В. В. Анисович, М. Г. Дмитриев, Б. И. Крюков, О числе переключений в одной задаче оптимального управления, *Изв. вузов. Матем.*, 1976, номер 10, 13–16

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1976 МАТЕМАТИКА № 10 (173)

УДК 519.3

В. В. Анисович, М. Г. Дмитриев, Б. И. Крюков

О ЧИСЛЕ ПЕРЕКЛЮЧЕНИЙ В ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Пусть движение управляемого объекта описывается векторным дифференциальным уравнением вида

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{x}uB(\boldsymbol{x}), \tag{1}$$

где $\boldsymbol{x} = \{x_1, \dots, x_n\}$, $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = \{A_1, \dots, A_n\}$, u и $B(\boldsymbol{x})$ — скалярные функции. Область управления задана неравенством

$$|u| \leqslant 1. \tag{2}$$

Каждая кусочно-непрерывная функция $u(t)$ со значениями в области (2), заданная на некотором отрезке $0 \leqslant t \leqslant T$, называется допустимым управлением. В фазовом пространстве X переменных $x_1, \dots, x_n$ заданы некоторые замкнутые множества M_0 и M_1. Требуется найти такое допустимое управление $u(t)$, чтобы на соответствующей этому управлению траектории функционал

$$I = \int_0^T \Phi(\boldsymbol{x}(\tau))\, d\tau \tag{3}$$

принимал наименьшее возможное значение и выполнялись граничные условия

$$\boldsymbol{x}(0) \in M_0, \quad \boldsymbol{x}(T) \in M_1. \tag{4}$$

Найденное таким образом управление $u(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, будем называть оптимальным.

Пусть функции $A_i(\boldsymbol{x})$ $(i = 1, \dots, n)$, $B(\boldsymbol{x})$ и $\Phi(\boldsymbol{x})$ определены в некоторой открытой области фазового пространства X, непрерывны и обладают непрерывными первыми производными по $x_1, \dots, x_n$. Будем предполагать, что оптимальное управление рассматриваемой задачи существует и может быть определено из принципа максимума (см. [1], с. 25).

Известно (см. [2], с. 401), что имеющая непрерывные первые производные функция $\varphi(\boldsymbol{x})$ называется однородной степени p, если в области ее определения она удовлетворяет равенству Эйлера

$$p\varphi(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} x_i.$$

Пусть $A_i(\boldsymbol{x})$ $(i = 1, \dots, n)$ и $B(\boldsymbol{x})$ являются однородными функциями по $x_1, \dots, x_n$ степени p и $p - 1$ соответственно. Тогда справедлива следующая

Теорема. *Если функции $B(\boldsymbol{x})$, $\Phi(\boldsymbol{x})$ являются знакоопределенными, то оптимальное управление непрерывно при $p=1$ и имеет не более одной точки разрыва непрерывности при $p>1$.*

Доказательство. Оптимальное управление рассматриваемой задачи

$$u(t)=\operatorname{sign} B(\boldsymbol{x})\sum_{i=1}^{n}\psi_i(t)\,x_i(t)=\operatorname{sign} B(\boldsymbol{x})\,(\boldsymbol{x}(t),\ \boldsymbol{\psi}(t)),\quad 0\leqslant t\leqslant T,\tag{5}$$

и определяется из условия максимума функции

$$H(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{\psi},\ u)=(A(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{\psi})+B(\boldsymbol{x})\,u(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{\psi})+\psi_0\Phi(\boldsymbol{x})\tag{6}$$

по всем u из (2) и фиксированных $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{\psi}$ (см. [1], с. 25), где вспомогательная вектор-функция $\boldsymbol{\psi}(t)=\{\psi_1,\dots,\psi_n\}$, соответствующая оптимальному управлению $u(t)$, является нетривиальным решением векторного дифференциального уравнения

$$\dot{\boldsymbol{\psi}}(t)=-\operatorname{grad}_x H(\boldsymbol{x}(t),\ \boldsymbol{\psi}(t),\ u(t)),\quad 0\leqslant t\leqslant T.\tag{7}$$

На траекториях уравнений (1), (7) выполняется тождество (см. [3], с. 210)

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}x_i\psi_i=\frac{d}{dt}(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{\psi})=(1-p)\,H^*(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{\psi},\ u),\ \ 0\leqslant t\leqslant T,\tag{8}$$

где $H^*(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{\psi},\ u)=(A(x),\ \boldsymbol{\psi})+B(\boldsymbol{x})\,u(x,\ \boldsymbol{\psi})$. Интегрируя тождество (8) по t от 0 до t, получаем

$$(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{\psi})=C+(1-p)\int_0^t H^*(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{\psi},\ u)\,d\tau,\quad 0\leqslant t\leqslant T,\tag{9}$$

где C — постоянная интегрирования.

На оптимальном управлении $u(t)$ и соответствующих ему траекториях $\boldsymbol{x}(t)$ и $\boldsymbol{\psi}(t)$ уравнений (1), (7), справедливо тождество ([1], с. 25)

$$H(\boldsymbol{x}(t),\ \boldsymbol{\psi}(t),\ u(t))=H^*(\boldsymbol{x}(t),\ \boldsymbol{\psi}(t),\ u(t))+\psi_0\Phi(\boldsymbol{x}(t))\equiv 0,$$
$$\psi_0\equiv\text{const}\leqslant 0,\ \ 0\leqslant t\leqslant T.\tag{10}$$

Используя (10), запишем (9) в виде

$$(\boldsymbol{x}(t),\ \boldsymbol{\psi}(t))=C-(1-p)\,\psi_0\int_0^t\Phi(\boldsymbol{x}(\tau))\,d\tau,\quad 0\leqslant t\leqslant T.\tag{11}$$

Подставляя соотношение (11) в (5), получаем формулу для оптимального управления рассматриваемой задачи:

$$u(t)=\operatorname{sign} B(\boldsymbol{x}(t))\left[C-(1-p)\,\psi_0\int_0^t\Phi(\boldsymbol{x}(\tau))\,d\tau\right],\ \ 0\leqslant t\leqslant T.\tag{12}$$

В силу знакоопределенности $\Phi(\boldsymbol{x})$ выражение в квадратных скобках в (12) изменяет знак на отрезке $0\leqslant t\leqslant T$ не более одного раза. Учитывая знакоопределенность функции $B(\boldsymbol{x})$ из (12), получаем утверждение теоремы.

Следствие. Если функция $B(\boldsymbol{x})$ является знакоопределенной, то оптимальное управление задачи оптимального быстродействия ($\Phi(\boldsymbol{x})\equiv 1$) непрерывно при $p=1$ и имеет не более одной точки разрыва при $p>1$.

Пусть $A_i(\boldsymbol{x})$, $(i=1, \dots, n)$, $B(\boldsymbol{x})$ являются однородными функциями по $x_1, \dots, x_n$ степени p и $p-2$ соответственно. Тогда правая часть уравнения (1) является однородной вектор-функцией по $x_1, \dots, x_n, u$ степени p. Так же, как и в [3] (с. 210), легко показать, что на траекториях уравнений (1), (7) справедливо тождество

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} x_i\psi_i = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{x}, \psi) = (1-p)H^*(\boldsymbol{x}, \psi, u) + (\boldsymbol{x}, \psi)u\,B(\boldsymbol{x}), \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{13}$$

Разрешая (13) как скалярное дифференциальное уравнение относительно $(\boldsymbol{x}, \psi)$, получаем

$$(\boldsymbol{x}, \psi) = \left[C_1 + (1-p)\int_0^t H^*(\boldsymbol{x}, \psi, u)\exp\left(-\int_0^\tau uB(\boldsymbol{x})\,ds\right)d\tau\right]\times$$
$$\times\exp\left(\int_0^t uB(\boldsymbol{x})\,ds\right), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{14}$$

где C_1 — постоянная интегрирования.

Используя (14), (10) и (5), запишем формулу для оптимального управления:

$$u(t) = \operatorname{sign} B(\boldsymbol{x}(t)) \times$$
$$\times\left[C_1 - (1-p)\psi_0\int_0^t \Phi(\boldsymbol{x}(\tau))\exp\left(-\int_0^\tau u(s)B(\boldsymbol{x}(s))\,ds\right)d\tau\right]\times$$
$$\times\exp\left(\int_0^t u(s)B(\boldsymbol{x}(s))\,ds\right), \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{15}$$

Очевидно, если $\Phi(\boldsymbol{x})$ — знакоопределенная функция, то выражение в квадратных скобках в (15) меняет знак на отрезке $0 \leqslant t \leqslant T$ не более одного раза.

Использование формулы (15) позволяет получить утверждение теоремы и следствия в рассматриваемом случае.

Проиллюстрируем следствие на следующем примере.

П р и м е р. Рассмотрим задачу оптимального быстродействия для системы

$$\dot{x}_1 = x_2 + x_1u, \quad \dot{x}_2 = -x_1 + x_2u, \quad |u| \leqslant 1, \tag{16}$$

при граничных условиях

$$x_1(0) = 0, \; x_2(0) = 1, \quad x_1(T) = e^{\pi/2}, \quad x_2(T) = 0. \tag{17}$$

Очевидно, оптимальное управление рассматриваемой задачи быстродействия существует. Согласно следствию оно должно быть непрерывным на отрезке $0 \leqslant t \leqslant T$. Действительно, в полярной системе координат система (16) и граничные условия (17) запишутся в виде

$$\dot{\varphi} = -1, \; \dot{r} = ru, \quad r(0) = 1, \quad \varphi(0) = \pi/2, \quad r(T) = e^{\pi/2}; \; \varphi(T) = 0. \tag{18}$$

Используя принцип максимума, находим оптимальное управление $u(t) \equiv 1$, переводящее объект (18) из точки $(r(0) = 1, \; \varphi(0) = \pi/2)$ в точку $(r(T) = e^{\pi/2}, \; \varphi(T) = 0)$ за минимальное время $T = \frac{\pi}{2}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М., „Наука", 1969.
2. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. I, М., „Наука", 1969.
3. Габасов Р., Кириллова Ф. Качественная теория оптимальных процессов. М., „Наука", 1971.

г. Днепропетровск

Поступила
20 II 1973

Л. А. Аксентьев, Е. Л. Пацевич. Оценки для функций, гармонических в круговых многосвязных областях

(*аннотация статьи, принятой к печати*)

В работе получены оценки мнимой части функции, регулярной в круговой n-связной области, $n \geqslant 1$, когда реальная часть на границе принадлежит некоторому подклассу непрерывных функций. В качестве аппарата используются операторы Шварца, построенные методом симметрии. (Работа поступила в журнал „Математика" 5 II 1975.)

Р. И. Анищенко. Обобщенная краевая задача для уравнения Томаса — Ферми — Дирака

(*аннотация статьи, принятой к печати*)

Рассматривается задача отыскания неотрицательного решения уравнения $\varphi'' = f(x, \varphi)\psi(x)$, $0 \leqslant x \leqslant R$, при условиях $\varphi(0) = y_0$, $h\varphi'(R) - \varphi(R) = -q$, где $y_0 > 0$, $R > 0$, h, q — вещественные числа. При определенных предположениях относительно правой части уравнения получены необходимые и достаточные условия существования решения при $h > R$ и $h < 0$. (Работа поступила в журнал „Математика" 25 VI 1976.)

В. А. Баранский. О структурных изоморфизмах нильпотентных полугрупп

(*аннотация статьи, принятой к печати*)

Полугруппу S с нулем 0 будем называть n-нильпотентной, где n — некоторое натуральное число, если произведение любых n элементов полугруппы S равно 0. Множество всех n-нильпотентных полугрупп очевидно является многообразием для любого натурального числа n. Это многообразие будем обозначать через $\mathfrak{N}_n$. Основным результатом работы является следующая

Теорема. Каждый структурный изоморфизм полугруппы, нетривиальным образом разложимой в свободное произведение $(n-1)$-нильпотентных полугрупп в многообразии $\mathfrak{N}_n$, где $n \geqslant 4$, на произвольную полугруппу индуцируется изоморфизмом или антиизоморфизмом.

Следствие. Любая n-нильпотентная полугруппа изоморфно вкладывается в $(n+1)$-нильпотентную полугруппу, определяющуюся структурой подполугрупп в классе всех полугрупп. (Работа поступила в журнал „Математика" 13 II 1976.)

В. А. Баскаков. Асимптотика приближения непрерывных функций классов Lip α полиномами Джексона

(*аннотация статьи, принятой к печати*)

Для полиномов Джексона $D_{2n-2}(f, x)$ находится разложение в асимптотический ряд величины

$$\Delta_n(\alpha) = \sup_{f \in \mathrm{Lip}\,\alpha} \| D_{2n-2}(f; x) - f(x) \|_C, \quad 0 < \alpha \leqslant 1.$$

(Работа поступила в журнал „Математика" 24 VI 1976.)