М. Г. Дмитриев, О непрерывности решения задачи Майера по сингулярным возмущениям, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 1972, том 12, номер 3, 788–791

Таким образом, имеется возможность построить последовательность множеств достижимости $\{\Gamma_i(x_0)\}$.

Можно легко проверить, что если множество значений допустимых $u(t)$ ограничено, а функции $A(t)$ и $B(t)$ непрерывны, то любая точка $x_N \in \Gamma_N(x_0)$ имеет точку $x(T) \in \Gamma(T, x_0)$ на расстоянии $O(\tau)$ и, наоборот, любая точка $x(T) \in \Gamma(T, x_0)$ имеет на расстоянии $O(\tau)$ точку $x_N \in \Gamma_N(x_0)$.

На фигуре изображено численно построенное множество достижимости при $T = 3$ с шагом $\tau = 0.2$ для модельной системы

$$\dot{x}^1 = x^2, \qquad \dot{x}^2 = u$$

при ограничении $|u| \leqslant 1$. Начальная точка $x^1(0) = x^2(0) = 0$. Для того чтобы выполнялось условие (3), делалась замена $u = u^1 - u^2$, где $0 \leqslant u^1 \leqslant 1$, $0 \leqslant u^2 \leqslant 1$. Пунктирной линией показано точное множество достижимости.

Построение множеств достижимости осуществлялось на ЭВМ БЭСМ-6. Отлажен соответствующий стандартный алгоритм на языке ФОРТРАН.

Поступила в редакцию 30.09.1971

Цитированная литература

1. Л. С. Кириллова. Общая задача терминального управления в линейных системах. Автоматика и телемехан., 1965, **26**, № 12, 2120—2130.
2. Д. Гейл. Теория линейных экономических моделей. М., Изд-во ин. лит., 1963.
3. С. Н. Черников. Линейные неравенства. М., «Наука», 1968.

УДК519.3:62-50

О НЕПРЕРЫВНОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ МАЙЕРА ПО СИНГУЛЯРНЫМ ВОЗМУЩЕНИЯМ

М. Г. ДМИТРИЕВ

(Днепропетровск)

Решается оптимальная задача Майера, линейная по фазовым переменным, в случае замкнутой области управления. Устанавливается непрерывность ее решения по малому параметру, увеличивающему порядок дифференциальных связей.

Точное описание объектов управления приводит к математическим моделям высокого порядка. Пренебрежение некоторыми малыми временными константами, массами, моментами инерции и подобными параметрами приводит к решению уравнений модели более низкого порядка. Возникает вопрос о непрерывности решения задачи управления по малому параметру, увеличивающему порядок системы. Для классических задач управления подобный вопрос исследовался в [1]. Ниже устанавливается непрерывность оптимального управления в одной задаче Майера в случае замкнутой области управления по сингулярным возмущениям. Приведенные здесь теоремы могут быть применены к анализу систем управления, в которых в силу физических характеристик описываемого объекта возможно произвести разделение движений на быстрые и медленные составляющие [2]. Полученная при этом разделении модель аналогична рассматриваемым ниже.

В конце работы приводится класс задач управления, в которых обычное пренебрежение сингулярными возмущениями может привести к «большому» изменению решения и значения функционала.

Пусть уравнения состояния имеют вид

$$\dot{x} = A_1(t)x + B_1(t)y + C_1(t, u), \qquad x(0) = x_0,$$
(1)
$$\lambda\dot{y} = A_2(t)x + B_2(t)y + C_2(t, u), \qquad y(0) = y_0,$$

где $x \in E^n$, $y \in E^m$, $t \in [0, T]$, $\lambda \in [0, \bar{\lambda}]$, $\bar{\lambda} > 0$. Все матрицы непрерывны по t, вектор-функции C_1 и C_2 непрерывно дифференцируемы по u.

Требуется при помощи управлений $u \in Q \subset L_2^r[0, T]$ таких, что

(2) $$|u_i(t)| \leqslant 1, \qquad t \in [0, T], \quad i = 1, \ldots, r,$$

перевести систему (1) из начального положения за фиксированное время T в произвольное конечное состояние и при этом минимизировать функционал $I = d'x(T)$. Здесь $d \in E^n$. При $\lambda = 0$ получаем вырожденную задачу размерности n, ее решение обозначим чертой сверху. Разрешаем полученные конечные соотношения относительно $\bar{y}$. При этом считаем, что

(3) $$\operatorname{Re}\mu_i(t) < 0, \qquad i = 1, \ldots, m, \quad t \in [0, T],$$

μ_i — характеристические числа матрицы $B_2(t)$. Предположим, что матрица $D = B_2^{-1}A_2$ непрерывно дифференцируема по t. Вырожденная задача имеет вид (считаем, что она имеет смысл)

(4) $$\dot{\bar{x}} = (A_1 - B_1B_2^{-1}A_2)\bar{x} + C_1 - B_1B_2^{-1}C_2, \qquad \bar{x}(0) = x_0, \qquad \bar{I} = d'\bar{x}(T)$$

при $\bar{u} \in Q$. При сделанных предположениях оптимальные управления для обеих задач существуют [3] и, предположим, единственны и определяются из принципа максимума.

Решение возмущенной задачи удовлетворяет соотношениям (1) и

(5) $$\dot{p} = -A_1'p - A_2'q, \qquad \lambda\dot{q} = -B_1'p - B_2'q, \qquad p(T) = -d, \qquad q(T) = 0,$$

(6) $$M(x, y, p, q, t) = \max_u H(x, y, p, q, u, t),$$

где p, $\hat{q}$ — сопряженные переменные, $q = \hat{q} / \lambda$, штрих обозначает транспонирование, $H = p'(A_1x + B_1y + C_1) + q'(A_2x + B_2y + C_2)$.

Решение вырожденной задачи удовлетворяет уравнениям, совпадающим при $\lambda = 0$ с уравнениями (1), (5), (6) и вытекающим из принципа максимума для вырожденной задачи, для которой сопряженная система принимает вид

(7) $$\dot{\bar{p}} = -A_1'\bar{p} - A_2'\bar{q}, \qquad 0 = -B_1'\bar{p} - B_2'\bar{q}, \qquad \bar{p}(T) = -d.$$

Теорема 1. *При $\lambda \to 0$ имеем $\|u_\lambda - \bar{u}\|_{L_2^r[0, T]} \to 0$.*

Доказательство. По теореме Тихонова при $\lambda \to 0$ будут выполняться соотношения $\|p_\lambda - \bar{p}\|_{C(E^n)_{[0,T]}} \to 0$ и $\|q_\lambda - \bar{q}\|_{C(E^m)_{[0,T)}} \to 0$ ($C(E^n)_{[0, T]}$ — пространство непрерывных n-мерных вектор-функций), так как выполняется условие (3) отрицательной устойчивости [4] корня $\bar{q}(t)$. Тогда по теореме из [5] о непрерывности функции максимума будет следовать, что

$$\|u(t, \lambda) - \bar{u}(t)\|_{E^r} \to 0 \text{ при } \lambda \to 0 \text{ для } t \in [0, T).$$

Покажем, что фазовые траектории в соответствующих метриках также непрерывны по λ.

Лемма 1. *Пусть имеем задачу Коши*

$$\lambda\dot{z} = B_2(t)z + f(t), \qquad z(0) = z_0,$$

где $f(t) \in L_\infty^m[0, T]$, $z \in E^m$. Тогда $\|z_\lambda - \bar{z}\|_{L_2^m[0, T]} \to 0$ при $\lambda \to 0$, где $\bar{z}$ удовлетворяет уравнению

$$B_2(t)\bar{z} + f(t) = 0.$$

Действительно, рассмотрим непрерывные $f_\lambda(t)$-функции Стеклова — Соболева $\|f_\lambda - f\|_{L_2{}^m[0,\,T]} \to 0$, $\lambda \to 0$. Получаем сглаженную задачу

$$\lambda \dot{\tilde{z}} = B_2(t)\tilde{z} + f_\lambda(t), \qquad \tilde{z}(0) = z_0. \tag{8}$$

Используя свойство фундаментальной матрицы для системы (8), так же как в [6], стр. 346, можно показать, что $\tilde{z}(t, \lambda) \to -B_2{}^{-1}f(t)$, $\lambda \to 0$, по норме $L_2{}^m[0, T]$. Аналогично показывается, что разность $z(t, \lambda) - \tilde{z}(t, \lambda)$ стремится к нулю при $\lambda \to 0$ в той же метрике. Используя неравенство треугольника, получаем требуемое утверждение.

Лемма 2. *Пусть имеем задачу Коши*

$$\dot{x} = A_1(t)x + B_1(t)y + \varphi_1(t), \qquad x(0) = x_0,$$
$$\lambda\dot{y} = A_2(t)x + B_2(t)y + \varphi_2(t), \qquad y(0) = y_0,$$

где $\varphi_1 \in L_2{}^n[0, T]$, $\varphi_2 \in L_2{}^m[0, T]$. *Тогда* $\|y_\lambda - \bar{y}\|_{L_2{}^m} \to 0$ *и* $\|x_\lambda - \bar{x}\|_{C(E^n)} \to 0$ *при* $\lambda \to 0$.

Доказательство вытекает из леммы 1 и проводится так же, как в [7]. Здесь используется свойство матрицы D.

Теорема 2. *Оптимальные траектории* $x(t, \lambda)$, $y(t, \lambda)$ *непрерывны по малому параметру* λ, *т. е. при* $\lambda \to 0$

$$\|x_\lambda - \bar{x}\|_{C(E^n)} \to 0, \qquad \|y_\lambda - \bar{y}\|_{L_2{}^m} \to 0.$$

Доказательство. Пусть $\tilde{x}(t, \lambda)$, $\tilde{y}(t, \lambda)$ — решения (1) с $u = \bar{u}(t)$. Из леммы 2 следует, что если $\lambda \to 0$, то

$$\|\tilde{x} - \bar{x}\|_{C(E^n)} \to 0, \qquad \|\tilde{y} - \bar{y}\|_{L_2{}^m} \to 0.$$

Образуем разности $\delta x = x_\lambda - \tilde{x}$, $\delta y = y_\lambda - \tilde{x}$. Они удовлетворяют системе

$$\delta\dot{x} = A_1\delta x + B_1\delta y + C_1(t, u_\lambda) - C_1(t, \bar{u}), \qquad \delta x(0) = 0,$$
$$\lambda\delta\dot{y} = A_2\delta x + B_2\delta y + C_2(t, u_\lambda) - C_2(t, \bar{u}), \qquad \delta y(0) = 0.$$

Учитывая непрерывность C_i по u и теорему 1, легко доказать, что $\|\delta x\|_{C(E^n)} \to 0$ и $\|\delta y\|_{L_2{}^m} \to 0$, когда $\lambda \to C$. А из неравенства треугольника и следует наше утверждение.

В заключение укажем класс задач Майера с малым параметром, вырожденная задача для которых есть не просто задача без параметра, а определенным образом измененная вырожденная задача.

Пусть имеем задачу Майера (1), (2) с функционалом

$$I = d'x(T) + f'y(T), \qquad f \neq 0. \tag{9}$$

В этом случае для системы (5) имеем $p(T) = -d$, $q(T) = -f / \lambda$, так как $q = \hat{q} / \lambda$, $\hat{q}(T) = -f$.

Как известно [4], в этом случае методом А. Б. Васильевой легко подсчитать величину скачка в начальных условиях для вырожденной системы (7). Решения сопряженной системы p_λ, q_λ стремятся при $\lambda \to 0$ к решениям системы (7) с начальными условиями $\bar{p}(T) = -(d + \Delta d)$, где Δd — некоторая вполне определенная величина. Т. е. очевидно, что оптимальное управление u_λ задачи (1), (2), (9) при $\lambda \to 0$ стремится по норме к $\bar{u}$ — оптимальному управлению задачи (2), (4) с функционалом $\bar{I} = (d + \Delta d)'x(T)$. Считаем, что $d \neq -\Delta d$.

Выражаю благодарность Н. Н. Моисееву за постановку задачи и руководство работой и Б. И. Крюкову за обсуждение результатов.

Поступила в редакцию 2.06.1971
Переработанный вариант 18.11.1971

Цитированная литература

1. P. Sannuti, P. Kokotovic. Singular pertubation method for near optimum design of high order nonlinear systems. Automatica, 1969, **5**, 773—779.
2. Е. И. Геращенко. Теоретические основы метода разделения движений. В сб. «Методы синтеза нелинейных систем автоматического управления». М., «Машиностроение», 1970, 11—45.
3. L. W. Neustadt. The existence of optimal control in the absence of convexity conditions. J. Math. Anal. and Appl., 1963, **7**, № 1, 110—118.
4. А. Б. Васильева. Асимптотика решений некоторых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром при старшей производной. Успехи матем. наук, 1963, **18**, № 3, 13—81.
5. Б. Н. Пшеничный. О задаче преследования. Кибернетика, 1967, № 6, 54—66.
6. С. Г. Крейн. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М., «Наука», 1967.
7. Л. Флэтто, Н. Левинсон. Периодические решения сингулярно возмущенных систем. Сб. обз. и перев. ин. период. лит. Математика, 1958, **2**, № 2, 61—68.

УДК 519.3:62-50

ОБ УСЛОВИЯХ ОПТИМАЛЬНОСТИ В ОДНОЙ ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ ПРОЦЕССОМ ТЕПЛОПЕРЕДАЧИ

А. И. ЕГОРОВ

(Фрунзе)

Рассматривается задача оптимального управления, когда процесс описывается одномерным уравнением теплопроводности, а управляющий параметр входит в граничное условие. Минимизируется квадратичный функционал. Находятся необходимые и достаточные условия оптимальности в форме принципа максимума.

В предлагаемой заметке получены необходимые и достаточные условия оптимальности в задаче управления, когда процесс описывается одномерным уравнением теплопроводности, а управление им осуществляется с помощью параметра, входящего в одно из граничных условий. Минимизируемым функционалом является интеграл от квадратичного выражения относительно функции состояния и управления. Полученный результат позволяет воспользоваться различными методами приближенного решения аналогичных задач для конечномерных систем.

§ 1. Постановка задачи

В ряде работ (см., например, [1, 2]) рассматривалась следующая задача.

Пусть состояние управляемого объекта характеризуется функцией $u(t, x)$, которая в области $Q\{0 < t \leqslant 1,\ 0 < x < 1\}$ удовлетворяет уравнению теплопроводности

$$u_t - u_{xx} = 0, \tag{1}$$

а на границе Q — условиям

$$u(0, x) = u_x(t, 0) = 0, \tag{2}$$

$$u_x(t, 1) = \alpha\,[p(t) - u(t, 1)], \qquad \alpha = \mathrm{const} > 0, \tag{3}$$