М. Г. Дмитриев, В. С. Полещук, О регуляризации одного класса неустойчивых экстремальных задач, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 1972, том 12, номер 5, 1316–1318

Цитированная литература

1. A. Ostrowski. Sur quelques applications des fonctions convexes et concaves au sens de I. Schur. J. math. pures et appl., 1952, **31**, 253—292.
2. L. Mirsky. Inequalities for certain classes of convex functions. Proc. Edinburgh Math. Soc. 1959, **11**, № 4, 231—235.
3. I. Schur. Über eine Klasse von Mittelbildungen mit Anwendungen auf die Determinantentheorie. В сб. «Sitz. Berliner math. Ges.» Göttingen, Dieterichschenuniversitätsbuchdruckerei, 1923, 9—20.
4. В. А. Емеличев. О локальных минимумах в одной многоэкстремальной задаче. I. Изв. АН БССР. Сер. физ.-матем. н., 1969, № 1, 26—30.
5. В. А. Емеличев, М. М. Ковалев. К «вырожденному» случаю одной многоэкстремальной транспортной задачи. Изв. АН БССР. Сер. физ.-матем. н., 1970, № 1, 27—31.
6. В. А. Емеличев. Об одной экстремальной задаче типа транспортной. Докл. АН БССР, 1969, **13**, № 11, 984—986.
7. В. А. Емеличев. О локальных минимумах в одной многоэкстремальной задаче. II. Изв. АН БССР. Сер. физ.-матем. н., 1969, № 4, 78—92.
8. D. S. Mitrinović. Analytičke nejednakosti. Beograd, 1970.
9. В. А. Емеличев, А. М. Кононенко. Об одном классе транспортных многогранников. Изв. АН БССР. Сер. физ.-матем. н., 1971, № 3, 21—25.
10. В. А. Емеличев. Об одной задаче вогнутого программирования. Изв. АН БССР. Сер. физ.-матем. н., 1965, № 3, 39—44.

УДК 519.3:62-50

О РЕГУЛЯРИЗАЦИИ ОДНОГО КЛАССА НЕУСТОЙЧИВЫХ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ

М. Г. ДМИТРИЕВ, В. С. ПОЛЕЩУК

(Днепропетровск)

Предлагается способ построения сильно сходящихся минимизирующих последовательностей непрерывного функционала при предположении, что решениями задачи минимизации являются некоторые функции ограниченной вариации.

Рассмотрим задачу минимизации непрерывного функционала $I(u)$ на замкнутом ограниченном выпуклом множестве Q пространства $L_{[0,T]}$ интегрируемых по Лебегу функций, т. е. требуется найти $u^* \in Q$ такие, что

$$\inf_{u \in Q} I(u) = I(u^*) = I^* > -\infty. \tag{1}$$

Предположим, что задача (1) имеет множество решений

$$\{u^*\} = \Omega_0 \subseteq Q, \qquad \Omega_0 \neq \phi.$$

Задача оптимизации (1) называется устойчивой [1, 2], если она разрешима и для любой минимизирующей $I(u)$ на Q последовательности u_n выполняется условие

$$\rho(u_n, \Omega_0) = \inf_{u \in \Omega_0} \|u_n - u\| \to 0 \qquad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Известны, однако, целые классы экстремальных задач, которые хотя и разрешимы, но относятся к числу неустойчивых.

Впервые метод регуляризации для построения сильно сходящейся минимизирующей последовательности в таких задачах был предложен А. Н. Тихоновым [1, 2]. В настоящей работе регуляризацию будем осуществлять за счет построения последовательности множеств функций ограниченной вариации, в каждом из которых ищется элемент с минимальной вариацией. Кроме того мы накладываем ограничения на природу точек минимума.

Пусть имеется возрастающая цепочка конечных множеств кусочно-постоянных функций

(2) $$Q_n \subset Q_{n+1} \subset \ldots \subset Q, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

такая, что

$$\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n} = Q.$$

Решаем задачу

$$\inf_{u_n \in Q_n} I(u_n) = I(u_n^*).$$

В силу конечности Q_n данная задача разрешима и решения образуют множество

$$S_n = \{u_n^*, \inf_{u_n \in Q_n} I(u_n) = I(u_n^*)\}.$$

Теорема 1. *Любая последовательность $u_n^* \in S_n$ является минимизирующей для функционала I на Q.*

Доказательство. По свойству точной нижней грани

$$\inf_{u \in \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n}} I(u) = \inf_{u \in \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n} I(u).$$

В силу условия (2)

$$\inf_{u \in \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n} I(u) = \lim_{n\to\infty} \inf_{u_n \in Q_n} I(u_n) = \lim_{n\to\infty} I(u_n^*),$$

т. е.

$$I(u^*) = \lim_{n\to\infty} I(u_n^*).$$

Предположим, что существует непустое множество

$$W_0 = \{u \in \Omega_0, u \in K\},$$

где

$$K = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n}, \qquad K_n = \{u_n \in Q_n, \bigvee_0^T u_n \leqslant l\},$$

l — некоторое положительное число. Иначе говоря, мы предполагаем, что среди решений нашей задачи (1) имеются либо кусочно-постоянные функции, вариации которых ограничены одним и тем же числом l, либо функции, являющиеся пределом в среднем таких кусочно-постоянных функций.

Рассмотрим теперь алгоритм регуляризации задачи (1). Он состоит в построении некоторой последовательности $\{v_n^*\}$, которая определяется из решения следующей вспомогательной задачи: найти v_n^* такие, что

$$\min_{v_n \in P_n} \bigvee_0^T v_n = \bigvee_0^T v_n^*;$$

$$P_n = \{v_n \in Q_n, I(v_n) \leqslant I(v_n^*) + \varepsilon_n\},$$

где $\{\varepsilon_n\}$ — некоторая определенным образом выбранная числовая последовательность такая, что $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$ и $\varepsilon_n \geqslant 0$, $\bigvee_0^T u$ — полная вариация функции $u(t)$ на $[0, T]$.

Пусть v_n^* образуют множество $R_n = \{v_n^*\}$.

Теорема 2. *Множество $R_n \subseteq K_n$, $n = 1, 2, \ldots$.*

Действительно, так как $W_0 \neq \phi$, то существует $u^* \in K$. Следовательно, всегда найдется последовательность

$$\{u_n\} \in \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$$

такая, что $u_n \in K_n$ и $\|u_n - u^*\| \to 0$ при $n \to \infty$. В силу непрерывности функционала $I(u)$, $I(u_n) \to I(u^*)$ при $n \to \infty$. Поэтому $\{u_n\}$ есть минимизирующая последовательность для функционала I на Q, и, таким образом, всегда найдется числовая последовательность $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$, $\varepsilon_n \geqslant 0$ такая, что

$$I(u_n) \leqslant I(u_n^*) + \varepsilon_n.$$

Эта последовательность $\{\varepsilon_n\}$ и определяет множества P_n, т. е. $u_n \in P_n$, $n = 1, 2, \ldots$. Пусть $v_n^* \in R_n$, тогда

$$\bigvee_0^T v_n^\circ \leqslant \bigvee_0^T u_n \leqslant l \quad \text{и} \quad R_n \subseteq K_n,$$

что и требовалось доказать.

Теорема 3. *Любая последовательность v_n^* является минимизирующей для функционала I на Q.*

Это очевидно следует из теоремы 1, непрерывности функционала I и определения множества $R_n = \{v_n^*\}$.

Теорема 4. *Из любой последовательности $v_n^* \in R_n$ можно извлечь подпоследовательность, сильно сходящуюся к одному из элементов множества Ω_0.*

Доказательство. Так как ограниченное по вариации множество функций ограниченной вариации компактно в L [3], то из последовательности v_n^* можно извлечь подпоследовательность $v_{n_k}^*$, сильно сходящуюся к некоторому элементу $v^* \in K$. По теореме 3 последовательность $v_{n_k}^*$ является минимизирующей для функционала I на Q, следовательно, $v^* \in W_0 \subseteq \Omega_0$, что и доказывает утверждение.

Следствие. Если множество W_0 состоит из единственного элемента u^*, то любая последовательность $v_n^* \in R_n$ сильно сходится к u^*.

Доказательство следствия легко провести от противного.

Учитывая компактность в L_1 ограниченного по вариации множества функций ограниченной вариации и предполагая разрешимость задачи быстродействия на этом множестве, можно получить утверждения, аналогичные теореме 1 в [4], в которой использовалась компактность в L_2 ограниченного замкнутого множества равномерно кусочно-непрерывных функций.

Можно также получить утверждения, аналогичные теореме 1 в [4], если предположить разрешимость задачи быстродействия на объединении этих двух компактов (ограниченное по вариации множество функций ограниченной вариации компактно в пространстве L_p, $p \geqslant 1$; для этого достаточно только проверить условия теоремы Рисса — признака компактности множеств в L_p [5]).

Выражаем благодарность В. П. Моторному за обсуждение.

Поступила в редакцию 2.06.1971

Цитированная литература

1. А. Н. Тихонов. О методах регуляризации задач оптимального управления. Докл. АН СССР, 1965, **163**, № 4, 763—765.
2. А. Н. Тихонов. Об устойчивости задачи оптимизации функционалов. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1966, 6, № 4, 631—634.
3. А. Ф. Тиман. Теория приближения функций действительного переменного. М., Физматгиз, 1960.
4. П. А. Непомящий. Об одном из способов решения задач на быстродействие. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1971, **11**, № 1, 79—95.
5. Л. А. Люстерник, В. И. Соболев. Элементы функционального анализа. М., «Наука», 1965.