s \in [0, 1], \quad (24)$$

$$\alpha(0) = y^0, \quad (25)$$

и $\bar{y}(0) = \alpha(1)$.

Пример 1. Пусть y — скалярная переменная, а z — векторная, $z \in R^m$ и $A_1(y, t) = (a_1(y), \dots, a_m(y))$, $A_2 = A_2(y)$, $a_i(y)$ — скалярные функции, $i = \overline{1, m}$.

Вместо (18') здесь имеем

$$d\tilde{\Phi} = A_1(\tilde{\Phi}) A_2^{-1}(\tilde{\Phi}) d\Delta_2 = \sum_{i=1}^m \alpha_i(\tilde{\Phi}) d\Delta_2^i$$

и условия разрешимости этой пфаффово́й системы

$$\frac{\partial \alpha_k}{\partial y} \alpha_j = \frac{\partial \alpha_j}{\partial y} \alpha_k, \quad k, j = \overline{1, m}$$

дают

$$\alpha_i(y) = \alpha(y) \beta_i, \quad \beta_i = \text{const}, \quad i = \overline{1, m}.$$

Таким образом, $\frac{d\Phi}{\alpha(\tilde{\Phi})} = \sum_{i=1}^m \beta_i d\Delta_2^i$ и соотношения для начального скачка принимают вид

$$\int_{y^0}^{\bar{y}^{(0)}} \frac{ds}{\alpha(s)} = \sum_{i=1}^m \beta_i \int_{-1}^0 d\Delta_2^i = - \sum_{i=1}^m \beta_i z_i^{-1}.$$

Подчеркнем, что условия разрешимости накладывают ограничения на элементы матриц A_1, A_2 .

Пример 2. Пусть $y \in R^1, z \in R^2$,

$$A_1 = (y, 1), \quad A_2 = \text{diag}(a_{11}, a_{22}), \quad a_{11} = \text{const} < 0, \\ a_{22} = \text{const} < 0, \quad a_{11} \neq a_{22}.$$

Можно показать, что начальный скачок здесь не определяется из задачи (18'), (19'). Однако соотношения (18), (19) имеют место.

5. Краевые задачи. В теории оптимального управления часто встречается так называемый условно устойчивый случай. Пусть спектр основной функциональной матрицы g_z не удовлетворяет условию II, а такое, что часть собственных значений находится в левой полуплоскости, т. е. $\text{Re } \lambda_i < 0, i = 1, \dots, k$, а часть в правой — $\text{Re } \lambda_i > 0, i = k+1, \dots, m$. Тогда при $\varepsilon \rightarrow 0$ решение начальной задачи (1), (2), вообще говоря, стремится к бесконечности. Однако если задать не начальные условия, а определенные краевые условия, то решение такой краевой задачи при выполнении ряда дополнительных требований будет существовать и для него будет иметь место асимптотическое разложение типа (8)

$$x(t, \varepsilon) = \bar{x}(t, \varepsilon) + \Pi x(\tau_0, \varepsilon) + Qx(\tau_1, \varepsilon), \\ \tau_0 = t/\varepsilon, \quad \tau_1 = (t - T)/\varepsilon, \quad (26)$$

т. е. здесь появляется и правый пограничный ряд. Остановимся на краевой задаче более подробно.

Зададим для (1) краевые условия

$$\begin{aligned} y(0, \varepsilon) &= y^0, \\ az(0, \varepsilon) + bz(T, \varepsilon) &= z^0, \end{aligned} \quad (27)$$

где a и b — $m \times m$ -матрицы и

$$a = \begin{pmatrix} E_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E_{m-k} \end{pmatrix}$$

(E_k, E_{m-k} — единичные матрицы соответствующей размерности). Пусть

I. Система $g(y, z, t) = 0$ имеет корень $z = \varphi(y, t)$ изолированный в некоторой ограниченной замкнутой области D пространства переменных (y, t) .

II. Задача (6), (7) имеет на $[0, T]$ единственное решение для каждого y^0 из некоторого множества D_0 , причем $(\bar{y}(t), t) \in D$ при $t \in [0, T]$.

III. Собственные значения $\bar{\lambda}_i(t)$ матрицы $\bar{g}_z(t) = g_z(\bar{y}(t), \bar{z}(t), t)$ удовлетворяют на $[0, T]$ неравенствам

$$\operatorname{Re} \bar{\lambda}_i(t) < 0, \quad i = 1, \dots, k; \quad \operatorname{Re} \bar{\lambda}_i(t) > 0, \quad i = k+1, \dots, m.$$

IV. а) $\det B_{11}(0) \neq 0$. Здесь $B_{11}(t)$ — левый верхний $(k \times k)$ блок $(m \times m)$ -матрицы $B(t) = \begin{pmatrix} B_{11}(t) & B_{12}(t) \\ B_{21}(t) & B_{22}(t) \end{pmatrix}$, приводящий матрицу $\bar{g}_z(t)$ к блочно-диагональному виду: $B^{-1}(t) \bar{g}_z(t) B(t) = \begin{pmatrix} C^-(t) & 0 \\ 0 & C^+(t) \end{pmatrix}$, где $(k \times k)$ -матрица $C^-(t)$ имеет собственные значения $\bar{\lambda}_i(t)$, ($i = 1, \dots, k$), а $(m-k) \times (m-k)$ -матрица $C^+(t)$ имеет собственные значения $\bar{\lambda}_i(t)$ ($i = k+1, \dots, m$); б) $\det B_{22}(1) \neq 0$.

V. Система

$$\frac{d\tilde{\xi}}{d\tau_0} = g(\bar{y}(0), \tilde{\xi} + \varphi(\bar{y}(0), 0), 0) \quad (28)$$

имеет интегральное многообразие S^+ (оно состоит из траекторий системы (28) стремящихся к началу координат при $\tau_0 \rightarrow \infty$), представимое в некоторой области G^+ изменения $\tilde{\xi}_1$ в виде $\tilde{\xi}_2 = \Phi_2(\tilde{\xi}_1)$. Здесь $\tilde{\xi}_1 \in R^k$, $\tilde{\xi}_2 \in R^{m-k}$ и $\tilde{\xi} = \begin{pmatrix} \tilde{\xi}_1 \\ \tilde{\xi}_2 \end{pmatrix}$.

Система

$$\frac{d\tilde{\xi}}{d\tau_1} = g(\bar{y}(T), \tilde{\xi} + \varphi(\bar{y}(T), T), T) \quad (29)$$

имеет интегральное многообразие S^- (оно состоит из траекторий системы (29), стремящихся к началу координат при $\tau_1 \rightarrow -\infty$), представимое в некоторой области G^- изменения $\tilde{\xi}$ в виде $\tilde{\xi}_1 = \Phi_1(\tilde{\xi}_2)$.

VI. $a(z^0 - \varphi(\bar{y}(0), 0)) \in G^+$, $b(z^0 - \varphi(\bar{y}(T), T)) \in G^-$.

При выполнении указанных условий и достаточной гладкости правых частей в окрестности главного члена асимптотики (26) существует единственное решение задачи (1), (27) и частичная сумма X_k разложения (26) порядка k является для него асимптотическим приближением порядка $O(\varepsilon^{k+1})$.

Выпишем те члены разложения (26), которые дают асимптотическую точность $O(\varepsilon)$. Главный член $\bar{x}_0(t)$ регулярного ряда является решением вырожденной задачи (6), (7), $\Pi_0 y = Q_0 y = 0$.

Для $\Pi_0 z$ имеем

$$\frac{d\Pi_0 z}{d\tau_0} = g(\bar{y}(0), \varphi(\bar{y}(0), 0) + \Pi_0 z, 0), \quad (30)$$

$$a\Pi_0 z(0) = a(z^0 - \varphi(\bar{y}(0), 0)), \quad (31)$$

Система (30) с точностью до обозначений совпадает с (28). Дополнительное условие (31) означает, что при $\tau_0 = 0$ задано k компонент вектора $\Pi_0 z(0)$, т. е. блок $(\Pi_0 z(0))_1$. Остальные $m-k$ компоненты определяются из требования, чтобы $\Pi_0 z(0) \in S^+$ (аналитически $(\Pi_0 z(0))_2 = \Phi_2((\Pi_0 z(0)))$).

В итоге, имеем $\Pi_0 z \rightarrow 0$ при $\tau_0 \rightarrow \infty$ и $\Pi_0 z$ удовлетворяет оценке типа (11). $Q_0 z$ удовлетворяет аналогичному уравнению и аналогичному условию

$$\frac{d}{d\tau_1} Q_0 z = g(\bar{y}(T), \varphi(\bar{y}(T), T) + Q_0 z, T),$$

$$bQ_0 z(0) = b(z^0 - \varphi(\bar{y}(T), T)).$$

Условия V и VI обеспечивают экспоненциальное убывание $Q_0 z$ при $\tau_1 \rightarrow -\infty$. Подробное исследование задачи (1), (27) дано в [3, 22, 27, 28].

Условия (27) специального вида. Пусть заданы двухточечные условия общего вида

$$R(x(0), x(T)) = 0. \quad (32)$$

Тогда нужно поступать следующим образом. Построим сначала решение задачи (1), (27), где y^0 , z^0 теперь уже зависят от ε и имеют асимптотические представления

$$y^0(\varepsilon) = y_0^0 + \varepsilon y_1^0 + \dots, \quad z^0(\varepsilon) = z_0^0 + \varepsilon z_1^0 + \dots$$

Для этого случая остается справедливым высказанное утверждение, только y^0 надо заменить на y_0^0 , а z^0 на z_0^0 . Следующие коэффициенты разложений $y^0(\varepsilon)$ и $z^0(\varepsilon)$ войдут в следующие члены разложения (26). Далее нужно подставить в (32) вместо точного решения построенную таким образом асимптотику, где y_i^0 , z_i^0 являются неизвестными параметрами, после чего представить (32) в виде

$$R_0 + \varepsilon R_1 + \dots + \varepsilon^n R_n + \dots = 0.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε , получаем серию уравнений, из которой последовательно определяем y_i^0 , z_i^0 , если уравнение $R_0=0$ разрешимо относительно y_0^0 , z_0^0 (или x_0^0) и соответствующий функциональный определитель на этом решении отличен от нуля, т. е.

$$\Delta_0^0 = \det \left(\frac{\partial R_0}{\partial x_0^0} \right) \neq 0, \quad (z_0^0)_1 \in G^+, \quad (z_0^0)_2 \in G^-, \quad y_0^0 \in D_0. \quad (33)$$

Задачи (1), (32) исследовались в [3, 22, 68]. Отметим, что в задачах вида (1), (32) в качестве основной может выступать не только задача (1), (27). Вместо начальных условий в (27) для y могут задаваться краевые, а краевые условия для z могут быть иными. При этом число заданных слева компонент z должно равняться числу тех собственных значений основной функциональной матрицы, для которых $\operatorname{Re} \lambda < 0$, а число заданных справа компонент z должно равняться числу тех λ , для которых $\operatorname{Re} \lambda > 0$. В последнее время метод пограничных функций удалось распространить также на случаи, когда среди $\lambda_i(t)$ имеются тождественно равные нулю [23, 129, 217]. Закономерности и утверждения, аналогичные вышеизложенным, имеют место для интегро-дифференциальных уравнений, а также для разностных или дифференциально-разностных уравнений с малым шагом [22, 23, 119, 134].

§ 2. НЕЛИНЕЙНЫЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ БЕЗ ОГРАНИЧЕНИЙ НА ЗНАЧЕНИЯ УПРАВЛЯЮЩИХ ВОЗДЕЙСТВИИ

1. Асимптотика экстремали. Пусть требуется минимизировать функционал

$$I_\varepsilon(u) = \Phi(x(T)) + \int_0^T F(x, u, t) dt \quad (1)$$

вдоль траекторий системы

$$\begin{aligned} \dot{y} &= f(y, z, u, t, \varepsilon), \quad y(0, \varepsilon) = y^0, \quad y \in R^n, \\ \varepsilon \dot{z} &= g(y, z, u, t, \varepsilon), \quad z(0, \varepsilon) = z^0, \quad z \in R^m, \end{aligned} \quad (2)$$

$u \in M$, где M — множество r -мерных достаточно гладких вектор-функций. Все функции в (1), (2) предполагаются достаточно гладкими, T может быть как фиксированным, так и нефиксированным. Здесь возможны другие краевые условия и соответственно другие функционалы.

Пусть T фиксировано. Предположим, что оптимальное управление u_ε^* в возмущенной задаче P_ε существует (Теоремы существования для задач вида (1), (2) для каждого фиксированного ε можно найти, например, в [133]). Поставим задачу о построении асимптотического приближения к решению задачи

(1), (2). Под решением понимаем оптимальные траектории y_*, z_* , управление u_* и минимальное значение функционала I_* . Интерес представляет и следующий вопрос. Будет ли предел этого решения $y_0^*, z_0^*, u_0^*, I_0^*$ (если он существует в каком-то смысле) являться решением некоторой задачи управления меньшей размерности, которую будем называть предельной или вырожденной задачей P_0 ? Под размерностью задач оптимального управления понимаем размерность пространства состояний (фазового пространства). Так как оптимальное управление удовлетворяет принципу максимума, то вдоль оптимального управления имеют место соотношения:

$$\dot{\psi}_1 = -\frac{\partial H}{\partial y} = -f_y' \psi_1 - g_y' \frac{\tilde{\psi}_2}{\varepsilon} - F_y, \quad \psi_1(T) = -\frac{\partial \Phi}{\partial y}(x(T)), \quad (3)$$

$$\dot{\tilde{\psi}}_2 = -\frac{\partial H}{\partial z} = -f_z' \psi_1 - g_z' \frac{\tilde{\psi}_2}{\varepsilon} - F_z, \quad \tilde{\psi}_2(T) = -\frac{\partial \Phi}{\partial z}(x(T)), \quad (4)$$

где $H = \psi_1' f + \tilde{\psi}_2' g / \varepsilon - F$, $\psi_1, \tilde{\psi}_2$ — сопряженные переменные. Здесь предполагаем, что оптимальное управление неособое в смысле принципа максимума [36, 116]. Из (4) находим $u = U(y, z, \psi_1, \tilde{\psi}_2 / \varepsilon, t, \varepsilon)$, подставляем u в (2), (3) и приходим к краевой задаче принципа максимума. Видно, что параметр ε в эту краевую задачу входит достаточно сложным образом, если f, g и F нелинейны по u .

Здесь представляется удобным введение функции

$$\tilde{\psi}_2 = \varepsilon \psi_2. \quad (5)$$

После замены (5) приходим к задаче

$$\begin{aligned} \dot{Y} &= L(Y, Z, t, \varepsilon) = I_n H_Y, \quad Y = \begin{pmatrix} y \\ \psi_1 \end{pmatrix}, \\ \varepsilon \dot{Z} &= N(Y, Z, t, \varepsilon) = I_m H_Z, \quad Z = \begin{pmatrix} z \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} y(0, \varepsilon) &= y^0, \quad \psi_1(T, \varepsilon) = -\frac{\partial \Phi}{\partial y}(y(T, \varepsilon), z(T, \varepsilon)), \\ z(0, \varepsilon) &= z^0, \quad \varepsilon \psi_2(T, \varepsilon) = -\frac{\partial \Phi}{\partial z}(y(T, \varepsilon), z(T, \varepsilon)), \end{aligned} \quad (7)$$

$$\text{где } I_n = \begin{pmatrix} 0 & E_n \\ -E_n & 0 \end{pmatrix}.$$

Как показано в [217], основная функциональная матрица задачи (6), (7) имеет вид

$$G = N_Z = I_m (H_{ZZ} - H'_{uZ} H_{uu}^{-1} H_{uZ})$$

и каждому собственному значению λ матрицы G отвечает $\mu = -\lambda$ — также собственное значение G . Поэтому условие III из п. 5 § 1 (условие условной устойчивости) удовлетворяется, если положить, как в [217], что матрица G вдоль решения вырожденной задачи не имеет чисто мнимых собственных значений.

В частных случаях удается показать, что условная устойчивость есть следствие достаточных условий оптимальности в соответствующей задаче P_0 [189, 233, 234] (см. также [26, 64]). Исследование предельного перехода и построение асимптотики для общего случая задачи (6), (7) можно провести по схеме изложенной в § 1 (см. также по этому поводу работы [160, 169, 170]). Опишем здесь построение нулевого приближения. Для членов регулярного ряда Y_0, Z_0 имеем (опускаем индекс «0», чтобы не загромождать запись)

$$\dot{\bar{Y}} = L(\bar{Y}, \bar{Z}, t, 0), \quad (8)$$

$$0 = N(\bar{Y}, \bar{Z}, t, 0),$$

$$\bar{y}(0) = y^0, \quad \bar{\psi}_1(T) = \psi_1^T. \quad (9)$$

Решение задачи (8), (9) определяется как функция t, y^0 и пока еще неизвестного параметра ψ_1^T .

Условия (7) дают на правом конце

$$\begin{aligned} \psi_1^T &= -\frac{\partial \Phi}{\partial y}(\bar{y}(T, y^0, \psi_1^T), z^T), \\ 0 &= -\frac{\partial \Phi}{\partial z}(\bar{y}(T, y^0, \psi_1^T), z^T). \end{aligned} \quad (10)$$

Система (10) является системой $(n+m)$ уравнений для определения $n+m$ неизвестных — компонент векторов ψ_1^T и z^T . Подчеркнем, что в правую часть (7) вместо y подставляется $\bar{y}$, а вместо z нельзя подставить $\bar{z}$, так как z имеет правый погранслой и $z(T, \epsilon)$ является пока неизвестным параметром z^T . Предположим, что система (10) разрешима (хотя здесь возможны особые случаи) относительно ψ_1^T и z^T . Тогда можно считать, что нулевые члены регулярного ряда полностью определены.

Теперь нужно построить $Q_0 Z (Q_0 Y = 0)$ «0» опять опускаем). Имеем

$$QZ|_{\tau_1=0} = \begin{pmatrix} z^T \\ \psi_2^T \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \bar{z}(T, y^0, \psi_1^T) \\ \bar{\psi}_2(T, y^0, \psi_1^T) \end{pmatrix}$$

и соответствующие уравнения, определяемые, как обычно, в методе пограничных функций. В QZ входит неизвестный m -мерный параметр ψ_2^T . Уравнения для ψ_2^T получаются из m условий, обеспечивающих принадлежность QZ устойчивому многообразию S^- , т. е. условий, при которых $QZ \rightarrow 0, \tau_1 \rightarrow -\infty$. Соотношения для PZ строятся, как описано на стр. 13.

В связи с вышесказанным, можно ожидать, что предельная задача оптимального управления P_0 строится следующим образом. Под интеграл вместо z подставляем выражение $\hat{z} = \chi(\hat{y}, \hat{u}, t)$, найденное из системы $0 = g(\hat{y}, \hat{z}, \hat{u}, t, 0)$, а внеинтегральный член в задаче P_0 получается в результате подста-

новки вместо $z(T) = z^T$ выражения $z^T(\hat{y})$, которое находится из второго уравнения системы (10).

Таким образом, имеем

$$P_0: \hat{I}(\hat{u}) = \varphi(\hat{y}(T), z^T(\hat{y}(T))) + \int_0^T F(\hat{y}, \chi(\hat{y}, \hat{u}, t), \hat{u}, t) dt \rightarrow$$

$$\rightarrow \min, \quad \dot{\hat{y}} = f(\hat{y}, \chi(\hat{y}, \hat{u}, t), \hat{u}, t, 0), \quad \hat{y}(0) = y^0. \quad (11)$$

Доказательство того, что (11), действительно является задачей P_0 , сводится к доказательству того, что краевая задача принципа максимума, записанная для (11), совпадает с вырожденной задачей (8), (9). В случае линейного внеинтегрального члена, появляются некоторые особенности [62].

Остановимся на некоторых частных случаях задачи (1), (2). В работе [21] построена асимптотика вида (1.26) решения краевой задачи (6) при частных предположениях на задачу (1), (2): $g_u = 0$, φ линейна по $x(T)$ и F квадратична.

В работах [55, 169, 201, 212, 217, 233, 234], также посвященных асимптотике вида (1.26) задачи (1), (2), в частности, предполагалось, что

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \varepsilon \varphi_1(x(T)). \quad (12)$$

Это условие упрощает процесс построения асимптотики.

2. Вариационная природа нулевого приближения. Из асимптотики экстремали следует, что асимптотическое приближение нулевого порядка $u_0(t, \varepsilon)$ к u_ε^* имеет вид

$$u_0(t, \varepsilon) = \bar{u}_0(t) + \Pi_0 u(\tau_0) + Q_0 u(\tau_1), \quad (13)$$

причем

$$\|u_\varepsilon^* - u_0(t, \varepsilon)\| \leq C\varepsilon, \quad t \in [0, T], \quad 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0. \quad (14)$$

Зададимся вопросом: можно ли слагаемые, входящие в (15), связать с решениями более простых, в некотором смысле, вариационных задач? Оказывается ответ на этот вопрос в некоторых случаях положительный и при этом $\bar{u}_0(t)$ совпадает с оптимальной программой $u_0^*(t)$ в P_0 (см., например, (11)). В некоторых других случаях задача P_0 может оказаться задачей нелинейного программирования, а пограничные функции $\Pi_0 u(\tau_0)$ и $Q_0 u(\tau_1)$ — оптимальными управлениями в некоторых задачах оптимальной стабилизации [2, 71, 84, 209] для соответствующих присоединенных систем.

Проиллюстрируем это на одной нелинейной задаче. Пусть

$$P_\varepsilon: I_\varepsilon(u) = \int_0^1 F(z, u, t) dt \rightarrow \min, \quad (15)$$

$$\varepsilon \dot{z} = g(z, u, t), \quad z(0, \varepsilon) = z^0, \quad z(1, \varepsilon) = z^1, \quad (16)$$

$z \in Z \subseteq R^m$, $u \in U \subseteq R^r$, Z и U — открытые множества.

В этом случае при некоторых условиях имеет место представление (13), где слагаемые являются оптимальными решениями, соответственно, трех вариационных задач:

$$P_0: F(\bar{z}, \bar{u}, t) \rightarrow \min, \quad g(\bar{z}, \bar{u}, t) = 0, \quad t \in [0, T]. \quad (17)$$

$$\Pi_0 P: I_0(\Pi_0 u) = \int_0^\infty [F(\bar{z}(0) + \Pi_0 z, \bar{u}(0) + \Pi_0 u, 0) - \quad (18)$$

$$-F(\bar{z}(0), \bar{u}(0), 0)] d\tau_0 \rightarrow \min,$$

$$\frac{d\Pi_0 z}{d\tau_0} = g(\bar{z}(0) + \Pi_0 z, \bar{u}(0) + \Pi_0 u, 0), \quad \Pi_0 z(0) = -\bar{z}(0).$$

$$Q_0 P: I_1(Q_0 u) = - \int_0^{-\infty} [F(\bar{z}(1) + Q_0 z, \bar{u}(1) + Q_0 u, 1) -$$

$$-F(\bar{z}(1), \bar{u}(1), 1)] d\tau_1 \rightarrow \min,$$

$$\frac{dQ_0 z}{d\tau_1} = g(\bar{z}(1) + Q_0 z, \bar{u}(1) + Q_0 u, 1), \quad Q_0 z(0) = z^1 - \bar{z}(1). \quad (19)$$

Задача P_0 является задачей нелинейного программирования, а задачи $\Pi_0 P$ и $Q_0 P$ являются задачами оптимальной стабилизации, так как $\Pi_0 z$ и $Q_0 z$ должны экспоненциально убывать к нулю при $|\tau_i| \rightarrow \infty$, $i=0, 1$. Нетрудно убедиться при применении метода пограничных функций к краевой задаче принципа максимума для P_ε :

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{z} &= g(z, u(z, \psi, t), t), \quad z(0, \varepsilon) = z^0, \quad z(1, \varepsilon) = z^1, \\ \varepsilon \dot{\psi} &= - \frac{\partial H}{\partial z}, \end{aligned} \quad (20)$$

что гамильтоновы системы для задач (18), (19) связаны с соответствующими системами для Π - и Q -функций в нулевом приближении.

При некоторых предположениях аналитичности, типичных для задач оптимальной стабилизации, условия III—V из п. 5 § 1 в задаче (20) следуют при выполнении вдоль $\bar{z}, \bar{u}$ необходимых условий первого порядка, достаточных условий локального минимума в задаче P_0 , и условия полной управляемости пары (A, B) , где

$$A = \left. \frac{\partial g}{\partial z} \right|_{\substack{z=\bar{z} \\ u=\bar{u}}}, \quad B = \left. \frac{\partial g}{\partial z} \right|_{\substack{z=\bar{z} \\ u=\bar{u}}}.$$

Таким образом, применяя результаты по условно устойчивому случаю, описанные в § 1, можно получить утверждение о том, что в некоторой окрестности локального минимума задачи P_0 при достаточно малых $\varepsilon > 0$ достигается локальный минимум в задаче P_ε и при этом

$$\|z^*(t, \varepsilon) - z_0(t, \varepsilon)\| \leq C\varepsilon, \quad \|u^*(t, \varepsilon) - u_0(t, \varepsilon)\| \leq C\varepsilon, \quad t \in [0, T].$$

Здесь $z_0 = \bar{z} + \Pi_0 z + Q_0 z$, а u_0 определяется (13).

Вследствие, вообще говоря, неединственности локального минимума с требуемыми свойствами в задаче P_0 , в нелинейных задачах следует говорить о локальной субоптимальности $u_0(t, \varepsilon)$, т. е. субоптимальности $u_0(t, \varepsilon)$ в некоторой окрестности $u^*(t, \varepsilon)$. Следует также отметить, что $u_0(t, \varepsilon)$ может уже не быть допустимым управлением в исходной терминальной задаче (14), (15), так как вдоль этого управления конечное условие удовлетворяется, вообще говоря, в асимптотическом смысле.

Замечание 1. Сделав в (15), (16) замену $t = \tau\varepsilon$, можно прийти к задаче с медленно изменяющимися коэффициентами на большом интервале времени, которая рассматривалась в литературе [107, 108, 111, 139].

Замечание 2. Термин «магистраль», употребляемый в математической экономике [66, 137], как видно из вышеизложенного, может служить синонимом нулевого члена регулярного ряда для быстрой переменной z . Таким образом, задача P_0 формирует магистраль, а задачи P_0P и Q_0P аппроксимируют переход от начального состояния на магистраль и переход с магистрали в конечное состояние.

Замечание 3. Асимптотика экстремали для скалярной задачи (15), (16) была построена в [6].

Аналогичная приближенная декомпозиция P_ε на три задачи меньшей размерности, с целью построения $u_0(t, \varepsilon)$, на примере задач, где системы линейные по z и u , а функция F квадратична по z и u рассматривалась в [153, 233, 234]. При этом задачи оптимальной стабилизации (18), (19) превращаются в задачи аналитического конструирования регуляторов. Хотя асимптотическая точность приближения $u_0(t, \varepsilon)$ к u_ε^* невелика, по функционалу можно ожидать точность приближения более высокого порядка. Действительно, пусть имеет место оценка (14) и предположим, в частности, что, вдоль решения задачи P_0 , $\operatorname{Re} \lambda(g_z) < 0$, тогда, следуя работе Хадлока [180], можно для ряда задач вида (1), (2) установить, что порядок субоптимальности управления $u_0(t, \varepsilon)$ равен двум, т. е.

$$I_\varepsilon(u_0) - I_\varepsilon^* \leq C\varepsilon^2.$$

Если при этом, используя высшие приближения, удастся построить $u_k(t, \varepsilon)$ такое, что $\|u_\varepsilon^* - u_k(t, \varepsilon)\| \leq C\varepsilon^{k+1}$, $t \in [0, T]$, $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, то порядок субоптимальности $u_k(t, \varepsilon)$ будет равен $2(k+1)$.

3. Некоторые замечания. В случае задачи (1), (2) с нефиксированным временем, рассуждения, в принципе, те же. Новым моментом является то, что T теперь неизвестная, зависящая от ε , величина, которая ищется в виде $T = T_0^* + \varepsilon T_1^* + \dots$ [229].

Для определения коэффициентов разложения T в ряд по степеням ε используется дополнительное условие $N|_{t=T} = 0$. Стро-

гое обоснование асимптотики решения задачи с нефиксированным временем можно провести по схеме, указанной в [16, 22].

В заключение этого параграфа отметим, что мы описали построение P_0 с помощью асимптотического анализа краевой задачи принципа максимума для задачи P_ε . Возникает вопрос, можно ли P_0 получить прямо из исходной задачи P_ε , полагая в ней формально $\varepsilon=0$. Из вышеизложенного ясно, что такое построение возможно не всегда; формулировка алгоритма построения задачи P_0 из исходной задачи P_ε представляет собой самостоятельную задачу. Здесь, в случаях, когда внеинтегральный член не зависит от быстрых переменных или имеет зависимость от них порядка ε , построение P_0 возможно из P_ε прямым путем, полагая в P_ε формально $\varepsilon=0$ [57, 153, 178].

§ 3. ЛИНЕЙНО КВАДРАТИЧНЫЕ ЗАДАЧИ. УРАВНЕНИЕ РИККАТИ

1. Введение. Рассмотрим частный класс задач вида (2.1), (2.2) — задачи оптимального управления линейными системами с квадратичным критерием качества. Учитывая специфику задач, удастся продвинуться дальше и довести решение до получения синтеза. Линейно квадратичные постановки возникают в задачах стабилизации программных движений, при анализе достаточных условий оптимальности и др. Итак, рассмотрим задачу минимизации функционала

$$I_\varepsilon(u) = \frac{1}{2} x'(T) F x(T) + \frac{1}{2} \int_0^T x'(t) Q(t) x(t) + \\ + u'(t) R(t) u(t) dt \quad (1)$$

при ограничениях

$$\dot{y} = A_1(t) y + A_2(t) z + B_1(t) u, \quad y(0) = y^0, \quad y \in R^n, \\ \varepsilon \dot{z} = A_3(t) y + A_4(t) z + B_2(t) u, \quad z(0) = z^0, \quad z \in R^m, \quad (2)$$

где $u \in R^r$, $T > 0$ — фиксированный момент времени,

$$Q(t) = \begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 \\ Q_2' & Q_3 \end{pmatrix} \geq 0, \quad F(\varepsilon) = \begin{pmatrix} F_1(\varepsilon) & F_2(\varepsilon) \\ F_2'(\varepsilon) & F_3(\varepsilon) \end{pmatrix} \geq 0,$$

$$R(t) > 0, \quad t \in [0, T].$$

Асимптотическое решение задачи (1), (2) может быть получено двумя подходами. Первый подход основан на рассмотрении краевой задачи, вытекающей из необходимых условий оптимальности. Второй подход основан на рассмотрении матричного дифференциального уравнения Риккати, соответствующего задаче (1), (2), согласно результатам А. М. Летова [99] и Кал-

мана [188] по задаче аналитического конструирования регуляторов. Здесь мы подробно рассмотрим каждый из этих подходов. Вначале остановимся на первом.

2. Асимптотика экстремали. Краевая задача принципа максимума для задачи (1), (2) имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{y} &= A_1(t)y + A_2(t)z + S_1(t)\psi_1 + S_2(t)\psi_2, \\ \dot{\psi}_1 &= Q_1(t)y - A_1'(t)\psi_1 + Q_2(t)z - A_3'(t)\psi_1, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{z} &= A_3(t)y + S_2'(t)\psi_1 + A_4(t)z + S_3(t)\psi_2, \\ \varepsilon \dot{\psi}_2 &= Q_2'(t)y - A_2'(t)\psi_1 + Q_3(t)z - A_4'(t)\psi_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(0) &= y^0, \quad \psi_1(T) = -F_1 y(T) - F_2 z(T), \\ z(0) &= z^0, \quad \varepsilon \psi_2(T) = -F_2' y(T) - F_3 z(T), \end{aligned} \quad (4)$$

где $S_1 = B_1 R^{-1} B_1'$, $S_2 = B_1 R^{-1} B_2'$, $S_3 = B_2 R^{-1} B_2'$.

Оптимальное управление в задаче (1), (2) имеет вид

$$u(t) = R^{-1}(t)[B_1'(t)\psi_1(t) + B_2'(t)\psi_2(t)]. \quad (5)$$

Принцип максимума Понтрягина в задаче (1), (2) является не только необходимым, но и достаточным условием оптимальности. Поэтому асимптотика решения задачи (3), (4) приводит к асимптотике решения задачи (1), (2).

Рассмотрим основную функциональную матрицу сингулярно возмущенной краевой задачи (3), (4)

$$G = \begin{pmatrix} A_4(t) & S_3(t) \\ Q_3(t) & -A_4'(t) \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Оказывается, что свойство условной устойчивости тесно связано со свойствами управляемости и наблюдаемости матриц, определяющих G .

I. Пусть для каждого $t \in [0, T]$ пара $\{A_4(t), B_2(t)\}$ обладает свойством полной управляемости, а пара $\{C(t), A_4(t)\}$ — полной наблюдаемости, где $C'(t)C(t) = Q_3(t)$.

II. $\det A_4(t) \neq 0$, $t \in [0, T]$.

Условие I впервые введено Кокотовичем и Джэкелом [199] и названо ими условием управляемости и наблюдаемости в пограничном слое. Из условия I следует, что если $\lambda(t)$ — собственное значение матрицы $G(t)$, то $\mu(t) = -\lambda(t)$ также собственное значение матрицы $G(t)$ и $\operatorname{Re} \lambda(t) \neq 0$, $t \in [0, T]$. Заметим, что это свойство имеет место и при более общем условии, чем I [204]. Введем в рассмотрение матричное алгебраическое уравнение Риккати

$$-KA_4(t) - A_4'(t)K + KS_3(t)K - Q_3(t) = 0. \quad (7)$$

Уравнение (7) зависит от $t \in [0, T]$, как от параметра. Из результатов работы [246] непосредственно следует, что при выполнении условия I существуют при каждом $t \in [0, T]$ един-

ственное положительное определенное решение $M(t)$ и единственное отрицательное определенное решение $N(t)$ уравнения (7) такие, что спектр матрицы $\alpha(t) = A_4(t) - S_3(t)M(t)$ находится в левой полуплоскости, а спектр матрицы $\beta(t) = A_4(t) - S_3(t)N(t)$ находится в правой полуплоскости при всех $t \in [0, T]$. В [246] также доказано, что если выполняется условие I, то существует матрица

$$B(t) = \begin{pmatrix} B_{11}(t) & B_{12}(t) \\ B_{21}(t) & B_{22}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_m & E_m \\ M(t) & N(t) \end{pmatrix} \quad (8)$$

такая, что

$$B^{-1}(t)G(t)B(t) = \begin{pmatrix} \alpha(t) & 0 \\ 0 & \beta(t) \end{pmatrix}, \quad (9)$$

причем $\det B_{11}(0) \neq 0$, $\det B_{22}(T) \neq 0$.

Здесь же приводится другое преобразование подобия матрицы $G(t)$ с матрицей

$$\tilde{B}(t) = \begin{pmatrix} E_m & \frac{1}{2}(M(t) - N(t))^{-1} \\ M(t) & \frac{1}{2}N(t)(M(t) - N(t))^{-1} \end{pmatrix}, \quad (10)$$

которое приводит матрицу $G(t)$ к виду

$$\tilde{B}^{-1}(t)G(t)\tilde{B}(t) = \begin{pmatrix} \alpha(t) & 0 \\ 0 & -\alpha'(t) \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Перейдем теперь к построению асимптотического разложения решения краевой задачи (3), (4). Сначала рассмотрим случай, когда $F_3 > 0$. Асимптотическое разложение ищем в виде (1.26), где под x понимаем совокупный вектор, состоящий из векторов y, ψ_1, z, ψ_2 .

В нулевом приближении для членов регулярного ряда получим систему

$$\begin{aligned} \dot{\bar{y}}_0 &= A_1(t)\bar{y}_0 + S_1(t)\bar{\psi}_{10} + A_2(t)\bar{z}_0 + S_2(t)\bar{\psi}_{20}, \\ \dot{\bar{\psi}}_{10} &= Q_1(t)\bar{y}_0 - A_1'(t)\bar{\psi}_{10} + Q_2(t)\bar{z}_0 - A_3'(t)\bar{\psi}_{20}, \\ 0 &= A_3(t)\bar{y}_0 + S_2'(t)\bar{\psi}_{10} + A_4(t)\bar{z}_0 + S_3(t)\bar{\psi}_{20}, \\ 0 &= Q_2'(t)\bar{y}_0 - A_2'(t)\bar{\psi}_{10} + Q_3(t)\bar{z}_0 - A_4'(t)\bar{\psi}_{20} \end{aligned} \quad (12)$$

с краевыми условиями

$$\bar{y}_0(0) = y^0, \quad \bar{\psi}_{10}(T) = \psi_1^T = -F_1\bar{y}_0(T) - F_2'z^T$$

или так как $z^T = -F_3^{-1}F_2'\bar{y}_0(T)$,

$$\bar{y}_0(0) = y^0, \quad \bar{\psi}_{10}(T) = -(F_1 - F_2F_3^{-1}F_2')\bar{y}_0(T) = -\hat{F}\bar{y}_0(T). \quad (13)$$

Далее имеем

$$Q_0 z(0) = z^T - \bar{z}_0(T) = -F_3^{-1} F_2' \bar{y}_0(T) - \bar{z}_0(T),$$

$$Q_0 \psi_2(0) = \psi_2^T - \bar{\psi}_{20}(T) \in S^-.$$

Нетрудно показать, что условно устойчивые многообразия S^+ и S^- имеют здесь аналитические представления

$$S^+: \Pi_0 \psi_2(\tau_0) = -M(0) \Pi_0 z(\tau_0), \quad S^-: Q_0 \psi_2(\tau_1) = -N(T) Q_0 z(\tau_0), \quad (14)$$

где $M(t)$ и $N(t)$ — указанные выше корни уравнения (7).

Далее, используя (14), получаем окончательно $Q_0 \psi_2(0)$. Сделаем анализ нулевого приближения. Исключая из (12) $\bar{y}_0$ и $\bar{\psi}_{20}$, приходим к системе

$$\begin{pmatrix} \dot{\bar{y}}_0 \\ \dot{\bar{\psi}}_{10} \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} A_1(t) & S_1(t) \\ Q_1(t) & -A_1'(t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A_2(t) & S_2(t) \\ Q_2(t) & -A_3'(t) \end{pmatrix} G^{-1}(t) \begin{pmatrix} A_3(t) & S_2'(t) \\ Q_2'(t) & -A_2'(t) \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \bar{y}_0 \\ \bar{\psi}_{10} \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Предельная задача P_0 (см. (2.11)) имеет здесь вид

$$\begin{aligned} \hat{I}(\hat{u}) = \frac{1}{2} \hat{y}'(T) \hat{F} \hat{y}(T) + \frac{1}{2} \int_0^T (\hat{y}' \hat{Q}_1(t) \hat{y} - 2 \hat{y}' \hat{Q}_2(t) \hat{C}(t) \hat{u} + \\ + \hat{u}' \hat{R}(t) \hat{u}) dt \rightarrow \min, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\dot{\hat{y}} = \hat{A}(t) \hat{y} + \hat{B}(t) \hat{u}, \quad \hat{y}(0) = y^0, \quad (17)$$

где

$$\hat{A} = A_1 - A_2 A_4^{-1} A_3, \quad \hat{B} = B_1 - A_2 A_4^{-1} B_2, \quad \hat{C} = A_4^{-1} B_2,$$

$$\hat{Q}_1 = Q_1 - Q_2 A_4^{-1} A_3 - (Q_2 A_4^{-1} A_3)' + (A_4^{-1} A_3)' Q_3 A_4^{-1} A_3,$$

$$\hat{Q}_2 = Q_2 - (A_4^{-1} A_3)' Q_3, \quad \hat{R} = R + \hat{C}' Q_3 \hat{C}.$$

Задача (16), (17) получается из P_ε , если положить в ней формально $\varepsilon = 0$, при специальном изменении в ней интегрального члена.

Нетрудно показать, что краевая задача принципа максимума для задачи (16), (17) имеет вид

$$\dot{\hat{y}} = (\hat{A} + \hat{B} \hat{R}^{-1} (\hat{Q}_2 \hat{C})') \hat{y} + \hat{B} \hat{R}^{-1} \hat{B}' \hat{\psi}_1,$$

$$\dot{\hat{\psi}}_1 = (\hat{Q}_1 - \hat{Q}_2 \hat{C} \hat{R}^{-1} (\hat{Q}_2 \hat{C})') \hat{y} - (\hat{A}' + \hat{Q}_2 \hat{C} \hat{R}^{-1} \hat{B})' \hat{\psi}_1, \quad (18)$$

$$\hat{y}(0) = y^0, \quad \hat{\psi}_1(T) = -\hat{F} \hat{y}(T), \quad (19)$$

где $\hat{\psi}_1$ — сопряженная переменная. Оказывается, что при условиях I, II имеет место утверждение: решение краевой задачи (13), (15) совпадает с решением краевой задачи (18), (19), т. е.

$\hat{y}(t) = \bar{y}_0(t)$, $\hat{\psi}_1(t) = \bar{\psi}_{10}(t)$, $t \in [0, T]$. Это утверждение доказывается, как и в работах [57, 153, 178]. Отметим при этом, что матрица $\hat{Q}_1 - \hat{Q}_2 \hat{C} \hat{R}^{-1} (\hat{Q}_2 \hat{C})'$ является положительно полуопределенной [199].

Накладывая теперь требование достаточной гладкости коэффициентов, можно построить отрезки разложений вида (1.26) любой длины.

Введем $u_0(t, \varepsilon)$ по формуле (2.13), где

$$\bar{u}_0(t) = R^{-1}(t) (B_1'(t) \bar{\psi}_{10}(t) + B_2'(t) \bar{\psi}_{20}(t)),$$

$$\begin{aligned} \Pi_0 u(\tau_0) &= R^{-1}(0) B_2'(0) \Pi_0 \psi_2(\tau_0) \equiv -R^{-1}(0) B_2'(0) M(0) \Pi_0 z(\tau_0), \\ Q_0 u(\tau_1) &= R^{-1}(T) B_2'(T) Q_0 \psi_2(\tau_1) \equiv -R^{-1}(T) B_2'(T) N(T) Q_0 z(\tau_1). \end{aligned}$$

Нетрудно показать, что $\bar{u}_0(t) = \hat{u}^*(t)$ (оптимальное управление в задаче (16), (17)).

Далее оказывается, что $\Pi_0 u(\tau_0)$ — оптимальное управление в задаче аналитического конструирования регулятора

$$I_L(\Pi_0 u) = \frac{1}{2} \int_0^\infty [(\Pi_0 z(\tau_0))' Q_3(0) \Pi_0 z(\tau_0) +$$

$$+ (\Pi_0 u(\tau_0))' R(0) \Pi_0 u(\tau_0)] d\tau_0 \rightarrow \min,$$

$$\frac{d\Pi_0 z}{d\tau_0} = A_4(0) \Pi_0 z + B_2(0) \Pi_0 u, \quad \Pi_0 z(0) = z^0 - \bar{z}_0(0),$$

а $Q_0 u(\tau_1)$ — оптимальное управление в задаче

$$I_R(Q_0 u) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 [(Q_0 z(\tau_1))' Q_3(T) Q_0 z(\tau_1) +$$

$$+ (Q_0 u(\tau_1))' R(T) Q_0 u(\tau_1)] d\tau_1 \rightarrow \min, \quad (20)$$

$$\frac{dQ_0 z}{d\tau_1} = A_4(T) Q_0 z + B_2(T) Q_0 u, \quad Q_0 z(0) = -\bar{z}_0(T) - F_3^{-1} F_2' \bar{y}_0(T).$$

При этом имеет место оценка вида (2.14).

Таким образом, равномерное нулевое приближение к оптимальному управлению u_e^* может быть получено в результате декомпозиции исходной задачи на три задачи оптимального управления меньшей размерности. Эта схема приближенной декомпозиции впервые была продемонстрирована в [247].

Теперь остановимся на некоторых моментах построения асимптотики решения краевой задачи (3), (4) при условии

$$F_2 = \varepsilon \bar{F}_2, \quad F_3 = \varepsilon \bar{F}_3, \quad (21)$$

где $\bar{F}_2$ и $\bar{F}_3$ ограничены по ε при $\varepsilon \rightarrow 0$ (в частности, не зависят

от ε). Краевые условия (4), с учетом (21), примут вид

$$\begin{aligned} y(0) &= y^0, \quad \psi_1(T) = -F_1 y(T) - \varepsilon \bar{F}_2 z(T), \quad z(0) = z^0, \\ \psi_2(T) &= -\bar{F}_2' y(T) - \bar{F}_3 z(T). \end{aligned} \quad (22)$$

Вместо (13), очевидно, имеем

$$\bar{y}_0(0) = y^0, \quad \bar{\psi}_{10}(T) = -F_1 \bar{y}_0(T), \quad (23)$$

а z^T и ψ_2^T однозначно определяются уже с помощью соотношений

$$\psi_2^T = -\bar{F}_2' \bar{y}_0(T) - \bar{F}_3 z^T, \quad \psi_2^T - \bar{\psi}_{20}(T) \in S^-.$$

Из (23) следует, что предельная задача P_0 получается непосредственно из P_ε и совпадает с задачей (16), (17) при $\hat{F} = F_1$. Здесь возможна та же декомпозиция, что и выше, только начальные условия для $Q_0 z(0)$ в задаче (20), соответственно, изменяются.

Отметим, что асимптотику краевых задач вида (3), (22) при несколько иных предположениях строили в работах [214, 214, 217]. При дополнительном условии: $\operatorname{Re} \lambda(A_4(t)) < 0$, $t \in [0, T]$ оказывается, что $u_0(t, \varepsilon)$ является субоптимальным управлением порядка 2 как в задаче (1), (2) (при $F_3 > 0$), так и в задаче (1), (2), (21).

Подчеркнем, что в этом пункте мы получаем аппроксимации программного управления $u^*(t, \varepsilon)$.

3. Синтез. Перейдем теперь к изложению второго подхода к построению асимптотики решения задачи (1), (2).

Согласно результатам Летова и Калмана, оптимальное управление в задаче (1), (2) имеет вид

$$u = -R^{-1}(t) B'(t) K(t) x, \quad (24)$$

где матрица $K(t)$ — решение задачи Коши для матричного дифференциального уравнения Риккати

$$\begin{aligned} \frac{dK}{dt} &= -KA(t) - A'(t)K + KB(t)R^{-1}(t)B'(t)K - Q(t), \\ K(T) &= F, \end{aligned} \quad (25)$$

$$B = \begin{pmatrix} B_1 \\ \frac{1}{\varepsilon} B_2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ \frac{1}{\varepsilon} A_3 & \frac{1}{\varepsilon} A_4 \end{pmatrix}.$$

Решение $K(t, \varepsilon)$ задачи (25) при каждом $\varepsilon > 0$ существует на $[0, T]$ и единственно [188].

Матрицу K разобьем на блоки

$$K = \begin{pmatrix} K_1 & \varepsilon K_2 \\ \varepsilon K_2' & \varepsilon K_3 \end{pmatrix}.$$

Задачу (25) распишем подробно. Имеем

$$\begin{aligned}\dot{K}_1 &= -K_1 A_1 - A_1' K_1 - K_2 A_3 - A_3' K_2' + K_1 S_1 K_1 + K_1 S_2 K_2' + \\ &\quad + K_2 S_2' K_1 + K_2 S_3 K_2' - Q_1, \\ \varepsilon \dot{K}_2 &= -K_1 A_2 - K_2 A_4 - \varepsilon A_1' K_2 - A_3' K_3 + \varepsilon K_1 S_1 K_2 + K_1 S_2 K_3 + \\ &\quad + \varepsilon K_2 S_2' K_2 + K_2 S_3 K_3 - Q_2, \quad (26)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon \dot{K}_3 &= -\varepsilon K_2' A_2 - \varepsilon A_2' K_2 - K_3 A_4 - A_4' K_3 + \varepsilon^2 K_2' S_1 K_2 + \\ &\quad + \varepsilon K_2' S_2 K_3 + \varepsilon K_3 S_2' K_2 + K_3 S_3 K_3 - Q_3, \\ K_1(T) &= F_1, \quad K_2(T) = \frac{1}{\varepsilon} F_2, \quad K_3(T) = \frac{1}{\varepsilon} F_3. \quad (27)\end{aligned}$$

Таким образом, (26), (27) представляет собой задачу Коши, с бесконечно большими при $\varepsilon \rightarrow 0$ начальными условиями для быстрых переменных, для нелинейной сингулярно возмущенной системы дифференциальных уравнений (см. п. 4 § 1).

Асимптотику решения нелинейных сингулярно возмущенных систем дифференциальных уравнений с сингулярными условиями для быстрых переменных строили в работах [22, 33, 74]. Однако результаты этих работ не применимы для построения асимптотики решения задачи (26), (27), так как здесь быстрая переменная входит в систему (26) нелинейно, и размерность быстрой переменной не меньше двух. В работах [43, 47] была построена асимптотика решения задачи (26), (27) и исследован предельный переход с начальным скачком по малому параметру в решении этой задачи. Приведем более подробно эти результаты.

Сначала вводится задача

$$\begin{aligned}\frac{dP}{dt} &= -PA(t) - A'(t)P + PB(t)R^{-1}(t)B'(t)P - Q(t), \\ P(T) &= H, \quad (28)\end{aligned}$$

где

$$P = \begin{pmatrix} P_1 & \varepsilon P_2 \\ \varepsilon P_2' & \varepsilon P_3 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon \bar{P}_2(T) \\ \varepsilon \bar{P}_2'(T) & \varepsilon \bar{P}_3(T) \end{pmatrix},$$

$\bar{P}_2(t)$ и $\bar{P}_3(t)$ — блоки решения вырожденной задачи, которое при выполнении условия I существует и единственно на $[0, T]$ [199].

III. Пусть матрица F — постоянная, положительно определенная. Решение задачи (26), (27) ищется в виде

$$K(t, \varepsilon) = P(t, \varepsilon) + W'(t, \varepsilon)M^{-1}(t, \varepsilon)W(t, \varepsilon), \quad (29)$$

где матрица $P(t, \varepsilon)$ — решение задачи (28), а матрицы $W(t, \varepsilon)$

и $M(t, \varepsilon)$ — решения следующих задач

$$\frac{dW}{dt} = -W(A - BR^{-1}B'P), \quad W(T) = E_{n+m},$$

$$\frac{dM}{dt} = -WBR^{-1}B'W', \quad M(T) = (F - H)^{-1}$$

и где

$$W = \begin{pmatrix} W_1 & \varepsilon W_2 \\ W_3 & \varepsilon W_4 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ M_2' & M_3 \end{pmatrix}.$$

Асимптотические разложения блоков $P_i(t, \varepsilon)$ ($i=1, 2, 3$), $W_i(t, \varepsilon)$ ($i=1, \dots, 4$), $M_i(t, \varepsilon)$ ($i=1, 2, 3$) ищутся в виде (1.8) только с правым пограничным слоем. При этом заметим также, что ряды QW_4 и QM_3 начинаются с членов порядка ε^{-1} . С помощью частичных сумм этих разложений образуем

$$K_k(t, \varepsilon) = P_k(t, \varepsilon) + W_k'(t, \varepsilon) M_k^{-1}(t, \varepsilon) W_k(t, \varepsilon),$$

где, например, $P_{ik} = \sum_{j=0}^k (\bar{P}_{ij}(t) + Q_j P_i(\tau_1)) \varepsilon^j$, $P_k = \begin{pmatrix} P_{1k} & \varepsilon P_{2k} \\ \varepsilon P_{2k}' & \varepsilon P_{3k} \end{pmatrix}$.

При достаточной гладкости коэффициентов задачи (1), (2) и условиях I—III имеет место утверждение: существуют $\varepsilon_0 > 0$, $C > 0$ такие, что

$$\max_{t \in [0, T]} \|K_1(t, \varepsilon) - K_{1k}(t, \varepsilon)\| \leq C \varepsilon^{k+1},$$

$$\max_{t \in [0, T]} \|K_i(t, \varepsilon) - K_{ik}(t, \varepsilon)\| \leq C \varepsilon^k, \quad i=2, 3,$$

при $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, где $K_i(t, \varepsilon)$ ($i=1, 2, 3$) — решение задачи (26), (27), и при $\varepsilon \rightarrow 0$ решение $K_i(t, \varepsilon)$ ($i=1, 2, 3$) задачи (26), (27) сходится к решению задачи

$$\begin{aligned} \bar{K}_1 = & -\bar{K}_1 A_1 - A_1' \bar{K}_1 - \bar{K}_2 A_3 - A_3' \bar{K}_2' + \bar{K}_1 S_1 \bar{K}_1 + \bar{K}_1 S_2 \bar{K}_2' + \\ & + \bar{K}_2 S_2' \bar{K}_1 + \bar{K}_2 S_3 \bar{K}_2' - Q_1, \end{aligned} \quad (30)$$

$$0 = -\bar{K}_1 A_2 - \bar{K}_2 A_4 - A_3' \bar{K}_3 + \bar{K}_1 S_2 \bar{K}_3 + \bar{K}_2 S_3 \bar{K}_3 - Q_2,$$

$$0 = -\bar{K}_3 A_4 - A_4' \bar{K}_3 + \bar{K}_3 S_3 \bar{K}_3 - Q_3,$$

$$\bar{K}_1(T) = F_1 - F_2 F_3^{-1} F_2' = \hat{F} \quad (31)$$

равномерно по t на каждом отрезке $[0, T_1] \subset [0, T]$.

Таким образом, начальное условие для медленной переменной в задаче (26), (27) изменяется скачком при вырождении. Этим скачком обусловлено, в свою очередь, изменение внеинтегрального члена функционала в задаче (1), (2) при вырождении.

Из (31) видно, что мы получаем здесь то же самое изменение внеинтегрального члена в соответствующей задаче P_0 , ко-

торое было получено и в п. 2. Форма скачка (31) была постулирована также в [223]. В частном случае скалярной переменной ($m=1$) утверждение о предельном переходе было получено другим образом в [248].

Асимптотическому представлению решения задачи (26), (27) и предельному переходу посвящены также работы румынских математиков Драгана, Халаяна [162, 164—166], при этом они использовали интегральные свойства фундаментальных матриц и поэтому снизили требования к гладкости данных. В [162] доказаны следующие свойства: пусть $A_4(t)$ и $F(t)$ — непрерывные ($m \times m$)-матрицы, $\operatorname{Re} \lambda(A_4(t)) < 0$, $t \in [0, T]$.

Тогда при $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$a) \frac{1}{\varepsilon} \int_t^T \Phi'(s, t, \varepsilon) F(s) \Phi(s, t, \varepsilon) ds \rightarrow L(t);$$

$$б) \frac{1}{\varepsilon} \int_t^T \Phi(s, T, \varepsilon) F(s) \Phi(T, s, \varepsilon) ds \rightarrow L(T);$$

$$в) \frac{1}{\varepsilon} \int_t^T \Phi(s, t, \varepsilon) F(s) ds \rightarrow -A_4^{-1}(t) F(t);$$

$$г) \frac{1}{\varepsilon} \int_t^T \Phi(T, s, \varepsilon) F(s) ds \rightarrow -A_4^{-1}(T) F(T);$$

равномерно по $t \in [0, T_0] \subset [0, T]$, где $-A_4'(\tau)L - LA_4(\tau) = F(\tau)$ и $\varepsilon \frac{d\Phi}{dt} = A_4(t)\Phi(t, s, \varepsilon)$, $\Phi = (s, s, \varepsilon) = E_m$.

Используя эти свойства, доказан [165], при более слабых условиях, предельный переход для частной задачи (26), (27), отвечающей случаю, когда в (2) имеются только быстрые движения ($A_1 = A_2 = B_1 = y^0 = 0$). Задача (25) принимает здесь вид

$$\varepsilon \frac{dK}{dt} = -KA_4(t) - A_4'(t)K + KS_3(t)K - Q_3(t),$$

$$K(T) = \frac{1}{\varepsilon} F_3. \quad (32)$$

Задача (32) рассматривается также в работе [41]. Задача (1), (2) при $B_2 = 0$, т. е. при неуправляемых быстрых движениях рассматривалась в [42, 162]. Получающаяся при этом задача типа (25) (ее отличие от (25) в том, что присоединенные системы для блоков K_2, K_3 уже линейные) в [42] изучается методом пограничных функций с позиции задачи о начальном скачке (QK_2 и QK_3 начинаются с членов порядка $\frac{1}{\varepsilon}$), а в [162] сначала делается переход от этой задачи о начальном скачке к сингулярно возмущенной начальной задаче с неопределенностью при

вырождении (часть собственных значений основной функциональной матрицы тождественно равна нулю [17, 20, 23]).

При этом оказывается, что отвечающее скачку в $K_1(T)$ изменение внеинтегрального члена в функционале в задаче P_0 совпадает с результатом подстановки корня $\bar{z} = -A_4^{-1}A_3\bar{y}$ в функционал [42, 47, 162]. Здесь ($B_2 \equiv 0$) оказывается возможным на основе асимптотики для $K(t, \varepsilon)$ построить асимптотику оптимальной траектории, оптимального управления и минимального значения функционала [40] и на основе этой асимптотики можно предложить субоптимальные обратные связи.

Так, в нулевом приближении имеем

$$u_0(t, \varepsilon) = u^*(t) + Q_0 u(\tau_1) = -R^{-1}(t) B_1'(t) \bar{K}_{10}(t) \hat{y}(t) - R^{-1}(T) B_1'(T) Q_0 K_1(\tau_1) \hat{y}(T), \quad \tau_1 = \frac{t-T}{\varepsilon}$$

и $I_\varepsilon(u_0) - I_\varepsilon^* \leq C\varepsilon^2$ при достаточно малых $\varepsilon > 0$, т. е. $u_0(t, \varepsilon)$ является субоптимальным управлением порядка 2 в задаче (1), (2).

Рассмотрим частный случай ($Q_2 = Q_3 = 0$) задачи (1), (2) [46]. Хотя вместо I, как и в случае $B_2 \equiv 0$, предполагаем $\operatorname{Re} \lambda(A_4(t)) < 0$, $t \in [0, T]$, но из-за III здесь необходимо также считать, что

$$\operatorname{rank} [B_2(T), A_4(T) B_2(T), \dots, A_4^{m-1}(T) B_2(T)] = m, \quad (33)$$

т. е. накладывать условие полной управляемости пары (A_4, B_2) в момент $t = T$.

В заключение этого пункта укажем, что в работах [184, 199, 214, 217, 222] рассмотрена задача (1), (2), (21). При этом в [199] установлен предельный переход при $\varepsilon \rightarrow 0$ решения задачи (26), (27), (21) к решению системы (30) с условием $K_1(T) = F_1$ при выполнении условия I и непрерывности коэффициентов задачи (26), (27), (21), а в [184, 214] построена асимптотика методом пограничных функций решения задачи (21), (26), (27) при выполнении условия I и достаточной гладкости коэффициентов. Субоптимальности управления $\hat{u}_0^*$ в задаче (1), (2) в рамках второго подхода посвящены также работы [162, 163, 172].

4. Периодический случай. Периодический вариант задачи (1), (2) ($F = 0$, все матрицы T периодичны, имеются внешние периодические возмущения в (2)) рассматривался в [61, 63]. Здесь при выполнении подобных условий управляемости и наблюдаемости пограничные слои у $K(t, \varepsilon)$ отсутствуют. Для построения асимптотики получающихся здесь периодических сингулярно возмущенных задач удобным является применение известных результатов [16, 22].

5. Задачи аналитического конструирования регуляторов. Ряд работ [154, 163, 199, 202, 206, 211] посвящен асимптотике ре-

шения задачи аналитического конструирования регулятора (в (1), (2) $T=\infty$, все матрицы постоянные, $F=0$). Наряду с условиями управляемости и наблюдаемости I в погранслое, здесь накладываются условия управляемости и наблюдаемости на соответствующие матрицы в вырожденной задаче. Это обеспечивает разрешимость в нужном смысле соответствующего матричного алгебраического уравнения Риккати, и асимптотика положительно определенного решения этого уравнения определяется в виде сходящегося ряда по целым степеням ε . Эта асимптотика позволяет строить субоптимальные управления высокой точности по функционалу для задачи большой размерности путем решения задач меньшей размерности [154, 163].

При этом оказывается возможным при построении субоптимального синтеза порядка 2 ограничиться решением двух задач аналитического конструирования регулятора для «быстрой» и «медленной» подсистем [154]. Интересно, что «медленный» регулятор имеет порядок субоптимальности, равный 1, и добавление «быстрого» регулятора изменяет этот порядок до 2.

Быстрые и медленные движения в задаче аналитического конструирования могут появиться также в случае гладких возмущений уравнений состояния и коэффициентов критерия (регулярные возмущения), если при $\varepsilon=0$ теряется свойство управляемости [112].

6. Выпуклый критерий. В заключение этого параграфа укажем на работы болгарских математиков Т. Р. Гичева и А. Л. Дончева [160, 161, 173, 174], посвященные, в частности, установлению предельного перехода при $\varepsilon \rightarrow 0$ в решениях задач оптимального управления с интегральным выпуклым критерием при дифференциальных связях вида (2). Отметим, что условия гладкости, накладываемые при этом, достаточно слабые, а условия, обеспечивающие необходимую устойчивость, близкие к тем, которые употребляются в этом параграфе.

И, наконец, укажем на работу [159], где рассматривается бесконечномерный вариант задачи (1), (2), (21) — все матрицы являются ограниченными операторами.

§ 4. УПРАВЛЯЕМОСТЬ, НАБЛЮДАЕМОСТЬ И СТАБИЛИЗИРУЕМОСТЬ

Как следует из предыдущих параграфов, понятия управляемости, наблюдаемости и стабилизируемости играют большую роль при исследовании сингулярных возмущений в задачах оптимального управления, определяя те или иные условия устойчивости.

С другой стороны, сами эти свойства имеют большое значение в теории управления и выявление этих свойств для систем большой размерности может представлять собой сложную задачу.

Поэтому наряду с определением «свойств» (управляемости, наблюдаемости и стабилизируемости), для сингулярно возмущенных систем представляют интерес условия, при которых эти свойства обладают декомпозицией, которая позволила бы получать утверждения о наличии «свойств» для исходных систем высокого порядка по факту наличия «свойств» для некоторых систем меньшего порядка.

1. **Управляемость.** Пусть имеем управляемую систему

$$\dot{y} = A_1 y + A_2 z + B_1 u, \quad y(0) = y^0, \quad y \in R^n, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{z} &= A_3 y + A_4 z + B_2 u, \quad z(0) = z^0, \quad z \in R^m, \\ w &= C_1 y + C_2 z, \end{aligned} \quad (2)$$

где w — k -мерный вектор наблюдения.

В стационарном случае Кокотович и Хаддад установили следующее утверждение [197]: пусть

$$\text{а) } \text{rank}[B_2, A_4 B_2, \dots, A_4^{m-1} B_2] = m; \quad (3)$$

б) существует матрица K такая, что

$$\det(A_4 + B_2 K) \neq 0, \quad (4)$$

$$\text{rank}[B_0, A_0 B_0, \dots, A_0^{n-1} B_0] = n, \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} A_0 &= A_1 - (A_2 + B_1 K)(A_4 + B_2 K)^{-1} A_3, \\ B_0 &= B_1 - (A_2 + B_1 K)(A_4 + B_2 K)^{-1} B_2, \end{aligned} \quad (6)$$

тогда существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что для всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ система (1) вполне управляема. Таким образом, управляемость полной системы есть следствие управляемости двух систем меньшей размерности. Отметим, что здесь условие $\det A_4 \neq 0$, необходимое ранее для определения корня $\bar{z}$, сейчас заменяется условием (4).

Таким образом, в задачах, где $\det A_4 = 0$, полезным оказывается введение нового управления

$$u = Kz + v, \quad (7)$$

где уже выполняется (4).

В нестационарном случае в [65] доказано следующее: если система $\dot{y} = A_0(t)y + B_0(t)u$ вполне управляема и $\text{Re } \lambda(A_0(t)) < 0$, то существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ (1) вполне управляема по y . Если же здесь дополнительно предположить выполнение (3.33), то при достаточно малых $\varepsilon > 0$ и вся система (1) вполне управляема [174].

Управляемость квазилинейных сингулярно возмущенных систем размерности $(n+m)$ рассматривалась Сэннуги [235, 236]. Наряду с условиями управляемости в вырожденной задаче размерности n и условиями «управляемости в пограничном слое» для присоединенной системы размерности m , здесь предполагается также управляемость линейного приближения в вырожденной задаче вдоль любой допустимой пары.

2. Наблюдатель (идентификатор) состояния. Рассмотрим декомпозицию в задаче о построении наблюдателя полного порядка, следуя работе Портера [227].

Согласно определению наблюдателя полного порядка [75], получаем, что для системы (1), (2) таковым является система

$$\begin{aligned}\dot{\hat{y}} &= A_1 \hat{y} + A_2 \hat{z} + B_1 u + L_1 (w - C_1 \hat{y} - C_2 \hat{z}), \\ \dot{\hat{z}} &= A_3 \hat{y} + A_4 \hat{z} + B_2 u + L_2 (w - C_1 \hat{y} - C_2 \hat{z}),\end{aligned}\quad (8)$$

так как если $\hat{y}(0) = y(0)$, $\hat{z}(0) = z(0)$, то будем иметь $\hat{y}(t) = y(t)$, $\hat{z}(t) = z(t)$, $t \geq 0$ при всех $u(t)$, $t \geq 0$. Действительно, для ошибки $\tilde{y} = y - \hat{y}$, $\tilde{z} = z - \hat{z}$, восстановления состояния y , z на основе информации о наблюдаемых величинах, получаем однородную систему

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{y}} &= (A_1 - L_1 C_1) \tilde{y} + (A_2 - L_1 C_2) \tilde{z} = \tilde{A}_1 \tilde{y} + \tilde{A}_2 \tilde{z}, \\ \dot{\tilde{z}} &= (A_3 - L_2 C_1) \tilde{y} + (A_4 - L_2 C_2) \tilde{z} = \tilde{A}_3 \tilde{y} + \tilde{A}_4 \tilde{z}\end{aligned}\quad (9)$$

и при $\tilde{y}(0) = \tilde{z}(0) = 0$ имеем $\tilde{y}(t) = \tilde{z}(t) = 0$, $t \geq 0$ при всех $u(t)$, $t \geq 0$.

Если матрицы L_1 , L_2 могут быть выбраны так, что положение равновесия $\tilde{y} = 0$, $\tilde{z} = 0$ системы (9) является асимптотически устойчивым, то ошибка восстановления обладает свойством $\tilde{y}(t) \rightarrow 0$, $\tilde{z}(t) \rightarrow 0$, $t \rightarrow \infty$ для любых $\tilde{y}(0)$ и $\tilde{z}(0)$.

Декомпозиция при построении наблюдателя фактически сводится к декомпозиции свойства асимптотической устойчивости в системе вида (9) и возможности выбора матриц L_1 и L_2 , обеспечивающих декомпозицию свойства асимптотической устойчивости.

Декомпозиция свойства асимптотической устойчивости для стационарных систем была установлена А. И. Климусевым и Н. Н. Красовским [83]: пусть в системе (9)

$$\text{а) } \operatorname{Re} \lambda(\tilde{A}_4) < 0; \quad \text{б) } \operatorname{Re} \lambda(\tilde{A}_1 - \tilde{A}_2 \tilde{A}_4^{-1} \tilde{A}_3) < 0.$$

Тогда существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что при каждом $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ положение равновесия $\tilde{y} = \tilde{z} = 0$ системы (9) является асимптотически устойчивым. Введем в рассмотрение матрицы

$$\begin{aligned}F_0 &= A_1 - A_2(A_4 - PC_2)^{-1}(A_3 - PC_1), \\ H_0 &= C_1 - C_2(A_4 - PC_2)^{-1}(A_3 - PC_1).\end{aligned}$$

На основе предыдущего утверждения устанавливается [227] декомпозиция наблюдателя.

Пусть пара (C_2, A_4) детектируема и существует матрица P такая, что матрица $(A_4 - PC_2)$ невырождена, а пара (H_0, F_0) детектируема. Тогда существуют матрицы P_1 и P_2 и положительное число ε_0 такие, что для всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ положение рав-

новесия системы (9) асимптотически устойчиво, причем $L_1 = P_1$, $L_2 = P + P_2$, $P_1 = P_0[E_k - C_2(A_4 - PC_2)^{-1}P_2] + A_4(A_4 - PC_2)^{-1}P_2$, и P_0 , P_2 — некоторые матрицы, для которых все собственные значения матриц $(F_0 - P_0H_0)$ и $(A_4 - PC_2 - P_2C_2)$ имеют отрицательные действительные части.

Отметим частные случаи. Пусть $\operatorname{Re} \lambda(A_4) < 0$, тогда можно взять $P = P_2 = 0$ и уравнения наблюдателя имеют вид:

$$\dot{\hat{y}} = A_1\hat{y} + A_2\hat{z} + B_1u + P_0(\varpi - C_1\hat{y} - C_2\hat{z}),$$

$$\varepsilon \dot{\hat{z}} = A_3\hat{y} + A_4\hat{z} + B_2u.$$

Если же только $\det A_4 \neq 0$, тогда можно положить $P = 0$ и уравнения наблюдателя также несколько упростятся по сравнению с (8).

В нестационарном случае декомпозиция наблюдателя полного порядка устанавливается в работе [224].

3. Стабилизируемость. Общий результат для стационарных линейных систем вида (1) также принадлежит Портеру. Подставляя (7) в (1), приходим к системе

$$\begin{aligned} \dot{y} &= A_1y + (A_2 + B_1K)z + B_1v, \\ \varepsilon \dot{z} &= A_3y + (A_4 + B_2K)z + B_2v, \end{aligned} \quad (10)$$

где K удовлетворяет (4). Полагая в (10) $\varepsilon = 0$ и исключая z , получаем $\dot{\bar{y}} = A_0\bar{y} + B_0\bar{v}$ с A_0 и B_0 из (6). Имеет место следующее утверждение [228].

Пусть: а) пара (A_4, B_2) стабилизируема; б) существует матрица K такая, что $\det(A_4 + B_2K) \neq 0$, и пара (A_0, B_0) — стабилизируема. Тогда существуют матрицы K_1 , K_2 и $\varepsilon_0 > 0$ такие, что для всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ положение равновесия $y = z = 0$ замкнутой системы, полученной из (1) с помощью управления

$$u = K_1y + (K + K_2)z, \quad (11)$$

асимптотически устойчиво. (Здесь $K_1 = [E_r + K_2(A_4 + B_2K)^{-1}B_2]K_0 + K_2(A_4 + B_2K)^{-1}A_3$, K_0 и K_2 определяют стабилизирующие управления, т. е. $\operatorname{Re} \lambda(A_0 + B_0K_0) < 0$, $\operatorname{Re} \lambda[A_4 + B_2(K + K_2)] < 0$).

Частные случаи: а) $\operatorname{Re} \lambda(A_4) < 0$, тогда можно положить $K = K_2 = 0$ и стабилизирующее управление (11) примет вид $u = K_0x$; б) $\det A_4 \neq 0$, тогда $K = 0$ и стабилизирующее управление имеет вид $u = [E_r + K_2A_4^{-1}B_2]K_0 + K_2A_4^{-1}A_3]y + K_2z$; в) $\det B_2 \neq 0$, $B_1 = A_3 = A_4 = 0$, тогда можно положить $K = E$, $K_2 = -B_2^{-1}(2E + B_2)$ и условие б) последнего утверждения сводится к условию стабилизируемости пары (A_1, A_2) .

В заключении отметим, что стабилизируемость в сингулярно возмущенных линейных и нелинейных системах изучается также в работах [152, 155, 156, 182, 226, 231, 238, 239].

§ 5. ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫМИ СИСТЕМАМИ С МАЛЫМ ШАГОМ

В этом параграфе мы рассмотрим работы, в которых исследуются задачи оптимального управления другими типами сингулярно возмущенных систем — разностными и дифференциально-разностными уравнениями с малым шагом.

1. Дискретные задачи с малым шагом. Рассмотрим задачу минимизации функционала

$$I(u) = c'x(1) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} [x'(k\varepsilon) Q(k\varepsilon) x(k\varepsilon) + u'(k\varepsilon) R(k\varepsilon) u(k\varepsilon)] \quad (1)$$

на траекториях сингулярно возмущенной системы уравнений

$$x(t+\varepsilon) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad x(0) = x^0, \quad (2)$$

где $x \in E^n$, $u \in E^r$, $t \in I_\varepsilon = \{t: t = K\varepsilon, k=0, 1, \dots, N-1\} \subset I = \{t: 0 \leq t \leq 1\}$, $N = \frac{1}{\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$ — малый шаг, $R(t) > 0$, $Q(t) \geq 0$, $t \in [0, 1]$. Необходимые условия оптимальности [107] для задачи (1), (2), имеют вид:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0, \quad (3)$$

где $H = \psi'(t+\varepsilon)(A(t)x + B(t)u) - \frac{1}{2}(x'Q(t)x + u'R(t)u)$ и вектор-функция $\psi(t)$ удовлетворяет следующей разностной системе

$$\psi(t) = \frac{\partial H}{\partial x}, \quad \psi(1) = -c. \quad (4)$$

Определяя из (3)

$$u(t) = R^{-1}(t)B'(t)\psi(t+\varepsilon) \quad (5)$$

и подставляя выражение для $u(t)$ из (5) в систему (2), приходим к краевой задаче

$$\begin{aligned} x(t+\varepsilon) &= A(t)x(t) + S(t)\psi(t+\varepsilon), \quad x(0) = x^0, \\ \psi(t) &= -Q(t)x(t) + A'(t)\psi(t+\varepsilon), \quad \psi(1) = -c, \end{aligned} \quad (6)$$

$t=0, \varepsilon, \dots, 1-\varepsilon$; $S = BR^{-1}B'$.

1. $\det A(t) \neq 0$, $t \in [0, 1]$.

Преобразуем (6) к виду

$$\begin{aligned} x(t+\varepsilon) &= A_1(t)x(t) + A_2(t)\psi(t), \quad x(0) = x^0, \\ \psi(t+\varepsilon) &= A_3(t)x(t) + A_4(t)\psi(t), \quad \psi(1) = -c, \end{aligned} \quad (7)$$

где $A_1(t) = A(t) + S(t)(A'(t))^{-1}Q(t)$, $A_2(t) = S(t)(A'(t))^{-1}$, $A_3(t) = (A'(t))^{-1}Q(t)$, $A_4(t) = (A'(t))^{-1}$.

Краевая задача (7) сингулярно возмущенная.

Пусть выполнено условие 1. Тогда основная функциональная

матрица сингулярно возмущенной задачи (7)

$$G(t) = \begin{pmatrix} A_1(t) & A_2(t) \\ A_3(t) & A_4(t) \end{pmatrix}$$

невырожденная на $[0, 1]$, и если $\lambda(t)$ — собственное значение матрицы $G(t)$, то $\frac{1}{\lambda(t)}$ тоже есть собственное значение матрицы $G(t)$, $t \in [0, 1]$ [205].

II. Пусть для всех $t \in [0, 1]$ пара матриц (A, B) стабилизируема (существует $K_1: |\lambda(A + BK_1)| < 1$), а пара (C, A) детектируема (существует $K_2: |\lambda(A' + C'K_2)| < 1$). Здесь $C'C = Q$. Введем дискретное алгебраическое уравнение Риккати

$$\begin{aligned} \bar{P}(t) = & Q(t) + A'(t)\bar{P}(t)A(t) - A'(t)\bar{P}(t)B(t)[R(t) + \\ & + B'(t)\bar{P}(t)B(t)]^{-1}B'(t)\bar{P}(t)A(t). \end{aligned} \quad (8)$$

При условиях I—II существует [205] для каждого $t \in [0, 1]$ единственное положительно полуопределенное решение $\bar{P}(t)$ уравнения (8), для которого при каждом $t \in [0, 1]$ спектр матрицы $\alpha = A(t) - S(t)(A'(t))^{-1}(\bar{P}(t) - Q(t)) = A(t) - B(t)(R(t) + B'(t)\bar{P}(t)B(t))^{-1}B'(t)\bar{P}(t)A(t)$ лежит строго внутри единичного круга, а спектр матрицы $(\alpha'(t))^{-1}$ лежит вне единичной окружности. Учитывая это, приходим к тому, что в условиях I, II n собственных значений матрицы $G(t)$ лежат строго внутри единичного круга, а остальные n собственных значений матрицы $G(t)$ — вне единичного круга.

Таким образом, условия I, II обеспечивают выполнение условия условной устойчивости в сингулярно возмущенной красной задаче (7). Необходимое для применения метода пограничных функций преобразование подобия существует при более жестком требовании.

III. Для всех $t \in [0, 1]$ пара (A, B) управляема, а пара (C, A) наблюдаема [75].

В условиях I—III существует матрица $M(t)$ такая, что

$$M^{-1}(t)G(t)M(t) = \begin{pmatrix} \alpha(t) & 0 \\ 0 & (\alpha'(t))^{-1} \end{pmatrix},$$

причем $\det M_{11}(0) \neq 0$,

$$M(t) = \begin{pmatrix} M_{11}(t) & M_{12}(t) \\ M_{21}(t) & M_{22}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_n & \Gamma(t) - \bar{P}^{-1}(t) \\ \bar{P}(t) & \bar{P}(t)\Gamma(t) + E_n \end{pmatrix},$$

где $\Gamma(t)$ есть решение уравнения $\alpha(t)\Gamma - \Gamma(\alpha'(t))^{-1} = L(t)$, $L(t) = \bar{P}^{-1}(A')^{-1}[A'\bar{P}S(A')^{-1}\bar{P} - Q]\bar{P}^{-1}$, а $\bar{P}(t)$ — единственное положительно определенное решение уравнения (8), стабилизирующее замкнутую систему. Асимптотическое разложение решения $x(t, \varepsilon)$, $\psi(t, \varepsilon)$ задачи (7) ищем в виде (1.26).

Предположим, что выполнено условие

$$\text{IV. } \det(\bar{P}(1)\Gamma(1) + E_n) \neq 0.$$

Устойчивые многообразия S^+ и S^- имеют здесь следующие аналитические представления

$$S^+ : \Pi_0 \psi(\tau_0) = \bar{P}(0) \Pi_0 x(\tau_0),$$

$$S^- : Q_0 x(\tau_0) = (\Gamma(1) - \bar{P}^{-1}(1))(\bar{P}(1)\Gamma(1) + E_n)^{-1} Q_0 \psi(\tau_1).$$

При достаточной гладкости данных имеет место следующее утверждение, которое при несколько иных предположениях доказано в [44, 48].

Пусть выполнены условия I—IV. Тогда найдутся $\varepsilon_0 > 0$, $C > 0$ такие, что при $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ существует единственное решение $\tilde{x}(t, \varepsilon)$, $\psi(t, \varepsilon)$ краевой задачи (7), и

$$\|x(t, \varepsilon) - x_m(t, \varepsilon)\| \leq C\varepsilon^{m+1}, \quad \|\psi(t, \varepsilon) - \psi_m(t, \varepsilon)\| \leq C\varepsilon^{m+1}, \\ t = 0, \varepsilon, \dots, 1.$$

Здесь (x_m, ψ_m) — частичная сумма порядка m ряда (1.26).

На основе асимптотики можно, как и в непрерывном случае, строить субоптимальные управления.

Введем $u_m(t, \varepsilon) = R^{-1}(t)B'(t)\psi_m(t + \varepsilon, \varepsilon)$ и дополнительно предположим, что спектр матрицы $A(t)$ лежит строго внутри единичного круга при всех $t \in [0, T]$. Тогда существует $\varepsilon_0 > 0$ и $C > 0$ такие, что

$$I(u_m) - I_\varepsilon^* \leq C\varepsilon^{2m+1}, \quad 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0,$$

т. е. u_m — субоптимальное управление порядка $2m + 1$.

Дискретная задача оптимального управления с закрепленным правым концом и с малым шагом рассмотрена в [40]. Дискретная задача о регуляторе состояния с малым шагом рассмотрена в [44, 48] путем построения асимптотики по малому шагу решения начальной задачи для соответствующего дискретного уравнения Риккати.

2. Задачи с запаздыванием. Рассмотрим задачу

$$I_\mu(u) = \int_0^T F(\tilde{y}, \tilde{u}, t) dt \rightarrow \min, \quad (9)$$

$$\dot{\tilde{y}} = f(\tilde{y}, \tilde{z}, \tilde{u}, t) = f_1(\tilde{y}, \tilde{u}, t) + f_2(\tilde{y}, t)\tilde{z}, \quad (10)$$

$$\tilde{y}(t) = \varphi(t), \quad -\mu \leq t \leq 0, \quad (11)$$

где $\tilde{y} \in R^n$, $\tilde{u} \in R^r$, $\tilde{z}(t) = \tilde{y}(t - \mu)$, $\mu > 0$ — малое запаздывание. В [232] задача (9) — (11) рассматривалась с помощью аппроксимации малого запаздывания последовательной цепью дифференцируемых звеньев по схеме Ю. М. Репина [118]. Вместо (10),

(11) вводится

$$\begin{aligned}\dot{y} &= f_1(y, u, t) + f_2(y, t) z_m, \\ \varepsilon \dot{z} &= Ay + Bz\end{aligned}\quad (12)$$

с начальными условиями

$$y(0) = \varphi(0), \quad z_i(0) = \varphi(-i\varepsilon), \quad i=1, \dots, m, \quad (13)$$

где $\varepsilon = \mu/m$, $z' = (z_1', z_2', \dots, z_m')$, $z_i \in R^n$, $i=1, \dots, m$,
 $A' = (E_n, 0, \dots, 0)$,

$$B = \begin{pmatrix} -E_n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ E_n & -E_n & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & E_n & -E_n \end{pmatrix}.$$

Вместо (9) рассматривается функционал

$$I_\varepsilon(u) = \int_0^T F(y, u, t) dt \rightarrow \min. \quad (14)$$

Задача (12)–(14) типа (2.1), (2.2). Заметим, что уравнения быстрых движений не содержат явно управлений, и это обстоятельство облегчает дальнейшее исследование. Развитие этой схемы, в случае наличия ограничений на область значений $u(t)$, дано в [57]. Асимптотику по μ экстремали для задачи вида (9)–(11) строили в работе [230]. Задачи оптимального управления с сингулярно возмущенными дифференциально-разностными уравнениями состояния рассматривались в [110, 230, 237].

§ 6. ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА ЗНАЧЕНИЯ УПРАВЛЯЮЩИХ ВОЗДЕЙСТВИЙ

Пусть в задаче (2.1), (2.2) на значения управляющих функций наложены ограничения

$$|u^i(t)| \leq 1, \quad i = \overline{1, r}, \quad \text{п. в. } t \in [0, T], \quad (1)$$

т. е. множество допустимых управлений M состоит из измеримых почти всюду ограниченных r -мерных вектор-функций. Ограничения (1) приводят к появлению негладких решений и асимптотическое решение таких задач, вообще говоря, нельзя проводить по схеме изложенной выше в §§ 2, 3.

1. Некоторые примеры. Ограничения (1) приводят к появлению различных особенностей, которые проиллюстрируем на примерах.

Пример 1. [148].

$$P_\varepsilon: I_\varepsilon(u) = y_1(1) \rightarrow \min,$$

$$\dot{y}_1 = uz_1, \quad y_1(0) = 0,$$

$$\varepsilon \dot{z}_1 = z_2, \quad z_1(0) = 0,$$

$$\varepsilon \dot{z}_2 = -2z_1 - 2z_2, \quad z_2(0) = 1, \quad |u| \leq 1, \quad t \in [0, 1].$$

Имеем $z_1^*(t, \varepsilon) = e^{-t/\varepsilon} \sin(t/\varepsilon)$, $u_\varepsilon^*(t) = -\text{sign}(z_1(t, \varepsilon))$, $u_\varepsilon^* \xrightarrow[\text{с.л.}]{L_2} 0$,

$$\|u_\varepsilon^*\|_{L_2} = 1, \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0: z_1 = 0, \dot{y}_1 = 0, \bar{I}^* = 0.$$

В этом примере две особенности. Первая — потеря управления при вырождении — аналог слабоуправляемой системы [136], вторая — последовательность u_ε^* не является сильно сходящейся, а сходится всего лишь слабо в смысле L_2 к 0, но при этом $I_\varepsilon^* = y_1^*(1, \varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0 = I_0^*$.

Определение [57]. Вырожденная задача оптимального управления устойчива по функционалу (по минимальному значению функционала) при сингулярных возмущениях, если $I_\varepsilon^* \rightarrow \bar{I}_0^*$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Т. е. в примере 1 имеет место устойчивость по функционалу при сингулярных возмущениях.

Пример 2.

$$P_\varepsilon: I_\varepsilon(u) = y_2(1) \rightarrow \min,$$

$$\dot{y}_1 = z_1, \quad y_1(0) = 0,$$

$$\dot{y}_2 = y_1^2 - z_1^2, \quad y_2(0) = 0,$$

$$\varepsilon \dot{z}_1 = -z_1 + u, \quad z_1(0) = 0, \quad |u| \leq 1.$$

Оптимальное управление из M в этой задаче существует [131] при каждом $\varepsilon > 0$. Задача P_0 имеет вид:

$$\bar{I}(\bar{u}) = \bar{y}_2(1) \rightarrow \min,$$

$$\dot{\bar{y}}_1 = \bar{u}, \quad \bar{y}_1(0) = 0,$$

$$\dot{\bar{y}}_2 = \bar{y}_1^2 - \bar{u}^2, \quad \bar{y}_2(0) = 0, \quad |\bar{u}| \leq 1.$$

Очевидно, что $\inf_{\bar{u} \in M} \bar{I}(\bar{u}) = -1$, но этот infimum на M не достигается.

Можно привести пример, когда, наоборот, оптимальное управление в задаче P_ε не существует, а в P_0 — существует. Очевидно, что для изучения таких ситуаций нужно привлекать понятие скользящих режимов.

Пример 3.

$$P_\varepsilon: I_\varepsilon(u) = a_1 y(1) + a_2 z(1) \rightarrow \min,$$

$$\dot{y} = y + z, \quad y(0) = y^0,$$

$$\varepsilon \dot{z} = -y - z + u, \quad z(0) = z^0, \quad |u| \leq 1, \quad a_1 \neq a_2.$$

Решение задачи P_ε существует и единственно при каждом $\varepsilon > 0$. Непосредственными вычислениями можно убедиться, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ $y^*(t, \varepsilon) \rightarrow \bar{y}(t)$ равномерно по $t \in [0, 1]$, $z^*(t, \varepsilon) \rightarrow \bar{z}(t)$ и $u_\varepsilon^* \rightarrow \bar{u}$ в норме L_1 , где $\bar{y}(t)$, $\bar{z}(t)$, $\bar{u}(t)$ — решение следующей задачи P_0 :

$$\bar{I}(\bar{u}) = (a_1 - a_2) \bar{y}(1) \rightarrow \min,$$

$$\dot{\bar{y}} = \bar{u}, \quad \bar{y}(0) = y^0, \quad \bar{z} = -\bar{y} + \bar{u}, \quad |\bar{u}| \leq 1,$$

т. е. при вырождении происходит изменение функционала и это изменение получается в результате подстановки части корня $\bar{z} = -\bar{y} + \bar{u}$ в функционал. С таким изменением функционала мы встречались выше в задачах без ограничений (1), где это изменение являлось следствием наличия у управления члена порядка ε^{-1} в окрестности $t = T$. Здесь же в этом примере управление равномерно по ε ограничено и тем не менее наблюдается тот же эффект.

2. Линейная задача быстрогодействия. Рассмотрим линейную задачу быстрогодействия, т. е. на траекториях линейной системы (4.1), с помощью измеримых вектор-функций со значениями из (1), требуется минимизировать время перехода T из начального состояния

$$y(0) = y^0, \quad z(0) = z^0 \quad (2)$$

в начало координат

$$y(T) = 0, \quad z(T) = 0. \quad (3)$$

Все коэффициенты в (4.1) будем считать постоянными.

Предположим, что в соответствующей вырожденной задаче P_0 ($\det A_4 \neq 0$) пара матриц (A_0, B_0) управляема. Пусть управляема также пара (A_4, B_2) . При этих условиях Коллинз [157] провел анализ точек переключения оптимального управления $u\varepsilon^*(r=1)$. Он установил, что:

1) $T_\varepsilon^* \rightarrow T_0^*$, $\varepsilon \rightarrow 0$, где T_ε^* и T_0^* — время быстрогодействия в задачах P_ε и P_0 соответственно; 2) точки переключения u_ε^* делятся на три группы. Первая группа состоит из $t_1(\varepsilon), \dots, t_{N_1}(\varepsilon)$, $t_1(\varepsilon) = O(\varepsilon)$, где N_1 может быть нулем, т. е. группа состоит из точек переключения u_ε^* вблизи начальной точки. Вторая группа содержит точки переключения $t_{N_1+1}(\varepsilon), \dots, t_{N_1+N_0}(\varepsilon)$, близкие к соответствующим точкам переключения в задаче P_0 . И, наконец, третья группа состоит из точек переключения

$t_{N_1+N_0+1}(\varepsilon), \dots, t_{N_1+N_0+N_2}(\varepsilon)$ управления u_ε^* вблизи начала координат, т. е. они отстоят от T_ε^* на величины порядка ε , $N_2 \geq 0$. Таким образом, точки переключения первой и третьей группы сосредоточены в погранслоях вблизи границы. Исследование Коллинза продолжено Кокотовичем и Хаддадом в [197] уже для $r \geq 1$. Сначала в (4.1) проводится разделение движений с помощью неособого преобразования

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_n - \varepsilon HL & -\varepsilon H \\ L & E_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix},$$

где $H = A_2 A_4^{-1} + \varepsilon M$, $M = A_0 A_2 A_4^{-2} - A_2 A_4^{-2} A_3 A_2 A_4^{-1} + O(\varepsilon)$, $L = A_4^{-1} A_3 + \varepsilon G$, $G = A_4^{-2} A_3 A_0 + O(\varepsilon)$. При этом вместо (4.1) получаем

$$\dot{\xi} = \tilde{A}_0 \xi + \tilde{B}_0 u,$$

$$\varepsilon \dot{\eta} = \tilde{A}_2 \eta + \tilde{B}_2 u,$$

где $\tilde{A}_0 = A_0 - \varepsilon A_2 G$, $\tilde{B}_0 = B_0 - \varepsilon (HLB_1 + MB_2)$, $\tilde{A}_2 = A_4 - \varepsilon LA_2$, $\tilde{B}_2 = B_2 + \varepsilon LB_1$. Теперь оптимальное управление u_ε^* выглядит как

$$\begin{aligned} u_\varepsilon^* &= \text{sign} \{ \tilde{B}_0' \psi_1 + \tilde{B}_2' \exp[\tilde{A}_2'(T-t)/\varepsilon] \psi_2 \} = \\ &= \text{sign} \left\{ m(T-t) + b \left(\frac{T-t}{\varepsilon} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (4)$$

где $\dot{\psi}_1 = -\tilde{A}_0' \psi_1$, $\varepsilon \dot{\psi}_2 = -\tilde{A}_2' \psi_2$.

Пусть: 1) $\text{Re} \lambda(A_4) < 0$ и начало координат достижимо из (y_0, z_0) ; 2) нули $m(T-t)$ так же, как и нули $m(0) + b(-\tau_1)$, различны. Тогда [197] существуют $\varepsilon > 0$ и $\theta > 0$ такие, что для всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ оптимальное управление (4) в задаче быстродействия (4.1), (1)–(3) представимо в виде

$$u_\varepsilon^* = \begin{cases} u_m(t), & 0 \leq t < T - \varepsilon\theta, \\ u_b(\tau), & 0 \leq -\tau \leq \theta, \end{cases}$$

где $+\tau = \theta + \tau_1$ и точки переключения $u_m(t)$ находятся в ε -окрестности нулей функции $m(T-t)$, а точки переключения $u_b(\tau)$ — в ε -окрестности нулей функции $m(0) + b(\theta - \tau)$.

Далее в [197] показывается, что $u_m(t)$ аппроксимирует управление u_0^* в соответствующей задаче P_0 , а затем строится приближенное представление $u_m(t)$ в виде $u_0^*(t) + \delta u(t)$, где поправка δu строится с учетом поправок первого порядка малости к точкам переключения управления u_0^* [198]. Некоторое обобщение результатов работы [197] содержится в [186]. Утверждение о сходимости T_ε^* к T_0^* , $(y_\varepsilon^*, z_\varepsilon^*)$ к (y_0^*, z_0^*) и u_ε^* к u_0^* получено в [38]. Асимптотическое приближение к решению простейшей линейной задачи быстродействия ($n=m=r=1$) построено В. А. Есиповой в [67]. Используя специфику

задачи, здесь удалось применить метод пограничных функций. Стабилизирующие свойства u_0^* в задаче P_ε изучались в [181].

3. Задача Майера. Предельный переход по малому параметру, повышающему порядок дифференциальных связей в решениях задачи минимизации функции конечного состояния, рассматривался в работах [3, 39, 40, 56—59, 87, 91, 94, 148].

В [56—58] рассматривалась следующая задача:

$$I_\varepsilon(u) = c'y(T) + d'z(T) \rightarrow \min_{u \in M}$$

$$\dot{y} = A_1(t)y + A_2(t)z + B_1(t, u), \quad y(0) = y^0, \quad (5)$$

$$\varepsilon \dot{z} = A_3(t)y + A_4(t)z + B_2(t, u), \quad z(0) = z^0,$$

где $\operatorname{Re} \lambda(A_4) < 0$, $t \in [0, T]$.

Сопряженная система принципа максимума, вследствие линейности задачи по фазовым переменным, отделяется и преобразуется к виду

$$\dot{\psi}_1 = -A_1'(t)\psi_1 - A_3'(t)\psi_2, \quad \psi_1(T) = -c,$$

$$\varepsilon \dot{\psi}_2 = -A_2'(t)\psi_1 - A_4'(t)\psi_2, \quad \psi_2(T) = -d/\varepsilon, \quad (6)$$

т. е. (6) — линейная задача о начальном скачке (§ 1).

Нетрудно убедиться, что при $\varepsilon \rightarrow 0$, $\psi_1(t, \varepsilon) \rightarrow \bar{\psi}_1(t)$, $\psi_2(t, \varepsilon) \rightarrow \bar{\psi}_2(t)$ равномерно по $t \in [0, T_1]$, $0 < T_1 < T$, где $\bar{\psi}_1(t)$, $\bar{\psi}_2(t)$ есть решение вырожденной задачи со скачком в начальном условии

$$\dot{\bar{\psi}}_1 = A_1'\bar{\psi}_1 - A_3'\bar{\psi}_2, \quad \bar{\psi}_1(T) = -c + A_3'(T)(A_4^{-1}(T))'d = -c - \Delta,$$

$$\bar{\psi}_2 = -(A_4^{-1})'A_2'\bar{\psi}_1. \quad (7)$$

Нетрудно видеть, что (7) есть сопряженная система принципа максимума для задачи

$$\bar{I}(u) = (c + \Delta)' \bar{y}(T) \rightarrow \min_{\bar{u} \in M},$$

$$\dot{\bar{y}} = A_1(t)\bar{y} + A_2(t)\bar{z} + B_1(t, \bar{u}), \quad \bar{y}(0) = y^0, \quad (8)$$

$$\bar{z} = -A_4^{-1}(t)[A_3(t)\bar{y} + B_2(t, \bar{u})].$$

Поэтому при некоторых дополнительных предположениях, обеспечивающих, в частности, существование и единственность оптимальных управлений в обеих задачах, имеет место утверждение [56—58]: при $\varepsilon \rightarrow 0$, $\|y_\varepsilon^* - \bar{y}^*\|_{C[0, T+1]} \rightarrow 0$, $\|z_\varepsilon^* - \bar{z}^*\|_{L_1} \rightarrow 0$, $\|u_\varepsilon^* - \bar{u}^*\|_{L_1} \rightarrow 0$, где $\bar{y}^*$, $\bar{z}^*$, $\bar{u}^*$ — решение задачи (8). Таким образом, для задачи (5) вырожденной является задача (8) с измененным функционалом. Это изменение получается в результате подстановки части корня $z = -A_4^{-1}(t)[A_3(t)y + B_2(t, u)]$, содержащей y , в функционал. Впервые явление скачка в функционале отмечено было в работе М. Г. Дмитрие-

ва [56]. Анализ точек переключения в задаче (5) выполнен в [3]. Этот анализ позволяет получать утверждения о сходимости $u_\varepsilon^* \rightarrow u_0^*$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Линейному случаю задачи (5) посвящена также работа [115].

В [39, 40] рассмотрена задача (5) при условиях $d = \varepsilon d_1$, $\text{Re} \lambda(A_4) \leq 0$, $\lambda(A_4) \neq 0$, т. е. быстрые переменные могут быть быстро осциллирующими функциями. Получен аналог последнего утверждения.

Рассмотрим следующую задачу P_ε :

$$I_\varepsilon(u) = \Phi(y(T)) \rightarrow \min_{u \in M}, \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \dot{y} &= f(y, z, u, t) = A_1(y, t) + A_2(y, t)z + B_1(y, t)u, \quad y(0) = y^0, \\ \varepsilon \dot{z} &= g(y, z, u, t) = A_3(y, t) + A_4(y, t)z + B_2(y, t)u, \\ z(0) &= z^0. \end{aligned} \quad (10)$$

Этой задаче отвечает задача меньшей размерности P_0 :

$$\bar{I}(\bar{u}) = \Phi(\bar{y}(T)) \rightarrow \min_{\bar{u} \in \bar{M}}, \quad (11)$$

$$\dot{\bar{y}} = f(\bar{y}, h(\bar{y}, \bar{u}, t), \bar{u}, t), \quad \bar{y}(0) = y^0,$$

где $\bar{z} = h(\bar{y}, \bar{u}, t)$ — корень уравнения $g(\bar{y}, \bar{z}, \bar{u}, t) = 0$.

Пусть обе задачи разрешимы и $M^* = \{u_\varepsilon^*\}$, $M_0^* = \{\bar{u}^*\}$ — множества их оптимальных управлений. Далее предположим, что выполнены условия:

I. Функции f, g непрерывны по y, z, u, t на прямом произведении $D = \Omega_y \times \Omega_z \times U \times [0, T]$, где $\Omega_y \subset R^n$, $\Omega_z \subset R^m$ — некоторые замкнутые ограниченные области. В области D функции f, g удовлетворяют условию Липшица по y, z равномерно по $(u, t) \in U \times [0, T]$. Аналогичное условие накладываем на h и φ .

II. Все функции f, g, h, φ непрерывно дифференцируемы по $y \in \Omega_y$.

III. $\text{Re} \lambda(A_4(y, t)) < 0$, $t \in [0, T]$, $y \in \Omega_y$.

IV. Размерность вектора управления не уменьшается при вырождении.

Следуя [57], используя слабую компактность шара в L_2 , можно доказать, что в условиях I—IV для задачи (9), (10) имеют место утверждения:

1) вырожденная задача (II) устойчива по функционалу при сингулярных возмущениях, т. е. $I_\varepsilon^* \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \bar{I}^*$;

$$2) \bar{I}(u_\varepsilon^*) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \bar{I}^*;$$

3) из любой последовательности $\{u_\varepsilon^*\}$ можно извлечь слабо (в L_2) сходящуюся к одному из оптимальных управлений $\bar{u}^* \in M_0^*$ подпоследовательность $\{u_{\varepsilon_k}^*\}$;

4) $u_{\varepsilon}^* \xrightarrow[L_2]{\text{сл}} \bar{u}^*$, $\varepsilon \rightarrow 0$, в случае единственности $\bar{u}^*$;

5) из любой последовательности $\{u_{\varepsilon}^*\}$ можно извлечь подпоследовательность $\{u_{\varepsilon_k}^*\}$, что $\|u_{\varepsilon_k}^* - \bar{u}^*\|_{L_1} \rightarrow 0$, $\varepsilon_k \rightarrow 0$, если оптимальные управления u_{ε}^* и $\bar{u}^*$ не особые в смысле принципа максимума (при этом $\|u_{\varepsilon}^* - \bar{u}^*\|_{L_1} \rightarrow 0$, $\varepsilon_k \rightarrow 0$, в случае единственности $\bar{u}^*$).

Условие IV используется при доказательстве сильной сходимости u_{ε}^* . Первые четыре утверждения доказываются без IV. При этом надо иметь в виду, что исчезающие при $\varepsilon=0$ компоненты $\bar{u}$ можно положить равными нулю. Аналогичные утверждения получены также в [148] для более общей задачи Майера с нефиксированным временем. Схема доказательства предельного перехода, предложенная в [57], использовалась также для тех же целей в [91] и [54] в более общих задачах с дифференциальными связями неразрешенными при $\varepsilon=0$ относительно производных и сингулярно возмущенными интегро-дифференциальными связями.

4. Регулярные возмущения. Как видно из предыдущего, проблема построения асимптотического приближения к решению задачи P_{ε} с ограничениями вида (1) и сингулярно возмущенными связями полностью не решена. В случае регулярных возмущений (непрерывные возмущения условий некоторой задачи P_0) естественно удастся продвинуться дальше. Поэтому для сравнения результатов и постановки новых задач в русле основной проблематики обзора приведем здесь некоторые результаты по регулярным возмущениям. Эти возмущения изучались достаточно широко в двух направлениях. Первое связано с построением асимптотики решения, в частности, вопросы предельного перехода и чувствительности решения (первый член маклореновского разложения решения в ряд по малому параметру) в случае открытой области управления. Второе направление — исследование тех же вопросов для тех задач оптимального управления, в которых область значений управляющих функций есть замкнутое, ограниченное множество и управлениями могут быть разрывные по t функции. В первом случае есть возможность использовать классическую технику Пуанкаре для построения асимптотики решения краевой задачи принципа максимума Понтрягина. Работы, где оптимальное управление — достаточно гладкие функции параметра ε , мы рассматривать здесь не будем (см. [107, 108, 112, 136]) и поэтому перейдем к изложению некоторых результатов для задач, где такой гладкости нет. Первые результаты по исследованию регулярных возмущений (предельный переход) в задачах оптимального управления с ограничениями на область значений управляющих функций в виде замкнутых неравенств были

получены Ф. М. Кирилловой [81, 82]. Она установила условия, при которых для оптимального управления u_e^* в возмущенной задаче быстрогодействия P_e имеет место непрерывная зависимость от параметра возмущения в смысле сходимости по мере. При этом, наряду с линейными, рассматривались и нелинейные задачи. Доказательство утверждений проводится с помощью сведений рассматриваемых задач к L -проблеме моментов. Обобщению результатов Ф. М. Кирилловой посвящена работа Каллум [158], результаты которой и форма их представления в некотором смысле типичны для работ, где для доказательства использовалась слабая компактность множества допустимых управлений. Предельному переходу и связанной с ним устойчивости по отношению к возмущениям посвящены также работы [57, 96, 97, 203]. Построение и обоснование асимптотики — задача значительно более сложная, чем изучение предельного перехода, но качественная и количественная информация при этом о исходной возмущенной задаче P_e становится значительно богаче. Ю. Н. Киселев [76—78] рассмотрел первым задачу построения асимптотического решения задачи оптимального управления при ограничениях на u вида (1). Рассмотрения он проводил для квазилинейной задачи быстрогодействия

$$\begin{aligned} I(u) &= T \rightarrow \min, \\ \dot{x} &= A(t)x + B(t)u + \varepsilon C(t, x), \\ x(0, \varepsilon) &= x^0 + \varepsilon x^1 + o(\varepsilon), \quad x(T, \varepsilon) = 0, \end{aligned} \quad (12)$$

где управление удовлетворяет (1).

С точностью до $o(\varepsilon)$ он построил асимптотические приближения к оптимальному решению и экстремали Понтрягина. Построена система линейных алгебраических уравнений для определения ψ_1^1 и T_1 , где $\psi(0, \varepsilon) = \psi^0 + \varepsilon \psi_1^1 + o(\varepsilon)$, $T(\varepsilon) = T_e^* = T_0^* + \varepsilon T_1 + o(\varepsilon)$ ($\psi(t, \varepsilon)$ — сопряженная переменная принципа максимума). Приведем часть результатов Ю. Н. Киселева. Пусть: а) матрица $A(t)$ непрерывна, а $B(t)$ — непрерывно дифференцируема на $[0, T]$, $T_e^* \leq T$; б) каждая из функций $\alpha_\rho(t) = b'_\rho(t) \psi_0^*(t)$, $\rho = 1, \dots, r$, где $b_\rho(t)$ — ρ -тый столбец матрицы $B(t)$, имеет на отрезке $[0, T]$ конечное число нулей $\tau_{\rho s}$, $s = 1, \dots, s_\rho$, причем эти нули простые; в) $C(t, x)$ и $\frac{\partial C}{\partial x}$ непрерывны на прямом произведении $[0, T] \times R^n$. Здесь $u_0^*(t) = \text{sign}[B'(t) \psi_0^*(t)]$.

При выполнении условий а) — в) [76—78] существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что при $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ задача (12) имеет решение $x^*(t, \varepsilon)$, $\psi^*(t, \varepsilon)$, $u^*(t, \varepsilon)$, где кусочно-постоянная функция $u^*(t, \varepsilon)$ принимает значения в вершинах куба U и может быть получена из $u_0^*(t)$ смещением точек переключения $\tau_{\rho s}$ в точки $\tau_{\rho s} + \varepsilon d_{\rho s}(\varepsilon)$, где $d_{\rho s}(\varepsilon)$ ограничены.

Далее строятся поправки δx , $\delta \psi$ и δu , где

$$\delta u^{\rho}(t, \varepsilon) = \begin{cases} -2u_0^{*\rho}(t), & t \in I_{\rho}(\varepsilon), \\ 0, & t \in [0, T] \setminus I_{\rho}(\varepsilon), \end{cases} \quad \rho = 1, \dots, r,$$

$$\delta \dot{x} = (A(t) + B(t)u_0^*(t))\delta x + C(t, x_0^*(t)) + \frac{1}{\varepsilon} B(t)\delta u,$$

$$\delta \dot{\psi} = -A'(t)\delta \psi - \frac{\partial C(t, x_0^*(t))}{\partial x} \psi_0^*(t),$$

$$\delta x(0, \varepsilon) = x_1, \quad \delta \psi(0) = \psi_1,$$

$$I_{\rho}(\varepsilon) = \bigcup_{s=1}^{s_{\rho}} I_{\rho s}(\varepsilon), \quad I_{\rho s}(\varepsilon) = [\tau_{\rho s}, \tau_{\rho s} + \varepsilon d_{\rho s}],$$

$$d_{\rho s} = - \frac{b'_{\rho}(\tau) \delta \psi}{\dot{\alpha}_{\rho}(\tau)} \Big|_{\tau=\tau_{\rho s}}.$$

Оказывается [76—78], что при достаточно малых ε функции

$$\tilde{x}(t, \varepsilon) = x_0^*(t) + \varepsilon \delta x(t, \varepsilon), \quad \tilde{\psi}(t, \varepsilon) = \psi_0^*(t) + \varepsilon \delta \psi(t),$$

$$\tilde{u}(t, \varepsilon) = u_0^*(t) + \delta u(t, \varepsilon),$$

есть асимптотические приближения к решению задачи (12), т. е.

$$\begin{aligned} \|x_{\varepsilon}^* - \tilde{x}\|_{C_{[0,T]}^n} &= o(\varepsilon), \quad \|\psi_{\varepsilon}^* - \tilde{\psi}\|_{C_{[0,T]}^n} = o(\varepsilon), \\ \|u_{\varepsilon}^* - \tilde{u}\|_{L_{[0,T]}^r} &= o(\varepsilon). \end{aligned} \tag{13}$$

Отметим, что $\tilde{x}$ не есть асимптотическое разложение x по степеням малого параметра ε , так как поправка δx сама зависит от ε . Далее в [79] Киселевым Ю. Н. доказана теорема о дифференцируемости по начальным условиям решения краевой задачи принципа максимума, а в [80] указаны условия, при которых в линейной задаче быстрогодействия имеет место аналитическая зависимость минимального значения критерия и точек переключения оптимального управления от начальных условий и при этом получены разложения по малому параметру минимального значения функционала $\psi(0, \varepsilon)$ и точек переключения оптимального управления. А. А. Белолипецкий [8] изучал некоторые линейные задачи оптимального управления с фазовыми ограничениями. Получены асимптотические формулы того же типа как у Ю. Н. Киселева, но при этом и техника доказательства и форма представления результатов, естественно, претерпели изменения. Результаты имеют приложения в области математической экономики. Обобщению результатов Ю. Н. Киселева была посвящена работа В. А. Плотникова, А. И. Третьяка [114], где рассмотрена существенно нелинейная задача быстрогодействия. Оценки типа (13) по функционалу получены также

А. А. Первозванским, В. Г. Гайцгори [112] в следующей задаче: требуется на множестве измеримых r -мерных вектор-функций $u(t) \in U$, $t \in [0, T]$, минимизировать функционал

$$I_\varepsilon(u) = \Phi(x(T, \varepsilon)) \quad (14)$$

при ограничениях

$$\dot{x} = f_0(x, u, t) + \varepsilon f_1(x, u, t), \quad x(0, \varepsilon) = x^0, \quad x \in R^n, \quad (15)$$

$$u(\cdot) \in U, \quad (16)$$

где U — ограниченное замкнутое подмножество R^r , $t \in [0, T]$, T фиксировано.

Пусть $M_0^* = \{u_0^*\}$ — множество оптимальных управлений в невозмущенной задаче (14)–(16). Каждому элементу u_0^* отвечает оптимальная траектория $x_0^*(t)$

$$\dot{x}_0^* = f_0(x_0^*, u_0^*, t), \quad x_0^*(0) = x^0,$$

и сопряженная переменная принципа максимума Понтрягина $\psi_0^*(t)$:

$$\dot{\psi}_0^* = -\frac{\partial f_0'}{\partial x}(x_0^*, u_0^*, t) \psi_0^*, \quad \psi_0^*(T) = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x_0^*(T)).$$

На множестве M_0^* рассматривается вспомогательная задача:

$$\max_{u_0^* \in M_0^*} \left\{ \Phi(u_0^*) = \int_0^T f_1'(x_0^*(t), u_0^*(t), t) \psi_0^*(t) dt \right\} = \Phi^*. \quad (17)$$

Пусть решение задачи (17) есть $\tilde{u}_0^*(t)$, которая является вектор-функцией ограниченной вариации

$$\bigvee_0^T \tilde{u}_0^*(t) \leq k = \text{const.}$$

Решение возмущенной задачи естественно искать на множестве вектор-функций, полная вариация которых также ограничена числом $k_1 \geq k$:

$$\bigvee_0^T u(t, \varepsilon) \leq k_1. \quad (18)$$

Пусть f_0 , $\frac{\partial f_0}{\partial x}$, f_1 и Φ — непрерывно дифференцируемы на прямом произведении $R^n \times U \times [0, T]$. Тогда на классе допустимых управлений, удовлетворяющих (18), в задаче (14)–(16) при достаточно малых ε имеют место утверждения [112]:

а) $I_\varepsilon^* = I_0^* - \varepsilon \Phi^* + o(\varepsilon)$;

б) $I_\varepsilon(\tilde{u}_0^*) = I_\varepsilon^* + o(\varepsilon)$, т. е. управление $\tilde{u}_0^*$ является субоптимальным;

в) если решение задачи (17) единственно, то $u_\varepsilon^*(t) \rightarrow u_0^*(t)$ по мере, а $\|x_\varepsilon^* - x_0^*\|_{C_{[0, T]}^n} \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Для слабо управляемых систем

$$\dot{x} = f_0(x, t) + \varepsilon f_1(x, u, t), \quad x(0, \varepsilon) = x^0, \quad (19)$$

вспомогательная задача (17) принимает вид

$$\max_{u(\cdot) \in U} f_1'(x_0^*(t), u, t) \psi_0^* = \max_{u(\cdot) \in U} \Phi_t(u) = \Phi_t^*.$$

Пусть $u_0^*(t) = \arg \max_{u(\cdot) \in U} \Phi_t(u)$. Для задачи (14), (16), (19) имеет место следующее [112]:

а) $I_\varepsilon^* = I_\varepsilon(u_0^*) + O(\varepsilon^2)$, т. е. порядок субоптимальности u_0^* здесь выше и равен двум;

$$\text{б) } I_\varepsilon^* = \Phi(x_0^*(T)) - \varepsilon \int_0^T \Phi_t^* dt + O(\varepsilon^2);$$

в) $u_\varepsilon^* \rightarrow u_0^*$ по мере при $\varepsilon \rightarrow 0$, $x_\varepsilon^* = x_0^*(t) + \varepsilon x_1(t) + o(\varepsilon)$, где $x_1 = f_{0x}(x_0^*, t) x_1 + f_1(x_0^*, u_0^*, t)$, $x_1(0) = 0$;

г) $\Phi_t(u_\varepsilon^*(t, \varepsilon)) - \Phi_t(u_0^*(t)) = o(\varepsilon)$ в точках единственности $u_0^*(t)$.

При несколько иных предположениях подобные утверждения для слабо управляемой задачи быстродействия получил А. А. Любушин [102]. Отметим здесь вариационную природу коэффициентов при ε^1 . Это и приводит к более высокому порядку субоптимальности. В [147, 171] предлагается другой путь построения асимптотики решения задачи управления с ограничениями, идея которого сводится к нелинейной замене независимой переменной t «замораживающей» точки переключения управления в невозмущенной задаче, используя интерполяционные полиномы Лагранжа. С работами, указанными в этом пункте, тесно связаны работы по устойчивости и маргинальным значениям в задачах математического программирования Е. Г. Гольштейна [50], В. Г. Карманова [73], Е. С. Левитина [96—98], Голлэн [175]. В заключение отметим также работы Золесзи [250], Беннати [145], где изучаются регулярные возмущения в задачах оптимального управления.

§ 7. РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ И ШТРАФ

Сингулярно возмущенные задачи появляются при регуляризации вырожденных задач оптимального управления, а также при решении задач оптимального управления с ограничениями методом штрафных функций. Появляющиеся здесь сингулярно возмущенные задачи зачастую обладают рядом особенностей и требуют обобщения и развития известных результатов теории сингулярных возмущений, с одной стороны, а с другой стороны,

построение асимптотики на основе известных результатов позволяет установить структуру решения исходной задачи (импульсный характер оптимального управления, свойства терминального управления и т. д.).

1. Регуляризация простейшей вариационной задачи. Рассмотрим задачу P_0 :

$$I(u) = \int_0^T [g(t, x) + h'(t, x)u] dt \rightarrow \inf, \quad (1)$$

$$\dot{x} = u, \quad x(0) = x^0, \quad x(T) = x^1, \quad x \in R^n, \quad u \in R^n. \quad (2)$$

На классе непрерывных управлений $\inf I(u)$ может не достигаться, т. е. на этом классе задача (1), (2) может быть некорректно поставленной задачей минимизации в смысле А. Н. Тихонова [124] и решением ее может являться разрывная минималь [88]. Введем регуляризованную задачу P_ε : при ограничениях (2), на том же множестве управлений, минимизировать функционал

$$I_\varepsilon(u) = \int_0^T \left[g(t, x) + h'(t, x)u + \frac{\varepsilon^2}{2} u'u \right] dt, \quad \varepsilon > 0. \quad (3)$$

Уравнения Эйлера для задачи (2), (3) имеют вид

$$\varepsilon^2 \ddot{x} = -\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial t}, \quad x(0) = x^0, \quad x(T) = x^1, \quad (4)$$

т. е. введенную регуляризацию можно назвать регуляризацией уравнений Эйлера, т. к. при $\varepsilon = 0$ из (4) получаем «вырожденные» уравнения Эйлера (отвечающие задаче (1), (2))

$$-\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial t} = 0.$$

Во многих работах задача P_ε выступает в качестве исходной и является задачей с «дешевой» платой за управление. В этом случае мы имеем дело с обычной проблематикой теории возмущений: определение факта существования решения задачи P_ε в окрестности решения задачи P_0 и приближенное определение решения задачи P_ε на основе информации о задаче P_0 . Для удобства и в этих случаях будем задачу P_ε называть регуляризованной по отношению к P_0 . Используя условия оптимальности В. Ф. Кротова [89], устанавливается следующее утверждение о близости траектории $x^*(t, \varepsilon)$ задачи (2), (3) к некоторой, вообще говоря, разрывной минимали в (1), (2).

Пусть:

$$1) \frac{\partial h_i}{\partial x_j} = \frac{\partial h_j}{\partial x_i}, \quad i, j = \overline{1, n};$$

2) существует единственная, кусочнонепрерывная вектор-

функция $\hat{x}(t)$ такая, что

$$\max_{x \cdot} \left\{ P(x, t) = -g(x, t) + \sum_{i=1}^n \int_0^{x_i} \frac{\partial h_i}{\partial t} (0, \dots, 0, x_i, \dots, x_n, t) dx_i \right\} = P(\hat{x}(t), t), t \in (0, T) P_{xx} < 0. \quad (5)$$

Тогда $x(t)$ — минималь в задаче (1), (2) и $(x^*(t, \varepsilon))$ сходится к $\hat{x}(t)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ по мере на $[0, T]$. Условие максимума (5) в скалярном случае совпадает с условием максимума Ю. П. Боглаева [10], позволяющего формировать предельный остов для сингулярно возмущенной краевой задачи вида (4). Накладывая дополнительные условия на гладкость данных, характер $\hat{x}(t)$ и краевых условий x^0, x^1 можно, используя известные результаты [22, 140, 183, 213], строить асимптотику решения задачи (4) методом пограничных функций, применяя, в случае наличия внутренних точек разрыва, теорию внутреннего пограничного слоя. Эта асимптотика экстремали позволяет провести полный асимптотический анализ задачи (2), (3). Такой подход по асимптотике вырождающихся в пределе простейших вариационных задач на базе ранних результатов В. А. Тупчиева [126] по условно-устойчивому случаю был реализован в [5] (см. также [6]).

2. Линейно-квадратичные задачи. Рассмотрим задачу

$$I_\varepsilon(u) = \frac{1}{2} x'(T) F x(T) + \frac{1}{2} \int_0^T (x' Q(t) x + \varepsilon^2 u' R(t) u) dt \rightarrow \min, \quad (6)$$

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, x(0) = x^0, x \in R^n, u \in R^r. \quad (7)$$

Здесь $Q \geq 0, R > 0, t \in [0, T], F \geq 0$.

Краевая задача принципа максимума имеет вид

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \dot{x} &= \varepsilon^2 A(t)x + S(t)\psi, \quad x(0) = x^0, \\ \dot{\psi} &= Qx - A'(t)\psi, \quad \psi(T) = -Fx(T), \end{aligned} \quad (8)$$

где $S = BR^{-1}B' \geq 0$. Сингулярно возмущенная задача (8) имеет чисто нулевой спектр. Для построения асимптотики необходимо преобразование задачи. Интересно, что характер преобразований связан с порядком сингулярности L оптимального особого управления в задаче P_0 , соответствующей (6), (7). При $F=0$ формальное асимптотическое разложение x_ε^* и u_ε^* в ряды вида (1.26) получено О'Молли и Джеймсоном [216, 217, 220, 221].

Опишем, следуя [221], один результат, полученный ими.

Пусть

$$\begin{cases} B_j'QB_j=0, & j=0, 1, \dots, L-2, \\ B_{L-1}'QB_{L-1}>0 \end{cases}$$

всюду на $[0, T]$, где

$$B_j = AB_{j-1} - \dot{B}_{j-1}, \quad j \geq 1, \quad B_0 = B.$$

Тогда в случае бесконечной дифференцируемости коэффициентов, имеют место формальные разложения

$$u_\varepsilon^*(t, \varepsilon) = \bar{u}(t, \mu) + \frac{1}{\mu^L} \Pi u(\tau_0, \mu) + Qu(\tau_1, \mu),$$

$$x^*(t, \varepsilon) = \bar{x}(t, \mu) + \frac{1}{\mu^{L-1}} \Pi x(\tau_0, \mu) + \mu Qx(\tau_1, \mu),$$

где $0 \leq t \leq T$, $\mu = \sqrt[L]{\varepsilon} > 0$, $\tau_0 = t/\mu$, $\tau_1 = (t-T)/\mu$ и пограничные ряды начинаются с членов при μ^0 . Для построения разложений в задаче (6), (7) сначала проводится преобразование в новую задачу размерности $n + Lr$ с вектором состояния

$$x_L = x - \sum_{j=1}^L B_{j-1} u_j,$$

где

$$u_j = \int_0^t u_{j-1}(s) ds, \quad j=1, \dots, L, \quad u_0 = u.$$

Главные члены регулярных рядов, являющиеся пределом u_ε^* и x_ε^* внутри $(0, T)$, образуют обратную связь $\bar{u}_0 = \bar{P}_0' \bar{x}_0$, где $\bar{x}_0$ удовлетворяет условиям ортогональности

$$\bar{P}_j' \bar{x}_0 = 0, \quad j=1, \dots, L,$$

и является проекцией $\bar{x}_0 = \sigma_L \bar{x}_{L_0}$ решения $\bar{x}_{L_0}$ начальной задачи $\dot{\bar{x}}_{L_0} = (A + B_L P_L') \bar{x}_{L_0}$, $\bar{x}_{L_0}(0) = x^0$. Здесь

$$\sigma_L = \bar{E}_1 \bar{E}_2 \dots \bar{E}_L, \quad \bar{P}_L = -(QB_{L-1} + K_L B_L) (B_{L-1}' QB_{L-1})^{-1},$$

$$\bar{E}_{L-j} = E + B_{L-j-1} \bar{P}_{L-j}', \quad \bar{P}_{L-j-1} = A' \bar{P}_{L-j} + \bar{P}_{L-j}, \quad j=0, 1, \dots, L-1,$$

а K_L есть положительно полуопределенное решение соответствующего уравнения Риккати для преобразованной задачи, причем

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_\varepsilon^* = I_0^* = \frac{1}{2} (x^0)' K_L(0) x^0.$$

Таким образом, асимптотический анализ по параметру

регуляризации в (6), (7) приводит к выводу, что в случае чисто нулевого спектра основной функциональной матрицы также видимо возможно после ряда преобразований применение метода пограничных функций. Оказывается, что левые пограничные функции ведут себя подобно матричной дельта последовательности. Поэтому

сумма $\frac{1}{\mu^L} \sum_{j=1}^{L-1} \Pi_j \mu(\tau_0) \mu^j$ представляет собой комбинацию последовательностей, являющихся односторонними аппроксимациями δ -функций и ее производных до порядка $(L-1)$ включительно. Так как при $\varepsilon \rightarrow 0$ мы приходим к особому решению вырожденной задачи P_0 , то целью импульсных составляющих асимптотической конструкции u_ε^* является перевод системы (6) из x^0 на особую траекторию $\bar{x}_0(t)$, которая лежит в нуль-пространствах матриц $\bar{P}_1', \bar{P}_2', \dots, \bar{P}_L'$. Появляющиеся при регуляризации односторонние аппроксимации δ -функций и ее производных можно пытаться трактовать в рамках секвенциального подхода в теории обобщенных функций в качестве представителей некоторых классов эквивалентности и, таким образом, определять обобщенное решение вырожденной задачи оптимального управления P_0 . Для некоторых нелинейных задач такой подход был реализован в [224]. Заметим здесь, что прямое определение обобщенного решения в несколько иных вырожденных задачах приводится в (69, 70). Различным аспектам, возникающим в задаче вида (6, 7), посвящены также работы [60, 105, 120, 168, 210]. Регуляризация частично вырожденных задач P_0 , т. е.

тех, в которых функционал имеет вид $\frac{1}{2} \int_0^T [(x'Qx) + (u'Ru)] dt$

и $R \geq 0$, рассматривалась Г. А. Куриной [92], О'Молли [216], Драганом и Халанаем [166]. В последней работе, в частности, изучается предельный переход по параметру регуляризации в решения соответствующей начальной задачи для некоторого уравнения Риккати. Эта начальная задача близка по форме к задаче (3.26), (3.27), и здесь также имеет место скачок (3.31).

3. Нелинейные задачи. Продемонстрируем здесь возможность исследования импульсов и особых, в смысле принципа максимума, участков оптимального управления с помощью регуляризации и последующего асимптотического анализа (методом пограничных функций) и в нелинейном случае задачи управления.

Пусть имеем следующую задачу с фиксированным временем:

$$I_0(u) = \Phi(x_1(T)) \rightarrow \min, \quad (9)$$

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, t), \quad x_1(0) = x_1^0, \quad x_1 \in R^n, \quad (10)$$

$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, t) + f_3(x_2, t)u$, $x_2(0) = x_2^0$, $x_2 \in R^1$, $u \in R^1$,
 где на множестве непрерывных управлений $\inf I_0(u) > -\infty$.
 Из-за возможной неразрешимости задача (9), (10) может являться некорректно поставленной. Сделаем регуляризацию: вдоль траекторий (10) будем минимизировать функционал

$$I_\varepsilon(u) = \varphi(x_1(T)) + \frac{\varepsilon^2}{2} \int_0^T u^2(t) dt. \quad (11)$$

I. Пусть функции φ , f_i , $i=1, 2, 3$ четыре раза непрерывно дифференцируемы по своим аргументам.

II. Предположим, что $f_3(x_2, t) \neq 0$ для любых x_2, t . Применяя принцип максимума к задаче (10), (11), приходим к сингулярно возмущенной краевой задаче с неопределенностью при вырождении, причем нулевому собственному значению кратности два основной функциональной матрицы здесь отвечает неполное число собственных векторов. После несложных преобразований, исключающих нулевые собственные значения, приходим к краевой задаче

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, t), \quad \dot{\psi}_1 = f'_{1x_1} \psi_1 - \varepsilon f'_{2x_1} \alpha / f_3, \quad \varepsilon \dot{x}_2 = \varepsilon f_2 + \alpha \cdot f_3, \\ \varepsilon \dot{\alpha} &= \varepsilon (f_2 / f_3) f_{3x_2} \cdot \alpha - f'_{1x_2} \psi_1 f_3 - \varepsilon f_{3x_2} \cdot \alpha + \varepsilon f_{3x_2} \cdot \alpha + \varepsilon f_{3t} \cdot \alpha / f_3, \\ x_1(0) &= x_1^0, \quad \psi_1(T) = -\varphi_{x_1}(x_1(T)), \quad x_2(0) = x_2^0, \quad \alpha(T) = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь $u(t, \varepsilon) = \alpha(t, \varepsilon) / \varepsilon$, $\alpha = (\psi_2 f_3) / \varepsilon$, а ψ_1, ψ_2 — сопряженные переменные принципа максимума. Асимптотическое разложение решения (12) ищем в виде (1.26). Введем вспомогательную задачу меньшей размерности (производную задачу в терминологии В. И. Гурмана [52])

$$\tilde{I}(v) = \varphi(y(T)) \rightarrow \min, \quad \dot{y} = f_1(y, v, t), \quad y(0) = x_1^0. \quad (13)$$

III. Пусть оптимальное управление $v^*(t)$ существует, единственно и является непрерывным изолированным решением уравнения $\frac{\partial \tilde{H}}{\partial v} = 0$, где $\tilde{H} = p' f_1$ — гамильтониан в задаче (12).

Оказывается, что экстремаль Понтрягина в задаче (12) связана с главным членом регулярного ряда, а именно $y^* = \bar{x}_{10}$, $v^* = \bar{x}_{20}$.

IV. Пусть $\tilde{H}_{vv} < 0$ вдоль $v^*(t)$.

Это условие Лежандра — Клебша в задаче (13) обеспечивает условную устойчивость в (12) и вместе с II приводит к существованию преобразования подобия, диагонализующего основную функциональную матрицу.

V. Пусть матрицы $\tilde{H}_{yv} \tilde{H}_{vv}^{-1} \tilde{H}_{vy} - \tilde{H}_{yy} \geq 0$, $\varphi \geq 0$ вдоль $v^*(t)$. Последнее условие приводит к отличию от нуля соответствующего определителя Δ_0^0 (§ 1). Следствием принципа максимума для задачи (13) является аналитичность представления услов-

но устойчивых интегральных многообразий S^+ и S^- , причем области G^+ и G^- совпадают с R^1 . Таким образом, на основе результатов [22, 27, 68] имеет место следующее утверждение [26].

При выполнении условий I—V существуют $\varepsilon_0 > 0$, $C > 0$, такие, что при $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$:

- 1) решение краевой задачи (12) существует и единственно;
- 2) оптимальное управление u_ε^* в задаче (10), (11) существует и единственно;

$$3) \left| u_\varepsilon^* - \frac{P_0 \alpha(\tau_0)}{\varepsilon} - \bar{\alpha}_1(t) - P_1 \alpha(\tau_0) - Q_1 \alpha(\tau_1) \right| \leq C\varepsilon,$$

$$\|x_1^*(t, \varepsilon) - y^*(t)\| \leq C\varepsilon, \quad |x_2^*(t, \varepsilon) - v^*(t) - P_0 x_2(\tau_0)| \leq C\varepsilon, \\ t \in [0, T];$$

- 4) $I_\varepsilon^* - I_0^* \leq C\varepsilon$, $I_0(u_\varepsilon^*) - I_0^* \leq C\varepsilon$, т. е. u_ε^* является субоптимальным управлением порядка I в исходной вырожденной задаче.

Из оценок 3), учитывая экспоненциальную оценку для $P_0 \alpha(\tau_0)$ вида (1.11), заключаем, что u_ε^* аппроксимирует δ -функцию с носителем в нуле. Этот начальный импульс естественно связать с решением задачи P_0 и он необходим для перевода системы (10) из x_2^0 на магистральный участок оптимальной траектории, который отвечает особому участку управления, совпадающему с $\bar{\alpha}_1(t)$. При этом u_ε^* для $0 < t \leq T$ аппроксимирует $\bar{\alpha}_1(t)$. Отметим, что метод Гурмана—Келли [36] определения особого участка управления дает ту же величину. Рассмотренная регуляризация служит основой для введения обобщенного решения задачи (9), (10) [244]. Периодический вариант задачи (9), (10) рассматривался в работе [64]. Задача (9), (10) с векторным управлением рассматривалась в [29]. Схема рассуждений в принципе та же, что и в скалярном случае. Основное отличие — необходимость согласования φ с матрицей при u и введения некоторых условий на коэффициенты при u , что позволяет сделать преобразование Гурмана—Келли. В заключение отметим, что регуляризация и последующий предельный переход рассматривались также в [34] и могут использоваться для получения условий оптимальности особых управлений в вырожденных задачах [185].

4. Метод штрафа и сингулярные возмущения. Рассмотрим задачу: минимизировать функционал

$$I_0(u) = \frac{1}{2} \int_0^T (x' Q(t) x + u' R(t) u) dt \quad (14)$$

вдоль траекторий системы (7) с ограничением

$$x(T) = 0. \quad (15)$$

Здесь $Q(t) \geq 0$, $R(t) > 0$, $t \in [0, T]$.

Предположим, что система (7) вполне управляема на любом отрезке $[t_0, T] \subset [0, T]$. Освободимся от ограничения (15) с помощью введения штрафа, т. е. введем задачу P_ε : минимизировать функционал

$$I_\varepsilon(u) = \frac{1}{2\varepsilon} x'(T) F x(T) + \frac{1}{2} \int_0^T (x' Q(t) x + u' R(t) u) dt \quad (16)$$

вдоль траекторий системы (7). Здесь $F > 0$. В задаче (7), (16) управление имеет вид $u = -R^{-1}(t) B'(t) K(t, \varepsilon) x$, где

$$K = -K A(t) - A'(t) K + K S(t) K - Q(t), \quad K(T, \varepsilon) = \frac{F}{\varepsilon}. \quad (17)$$

Используя частное положительно определенное решение $\Phi(t)$ уравнения в (17) и сделав замену $K = \frac{1}{\varepsilon} N + \Phi$, приходим к задаче

$$\varepsilon \frac{dN}{dt} = -\varepsilon N (A - S\Phi) - \varepsilon (A' - \Phi S) N + N S N, \quad (18)$$

$$N(T, \varepsilon) = F - \varepsilon \Phi(T).$$

Спектр основной функциональной матрицы в этой сингулярно возмущенной задаче чисто нулевой и асимптотика решения задачи (18) уже не строится по методу пограничных функций, а имеет «дробный» характер [45, 49]. Используя асимптотику $N(t, \varepsilon)$, получаем, что $K(t, \varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \tilde{K}(t)$ равномерно по $t \in [0, T_1] \subset [0, T]$, где $\tilde{K}(t)$ — решение уравнения в (17) с условием $\tilde{K}^{-1}(T) = 0$. Далее оказывается, что этот предел $\tilde{K}(t)$ формирует оптимальный синтез в исходной задаче (7), (14), (15), т. е.

$$u_0^*(t) = -R^{-1}(t) B'(t) \tilde{K}(t) x.$$

Аналогичное утверждение можно получить и для более общих терминальных ограничений типа равенства. Таким образом, введение штрафа приводит к появлению сингулярно возмущенных задач, исследование которых позволяет получать утверждения для исходных задач с ограничениями. Отметим также, что здесь изменяется характер пограничного слоя — он здесь является не «экспоненциальным», а «степенным». Сингулярно возмущенные задачи такого рода изучались С. А. Ломовым [100].

§ 8. ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ С БОЛЬШИМ КОЭФФИЦИЕНТОМ УСИЛЕНИЯ. СКОЛЬЗЯЩИЕ РЕЖИМЫ

1. Большой коэффициент усиления. Математические модели многих прикладных задач управления содержат в исходной постановке или после некоторых преобразований большие коэф-

фициенты при управляющих воздействиях. Впервые такие задачи изучал М. В. Мееров [104], затем Е. И. Геращенко [37] и В. И. Уткин [128]. Задачи такого рода также могут исследоваться методами теории сингулярных возмущений. Пусть требуется найти r -мерное управление, переводящее систему

$$\dot{y} = f(y, t) + B(y, t)u, \quad y \in R^n, \quad t \in [0, T] \quad (1)$$

из начального состояния

$$y(0) = y^0 \quad (2)$$

за достаточно короткое время в некоторую окрестность заданного многообразия

$$S(y) = 0, \quad S \in R^m. \quad (3)$$

В работах [128, 241, 242] использовалось следующее управление для решения подобной задачи

$$u(y, \varepsilon) = \varepsilon^{-1} K S(y), \quad (4)$$

где K — некоторая постоянная $r \times m$ -матрица, $\varepsilon > 0$ — малый параметр.

Подобное управление может применяться для отслеживания и заданной динамики [242]. Подставляя (4) в (1) и вводя переменную $z = S(y)/\varepsilon$, получаем сингулярно возмущенную задачу вида (1.14), (1.15)

$$\begin{aligned} \dot{y} &= f(y, t) + B(y, t)Kz, \quad y(0) = y^0, \\ \varepsilon \dot{z} &= G(y) f(y, t) + G(y) B(y, t)Kz, \quad z(0) = \frac{z^{-1}}{\varepsilon}, \end{aligned} \quad (5)$$

где $z^{-1} = S(y^0)$, $G = \text{grad } S$. Так как начальная точка y^0 , вообще говоря, не лежит на многообразии $S(y)$, то в задаче (5) при $\varepsilon \rightarrow 0$ имеет место начальный скачок у y -компоненты.

Пусть мы находимся в условиях п. 4 § 1. Тогда для любого $\bar{\mu} > 0$ существуют $\bar{\varepsilon}_0 > 0$, $\bar{t}_0 \in (0, T)$, $\bar{t}_0 = O(\varepsilon |\ln \varepsilon|)$ такие, что при $0 < \varepsilon \leq \bar{\varepsilon}_0$

$$\|y(t, \varepsilon) - \bar{y}(t)\| \leq \bar{\mu}, \quad \|z(t, \varepsilon) - \bar{z}(t)\| \leq \bar{\mu}, \quad t \in [\bar{t}_0, T], \quad (6)$$

где $\bar{y}$, $\bar{z}$ — решение вырожденной задачи со скачком в начальных условиях

$$\begin{aligned} \dot{\bar{y}} &= f(\bar{y}, t) + B(\bar{y}, t)K\bar{z}, \\ \bar{z} &= -[G(\bar{y})B(\bar{y}, t)K]^{-1}G(\bar{y})f(\bar{y}, t), \\ \bar{y}|_{t=0} &= \bar{\Phi}(0), \end{aligned} \quad (7)$$

где $\bar{\Phi}(\Delta_2)$ — решение задачи вида (1.18), (1.19). При $m = 1$ $\bar{y}(0) = \alpha(1)$, где $\alpha(s)$ — решение задачи вида (1.20), (1.21) ($A_1 = BK$, $B_1 = f$, $A_2 = GBK$, $B_2 = Gf$).

Из неравенств (6), учитывая, что $S(y(t, \varepsilon)) = \varepsilon z(t, \varepsilon)$, сле-

дует существование $\varepsilon_0 > 0$ и $t_0 \in (0, T)$ таких, что для заданного μ $\|S(y(t, \varepsilon))\| \leq \mu$, $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, $t_0 \leq t \leq T$, $t_0 = O(\varepsilon |\ln \varepsilon|)$, т. е. для любой μ -окрестности найдется такой коэффициент усиления $k_0 = \frac{1}{\varepsilon_0}$ и такой момент времени $t_0 > 0$, что управления вида (4) будут решать задачу (1) — (3), начиная с момента времени t_0 . Заметим при этом, что решение $\bar{y}(t)$ задачи (7) точно принадлежит заданному многообразию (3), начиная с момента $t=0$, и управление (4) подобно некоторому импульсному управлению. Знание $\bar{y}(t)$ помогает строить асимптотическое приближение к решению задачи (5), приближенно определять поведение системы управления с большим коэффициентом усиления как вблизи начальной точки, так и вне ее. Укажем одно приложение описанного подхода. Пусть требуется найти стационарные точки достаточно гладкой функции $F(y)$, $y \in R^n$. Необходимое условие стационарности приводит нас к системе

$$\text{grad } F(y) = S(y) = 0.$$

Для движения к стационарной точке вблизи y^0 используем систему вида (1), (2) с управлением (4) ($K=E$, так как $n=m=r$) и приходим к задаче вида (5). Начальное условие $\bar{y}|_{t=0} = \tilde{\Phi}(0)$ как раз и определяет одну из стационарных точек y^* функции $F(y)$, т. е. $y^* = \tilde{\Phi}(0)$. Системы, вида (1.18'), здесь упрощаются и представляют собой следующие

$$\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \Delta_2} = F_{yy}^{-1}(\tilde{\Phi}), \quad \tilde{\Phi}(z^{-1}) = y^0, \quad \Delta_2 \in R^n,$$

$$\frac{\partial P}{\partial s} = -F_{yy}^{-1}(P), \quad P(0) = y^0, \quad s \in R^n (y^* = P(z^{-1})).$$

В скалярном случае ($n=1$) имеем $y^* = Q(1)$, где

$$\frac{dQ}{d\alpha} = -F_{yy}^{-1}(Q) z^0 = -F_{yy}^{-1}(Q) F_y(y^0), \quad Q(0) = y^0,$$

т. е. придем к модификации непрерывного варианта метода Ньютона. Таким образом, для определения стационарных точек можно в окрестности начального приближения интегрировать по конечному объему «фазового пространства» некоторые дифференциальные уравнения. Заканчивая этот пункт, заметим, что линейным системам управления с большим коэффициентом усиления посвящены также работы [60, 215, 249]. При решении задач о регуляторе состояния для таких систем, после замены $\frac{u}{\varepsilon} = v$, где v — новое управление, приходим к задачам с «дешевой» платой вида (7.6), (7.7).

2. Скользящие режимы. Некоторые задачи управления связаны с так называемыми системами переменной структуры. Поясним это понятие на следующем примере.

Пусть задана система

$$\begin{aligned}\dot{y}_1 &= y_2, \\ \dot{y}_2 &= y_1 + u,\end{aligned}\tag{8}$$

где управление u задается следующим образом

$$u = \begin{cases} -2y_1 & \text{при } y_1 s > 0, \\ 0 & \text{при } y_1 s < 0, \end{cases}\tag{9}$$

где $s = \frac{1}{2} y_1 + y_2$.

Если рассмотреть фазовую плоскость (y_1, y_2) , то такой закон управления означает, что сверху от прямой $s=0$ ($y_2 = -\frac{1}{2} y_1$) и справа от оси y_2 (а также снизу от $s=0$ и слева от оси y_2) система (8) имеет вид:

$$\begin{aligned}\dot{y}_1 &= y_2, \\ \dot{y}_2 &= -y_1,\end{aligned}\tag{10}$$

а сверху от $s=0$ и слева от оси y_2 (снизу от $s=0$ и справа от оси y_2) имеет вид:

$$\begin{aligned}\dot{y}_1 &= y_2, \\ \dot{y}_2 &= y_1.\end{aligned}\tag{11}$$

Начало координат для системы (10) является центром, а для (11) седлом.

На рис. 2 изображены фазовые траектории систем (10) и (11) в указанных выше областях, а также прямая $s=0$, обозначенная через l . Стрелка указывает направление возрастания t .

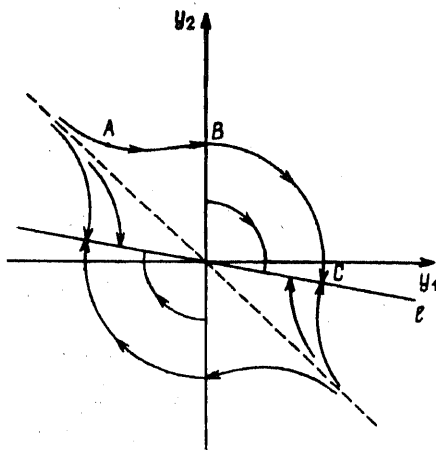


Рис. 2

Будем рассматривать системы (10) и (11) как одну систему с разрывным коэффициентом при y_1 , при этом линия разрыва сама зависит от y_1 и y_2 . Система такого типа называется системой переменной структуры. Допустим, что точка A является началом траектории, которая до точки B является траекторией типа гиперболы. Когда система попадает в точку B происходит изменение структуры и далее состояние описывается траекторией BC типа окружности. В точке C снова происходит смена структуры, но здесь картина отличается от того, что наблюдалось в точке B , так как траектория примыкающая к точке B снизу от $s=0$ имеет стрелку, направленную в сторону $s=0$. Таким образом, траектория оказывается непродолжаемой в точке C и для описания дальнейшего хода процесса нужно привлекать другие соображения. По сути дела мы поставлены перед проблемой построения обобщенного решения.

Допустим, что движение по окружности продолжается еще некоторое время после пересечения $s=0$ до точки 1 на прямой I (рис. 3) и там уже начинается движение по гиперболе

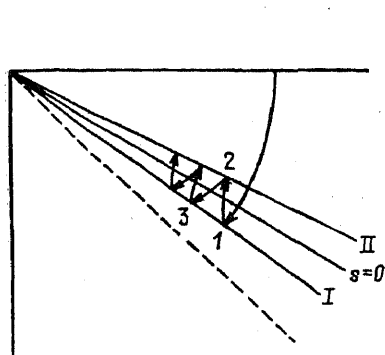


Рис. 3

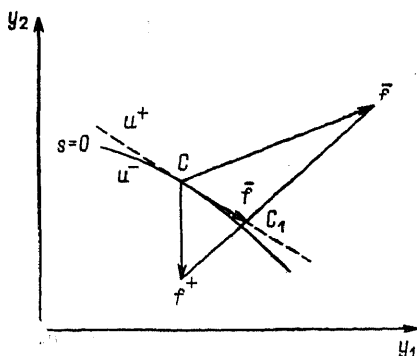


Рис. 4

опять же еще некоторое время после пересечения $s=0$ до точки 2, далее следует опять по окружности до точки 3 и т. д. В результате получается некоторый колебательный процесс, при котором точка явно приближается к началу координат. В пределе мы получаем некоторое движение вдоль прямой $s=0$, которое получило название скользящего режима.

Скользящие режимы появляются в технике и ими пользуются, в частности, в теории управления, чтобы получать системы с некоторыми желаемыми свойствами. Например, в данном случае, комбинируя две структуры (седло — неустойчивая точка покоя и центр — устойчивая, но не асимптотически устойчивая), получаем в результате систему, траектории в которой стремятся к началу координат!

В настоящее время теория систем переменной структуры и

характерных для них скользящих режимов успешно развивается. С состоянием вопроса можно детально ознакомиться по работе В. И. Уткина [128].

Теория скользящих режимов — это, прежде всего, формулировка правила движения по прямой $s=0$ (в общем случае разрывы могут происходить на некоторых поверхностях). Широко используется определение А. Д. Филиппова [132]. Его формулировка особенно проста в случае задачи со скалярным управлением

$$\begin{aligned}\dot{y} &= f(y, t, u), \quad y \in R^n, \\ u &= \begin{cases} u^+(y, t) & \text{при } s(y) > 0, \\ u^-(y, t) & \text{при } s(y) < 0. \end{cases}\end{aligned}\quad (12)$$

Пусть $s=0$ уравнение поверхности разрыва, $f^+ = f(y, t, u^+)$ и $f^- = f(y, t, u^-)$ предельные значения скорости $\dot{y}$ вдоль траектории при приближении к $s=0$ соответственно со стороны $s > 0$ и $s < 0$.

Согласно Филиппову, чтобы определить скорость движения $\dot{y}$ в скользящем режиме, т. е. по поверхности $s=0$, нужно провести через точку C касательную плоскость к поверхности $s=0$ (на рис. 4 это касательная прямая) и найти точку пересечения этой плоскости с прямой, соединяющей концы векторов f^+ и f^- (на рис. 4 точка C_1). Искомым вектором скорости будет вектор $\vec{CC}_1 = \vec{f}$, и уравнение движения в скользящем режиме будет иметь вид

$$\dot{\bar{y}} = \vec{f}, \quad (13)$$

где, как нетрудно получить из простых геометрических соображений,

$$\vec{f} = \frac{(\text{grad } s, f^-)}{(\text{grad } s, f = f^+)} f^+ - \frac{(\text{grad } s, f^+)}{(\text{grad } s, f = f^+)} f^-. \quad (14)$$

Точка C , лежащая на поверхности разрыва, служит начальной точкой для (13). Чтобы оправдать использование этого закона в реальных процессах можно поступить следующим образом. Введем в систему некоторые малые величины — малые неидеальности (гистерезис, запаздывание и др.), которые в реальной системе так или иначе присутствуют. Пусть такая система имеет обычное (классическое) решение, которое определяется, после чего малые параметры устремляются к нулю. Это традиционный способ построения обобщенного решения (также поступают например в газовой динамике см. [127]). Для получения закона движения в скользящем режиме можно использовать также теорию сингулярных возмущений, заменяя систему с переменной структурой системой, в которой отсутствуют разрывы, но содержится малый параметр ε .

Пусть поведение объекта описывается системой (1), и для простоты изложения u и s являются скалярными величинами,

т. е.

$$u = \begin{cases} u^+ & \text{при } s(y) > 0, \\ u^- & \text{при } s(y) < 0. \end{cases} \quad (15)$$

Заменим в (1) разрывный закон (15) непрерывной конструкцией вида

$$u = \frac{u^+ + u^- e^{-\frac{s(y)}{\varepsilon}}}{1 + e^{-\frac{s(y)}{\varepsilon}}} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \begin{cases} u^+, & s > 0, \\ u^-, & s < 0. \end{cases} \quad (16)$$

Пусть $s(y_0) > 0$. Пока $s(y) > 0$, система (1) может рассматриваться как регулярно возмущенная. Согласно теории регулярных возмущений, при $s(y)/\varepsilon \gg \alpha$ (α достаточно велико, но фиксировано при $\varepsilon \rightarrow 0$), фазовая точка подходит как угодно близко к поверхности $s=0$ (соответствующее значение y обозначим y^* , $s(y^*) = \alpha\varepsilon \approx 0$). Здесь и начинается скользящий режим. На этом этапе введем $s/\varepsilon = z$, в качестве новой неизвестной функции, наряду с y . Получим сингулярно возмущенную систему

$$\begin{aligned} \dot{y} &= f(y, t) + B(y, t)\Phi(z), \\ \varepsilon \dot{z} &= Gf + GB\Phi(z), \end{aligned} \quad (17)$$

где $\Phi(z) = \frac{u^+ + u^- e^{-z}}{1 + e^{-z}}$ с начальным условием $z|_{t=t_0} = x$.

Пусть для определенности $u^- < 0 < u^+$. Вырожденное уравнение, отвечающее (17), определяет $\Phi(\bar{z}) = -(GB)^{-1}Gf$, производная $\frac{d\Phi}{dz} = \frac{(u^+ - u^-)e^{-z}}{(1 + e^{-z})^2} > 0$, в силу условия $u^- < 0 < u^+$, и поэтому $\bar{z}$ однозначно определяется. Если к тому же $GB < 0$, то условие устойчивости выполнено. Предельный закон движения y (движение в скользящем режиме) определяется системой

$$\begin{aligned} \dot{\bar{y}} &= f(\bar{y}, t) - B(\bar{y}, t)(GB)^{-1}Gf, \\ \bar{y}|_{t=t_0} &= y^*. \end{aligned} \quad (18)$$

Нетрудно видеть, что здесь уравнения движения совпадают с (13), (14). В. И. Уткин [128] обратил также внимание на то, что уравнение (18) совпадает с (7), т. е. движение в скользящем режиме такое же, как в случае большого коэффициента усиления. В заключение заметим, что в нелинейном по u случае регуляризация (16) не приводит к закону (14). Проиллюстрируем это на простейшем примере.

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= 0,3y_2 + y_1u, \\ \dot{y}_2 &= -0,7y_1 + 4y_1u^3, \\ s &= y_1 + y_2, \quad u = \begin{cases} 1, & s < 0 \\ -1, & s > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что определение Филиппова (14) приводит к следующему закону движения в скользящем режиме

$$\dot{\bar{y}}_1 = -0,1\bar{y}_1. \quad (19)$$

Метод большого коэффициента усиления (метод эквивалентного управления [128]) дает

$$\begin{aligned}\dot{y}_1 &= 0,3y_2 + y_1z, \\ \dot{y}_2 &= -0,7y_1 + 4y_1z^3, \\ \varepsilon \dot{z} &= 0,3y_2 + y_1z - 0,7y_1 + 4y_1z^3, \\ s &= \varepsilon z,\end{aligned}$$

$$\bar{s}=0, \quad \bar{y}_1 = -\bar{y}_2, \quad 0 = -\bar{y}_1 + \bar{y}_1\bar{z} + 4\bar{y}_1\bar{z}^3,$$

и, следовательно, $\bar{z} = \frac{1}{2}$ (заметим, что этот корень устойчив лишь при $y_1 < 0$). Таким образом,

$$\dot{\bar{y}}_1 = 0,2\bar{y}_1,$$

т. е. получается закон совершенно отличный от (19). В этом же случае управление погранслоного типа (16) дает $\bar{u} =$

$$= \frac{u^+ + u^- e^{-\frac{1}{2}}}{1 + e^{-\frac{1}{2}}} = \frac{-1 + e^{-\frac{1}{2}}}{1 + e^{-\frac{1}{2}}}, \text{ что приводит к еще одному уравнению}$$

вида $\dot{\bar{y}}_1 = \gamma \bar{y}_1$, где γ отлично как от 0,2, так и от $-0,1$.

Мы видим, что в построении обобщенного решения содержится определенный произвол и какой именно непрерывной конструкцией следует заменить разрыв, вероятно, должно диктоваться конкретными свойствами переключающего устройства. Т. е., как указывается в [128], необходимы сведения о конкретном способе реализации управления в пограничном слое. С другой стороны, тот факт, что в зависимости от способа реализации, можно получать разные законы движения в скользящем режиме, можно использовать для достижения желаемых свойств закона движения.

§ 9. ЧИСЛЕННЫЕ РАСЧЕТЫ, РАЗЛИЧНЫЕ ЗАДАЧИ И ПРИЛОЖЕНИЯ

1. Численные расчеты. Остановимся на некоторых возможностях для численного решения, которые появляются после анализа задач оптимизации методами теории сингулярных возмущений.

Прежде всего отметим, что численные методы не следует противопоставлять асимптотическим, так как последние являются инструментом качественного анализа и предварительное

качественное исследование упрощает последующее численное решение, причем это упрощение появляется и на этапе выбора алгоритма и на этапе вычислений (сокращение времени счета, уменьшение требований к оперативной памяти и быстродействию ЭВМ), что приводит к возможности решать прикладные задачи в режиме реального времени. Как известно, самым большим препятствием на пути численного решения прикладных задач управления является, так называемое «проклятие размерности». На основе теории сингулярных возмущений как раз и строятся схемы приближенной декомпозиции определенного класса задач оптимального управления, где априорным допущением является наличие «быстрых» и «медленных» движений. Далее известно, что численное решение задач оптимального управления часто сопровождается вычислительной неустойчивостью, вследствие «жесткости», наличия больших и малых параметров и т. д. Асимптотический анализ методами теории сингулярных возмущений позволяет выделять особенности в решении таких задач и предложить алгоритмы, преодолевающие вычислительную неустойчивость. Пусть имеется некоторая возмущенная задача оптимального управления P_ϵ и целью является ее приближенное решение. Расчеты с использованием асимптотики представляют собой компромисс между простотой нахождения и грубостью приближения решения задачи P_0 с одной стороны и вычислительными трудностями и оптимальностью решения задачи P_ϵ с другой стороны.

В литературе [141, 151, 184, 187, 199, 201, 202, 230, 247] имеются примеры успешного решения конкретных задач оптимального управления, типа рассмотренных в §§ 2, 3, 5, 6, с помощью численного построения асимптотики. При этом оказывается, что нулевое приближение к решению задачи P_ϵ , основанное на решении вырожденной задачи, достаточно грубо описывает точное решение. Построение первого приближения во многих примерах значительно улучшает нулевое приближение и оказывается достаточным для получения оптимального решения в пределах заданной точности [141, 201, 202]. Отметим здесь расчеты Ардэмы [141] при решении задачи определения наименьшего времени набора высоты. Популярный метод наискорейшего спуска при решении этой задачи требует примерно в 40 раз больше времени счета, чем требуется при численном определении асимптотического приближения первого порядка. При этом разница между значениями $T_{\min}$ при обоих подходах составляет примерно 0,5%. Надо отметить, что при численном решении многих прикладных задач асимптотические методы используются на основе эвристических рассуждений, так как зачастую строгое математическое обоснование применимости тех или иных асимптотических разложений отсутствует. Далее, отметим то, что используемые при этом разложения представляют собой асимптотические ряды, которые либо вообще расхо-

дятся, либо сходятся при достаточно малых значениях ε . Использование этих разложений при значениях параметра ε порядка единицы часто приводит к удовлетворительной аппроксимации решения точной задачи. Здесь также нужно отметить возможности предоставляемые методом продолжения по параметру [245].

Большинство указанных здесь работ оперируют с асимптотическим приближением к решению краевой задачи принципа максимума, которая, как указывалось выше, при естественных предположениях является сингулярно возмущенной краевой задачей условно устойчивого типа. Основным является здесь построение равномерного нулевого приближения, магистральная часть которого (решение вырожденной задачи P_0) находится достаточно просто, а пограничные функции связаны с решениями задач об оптимальной стабилизации в погранслоях и в ряде случаев находятся явно. Далее на основе построенного нулевого приближения можно применять эффективный итерационный метод решения таких краевых задач, предложенный Ю. П. Боглаевым [12]. Надо отметить, что собственно работ по специальным разностным схемам или работ содержащих доказательство сходимости различных итерационных методов, связанных с теорией сингулярных возмущений для задач управления рассматриваемых в обзоре, в литературе практически нет (отметим лишь работы [149, 196]), хотя теоретическая база для этого имеется (см., например, работы [1, 4, 7, 9, 12, 72, 138] и др.).

З а м е ч а н и е 1. При построении асимптотики решения краевых задач иногда удастся построить условно устойчивые интегральные многообразия, знание которых помогает преодолевать известную [130] вычислительную неустойчивость метода пристрелки решения краевых задач принципа максимума, так как сужает область поиска недостающих начальных условий.

З а м е ч а н и е 2. На основе теории сингулярных возмущений можно предложить экстраполяционные процедуры типа Ричардсона [103] в непрерывных методах спуска, в методах штрафных функций и регуляризации, где вычислительные трудности при уменьшении или увеличении соответствующего параметра возрастают.

З а м е ч а н и е 3. При интегрировании линейных систем с плохо обусловленной матрицей (спектр состоит из больших и малых по абсолютной величине собственных значений) есть возможность провести декомпозицию [117, 218, 219] с целью преодоления «жесткости» при интегрировании. Эта декомпозиция основана на выделении быстрых и медленных движений. В [117] подобные приемы предлагаются и для нелинейных систем.

Градиентные системы при плохой обусловленности матрицы Гессе также являются «жесткими» — эффект оврагов. Для из-

менения топографии линий уровня используются преобразования растяжения [109]. Оставаясь в рамках овражной структуры, можно предложить процесс спуска, основанный на разделении движений в градиентной системе. Этот процесс состоит из быстрого спуска на «дно оврага» и последующего движения по «дну» к точке минимума [109].

В заключение обзора, не останавливаясь подробно на существе дела, перечислим некоторые другие классы задач управления, в которых исследование также может проводиться методами теории сингулярных возмущений.

2. Интегро-дифференциальные связи. Пусть поведение объекта описывается сингулярно возмущенными интегро-дифференциальными уравнениями [22]. Исследование задач оптимального управления для таких систем проводится в принципе по той же схеме, что и выше (§§ 2, 3, 5, 6). В этом направлении представляют интерес задачи, где присутствие интегрального члена изменяет качественную картину (для интегро-дифференциальных уравнений это явление впервые описано В. Ф. Бутузовым [14]). Задачи оптимального управления такого рода изучались в [53, 54].

3. Связи вида $(A + \varepsilon B)\dot{x} = Cx + Du$. В работах С. Г. Крейна и Г. А. Куриной [87, 90—94] изучаются задачи оптимального управления, где дифференциальные связи содержат при производных оператор, близкий к вырожденному. Здесь также имеет место пограничный слой, но асимптотический анализ усложняется. Исследованы как задачи с ограничениями на u , так и задачи без ограничений. Используемая здесь техника может применяться и к анализу особых управлений.

4. Игровые задачи. Н. Н. Красовский и В. М. Решетов [86] впервые рассмотрели дифференциальную игру сближения-уклонения, описываемую линейной сингулярно возмущенной системой при наличии ограничений на значения управляющих воздействий.

Линейно квадратичным играм с сингулярно возмущенными связями и построению в них субоптимальных стратегий посвящены работы [192—195]. Нелинейная игра сближения-уклонения рассмотрена в [167]. Применение идеологии сингулярных возмущений к итерационному решению минимаксных задач предложено Н. И. Грачевым и Ю. Г. Евтушенко [51].

5. Задачи для распределенных систем. Здесь, в первую очередь, упомянем монографию и обзор Лионса [207, 208]. Задачи оптимального управления с сингулярно возмущенными уравнениями в частных производных, встречающиеся в некоторых задачах математической биологии, рассматривались также в [150]. Распределенные сингулярно возмущенные системы появляются при решении задач управления для ядерных реакторов [143, 144].

6. Стохастические возмущения. Линейно квадратичные за-

дачи оптимального управления для сингулярно возмущенных систем со случайными возмущениями также рассматривались в [177, 179, 191, 240]. Отметим здесь работу Хаддада и Кокотовича [179], посвященную построению субоптимального регулятора.

Малые возмущения в задачах управления стохастическими системами могут привести к появлению соответствующего сингулярного возмущенного уравнения Беллмана. По этому поводу см. обзор [136]. В этом пункте следует также упомянуть работы [146, 225, 240].

7. Приложения. Разделение движений и численное построение асимптотики использовалось многими авторами при решении прикладных задач. Большая группа работ посвящена задачам динамики полета. Отметим здесь работы [13, 30, 141, 142, 151, 189, 190]. В работах Кокотовича и его соавторов [156, 199, 201, 202] имеются примеры использования теории сингулярных возмущений к решению задач оптимального управления электродвигателями постоянного тока.

Как упоминалось выше, сингулярные возмущения появляются в задачах управления ядерными реакторами [144, 230]. Как показали В. Б. Ларин и К. И. Наumenко [95], сингулярно возмущенные системы появляются и при формализации задач управления движением шагающим аппаратом с почти невесомыми ногами. Стабилизации билинейной сингулярно возмущенной системы с приложением к регулированию паровой турбины посвящена работа Халаяна и Развана [182]. Метод интегральных многообразий для исследования систем автоматического управления с быстрыми и медленными движениями применялся в [31, 32].

ЛИТЕРАТУРА

1. Алексеевский М. В., Разностные схемы высокого порядка точности для сингулярно возмущенной краевой задачи. Дифференц. уравнения, 1981, 17, № 7, 1171—1183 (РЖМат, 1981, 12Б1130)
2. Альбрехт Э. Г., Об оптимальной стабилизации нелинейных систем. Прикл. мат. и мех., 1961, 25, № 5, 836—844 (РЖМат, 1963, 12В489)
3. Аникеева (Есипова) В. А., Условно устойчивые сингулярно возмущенные системы и некоторые задачи оптимального управления. Канд. диссертация. Моск. ун-т, М., 1974
4. Багаев Б. М., Вариационно-разностный метод решения эллиптических уравнений с малым параметром при старших производных. Канд. диссертация. Вычисл. Центр Сиб. отд. АН СССР, Новосибирск, 1981
5. Багирова Н. Х., О зависимости решений задач вариационного исчисления от малого параметра. Вестник МГУ, матем., механ., 1966. № 1, 33—42 (РЖМат, 1966, 9Б385)
6. —, Васильева А. Б., Иманалиев М. И., К вопросу об асимптотическом решении задачи оптимального управления. Дифференц. уравнения, 1967, 3, № 11, 1895—1902 (РЖМат, 1969, 3Б366)
7. Бахвалов Н. С., К оптимизации методов решения краевых задач при

- наличии пограничного слоя. Ж. вычисл. мат. и мат. физ., 1969, 9, № 4, 841—859 (РЖМат, 1969, 12Б834)
8. Белопицкий А. А., Возмущенные линейные задачи оптимального управления с фазовыми ограничениями. Ж. вычисл. мат. и мат. физ., 1978, 18, № 1, 35—48 (РЖМат, 1978, 5Б433)
 9. Боглаев И. П., Вариационно-разностная схема для краевой задачи с малым параметром при старших производных. Ж. вычисл. мат. и мат. физ., 1981, 21, № 4, 887—896 (РЖМат, 1981, 12Б1130)
 10. Боглаев Ю. П., О двухточечной задаче для одного класса обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром при производной. Ж. вычисл. мат. и мат. физ., 1970, 10, № 4, 958—968 (РЖМат, 1971, 1Б306)
 11. —, Сингулярно возмущенная краевая задача с вырождением степени роста. Дифференц. уравнения, 1974, 10, № 9, 1566—1573 (РЖМат, 1975, 2Б213)
 12. —, Итерационный метод приближенного решения сингулярно возмущенных задач. Докл. АН СССР, 1976, 227, № 5, 1033—1036 (РЖМат, 1976, 9Б729)
 13. Борзов В. И., Задача о разделении движений в динамике полета. Изв. АН СССР, Мех. тв. тела, 1981, № 5, 3—12
 14. Бутузов В. Ф., Асимптотика решения одной задачи для нелинейного интегро-дифференциального уравнения с малым параметром при производной. Дифференц. уравнения, 1968, 4, № 3, 491—507 (РЖМат, 1968, 9Б319)
 15. Вазов В., Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М., Мир, 1968, 464 с. (РЖМат, 1969, 8Б277К)
 16. Васильева А. Б., Асимптотика решений некоторых задач для обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений с малым параметром при старшей производной. Успехи мат. наук, 1963, 18, № 3, 15—86 (РЖМат, 1964, 1Б282)
 17. —, Сингулярно возмущенные системы, содержащие при вырождении неопределенность. Докл. АН СССР, 1975, 224, № 1, 19—22 (РЖМат, 1976, 1Б239)
 18. —, О сходстве между условно устойчивыми сингулярно возмущенными системами и сингулярно возмущенными системами с нулевым характеристическим числом. Дифференц. уравнения, 1975, 11, № 10, 1754—1764 (РЖМат, 1976, 3Б253)
 19. —, О развитии теории обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром при старших производных за период 1966—1976 гг. Успехи мат. наук, 1976, 31, № 6, 102—122 (РЖМат, 1977, 4Б224)
 20. —, Сингулярно возмущенные системы, содержащие при вырождении неопределенность. Дифференц. уравнения, 1976, 12, № 10, 1748—1757 (РЖМат, 1977, 3Б264)
 21. —, Аникеева В. А., Асимптотика решения одной нелинейной задачи с сингулярным условием. Дифференц. уравнения, 1976, 12, № 10, 1858—1869 (РЖМат, 1977, 3Б265)
 22. —, Бутузов В. Ф., Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М., Наука, 1973, 242 с. (РЖМат, 1973, 11Б205)
 23. —, —, Сингулярно возмущенные уравнения в критических случаях. МГУ, 1978, 106 с. (РЖМат, 1979, 2Б185)
 24. —, Волосов В. М., О работах А. Н. Тихонова и его учеников по обыкновенным дифференциальным уравнениям, содержащим малый параметр. Успехи мат. наук, 1967, 22, № 2, 149—168 (РЖМат, 1967, 10Б296)
 25. —, Дмитриев М. Г., Сингулярные возмущения в задачах оптимального управления. В сб. «Всес. конф. по асимптотическим методам в теории сингулярно возмущенных дифференц. и интегродифференц. уравнений и их прил.», тезисы докл., Фрунзе, «Илим», 1975, 24—25 (РЖМат, 1975, 12Б704)

26. —, —, Определение структуры обобщенного решения нелинейной задачи оптимального управления. Докл. АН СССР, 1980, 250, № 3, 525—528 (РЖМат, 1980, 5Б652)
27. —, Есипова В. А., Условно устойчивые сингулярно возмущенные системы. Докл. АН СССР, 1974, 216, № 1, 17—20 (РЖМат, 1974, 9Б325)
28. —, —, О расширении класса условно устойчивых сингулярно возмущенных систем, допускающих применение метода пограничных функций. Дифференц. уравнения, 1975, 11, № 7, 1159—1174 (РЖМат, 1975, 11Б291)
29. —, Фаминская М. В., Исследование нелинейной задачи оптимального управления методами теории сингулярных возмущений. Докл. АН СССР, 1981, 257, № 6, 1295—1298 (РЖМат, 1981, 9Б520)
30. Викторов Б. В., Особенности поведения систем управления с резко отличными темпами составляющих движения. Изв. АН СССР, Техн. кибернетика, 1967, № 5, 190—195 (РЖМат, 1968, 5Б349)
31. —, О применении метода сингулярных возмущений при исследовании систем автоматического управления. Докл. АН СССР, 1977, 236, № 2, 296—299 (РЖМат, 1978, 1Б175)
32. —, О декомпозиции линейных нестационарных систем автоматического управления. Докл. АН СССР, 1981, 256, № 5, 1048—1052
33. Вишик М. И., Люстерник Л. А., О начальном скачке для нелинейных дифференциальных уравнений, содержащих малый параметр. Докл. АН СССР, 1960, 132, № 6, 1242—1245 (РЖМат, 1961, 8Б146)
34. Волин Ю. М., Островский Г. М., О регуляризации задач оптимального управления. Изв. АН СССР, Техн. кибернетика, 1973, 37, № 3
35. Воронов А. А., Устойчивость, управляемость, наблюдаемость. М., «Наука», 1979, 335 с. (РЖМат, 1979, 8Б326К)
36. Габасов Р., Кириллова Ф. М., Особые оптимальные управления. М., Наука, 1973, 256 с. (РЖКиБ, 1973, 11Г16)
37. Геращенко Е. И., Геращенко С. М., Метод разделения движений и оптимизация нелинейных систем. М., Наука, 1975, 295 с. (РЖМат, 1976, 5Б980)
38. Гичев Т. Р., Дончев А. Л., Сходимость решения линейной сингулярно возмущенной задачи быстрого действия. Прикл. мат. и мех., 1979, 43, № 3, 466—474
39. Глизер В. Я., Об одной сингулярно возмущенной задаче Майера. В сб. «Дифференц. уравнения», вып. 3, Днепропетровск, 1975, 53—56 (РЖМат, 1976, 12Б543)
40. —, Асимптотические методы решения некоторых сингулярно возмущенных задач математической теории оптимального управления. Канд. диссертация, Моск. ун-т, М., 1980
41. —, Дмитриев М. Г., Асимптотика решения сингулярно возмущенного матричного уравнения Риккати. В сб. «Нелинейная механика», вып. 1. Днепропетровск, 1975, 158—162 (РЖМат, 1976, 7Б231)
42. —, —, Сингулярные возмущения в линейной задаче управления с квадратичным функционалом. Дифференц. уравнения, 1975, 11, № 11, 1915—1921 (РЖМат, 1976, 4Б593)
43. —, —, Сингулярные возмущения в линейной задаче оптимального управления с квадратичным функционалом. Докл. АН СССР, 1975, 225, № 5, 997—100 (РЖМат, 1976, 5Б540)
44. —, —, Решение некоторых задач аналитического конструирования регулятора методом пограничного слоя. Дифференц. уравнения и их приложения, Днепропетровск, 1975, 3, 63—70 (РЖМат, 1976, 12Б533)
45. —, —, О связи сингулярных возмущений с методом штрафных функций. Докл. АН СССР, 1976, 231, № 1, 21—23 (РЖМат, 1977, 3Б524)
46. —, —, О непрерывности решения задачи аналитического конструирования регулятора по сингулярным возмущениям. Прикл. мат. и мех., 1977, 41, № 3, 573—576 (РЖМат, 1977, 10Б553)
47. —, —, Асимптотика решения одной сингулярно возмущенной задачи

- Коши, возникающей в теории оптимального управления. Дифференц. уравнения, 1978, 14, № 4, 601—612 (РЖМат, 1978, 10Б654).
48. —, Асимптотика решения некоторых дискретных задач оптимального управления с малым шагом. Дифференц. уравнения, 1979, 15, № 9, 1681—1691 (РЖМат, 1980, 1Б632)
 49. —, Асимптотика решения одной сингулярно возмущенной задачи, связанной с методом штрафных функций. Дифференц. уравнения, 1981, 17, № 9, 1574—1580 (РЖМат, 1982, 2Б733)
 50. Гольштейн Е. Г., Выпуклое программирование. Элементы теории. М., «Наука», 1970, 67 с. (РЖМат, 1970, 12В461)
 51. Грачев Н. И., Евтушенко Ю. Г., Применение метода сингулярных возмущений для решения минимаксных задач. Докл. АН СССР, 1977, 233, № 3, 277—280 (РЖМат, 1977, 8Б623)
 52. Гурман В. И., Вырожденные задачи оптимального управления. М., «Наука», 1977, 304 с. (РЖМат, 1977, 11Б645)
 53. Гусейнов Т. Г., О сингулярно возмущенной задаче оптимального управления для системы интегро-дифференциальных уравнений. Уч. зап. Азерб. ун-т. Сер. физ.-мат. н., 1978, № 3, 57—63, (РЖМат, 1979, 9Б436)
 54. —, Об асимптотике и некоторых ее особенностях решения задачи оптимального управления для сингулярно возмущенной системы интегро-дифференциальных уравнений. Канд. диссертация, Азерб. ун-т, Баку, 1981
 55. Дмитриев М. Г., Об асимптотическом решении одной задачи оптимального управления. В сб. «Дифференц. уравнения и их приложения». Днепропетровск, Днепропетр. ун-т, 1971, 21—29 (РЖМат, 1972, 7Б498)
 56. —, О непрерывности решения задачи Майера по сингулярным возмущениям. Ж. вычисл. мат. и мат. физ., 1972, 12, № 3, 788—791 (РЖМат, 1972, 9Б486)
 57. —, Исследование сингулярных возмущений задач оптимального управления. Канд. диссертация, Днепропетр. ун-т, Днепропетровск, 1972
 58. —, Одно свойство сингулярно возмущенных линейных систем. В сб. «Математика и механика», Днепропетровск, 1972, 202—206 (РЖМат, 1973, 7Б237)
 59. —, Непрерывность решения нелинейных оптимальных задач Майера по сингулярным возмущениям. В сб. «Дифференц. уравнения и их прил.» Вып. 2. Днепропетровск, Днепропетр. ун-т, 1973, 34—40
 60. —, Об одном классе сингулярно возмущенных задач оптимального управления. Прикл. мат. и мех., 1978, 42, № 2, 228—232 (РЖМат, 1978, 9Б519)
 61. —, О сингулярных возмущениях в линейной периодической задаче оптимального управления с квадратичным функционалом. Proceedings of the VIIIth International Conference on Nonlinear Oscillations, PRAGUE, 1978. Institute of Thermomech. Czechoslovak Acad. of Sciences, 1979, vol. 2, 861—866 (РЖМат, 1980, 9Б459)
 62. —, Есипова В. А., Чув В. И., Предельный переход в одной сингулярно возмущенной задаче оптимального управления. В сб. «Дифференц. уравнения и их прил.» Вып. 2. Днепропетровск, Днепропетр. ун-т, 1973, 40—45
 63. —, Мурадова Н. Д., Обоснование идеализации математической модели одной задачи периодической оптимизации. Изв. АН Туркм. ССР, сер. физ.-техн., хим. и геол. н., 1980, № 3, 6—12
 64. —, Сингулярные возмущения и регуляризация нелинейной периодической задачи оптимального управления. Препринт № 23, ВЦ СО АН СССР, Красноярск, 1980, 14 с.
 65. Дончев А. Л., Гичев Т. Р., Корректность сингулярного возмущения задач оптимального управления с выпуклым критерием качества. Докл. Болг. АН, 1977, 30, № 10, 1393—1394 (РЖМат, 1978, 6Б523)
 66. Дюкалов А. Н., Илютович А. Е., Асимптотические свойства оптимальных траекторий экономической динамики. Автоматика и телемеханика, 1973, № 3, 97—107 (РЖМат, 1973, 7Б544)

67. *Есипова В. А.*, Асимптотическое решение линейной задачи оптимального быстрогодействия. В сб. «Дифференц. уравнения и их прил.» Вып. 2. Днепропетровск, Днепропетр. ун-т, 1973, 50—59
68. —, Асимптотика решения общей краевой задачи для сингулярно возмущенных систем обыкновенных дифференциальных уравнений условно устойчивого типа. Дифференц. уравнения, 1975, 11, № 11, 1956—1966 (РЖМат, 1976, 4Б306)
69. *Завалишин С. Т.*, Некоторые вопросы математической теории движения, формализуемые обобщенными функциями. Докт. диссертация. Ин-т мат. и мех. УНЦ АН СССР. Свердловск, 1980
70. —, *Сесекин А. Н.*, Об особых решениях в задачах оптимизации динамических систем с квадратичным критерием качества. Дифференц. уравнения, 1975, 11, № 4, 665—671 (РЖМат, 1975, 9Б528)
71. *Зубов В. И.*, Лекции по теории управления. М., «Наука», 1975, 495 с. (РЖМат, 1975, 9Б569)
72. *Ильин А. М.*, Разностная схема для дифференциального уравнения с малым параметром при старшей производной. Матем. заметки, 1969, 6, вып. 2, 237—248 (РЖМат, 1970, 1Б776)
73. *Карманов В. Г.*, Математическое программирование. М., Наука, 1975, 272 с. (РЖМат, 1975, 10В339К)
74. *Касымов К. А.*, Об асимптотике решения задачи Коши с большими начальными условиями для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения, содержащего малый параметр. Успехи мат. наук, 1962, 17, № 5, 187—188 (РЖМат, 1963, 10Б214)
75. *Квакернаак Х., Сиван Р.*, Линейные оптимальные системы управления. М., Мир, 1977, 650 с. (РЖМат, 1977, 9Б683)
76. *Киселев Ю. Н.*, Асимптотическое решение задачи оптимального быстрогодействия для систем управления, близких к линейным. Канд. диссертация, Матем. ин-т АН СССР, М., 1968
77. —, Асимптотическое решение задачи оптимального быстрогодействия для систем управления, близких к линейным. Докл. АН СССР, 1968, 182, № 1, 31—34 (РЖМат, 1969, 3Б381)
78. —, Асимптотическое решение одной задачи, возникающей в теории оптимальных процессов. В сб. «Теория оптимальных решений». Тр. семинара. Вып. 1. К, 1969, 26—35 (РЖМат, 1970, 7Б555)
79. —, Дифференцируемость отображения, описывающего изохронные поверхности в линейной задаче оптимального быстрогодействия. Дифференц. уравнения, 1971, 7, № 8, 1385—1392 (РЖМат, 1971, 12Б709)
80. —, Линейная задача оптимального быстрогодействия при аналитических возмущениях начальных условий. Дифференц. уравнения, 1971, 7, № 12, 2151—2160 (РЖМат, 1972, 4Б719)
81. *Кириллова Ф. М.*, О корректности постановки одной задачи оптимального регулирования. Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1958, № 4, 113—126 (РЖМат, 1961, 7Б186)
82. —, О непрерывной зависимости решения одной задачи оптимального регулирования от начальных данных и параметров. Успехи мат. наук, 1962, 17, № 4, 141—146 (РЖМат, 1963, 2Б270)
83. *Климушев А. И., Красовский Н. Н.*, Равномерная асимптотическая устойчивость систем дифференциальных уравнений с малым параметром при производных. Прикл. мат. и мех., 1961, 25, № 4, 680—690 (РЖМат, 1962, 4Б181)
84. *Красовский Н. Н.*, Проблемы стабилизации управляемых движений. Дополн. к кн. И. Г. Малкина «Теория устойчивости движения». М., Наука, 1966, 475—514
85. —, Теория управления движением. Линейные системы. М., Наука, 1968, 476 с. (РЖМат, 1969, 8Б525К)
86. —, *Решетов В. М.*, Задачи сближения-уклонения в системах с малым параметром при производных. Прикл. мат. и мех., 1974, 38, № 2, 771—779 (РЖМат, 1975, 2Б409)

87. Крейн С. Г., Курина Г. А., О сингулярных возмущениях в задачах оптимального управления. В сб. «Устойчивость движения. Аналитическая механика. Управление движением». М., Наука, 1981, 170—178 (РЖМат, 1982, 9Б519)
88. Кротов В. Ф., Разрывные решения вариационных задач. Изв. высш. учеб. заведений. Математика, 1960, № 5, 86—98 (РЖМат, 1963, 9Б344)
89. —, Гурман В. И., Методы и задачи оптимального управления. М., Наука, 1973, 446 с. (РЖМат, 1974, 1Б465К)
90. Курина Г. А., Асимптотическое решение одной классической сингулярно возмущенной задачи оптимального управления. Докл. АН СССР, 1977, 234, № 3, 532—535 (РЖМат, 1977, 9Б661)
91. —, Некоторые сингулярно возмущенные задачи оптимального управления. Канд. диссертация, Моск. ин-т электрон. машиностроения, М., 1977
92. —, Об одной вырожденной задаче оптимального управления и сингулярных возмущениях. Докл. АН СССР, 1977, 237, № 3, 517—520 (РЖМат, 1978, 4Б403)
93. —, Об одной задаче Майера, уравнение состояние которой является сингулярно возмущенным линейным дифференциальным уравнением, неразрешенным относительно производной. В сб. «Приближенные методы исследований дифференц. уравнений и их приложения», Куйбышев, 1978, № 4, 56—66 (РЖМат, 1980, 5Б700)
94. —, Сингулярные возмущения в задачах оптимального управления. В сб. «Теория операторных уравнений». Воронеж, 1979, 52—61 (РЖМат, 1979, 7Б615)
95. Ларин В. Б., Науменко К. И., Управление шагающим аппаратом с почти невесомыми ногами. Препринт 80.22, Ин-т математики АН УССР, Киев, 1980 (РЖМат, 1981, 1Б396)
96. Левитин Е. С., О корректности ограничений и устойчивости в экстремальных задачах. I. Вестн. Моск. ун-та. Мат., мех., 1968, № 1, 24—34 (РЖМат, 1968, 10Б478)
97. —, О корректности ограничений и устойчивости в экстремальных задачах. II. Вестн. Моск. ун-та. Мат., мех., 1968, № 2, 8—22 (РЖМат, 1969, 2Б487)
98. —, К теории возмущений негладких экстремальных задач с ограничениями. Докл. АН СССР, 1975, 224, № 6, 1260—1263 (РЖМат, 1976, 4Б613)
99. Легов А. М., Математическая теория процессов управления. М., «Наука», 1981, 256 с. (РЖМат, 1981, 5Б587)
100. Ломов С. А., Построение асимптотических решений некоторых задач с параметрами. Изв. АН СССР, сер. матем., 1968, 32, № 4, 884—913 (РЖМат, 1969, 1Б292)
101. —, Введение в общую теорию сингулярных возмущений. М., Наука, 1981, 398 с. (РЖМат, 1982, 2Б381К)
102. Любушин А. А., Сходимость метода малого параметра для слабоуправляемых оптимальных систем. Прикл. мат. и мех., 1978, 42, № 3, 569—573 (РЖМат, 1978, 11Б1254)
103. Марчук Г. И., Шайдуров В. В., Повышение точности решений разностных схем. М., Наука, 1979, 320 с. (РЖМат, 1979, 12Б1127)
104. Мееров М. В., К синтезу структур многосвязного регулирования при наличии элементов с запаздыванием. Автоматика и телемеханика. 1957, 18, № 12, 1098—1108 (РЖМат, 1959, 8080)
105. Миллер Б. И., Серебровский А. П., Задача оптимального управления линейной системой с вырожденным квадратичным критерием качества. Автоматика и телемеханика. 1979, № 3, 23—24 (РЖМат, 1979, 6Б511)
106. Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х., Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания. М., Наука, 1975, 247 с. (РЖМат, 1976, 4Б308)
107. Моисеев Н. Н., Элементы теории оптимальных систем. М., Наука, 1975, 528 с. (РЖМат, 1975, 8Б627К)

108. —, Асимптотические методы нелинейной механики. М., Наука, 1981, 400 с. (РЖМат, 1982, 1Б411К)
109. —, *Иванилов Ю. П., Столярова Е. М.*, Методы оптимизации. М., Наука, 1978, 351 с.
110. *Наджафов М. А., Ягубов М. А.*, Об одной сингулярно возмущенной задаче управления для линейной системы с запаздыванием. Ученые записки. Мин. высш. ср. спец. обр. АзССР, сер. физ.-мат. наук, 1977, № 3, 22—27 (РЖМат, 1978, 7Б633)
111. *Пакасюк А. И., Панасюк В. И.*, Асимптотическая оптимизация нелинейных систем управления. Минск, изд-во Белорусского ун-та, 1977, 206 с.
112. *Первозванский А. А., Гайцгори В. Г.*, Декомпозиция, агрегирование и приближенная оптимизация. М., Наука, 1979, 379 с.
113. *Плотников В. А.*, Асимптотические методы в задачах оптимального управления. Одесса, Одесский ун-т, 1976, 102 с.
114. —, *Третьяк А. И.*, Асимптотическое решение одного класса задач оптимального управления. Кибернетика, 1974, № 4, 118—122 (РЖмат, 1975, 1Б793)
115. —, *Яценко Т. П.*, Асимптотическое приближение уравнений движения сингулярно возмущенных управляемых систем. Одесск. ун-т, рукопись депонирована в ВИНТИ 27 дек. 1977, № 4541—77 Деп. (РЖМат, 1978, 6Б512)
116. *Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.*, Математическая теория оптимальных процессов. М., Наука, 1969, 384 с. (РЖМат, 1970, 1Б529К)
117. *Ракитский Ю. В., Устинов С. М., Черноруцкий И. Г.*, Численные методы решения жестких систем. М., Наука, 1979, 208 с. (РЖМат, 1980, 1Б1077)
118. *Репин Ю. М.*, О приближенной замене системы с запаздыванием обыкновенными динамическими системами. Прикл. мат. и мех., 1965, 29, № 2, 226—235 (РЖМат, 1966, 3Б307)
119. *Рожков В. И.*, Асимптотика решений некоторых систем с малым параметром при производной. Дифференц. уравнения, 1974, 10, № 6, 1037—1049 (РЖМат, 1974, 10Б247)
120. *Серебровский А. П.*, Синтез субоптимального управления в задаче с вырожденной платой за управляющее воздействие. Автоматика и телемеханика, 1978, № 5, 22—27 (РЖМат, 1978, 9Б529)
121. *Тихонов А. Н.*, О зависимости решений дифференциальных уравнений от малого параметра. Мат. сб. 1948, 22(64), № 2, 193—204
122. —, О системах дифференциальных уравнений, содержащих параметры. Мат. сб. 1950, 27(69), № 2, 147—156
123. —, Системы дифференциальных уравнений, содержащих малые параметры при производных. Мат. сб. 1952, 31(73), № 3, 575—586
124. —, *Арсенин В. Я.*, Методы решений некорректных задач. М., Наука, 1979, 282 с. (РЖМат, 1981, 4Б946)
125. *Треногин В. А.*, Развитие и приложения асимптотического метода Люстерника-Вишика. Успехи мат. наук, 1970, 25, № 4, 123—156 (РЖМат, 1971, 2Б419)
126. *Тупчиев В. А.*, Асимптотика решения краевой задачи для системы дифференциальных уравнений первого порядка с малым параметром при производной. Докл. АН СССР, 1962, № 6, 1296—1299 (РЖМат, 1962, 11Б182)
127. —, Исследование обобщенных автомодельных решений систем квазилинейных дифференциальных уравнений гиперболического типа методами теории сингулярных возмущений. Докт. диссертация, Моск. ун-т. М., 1975.
128. *Уткин В. И.*, Скользящие режимы в задачах оптимизации и управления. М., Наука, 1981, 368 с. (РЖМат, 1982, 1Б883К)
129. *Фаминская М. В.*, Сингулярно возмущенная слабо нелинейная задача с присоединенными векторами, отвечающими нулевому характеристическо-

- му числу. Дифференц. уравнения, 1981, 17, № 8, 1411—1425 (РЖМат, 1982, 1Б409)
130. Федоренко Р. П. Приближенное решение задач оптимального управления. М., Наука, 1978, 488 с. (РЖМат, 1979, 2Б468)
 131. Филиппов А. Ф., О некоторых вопросах теории оптимального регулирования. Вест. Моск. ун-та, сер. мат., мех., астроном., физ., хим., 1959, № 2, 25—32 (РЖМат, 1961, 6Б315)
 132. —, Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. Матем. сб., 1960, 51 (93), № 1, 99—128 (РЖМат, 1963, 12Б248)
 133. Флеминг У., Ришел Р., Оптимальное управление детерминированными и стохастическими системами. М., Мир, 1978, 316 с.
 134. Цыганов Г. А., Асимптотика решения разностных систем условно устойчивого типа. Канд. диссертация, Моск. ун-т, М., 1973
 135. Черноусько Ф. Л., Акуленко Л. Д., Соколов Б. Н., Управление колебаниями. М., 1980, 383 с. (РЖМат, 1980, 11Б644)
 136. —, Колмановский В. Б., Вычислительные и приближенные методы оптимального управления. В сб. «Мат. анализ», т. 14 (Итоги науки и тех. ВИНТИ АН СССР). М., 1977, 101—166 (РЖМат, 1977, 9Б682)
 137. Чуканов С. В., Асимптотические свойства оптимальных траекторий разложимой модели межотраслевого баланса. Автоматика и телемеханика, 1978, № 8, 123—132 (РЖТех. киб., 1978, 12.81.57)
 138. Шишкин Г. И., Численное решение эллиптических уравнений с малым параметром при старших производных. Докл. АН СССР, 1979, 245, № 4, 804—808 (РЖМат, 1979, 7Б1125)
 139. Шкиль Н. И., Лейфура В. Н., Об асимптотическом решении задачи оптимального управления для систем с медленно меняющимися коэффициентами. Докл. АН УССР, 1976, А, № 7, 604—608 (РЖМат, 1976, 12Б529)
 140. Яркин А. Н., Краевые задачи для сингулярно возмущенных систем обыкновенных дифференциальных уравнений, имеющие решения, близкие к разрывным. Канд. диссертация. Моск. ун-т, М., 1976
 141. Ardema M. D., Solution of the minimum time-to-climb problem by matched asymptotic expansions. AIAA, 1976, 14, No. 7, 15—24
 142. —, Nonlinear singularly perturbed optimal control problems with singular arcs. Automatica, 1980, 16, No. 1, 99—104 (РЖМат, 1980, 7Б448)
 143. Asatani K., Near optimum control of distributed parameter systems via singular perturbation theory. J. Math. Anal. and Appl., 1976, 54, No. 3, 799—819 (РЖМат, 1977, 2Б671)
 144. —, Shiotani M., Hattori Y., Suboptimal control of nuclear reactors with distributed parameters using singular perturbation theory. Nuclear Science and Engineering, 1977, 62, 9—19
 145. Bennati M. L., Perturbazioni variazionali di controllo. Bol. Unione mat. ital., 1979, 16, No. 3, 910—922 (РЖМат, 1980, 5Б689)
 146. Bensoussan A., Singular perturbation results for a class of stochastic control problems. IEEE Trans. Automat. Control, 1981, 26, No. 5, 1071—1080 (РЖТех. киб., 1982, 3.81.106)
 147. Berkey D. D., Freedman M. I., A perturbation problem from control exhibiting on and off the boundary behavior. SIAM. J. Control and Optimiz., 1976, 14, No. 5, 857—876 (РЖМат, 1977, 3Б516)
 148. Binding P., Singularly perturbed optimal control problems. 1: Convergence. SIAM J. Control and Optimiz., 1976, 14, No. 4, 591—612 (РЖМат, 1977, 2Б654)
 149. Blankenship G., Singularly perturbed difference equations in optimal control problems. IEEE Trans. Automat. Contr., 1981, 26, No. 4, 911—917 (РЖМат, 1982, 2Б716)
 150. Brauner C. M., Penel P., Perturbations singulieres dans un probleme de controle optimal intervenant en biomathematique. Lect. Notes. Econ. and Math. syst., 1975, 107, 643—668 (РЖМат, 1976, 9Б567)
 151. Calise A. J., A singular perturbation analysis of optimal aerodynamic

- and thrust magnitude control. IEEE Trans. Automat. Control, 1979, 24, No. 5, 720—730 (PJKMar, 1980, 5B706)
152. *Chow J. H.*, Asymptotic stability of a class of non-linear singularly perturbed systems. Journal Franklin Inst., 1978, 305, No. 5, 275—281 (PJKMar, 1979, 1B204)
 153. —, A class of singularly perturbed, nonlinear, fixed-end point control problems. J. Optimiz. Theory and Appl., 1979, 29, No. 2, 231—251 (PJKMar, 1980, 5B642)
 154. —, *Kokotovic P. V.*, A decomposition of near-optimum regulators for systems with slow and fast modes. IEEE Trans. Automat. Control, 1976, 21, No. 5, 701—705 (PJKMar, 1977, 4B560)
 155. —, —, Near-optimal feedback stabilization of a class of nonlinear singularly perturbed systems. SIAM J. Control and Optimiz., 1978, 16, No. 5, 756—770 (PJKTex. кн6, 1979, 2.81.53)
 156. —, —, Two-time scale feedback design of a class of nonlinear systems. IEEE Trans. Automat. Control, 1978, 23, No. 3, 438—443 (PJKMar, 1979, 2B485)
 157. *Collins W. D.*, Singular perturbations of linear time-optimal control problems. Recent Math. Develop. in control. London—New York, Academic, 1973, 123—136 (PJKMar, 1975, 3B536)
 158. *Cullum J.*, Perturbations of optimal control problems. SIAM J. Control, 1973, 4, No. 3, 473—487 (PJKMar, 1967, 6B505)
 159. *Dontchev A. L.*, Sensitivity analysis of linear infinite-dimensional optimal control systems under changes of system order. Contr. and Cybern., 1974, 3, No. 3/4, 21—35 (PJKMar, 1976, 2B522)
 160. —, On the order reduction of optimal control systems. Proceedings of the task force meeting on model validity and credibility, IIASA, Laxenburg, Austria, 1980, 23 p.
 161. —, *Gicev T. R.*, Convex singularly perturbed optimal control problem with fixed final state controllability and convergence. Math. Operationsforsch. Statist., Ser. Optimization, 1979, 10, No. 3, 345—355 (PJKMar, 1980, 4B710)
 162. *Dragan V., Halanay A.*, Suboptimal linear controller by singular perturbation techniques. Rev. roum. sci. techn., ser. elektrotech. et energ., 1976, 21, No. 4, 585—591 (PJKMar, 1977, 7B693)
 163. —, —, Optimal stabilization of systems with small time constants. Rev. roum. sci. techn., ser. electrotechn. et. energ., 1977, 22, No. 1, 99—104 (PJKMar, 1977, 7B693)
 164. —, —, Singular perturbations and linear feedback control. Lect. Notes Math., 1979, No. 703, 86—92 (PJKMar, 1979, 11B540)
 165. —, —, A singularly perturbed matrix Riccati equation. Rev. roum. math. pures appl., 1980, 25, No. 10, 1477—1484
 166. —, —, Cheap control and singularly perturbed matrix Riccati differential equations. Rev. roum. math. pures appl., 1981, 26, No. 1, 21—40 (PJKMar, 1981, 9B539)
 167. *Farber N., Shinar J.*, Approximate solution of singularly perturbed non-linear pursuit-evasion games. J. Optimiz. Theory and Appl., 1980, 32, No. 1, 39—73
 168. *Flaherty J. E., O'Malley R. E. Jr.*, On the computation of singular controls. IEEE Trans. Automat. Control, 1977, 22, No. 4, 640—648 (PJKMar, 1978, 3B582)
 169. *Freedman M. I., Granoff B.*, Formal asymptotic solution of a singularly perturbed nonlinear optimal control problem. J. Optimizat. Theory and Appl., 1976, 19, No. 2, 301—326 (PJKMar, 1977, 1B611)
 170. —, *Kaplan J. L.*, Singular perturbations of two-point boundary value problems arising in optimal control. SIAM J. Control and Optimiz., 1976, 14, No. 2, 189—215 (PJKMar, 1976, 12B508)
 171. —, *Kaplan J. L.*, Perturbation analysis of an optimal control problem involving bang-bang controls. J. Different. Equat., 1977, 25, No 1, 11—29, (PJKMar, 1978, 3B564)

172. *Georgescu H.*, Suboptimal linear feedback for problems with small time constants. *Rev. roum. techn., ser. electrotechn. et energ.*, 1976, 21, No. 4, 575—584 (РЖМат, 1977, 7Б692)
173. *Gičev T. R., Dontchev A. L.*, Linear optimal control system with singular perturbation and convex performance index. *Сердика, Българско матем. списание*, 1978, 4, № 1, 24—35 (РЖМат, 1979, 11Б534)
174. —, —, Singular perturbation in optimal control problems with fixed final state. *Докл. Болг. АН*, 1978, 31, № 8, 935—955 (РЖМат, 1979, 5Б515)
175. *Gollan B. A.*, A general perturbation theory for optimization problems. *Lect. Notes. Control and Inform. sci.*, 1980, 23, 10—15 (РЖМат, 1980, 12Б482)
176. *Grujic L. T.*, Singular perturbations and large-scale systems. *Int. J. Control*, 1979, 29, No. 1, 159—169 (РЖМат, 1979, 8Б305)
177. *Haddad A. H.*, Linear filtering of singularly perturbed systems. *IEEE Trans. Automat. Control*, 1976, 21, No. 4, 515—519
178. —, *Kokotovic P. V.*, Note on singular perturbation of linear state regulators. *IEEE Trans. Automat. Control*, 1971, 16, No. 3, 279—281 (РЖМат, 1971, 12Б713)
179. —, —, Stochastic control of linear singularly perturbed systems. *IEEE Trans. Automat. Control*, 1977, 22, No. 5, 815—821 (РЖТех. кнб, 1978, 5.81.58)
180. *Hadlock C. R.*, Asymptotic performance of near-optimum controls obtained by regular and singular perturbations. *J. Math. Anal. and Appl.*, 1977, 61, No. 1, 292—301 (РЖМат, 1978, 5Б436)
181. *Halanay A., Mirica St.*, The time optimal feedback control for singularly perturbed linear systems. *Rev. roum. math. pures et appl.*, 1979, 24, No. 4, 585—596 (РЖМат, 1979, 12Б594)
182. —, *Rasvan V.*, Stabilization of a class of bilinear control systems with applications to steam turbine regulation. *Tôhoku Math. Journ.*, 1980, 32, 299—308
183. *Howes F. A.*, Boundary-interior layer interactions in nonlinear singular perturbation theory. *Mem. American math. soc.*, 1978, 15, No. 203 (РЖМат, 1978, 12Б510)
184. *Jackel R. A., Kokotovic P. V.*, A boundary layer method for the matrix Riccati equation. «13th Joint Automat. Control. Conf. Amer. Automat. Control Council, Stranford, Calif., 1972, Prepr. Techn. Pap.», New York, No. 4, 1982, 768—775 (РЖМат, 1973, 5Б976)
185. *Jacobson D. H., Speyer J. L.*, Necessary and sufficient conditions for optimality for singular control problems: a limit approach. *J. Math. Anal. and Appl.*, 1971, 34, No. 2, 239—266
186. *Javid S. M.*, The time optimal control of a class of nonlinear singularly perturbed systems. *Int. J. Control*, 1978, 28, No. 6, 831—836 (РЖМат, 1979, 1Б454)
187. —, *Kokotovic P. V.*, A decomposition of time scale for iterative computation of time-optimal controls. *J. Optimiz. Theory and Appl.*, 1977, 21, No. 4, 459—468 (РЖМат, 1977, 12Б718)
188. *Kalman R. E.*, Contributions to the theory of optimal control, *Bol. Soc. Mat. Mexicana*, 1960, 5, 102—119 (РЖМат, 1963, 12Б481)
189. *Kelley H. J.*, Singular perturbations for a Mayer variational problem, *AIAA Journal*, 1970, 8, No. 6, 1177—1178 (РЖМат, 1971, 2Б634)
190. —, *Edelbaum T. N.*, Energy climbs, energy turns, and asymptotic expansions. *J. Aircraft*, 1970, No. 1, 93—95
191. *Khalil H. K.*, Control of linear singularly perturbed systems with colored noise disturbance. *Automatica*, 1978, 14, No. 2, 153—156 (РЖТех. кнб, 1978, 9.81.99)
192. —, Multimodel design of a Nash strategy. *J. Optimiz. Theory and Appl.*, 1980, 31, No. 4, 553—564 (РЖМат, 1981, 6Б778)
193. —, *Kokotovic P. V.*, Control strategies for decision makers using diffe-

- rent models of the same system. IEEE Trans. Automat. Control, 1978, 23, No. 2, 289—298. (ПЖТех. киб, 1978, 11.81.340)
194. —, —, Feedback and well-posedness of singularly perturbed Nash games. IEEE Trans. Automat. Control, 1979, 24, No. 5, 699—708 (ПЖМар, 1980, 5Б717)
 195. —, Medanic J. V., Closed-loop Stackelberg strategies for singularly perturbed linear quadratic problems. IEEE Trans. Automat. Control, 1980, 25, No. 1, 66—71 (ПЖТех. киб, 1980, 10.81.181)
 196. Kokotovic P. V., Allemong J. J., Winkelman J. R., Chow J. H., Singular perturbation and iterative separation of time scale. Automatica, 1980, 16, No. 1, 23—33 (ПЖТех. киб, 1980, 7.81.77)
 197. —, Haddad A. H., Controllability and time-optimal control of systems with slow and fast models. IEEE Trans. Automat. Control, 1975, 20, No. 1, 111—113 (ПЖМар, 1975, 9Б537)
 198. —, —, Singular perturbations of a class of time-optimal controls. IEEE Trans. Automat. Control, 1975, 20, No. 1, 163—164 (ПЖМар, 1975, 9Б538)
 199. —, Jackel R. A., Singular perturbation of linear regulators: basic theorems. IEEE Trans. Automat. Control, 1972, 17, No. 1, 29—37 (ПЖМар, 1972, 8Б557)
 200. —, O'Malley R. E. Jr., Sannuti P., Singular perturbations and order reduction in control theory. An overview. Automatica, 1976, 12, No. 2, 123—132 (ПЖМар, 1976, 9Б453)
 201. —, Sannuti P., Singular perturbation method for reducing the model order in optimal control design. IEEE Trans. Automat. Control, 1968, 13, No. 3, 377—384 (ПЖМар, 1969, 8Б518)
 202. —, —, Near-optimum design of linear systems by a singular perturbation method. IEEE Trans. Automat. Control, 1969, 14, No. 1, 15—21
 203. Korsak A. J., On continuous dependence of controls upon parameters in fixed-time free-terminal state optimum control. Automatica, 1970, 6, No. 2, 289—295 (ПЖМар, 1970, 12Б628)
 204. Kucera V., A contribution to matrix quadratic equations. IEEE Trans. Automat. Control, 1972, 17, No. 3, 344—347 (ПЖМар, 1972, 11Б665)
 205. —, The discrete Riccati equation of optimal control. Kybernetika, 1972, 8, No. 5, 430—447 (ПЖМар, 1973, 2Б581)
 206. Kung C. F., Singular perturbation of an infinite interval linear state regulator problem in optimal control. J. of Math. Anal. and Appl., 1976, 55, No. 2, 365—374 (ПЖМар, 1977, 3Б527)
 207. Lions J. L., Perturbations singulieres dans les problemes aux limites et en controle optimal. Lecture Notes in Mathematics, Springer—Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1973, 323, XII, 645 p. (ПЖМар, 1973, 12Б399)
 208. —, Asymptotic methods in the optimal control of distributed systems. Automatica, 1978, 14, No. 3, 199—211 (ПЖМар, 1980, 6Б718)
 209. Lukes D. L., Optimal regulation of nonlinear dynamical systems. SIAM J. Control, 1969, 7, No. 1, 75—100 (ПЖМар, 1970, 1Б518)
 210. Murthy D. N. P., Solution of linear regulator problem via two-parameter singular perturbation. Int. J. Syst. Sci., 1978, 9, No. 10, 1113—1131 (ПЖМар, 1979, 6Б510)
 211. O'Malley R. E. Jr., The singularly perturbed linear state regulator problem. SIAM J. Control, 1972, 10, No. 3, 399—413 (ПЖМар, 1973, 3Б561)
 212. —, Boundary layer methods for certain nonlinear singularly perturbed optimal control problems. J. Math. Anal. and Appl., 1974, 45, No. 2, 468—484 (ПЖМар, 1974, 8Б522)
 213. —, Introduction to singular perturbations. New York, Academic Press, 1974
 214. —, On two methods of solution for a singularly perturbed linear state regulator problem. SIAM Rev., 1975, 17, No. 1, 16—37 (ПЖМар, 1975, 10Б583)
 215. —, High gain feedback systems as singular singular-perturbation prob-

- lems. «18th Joint Automat. Control, Conf., 1977, Prepr. techn. pap.» New York, N. Y., 1977, 1278—1281 (PJKMar, 1979, 35213)
216. —, Partially singular control problems as singular singular-perturbation problems. Prepr. VII Triennial World IFAC Congress, Helsinki, Finland, Pergamon Press, 1978, 2, 957—961
 217. —, Singular perturbations and optimal control. Lect. Notes. Math., 1978, 680, 171—218 (PJKMar, 1979, 55529)
 218. —, *Anderson L. R.*, Singular perturbations and slow-mode approximations for large scale linear systems. The University of Arizona, Tucson, Arizona, techn. report, 1979
 219. —, —, Singular perturbations, order reduction, and decoupling of large scale systems. The University of Arizona, Tucson, Arizona, techn. report, 1979
 220. —, *Jameson A.*, Singular perturbations and singular arcs-part I. IEEE Trans. Automat. Control, 1975, 20, No. 2, 218—226 (PJKMar, 1976, 15486)
 221. —, —, Singular perturbing and singular arcs, pt. 2. IEEE Trans. Automat. Control, 1977, 22, No. 3, 328—337 (PJKMar, 1978, 75631)
 222. —, *Kung C. F.*, On the matrix Riccati approach to a singularly perturbed regulator problem. J. Different Equat., 1974, 16, No. 3, 413—427 (PJKMar, 1975, 65747)
 223. —, —, The singularly perturbed linear state regulator problem II. SIAM J. Control, 1975, 13, No. 2, 327—337 (PJKMar, 1975, 95536)
 224. *O'Reilly J.*, Full-order observers for a class of singularly perturbed linear time-varying systems. Int. J. Control, 1979, 30, No. 5, 745—756 (PJKTex. кн6, 1980, 4.81.72)
 225. *Phillips R. G.*, *Kokotovic P. V.*, A singular perturbation approach to modeling and control of Markov chains, IEEE Trans. Automat. Control, 1981, 26, No. 5, 1087—1094
 226. *Porter B.*, Singular perturbation methods in the design of stabilizing feedback controllers for multivariable linear systems. Int. J. Control, 1974, 20, No. 4, 689—692 (PJKMar, 1975, 45380)
 227. —, Singular perturbation methods in the design of full-order observers for multivariable linear systems. Int. J. Control, 1977, 26, No. 4, 589—594 (PJKMar, 1978, 55809)
 228. —, Singular perturbation methods in the design of stabilizing state-feedback controllers for multivariable linear systems. Int. J. Control, 1977, 26, No. 4, 583—587
 229. *Reddy P. B.*, Asymptotic series solution of singularly perturbed free time optimal control problems. IEEE Control Syst. Soc., «Proc. Conf. Decision and Control, Houston, Tex., 1975», 1975, 38—42 (PJKMar, 1976, 125546)
 230. —, *Sannuti P.*, Optimal control of singularly perturbed time delay systems with an application to a coupled core nuclear reactor. Proc. 1974 IEEE Conf. Decis. and Control «13th Symp. Adaptive Processes, Phoenix Ariz. 1974», New York, N. Y., 1974, 793—803 (PJKMar, 1975, 115673)
 231. *Saksena V. R.*, *Cruz J. B. Jr.*, Stabilization of singularly perturber-linear time-invariant systems using low-order observers. IEEE Trans. Automat. Contr., 1981, 26, No. 2, 510—513
 232. *Sannuti P.*, Near optimum design of time lag systems by singular perturbation method. «11th Joint. Automat. Control Conf. Amer. Automat. Control. Counc. Atlanta, Ga. 1970 Prepr Techn. Pap.» New York, N. Y., 1970, 486—496 (PJKMar, 1971, 45584)
 233. —, Asymptotic series solution of singularly perturbed optimal control problems. Automatica, 1974, 10, No. 2, 183—194
 234. —, Asymptotic expansions of singularly perturbed quasi-linear optimal systems. SIAM J. Control, 1975, 13, No. 3, 572—592 (PJKMar, 1975, 125723)

235. —, On the controllability of singularly perturbed systems. IEEE Trans. Automat. Control, 1977, 22, No. 4, 622—624 (PJKMar, 1978, 5B403)
 236. —, On the controllability of some singularly perturbed nonlinear systems. J. Math. Anal. and Appl., 1978, 64, No. 3, 579—591 (PJKMar, 1979, 3B468)
 237. —, Reddy P. V., Asymptotic series solution of optimal systems with small time delay. IEEE Trans. Automat. Control, 1973, 18, No. 3, 250—259 (PJKMar, 1974, 1B458)
 238. Suzuki M., Composite controls for singularly perturbed systems. IEEE Trans. Automat. Contr., 1981, 26, No. 2, 505—507 (PJKMar, 1982, 2B720)
 239. —, Miura M., Stabilizing feedback controllers for singularly perturbed linear constant systems. IEEE Trans. Automat. Control, 1976, 21, No. 1, 123—124 (PJKMar, 1976, 12B526)
 240. Tenenhetz D., Sandell N. R., Linear regulator design for stochastic systems by a multiple time-scales method. IEEE Trans. Automat. Control, 1977, 22, No. 4, 615—625 (PJKTex. кнб, 1978, 2.81.76)
 241. Utkin V., Application of equivalent control method to the systems with large feedback gain. IEEE Trans. Automat. Control, 1978, 23, No. 3, 484—486 (PJKMar, 1979, 1B461)
 242. —, Voskriikov A. S., Control systems with decoupling motions. Prepr. VII Triennial World Congress of IFAC, Helsinki, vol. 2, Pergamon Press, 1978, 967—973
 243. Vasil'eva A. B., Dmitriev M. G., Singular perturbations and some optimal control problems. Prepr. 7th Triennial World IFAC Congress, Helsinki, Finland, Pergamon Press, 1978, vol. 2, 963—966
 244. —, Faminskaya M. V., Dmitriev M. G., Glizer V. Ja., Application of regularization and singular perturbations theory to nonlinear impulse optimal control. Prepr. 8th Triennial World IFAC Congress, Kyoto, Japan, Pergamon Press, vol. 3, 1981, 177—180
 245. Washburn R. B., Jr., Mehra R. K., Asymptotic continuation method for trajectory optimization. AACC Proc. Joint Automat. Control Conf., Denver, Colo, New York, N. Y., 1979, 617—621 (PJKMar, 1980, 11B687)
 246. Wilde R. R., Kokotovic P. V., A dichotomy in linear control theory. IEEE Trans. Automat. Control, 1972, 17, No. 3, 382—383 (PJKMar, 1972, 11B663)
 247. —, —, Optimal open- and closed loop control of singularly perturbed linear systems. IEEE Trans. Automat. Control, 1973, 18, No. 6, 616—626 (PJKMar, 1974, 9B733)
 248. Womble M. E., Porter J. E., Speyer J. L., Approximations to Riccati equations having slow and fast modes. IEEE Trans. Automat. Control, 1976, 21, No. 6, 846—855 (PJKMar, 1977, 8B929)
 249. Young Kar-Keung D., Kokotovic P. V., Utkin V. I., A singular perturbation analyses of high gain feedback systems. Proc. Joint Automat. Control, Conf., San Francisco, 1977, vol. 1, New York, N. Y., 1977, 1270—1277 (PJKMar, 1979, 2B441)
 250. Zolezzi T., Characterizations of some variational perturbations of the abstract linear-quadratic problem. SIAM J. Control, 1978, 16, No. 1, 106—121 (PJKMar, 1978, 10B664)
-