Р. В. Гамкрелидзе, Математические работы Л. С. Понтрягина, *Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 1998, том 60, 5–23

УДК 51(092); 517.977.52; 515.14

I. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ РАБОТЫ Л. С. ПОНТРЯГИНА

Р. В. Гамкрелидзе

СОДЕРЖАНИЕ

§ 1. Вводные замечания

Мне также приходится начинать с извинений, на этот раз только за английский язык своего доклада. В идеале, доклад должен бы быть двуязычным, однако за остающиеся в таком случае 30 минут, или даже меньше, ибо потери времени неизбежны при переключении с языка на язык, уже никак нельзя было бы успеть сказать хоть что–нибудь, даже в отдаленной степени адекватное первоначальному замыслу доклада. После некоторых размышлений, я все же решился на чисто английский вариант, тем более, что мой английский — очень простой английский, хотя весьма часто и неправильный, и понимать его, как вы сами убедитесь в этом, очень легко.

Пленарный доклад, прочитанный на Международной конференции, посвященной 90–летию со дня рождения Л. С. Понтрягина (Москва, 31 августа—6 сентября, 1998 г.); перевод на русский язык автора.

Я постараюсь избежать наиболее очевидных языковых нелепостей, что же касается содержания доклада, то здесь я гарантирую его полную аутентичность — все, что мною будет сказано о Льве Семеновиче Понтрягине, или приписано ему, имеет подтверждение либо в его же собственных письменных свидетельствах, либо им сказано в наших разговорах в течение долгих лет моего ученичества, а затем нашего сотрудничества и дружбы с 1947 года и до его смерти в 1988 году.

Я смогу лишь слегка коснуться личности Л. С. Понтрягина как математика и ученого. Я думаю, это можно сделать наилучшим способом, выбрав из всего многообразия его математического наследия какие–либо две значительные темы, одну — топологическую, другую — из позднего, прикладного периода, и на этих конкретных примерах кратко рассказать историю их открытия и последующего влияния на развитие смежных разделов математики.

У меня не было сомнений при выборе принципа максимума, наиболее впечатляющего достижения позднего периода его деятельности. Выбор топологической темы был не так очевиден. В конце концов, я остановился на работах по топологической двойственности, опубликованных между 1927 и 1934 годами. Это вызвано не только их значением для топологии и топологической алгебры, но и тем обстоятельством, что они очень ярко отражают ступени раннего профессионального развития Л. С., и я подумал, что было бы интересно и поучительно на работах проследить за пробуждающимся самосознанием математического гения.

Лев Семенович окончательно оставил топологию, полностью посвятив себя чисто прикладным задачам математики, в середине пятидесятых.

Это было нелегкое решение, и пришел он к нему не сразу. Одной из основных причин этой смены, о которой он сам охотно говорил, было его давнее желание полноценного профессионального общения с возможно более широким кругом коллег.

Несмотря на колоссальный научный авторитет и уважание, которыми Лев Семенович пользовался в научном мире, ему всегда недоставало истинного понимания своего творчества. Узкий круг людей, с которыми он мог иметь полноценное профессиональное общение, составляли либо его ученики, либо малочисленная группа коллег, многие из которых опять–таки были выходцами из его же топологической школы, а до 1964 г. он был полностью лишен возможности личного общения с зарубежными коллегами. Одним из немногих исключений была знаменитая Московская топологическая конференция 1935 года, на которой произошла встреча Л. С. с Дж. Александером.

В подавляющем большинстве случаев общение Л. С. с коллегами сводилось к тому, что к нему либо обращались со всевозможными математическими вопросами, либо просили выслушать новые результаты и высказать свое мнение. Его необыкновенная способность схватывать математическую суть излагаемого, сколь угодно сложного, материала со всеми вытекающими следствиями, либо сразу же обнаруживать ошибку в рассуждениях собеседника, что также случалось весьма часто, всегда производила большое впечатление и создавала острое ощущение вашего сопричастия к творческому процессу, когда "так это ясно как простая гамма", если воспользоваться метафорой Пушкина.

Свою новую деятельность Л. С. начал с того, что организовал в Стекловском институте семинар по математическим проблемам теории колебаний и автоматического регулирования.

Одновременно с семинаром, Л. С. начал читать в МГУ курс по теории обыкновенных дифференциальных уравнений для студентов второго курса мех.–мата и параллельно проводить учебный семинар. Среди первых участников семинара были Д. В. Аносов и М. И. Зеликин, которых Л. С. считал своими последними прямыми учениками. На основе лекций был написан его учебник по обыкновенным дифференциальным уравнениям.

Нельзя сказать, что энергичное вторжение Л. С. в новую для себя область было встречено всеми с большим энтузиазмом, особенно на мех.–мате. Были и весьма сдержанные, и даже ироничные высказывания. Л. С. признавался, что у него такое чувство, будто он браконьер, залезший в чужие угодья. Тем большее психологическое значение имела для него полная поддержка его деятельности со стороны И. Г. Петровского, бывшего тогда ректором университета и зав. кафедрой дифференциальных уравнений на мех.–мате. Л. С. впоследствии всегда с глубокой благодарностью вспоминал его поддержку.

Работа семинара в Стекловке быстро привела к постановке двух математических задач, решением которых занялся Л. С. вместе со своими ближайшими сотрудниками, участниками семинара. Развитие одной из задач привело к построению общей асимптотической теории сингулярно возмущенных систем обыкновенных дифференциальных уравнений, вторая задача привела к открытию принципа максимума и построению теории оптимального управления.

Историю этого открытия я сейчас вкратце расскажу.

§ 2. Принцип максимума

Непосредственным поводом, побудившим Л. С. заняться задачей оптимизации, послужил визит двух полковников Военно-воздушных сил в Стекловку, которые сформулировали задачу об оптимальном развороте самолета. Она сводилась к нелинейной системе обыкновенных дифференциальных уравнений пятого порядка с тремя скалярными управляющими параметрами, два из которых входили линейно и были ограничены по модулю, следовательно, не могли быть найдены классическим путем, как решения уравнения Эйлера. Задача имела весьма специальный характер, и очень скоро Л. С. пришел к заключению, что нужны какие–то общие ориентиры, чтобы хотя бы подступиться к ней. Я помню, он сказал полушутя: "Мы должны построить новое вариационное исчисление". В результате, им была сформулирована оптимальная по быстродействию задача (1):

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(x,u), \quad x = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad u = \begin{pmatrix} u^1 \\ \vdots \\ u^r \end{pmatrix} \in U \subset \mathbb{R}^r; \\ \dfrac{dx(t)}{dt} = f\big(x(t),u(t)\big), \quad x(t),\, u(t),\, t_0 \leqslant t \leqslant t_1, \\ x(t_0) = x_0,\ x(t_1) = x_1,\ u(t) \in U,\ t_0 \leqslant t \leqslant t_1, \\ t_1 - t_0 = \min . \end{cases} \tag{1}$$

Первый и наиболее важный шаг к окончательному решению Л. С. сделал сразу же после того, как проблема была сформулирована им в общем виде, в течение трех дней, а точнее, в течение трех бессонных ночей. Он страдал сильнейшей бессонницей и часто занимался математикой в течение ночей напролет, лежа в постели. В результате, в зрелые годы его сон был окончательно расстроен, и он регулярно принимал сильнейшие барбитураты в огромных количествах.

Благодаря своему изумительному геометрическому воображению, Л. С., из совершенно простых соображений об общности положения варьированного уравнения, получает первоначальный вариант необходимого условия оптимальности, введя чисто геометрически вспомогательную ковекторную функцию $\psi(t) = (\psi_1(t), \dots, \psi_n(t))$, удовлетворяющую сопряженной системе (2)

$$\frac{d\psi_i}{dt} = -\sum_{\alpha=1}^{n} \psi_\alpha \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^i}(x,u), \ \ i = 1, \dots, n, \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{d\psi}{dt} = -\psi \frac{\partial f}{\partial x}(x,u). \tag{2}$$

В написанном виде сопряженная система впервые появилась именно в связи с доказательством необходимого условия оптимальности и оказала решающее влияние на развитие всей теории оптимального управления. Фактически, Л. С. проделал то, что сейчас часто называется гамильтоновым лифтом векторного поля, заданного на многообразии (на пространстве состояний задачи), в кокасательное расслоение многообразия (в фазовое пространство задачи).

Первоначальная формулировка необходимых условий, изложенная Л. С. на семинаре сразу же после их получения, содержится в формулах (3).

Они утверждают, что если $x(t), u(t)$ — оптимальное решение, то существует такая ненулевая ковектор–функция $\psi(t)$, что $\psi(t)$, $x(t)$, $u(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, является решением системы дифференциальных уравнений (3.1)–(3.2), причем вдоль решения, для всех t, выполняется система из r "конечных" уравнений (3.3)

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), u(t)),\ x(t_0) = x_0,\ x(t_1) = x_1, && (3.1)\\ &\frac{d\psi(t)}{dt} = -\psi(t)\frac{\partial f}{\partial x}(x(t), u(t)), && (3.2)\\ &\sum_{\alpha=1}^{n} \psi_\alpha(t)\frac{\partial f^\alpha}{\partial u^i}(x(t), u(t)) = \psi(t)\frac{\partial f(x(t), u(t))}{\partial u^i} = 0 && (3.3)\\ &\qquad \forall t \in [t_0, t_1], \quad i = 1, \ldots, r. \end{aligned}\right. \qquad (3)$$

В этой формулировке множество допустимых значений U предполагается еще открытым, хотя Л. С. с самого начала было ясно, что окончательный результат должен быть одинаково хорошо применим как к открытым множествам, так и к замкнутым множествам из достаточно широкого класса.

Как только уравнения (3) были получены, Л. С. сразу же распознал в ковекторе $\psi(t)$ и сопряженной системе ключ к решению проблемы. Он считал, что, в случае "общего положения", система конечных уравнений (3.3) исключает r управляющих параметров $u^1, \ldots, u^r$ из системы (3), давая тем самым возможность однозначно решать систему дифференциальных уравнений $2n$–го порядка (3.1)–(3.2) при заданном начальном условии $x(t_0) = x_0$ и произвольном начальном условии для ψ. Все такие решения были объявлены экстремалями задачи, которые и должны были производить оптимальные решения.

Эта идея Л. С. об универсальном способе исключения управляющих параметров, сводящем задачу нахождения экстремалей к интегрированию системы обыкновенных дифференциальных уравнений с заданными начальными значениями, нашла свое полное воплощение в принципе максимума, который был сформулирован им через несколько месяцев после первого доклада на основании следующих фактов, полученных в течение этого времени на семинаре.

Система (3) была получена на основании изучения только первого приближения. Действуя аналогично во втором приближении и все еще считая множество допустимых значений управляющего параметра открытым, уравнения (3) можно дополнить условием отрицательности квадратичной формы (4)

$$\delta u^* \left\| \sum_{\alpha=1}^{n} \psi_\alpha(t) \frac{\partial^2 f^\alpha}{\partial u^i \partial u^j}(x(t), u(t)) \right\| \delta u \leqslant 0 \qquad \forall \delta u,\ t \in [t_0, t_1]. \quad (4)$$

Объединяя все полученные условия (3)–(4) вместе, мы сразу же обнаруживаем, что некоторая стабильная комбинация символов присутствует во всех четырех выражениях — скалярная функция (5) от трех переменных ψ, x, u:

$$H(\psi, x, u) = \sum_{\alpha=1}^{n} \psi_\alpha f^\alpha(x, u) = \psi f(x, u). \quad (5)$$

С ее помощью систему (3.1)–(3.2) можно переписать в виде гамильтоновой системы (6.1), а соотношения (3.3), (4) записать в виде (6.2):

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial \psi}(\psi(t), x(t), u(t)), & \\ & (6.1) \\ \dfrac{d\psi(t)}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial x}(\psi(t), x(t), u(t)), & \\ \dfrac{\partial H}{\partial u^i}(\psi(t), x(t), u(t)) = 0, & \\ \delta u^* \left\| \dfrac{\partial^2 H}{\partial u^i \partial u^j}(\psi(t), x(t), u(t)) \right\| \delta u \leqslant 0 & (6.2) \\ \qquad \forall\, \delta u, \quad i = 1, \ldots, r. & \end{cases} \quad (6)$$

Следовательно, получалось, что экстремали — это решения гамильтоновой системы (6.1), все точки которых, согласно (6.2), стационарные точки гамильтониана H по отношению к управляющему параметру u и, более того, в них H достигает локального максимума по u.

Когда система (6) была написана, Л. С. понял, что универсальный способ исключения управляющих параметров, который он искал, найден. Он заменил условие локального максимума вдоль решения гамильтоновой системы (6.1), выраженное уравнениями (6.2), условиями глобального максимума — "условием максимума Понтрягина":

$$H(\psi(t), x(t), u(t)) = \max_{u \in U} H(\psi(t), x(t), u), \quad (7)$$

которое сделало любые ограничения на множество допустимых значений U ненужными.

Таким образом, он пришел к окончательной формулировке принципа максимума:

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\left.\begin{aligned}
&\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \psi}(\psi(t), x(t), u(t)),\\
&\frac{d\psi}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x}(\psi(t), x(t), u(t)),
\end{aligned}\right. \qquad (8.1)\\
&H(\psi(t), x(t), u(t)) =\\
&\qquad\qquad = \max_{u \in U} H(\psi(t), x(t), u) = \mathrm{const} \geqslant 0 \quad (8.2)\\
&\qquad \forall t \in [t_0, t_1].
\end{aligned}
\right. \tag{8}
$$

В этой формулировке на условие максимума можно смотреть не только как на универсальный способ исключения, но и как на очень важное обобщение преобразования Лежандра от переменных (x, u) в пространстве состояний к переменным (ψ, x) в фазовом пространстве задачи.

На протяжении всего периода работы над принципом максимума я мог наблюдать за ни с чем не сравнимым "понтрягинским духом натиска" на нерешенную трудную проблему, которую можно отчетливо проследить и по его ранним работам по топологической двойственности. Однако прежде чем перейти к ним, я закончу рассказ о принципе максимума следующим замечанием.

Принцип максимума для оптимальной задачи (1), сформулированный в 1955 году, не претерпел с тех пор никаких усовершенствований или обобщений. Все развитие теории (в первом порядке) было направлено в сторону обобщения самой задачи, особенно, в сторону развития недифференцируемой оптимизации и получения соответствующих необходимых условий.

Это объясняется, на мой взгляд, самой природой принципа максимума. Несмотря на свой кажущийся чисто аналитический характер, он глубоко геометричен и в своей первоначальной формулировке полностью симплектически инвариантен. Фактически, он задает канонический переход от первоначально поставленной задачи к ее переформулировке на кокасательном расслоении, которая математически гораздо богаче возможностями, чем задача в первоначальной постановке. Лишь после этого, собственно, и начинается содержательная разработка проблемы. В этом смысле на принцип максимума можно смотреть как на некий универсальный функтор симплектизации от первоначальной оптимальной задачи на пространстве состояний к ее канонической переформулировке на фазовом пространстве.

Действительно, запишем управляемую систему (1) в инвариантном относительно замены координат виде:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(x,u), \quad x \in M, \ u \in U, \\ f_u : x \mapsto f(x,u) \in TM, \quad x \in M, \ u \in U \end{cases} \tag{9}$$

и будем смотреть на семейство векторных полей f_u как на семейство скалярнозначных функций H_u на кокасательном расслоении T^*M, линейных на слоях, см. (10.1):

$$\begin{cases} f_u \approx H_u = H_u(\xi) \in C^\infty(T^*M), \\ \qquad \xi \in T^*M, \quad H_u \text{ линейна на слоях,} & (10.1) \\ \overrightarrow{H_u} \in \mathrm{Vect}\, T^*M, \ u \in U, \text{— гамильтонов лифт поля } f_u : \\ \qquad \pi : T^*M \longrightarrow M, \ \ \pi_* \overrightarrow{H_u} = f_u. & (10.2) \end{cases}$$

Они задают на T^*M семейство гамильтоновых векторных полей (10.2), т.е. гамильтонову систему (8.1) принципа максимума. Поле $\overrightarrow{H_u}$ является каноническим лифтом в кокасательное расслоение T^*M поля f_u, заданного на базе M, см. (10.2).

Принцип максимума утверждает, что если $x(t), u(t)$ — оптимальное решение системы (1), то существует траектория $\xi(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, нестационарного поля $\overrightarrow{H}_{u(t)}$, накрывающая траекторию $x(t)$, см. (11.1), причем выполняется условие максимума (11.2):

$$\begin{cases} u(t), x(t), \ t_0 \leqslant t \leqslant t_1, \text{— оптимальная пара} \Longrightarrow \\ \qquad \Longrightarrow \exists\, \xi(t), \ t_0 \leqslant t \leqslant t_1, \\ \dfrac{d\xi(t)}{dt} = \overrightarrow{H}_{u(t)}(\xi(t)), \ \ \pi\xi(t) = x(t), & (11.1) \\ H_{u(t)}(\xi(t)) = \max\limits_{u \in U} H_u(\xi(t)) = \mathrm{const} \geqslant 0, \ \ t_0 \leqslant t \leqslant t_1. & (11.2) \end{cases} \tag{11}$$

Если условие максимума

$$\begin{cases} H(\xi) = \max\limits_{u \in U} H_u(\xi), \ \ \xi \in T^*M, \\ \dfrac{d\xi(t)}{dt} = \overrightarrow{H}(\xi(t)), \ \ \pi\,\xi(t) = x(t), \\ H(\xi(t)) = \mathrm{const} \geqslant 0 \end{cases} \tag{12}$$

исключает параметр u из семейства гамильтонианов H_u, в результате чего мы получаем гладкую функцию H (без параметров) на T^*M, “мастер–гамильтониан” задачи, то оптимальная задача сводится к изучению траекторий гамильтонова поля $\overrightarrow{H}$. Регулярные задачи вариационного исчисления — типичный пример такой ситуации.

Примечательно, что, даже в нерегулярном случае, функтор Понтрягина, если будет позволено назвать так процедуру, предписываемую принципом максимума, позволяет строить каноническим способом однозначно определенную нелинейную связность на T^*M, с помощью которой можно получать новые важные инфинитезимальные инварианты задачи, в том числе и тензор кривизны оптимальной задачи. Эти инварианты нетривиальны уже в регулярном случае. Если попытаться построить из них глобальные инварианты многообразия M, например построить эйлерову характеристику M через тензор кривизны оптимальной задачи (обобщение формулы Гаусса–Бонне–Чженя), то мы с необходимостью должны прийти к обобщению некоторых классических соотношений Понтрягина и Чженя для характеристических классов, справедливых при минимизации римановой длины. Таким образом, может оказаться, что характеристические классы Понтрягина и принцип максимума Понтрягина весьма тесно связаны в идейном отношении.

В докладе А. А. Аграчева будет дан обзор уже полученных, а также ожидаемых в этом направлении результатов.

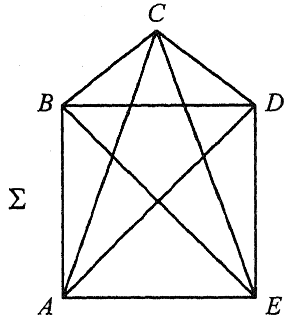
А теперь я обращаюсь к самому раннему циклу топологических статей Л. С., к работам по топологической теории двойственности. Они также завершились открытием одного универсально значимого функтора в математике, который сегодня называется двойственностью в смысле Понтрягина. Она доминировала в топологии в течение тридцатых — начала сороковых годов при построении теорий гомологий и когомологий, постепенно превратившись в стандартный инструмент повседневного математического обихода.

§ 3. Двойственность

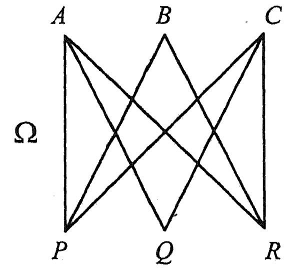
Хотя для топологической части моего доклада осталось совсем мало времени, я, тем не менее, начну с одной неопубликованной работы Л. С., которая была сделана в самом начале второго курса, когда он начал посещать топологический спецсеминар своего будущего учителя — П. С. Александрова.

Работа касалась теории графов и возникла следующим образом. П. С. Александров рассказал на семинаре о недавнем результате одного известного математика, согласно которому всякий одномерный комплекс P, гомеоморфно не вкладывающийся в плоскость, содержит часть, гомеоморфную одномерному остову Σ четырехмерного симплекса. Анализируя дома рассказанное, Л. С. сразу же обнаружил ошибку и доказал, что комплекс P содержит комплекс Σ или комплекс Ω, см. рис. 1, который он назвал "три домика и три колодца" и относился к нему с особым чувством, как к своему научному первенцу.

Первая значительная математическая работа Л. С. также была выполнена на втором курсе, когда ему было 19 лет. Хотя за-



1–мерный остов 4–симплекса



Три домика и три колодца

Рис. 1

мысел работы полностью принадлежал Л. С., следует сказать, что он слушал в это время спецкурс П. С. Александрова, посвященный теореме двойственности Александера, и участвовал в его спецсеминаре, на котором изучались коэффициенты зацеплений Брауэра.

Работа обобщала теорему двойственности Александера и предвещала начало семилетнего периода, в течение которого, кроме прочих достижений в топологии, особенно по теории размерности, он создал законченную теорию топологической двойственности и построил теорию характеров локально компактных коммутативных групп. Одновременно была построена законченная структурная теория локально компактных абелевых групп и компактных (некоммутативных) групп. Они содержатся в публикациях [1]–[8], появившихся между 1927–1934 годами. С этими достижениями Л. С. вступил в свое двадцатисемилетие. Однако вернемся к его первой работе.

Чтобы полностью оценить вклад, внесенный 19-летним второкурсником в одну из центральных проблем топологии конца двадцатых годов, уместно вспомнить, что группы гомологий практически еще не использовались в топологии, а в обиходе были числа Бетти по различным модулям и коэффициенты кручения, а теорема Александера формулировалась как равенство по $\operatorname{mod} 2$ чисел Бетти размерностей r и $n-r-1$ полиэдра $P \subset \mathbb{R}^n$ и его дополнения $\mathbb{R}^n \setminus P$, соответственно, см. (1.1):

$$P \subset \mathbb{R}^n, \qquad b^r(P) = b^{n-r-1}(\mathbb{R}^n \setminus P) \pmod 2, \tag{1.1}$$

$$z_1^r, \dots, z_s^r \subset P,\ \ \zeta_1^{n-r-1}, \dots, \zeta_s^{n-r-1} \subset \mathbb{R}^n \setminus P; \qquad \|(z_i^r, \zeta_j^{n-r-1})\| = I. \tag{1.2}$$

В первой работе равенство (1.1) было интерпретировано как следствие того факта, что всякий нетривиальный r–мерный цикл из P можно зацепить некоторым $n-r-1$–мерным циклом из дополнения $\mathbb{R}^n \setminus P$, и наоборот. Л. С. построил в P и $\mathbb{R}^n \setminus P$ такие циклы по mod 2, z_i^r, ζ_j^{n-r-1}, $i, j = 1, \ldots, s$, что соответствующая $s \times s$–матрица их коэффициентов зацеплений по mod 2 является единичной, см. (1.2). Эта формулировка александеровской двойственности устанавливает через матрицу коэффициентов зацеплений некоторое соотношение двойственности между двумя группами, которое в данном случае приводит к их изоморфизму.

Во второй работе [2] эта же самая проблема двойственности исследуется для полиэдра, вложенного в произвольное многообразие $P \subset M^n$, см. (2.1):

$$P \subset M^n, \quad M^n \setminus P \subset M^n; \tag{2.1}$$

$$\begin{cases} (z^r \subset M^n, \langle z^r, \zeta^{n-r} \rangle = 0 \quad \forall \zeta^{n-r} \subset P) \Longrightarrow \\ \exists\, \widehat{z}^r \subset M^n : (\widehat{z}^r \cap P = \varnothing, \ z^r - \widehat{z}^r \sim 0 \text{ в } M^n). \end{cases} \tag{2.2}$$

Здесь оказалось необходимым учитывать в гомологических терминах расположение P в M^n. Решение этой проблемы потребовало, по–видимому впервые в топологии, обратиться к гомологическим свойствам непрерывных отображений: основные результаты работы сформулированы в терминах ядер и образов гомоморфизмов групп гомологий по mod 2 при вложениях (2.1). Я не буду приводить здесь соответствующих теорем, а только замечу, что среди них содержится знаменитая теорема о "снятии цикла", см. (2.2). Л. С. использовал ее впоследствии для определения нетривиальной нижней грани для категории Шнирельмана произвольного многообразия.

Идея групповой двойственности, лишь слегка затронутая в первых двух работах, нашла существенное развитие в дипломной работе Л. С., написанной под сильным влиянием прослушанного им на последнем, четвертом, курсе лекций Э. Нётер по абстрактной алгебре, см. [3].

Теоремы двойственности для произвольного модуля $m > 0$ получили в работе окончательное решение в виде изоморфизмов (3.1)

$$H_r(P, \mathbb{Z}_m) \approx H_{n-r-1}(\mathbb{R}^n \setminus P, \mathbb{Z}_m), \quad m = 2, 3, \ldots, \tag{3.1}$$

$$H_r(P, \mathbb{Z}) \approx H_r^0(P) \oplus H_r^{tor}(P) \not\approx H_{n-r-1}(\mathbb{R}^n \setminus P, \mathbb{Z}), \tag{3.2}$$

$$\begin{cases} H_r^0(P) \approx H_{n-r-1}^0(\mathbb{R}^n \setminus P), \quad H_r^{tor}(P) \approx H_{n-r-2}^{tor}(\mathbb{R}^n \setminus P) \\ \Downarrow \\ \text{инвариантность групп} \quad H_{n-r-1}(\mathbb{R}^n \setminus P), \end{cases} \tag{3.3}$$

$$\begin{gathered} F \subset \mathbb{R}^n,\ F \text{ — компакт} \Longrightarrow \\ \Longrightarrow \text{инвариантность групп } H_{n-r-1}^0(\mathbb{R}^n \setminus F). \end{gathered} \tag{3.4}$$

Основное достижение работы заключалось в получении соотношений двойственности для полных целочисленных групп гомологий полиэдра в $\mathbb{R}^n$ и его дополнения. В этом случае соответствующие группы уже не изоморфны. Группа $H_{n-r-1}(\mathbb{R}^n \setminus P, \mathbb{Z})$ не только не изоморфна группе $H_r(P, \mathbb{Z})$, но даже не определяется последней. Так как P — полиэдр, то рассматриваемые группы гомологий представляются в виде прямой суммы свободной группы конечного ранга и группы кручения, см. (3.2). Это позволило доказать изоморфизм между $r-$ и $(n-r-1)-$ мерными группами слабых гомологий и, отдельно, изоморфизм между $r-$ и $(n-r-2)-$ мерными группами кручений, см. (3.3), откуда следовала инвариантность полной группы $H_{n-r-1}(\mathbb{R}^n \setminus P, \mathbb{Z})$, т.е. её независимость от вложения $P \subset \mathbb{R}^n$ — выдающийся результат для того времени.

В этой же работе содержится первый нетривиальный результат топологической двойственности за пределами конечно порожденных групп — инвариантность группы слабых целочисленных гомологий дополнения к произвольному компактному множеству $F \subset \mathbb{R}^n$, см. (3.4). Для этого Л. С. пришлось ввести впервые в истории топологии и алгебры прямые и обратные системы групп и пределы прямых систем. Обратный предел, по–видимому также впервые, появляется лишь в работе 1934 года при описании строения произвольных компактных групп.

Однако центральная проблема об инвариантности полной группы целочисленных гомологий дополнения к произвольному компактному множеству $F \subset \mathbb{R}^n$ оставалась нерешенной. Ее решение потребовало введения нового гомологического инварианта множества F, его групп гомологий с компактной, а не с дискретной, группой коэффициентов, которые сами являются компактными группами. Одновременно, он окончательно отказался от узкого взгляда на двойственность как на изоморфизм и определил ее как двойственность "в смысле Понтрягина". Этот радикальный шаг, вместе с созданной вскоре общей теорией характеров локально компактных коммутативных групп, полностью разрешил основные проблемы топологической двойственности. Результаты были доложены на Международном конгрессе математиков в Цюрихе в 1932 году, см. [4]. Подробное изложение работы было опубликовано двумя годами позже в "Annals of Mathematics", см.[5].

Классическая конструкция Л. С. является сегодня общеизвестной; она приведена в (4.1)–(4.2). Ее окончательным результатом являлась двойственность (а не изоморфизм) соответствующих групп гомологий дополнительных пространств $H_r(F, S)$, $H_{n-r-1}\ (\mathbb{R}^n \setminus F, \mathbb{Z})$, следовательно, инвариантность последней

$$\Big((\Gamma, G) \stackrel{\text{def}}{=} \Gamma \text{ и } G \text{ двойственны}\Big) \Longrightarrow (S, \mathbb{Z}),\ \ S = \mathbb{R}/\mathrm{mod}\,1, \quad (4.1)$$

$$\begin{cases} (H_r(F,\Gamma), H_{n-r-1}(\mathbb{R}^n \setminus F, G)) \Longrightarrow (H_r(F,S), H_{n-r-1}(\mathbb{R}^n \setminus F, \mathbb{Z})) \\ \Longrightarrow \text{инвариантность групп } H_{n-r-1}(\mathbb{R}^n \setminus F, \mathbb{Z}), \end{cases} \tag{4.2}$$

$$(H_r(F,\Gamma), H^r(F,G)) \Longrightarrow \begin{cases} H^r(F,G) \quad \approx H_{n-r-1}(\mathbb{R}^n \setminus F, G), \\ \text{когомологии} \qquad \text{гомологии.} \end{cases} \tag{4.3}$$

Этой суперформулировкой теоремы Жордана основная проблема топологической двойственности была решена. По рассказу Л. С., когда он понял, что двойственность для произвольного компакта получена, у него возникло острое желание доказать, что всякая компактная коммутативная группа является группой характеров дискретной группы. Таким образом, общая теория характеров коммутативных топологических групп была им задумана уже где–то в конце 1931 — начале 1932 года. Однако окончательное доказательство сформулированного утверждения ему удалось получить лишь в 1933 году, сразу же после появления знаменитой работы Хаара об инвариантной мере в "Annals of Mathematics". Эта работа Хаара вызвала целый взрыв выдающихся результатов по топологической алгебре, в частности, разрешила применить к обсуждаемому кругу проблем теорию Г. Вейля линейных представлений компактных групп Ли.

Общая теорема двойственности сделала самоочевидным тот факт, что основными объектами теории гомологий являются группы гомологий, а не числа Бетти и коэффициенты кручения, и любые попытки свести общие гомологические конструкции к исследованию набора числовых инвариантов групп обречены на провал. Эта точка зрения, ранее высказывавшаяся Э. Нётер из общематематических соображений и воспринимавшаяся многими ведущими топологами с вежливым равнодушием, превратилась в необходимую практику топологических исследований после создания теории двойственности.

Последующее открытие когомологий Дж. Александером и А. Н. Колмогоровым в 1935 году позволило общей теореме двойственности, выраженной в формуле (4.2), придать, на основании двойственности групп $H_r(F,\Gamma)$, $H^r(F,G)$, вид изоморфизма (4.3).

В таком виде общая теорема двойственности, вновь превратившаяся в теорему об изоморфизме, используется сегодня.

С этой точки зрения, колоссальные интеллектуальные усилия, затраченные Л. С., были направлены на то, чтобы получить общую теорему двойственности на языке только гомологий. Правда этот tour de force привел одновременно к построению общей теории характеров локально компактных абелевых групп, к их законченной структурной теории и к полному описанию строения произвольных компактных топологических групп.

В частности, это давало решение 5–ой проблемы Гильберта для перечисленных классов групп.

Здесь было бы уместно сказать, что для меня всегда было загадкой, как мог Л. С. упустить возможность открытия когомологий. Сам он эту тему, или аналогичные, никогда не обсуждал серьезно, когда бывал в хорошем настроении — отшучивался. Мне кажется, причину этого следует искать в свойствах его характера, в большой степени лишенного в потребности созерцания науки, которой он занимался. Он постоянно занимался математикой в полную силу, на пределе своих великих возможностей, однако всегда имея перед собой какую–нибудь трудную, большей частью очень трудную, но конкретную математическую задачу.

Я только замечу здесь, что в основной работе Александера по когомологиям введение групп когомологий мотивируется желанием непосредственно охарактеризовать двойственные группы к компактным группам гомологий $H_r(F, S)$, и уже после этого замечания вводятся группы когомологий, теперь уже классическим стандартным способом, с помощью кососимметрических функций на вершинах соответствующего комплекса, а после — кольцо когомологий, которое с помощью двойственности получить уже невозможно. Из двух основных работ А. Н. Колмогорова по когомологиям первая полностью посвящена аддитивной структуре групп когомологий, и ее основным содержанием является изоморфизм (4.3) для случая полиэдров, $F = P$. Кольцо когомологий вводится во второй работе.

§ 4. Заключительные замечания

В зрелые годы интерес Л. С. к разделам математики, в круг его занятий непосредственно не входившим, был весьма невелик, если не сказать больше. Его занятия математикой, очень интенсивные и каждодневные, за исключением, быть может, самых последних лет жизни, были всегда продиктованы внутренней логикой развития его собственной научной деятельности. В биографии Л. С. было, пожалуй, лишь три случая, когда он был серьезно и в течение долгого времени занят математической проблемой, возникшей не из его же математической практики, а была сформулирована ему другим математиком. В результате каждого из этих случаев возникли три его знаменитые работы, а имена математиков, в хронологическом порядке, были А. Н. Колмогоров, Е. Картан и С. Л. Соболев.

Первая работа в этом ряду относилась к топологической алгебре и возникла в 1932 году как результат решения проблемы, поставленной А. Н. Колмогоровым. Я имею в виду теорему Л. С. о том, что всякое локально компактное связное тело изоморфно одному из трех классических тел — полю действительных или комплексных чисел, либо, в некоммутативном случае, телу кватернионов.

Идеи А. Н. Колмогорова много раз воплощались его последователями в виде выдающихся математических работ уже в эти ранние годы. Достаточно вспомнить, что в конце двадцатых, в аспирантуре А. Н. Колмогорова, А. Н. Тихоновым была создана теория вполне регулярных и компактных топологических пространств, в конце тридцатых зародилась в совместной работе А. Н. Колмогорова и И. М. Гельфанда теория максимальных идеалов.

Теорема, заказанная Л. С., была задумана А. Н. как ключевой момент в построении аксиоматики пространств постоянной кривизны, в частности проективных пространств. Согласно общим идеям А. Н. Колмогорова, абстрактно определенные математические объекты с помощью совместимых топологических и достаточно богатых алгебраических структур должны были быть весьма конкретной природы.

Следует сказать, что отношения между Л. С. и А. Н. не были дружественными и непосредственного и открытого общения, в том числе и научного, между ними никогда не было. Посредником всегда выступал П. С. Александров.

С коммутативным случаем Л. С. разделался очень быстро — через неделю П. С. сообщил А. Н., что Л. С. готов рассказать решение для коммутативного случая. "Этого не может быть, по–видимому там ошибка", была первая реакция А. Н. Встретившись втроем, Л. С. начал рассказывать доказательство. А. Н. слушал очень придирчиво, энергично вмешиваясь в изложение, как раз в наиболее тонких и решающих местах; это продолжалось около получаса. А надо знать, что в те годы каждый из них мог за полчаса овладеть в общих чертах целым новым разделом математики. Наконец, А. Н. произнес: "Я думал, что доказательство окажется не таким легким".

Оно действительно оказалось нелегким. Некоммутативный случай занял у Л. С. еще целый год. Основной путь доказательства заключался в том, что цепь тонких топологических соображений, основанных прежде всего на локальной компактности и на связности, приводила к заключению, что всякое тело, удовлетворяющее условиям теоремы, есть конечномерная алгебра с делением над полем действительных чисел, следовательно, применима чисто алгебраическая теорема Фробениуса.

Некоторые соображения, развитые в работе, были затем существенно использованы при определении структуры локально компактных коммутативных групп.

Задача Картана была поставлена им во время посещения Москвы в 1935 году. Его лекция, в основном предназначавшаяся для Л. С., состоялась в институте Механики на Моховой, естественно, на французском языке. Л. С. сидел в переполненной комнатке в последнем ряду, а сидевшая рядом с ним Н. К. Бари нашептывала ему перевод.

Картан предложил найти числа Бетти четырех классических серий компактных групп Ли, одновременно предложив и примерный путь решения задачи методом внешних форм. Через пару месяцев Л. С. завершил одну из красивейших своих работ, построив явно базы гомологий всех перечисленных групп. Вновь это был первый серьезный опыт в топологии вычисления групп гомологий обширного и чрезвычайно важного класса многообразий, заданных не какой–либо комбинаторной или геометрической схемой, а чисто аналитически, системами действительных алгебраических уравнений специального вида.

Его результаты, развитые далее Х. Хопфом, имели далеко идущие последствия как для геометрии, так и для алгебры.

Для самого Л. С. работа получила последующее развитие, связанное с его "гомотопическими занятиями". Дело в том, что все простые группы Ли из указанных серий имеют такие же числа Бетти, как и прямые произведения нечетномерных сфер. Более того, все простые группы, принадлежащие двум из четырех серий, имеют тривиальную фундаментальную группу и нулевые кручения и, более того, их кольца гомологий изоморфны кольцам гомологий соответствующих произведений сфер. Следовательно, возникала естественная задача выяснить, каждая ли группа такого вида гомеоморфна произведению сфер или нет. Таким образом, задача заключалась в различении двух гомологически эквивалентных многообразий, и с самого начала была очевидна чрезвычайная деликатность проблемы, ибо, в середине тридцатых, гомологические инварианты были, за немногими исключениями, единственными инвариантами топологии. Л. С. использовал одно из таких исключений, именно, полученную им ранее гомотопическую классификацию отображений S^{n+1} в S^n при $n \geqslant 3$, согласно которой $(n+1)$–мерная гомотопическая группа S^n— циклическая второго порядка, следовательно, существуют нетривиальные отображения S^{n+1} в S^n. Он рассмотрел специальную унитарную группу 3×3–матриц, гомологии которой совпадают с гомологиями произведения $S^3 \times S^5$, и установил, что ее четырехмерная гомотопическая группа тривиальна, в то время как четырехмерные гомотопические группы S^3 и, следовательно, $S^3 \times S^5$ не тривиальны.

Я ограничусь здесь сказанным. Замечу только, что Л. С. получил свои результаты не методом, предложенным Картаном, а прямым геометрическим методом, обобщающим метод Морса деформаций по градиентным траекториям с тем только отличием, что он допускал наличие не только изолированных критических точек, но целых гладких многообразий из критических точек. Позже он применил этот метод для вычисления групп гомологий грассмановых многообразий.

Третьей задачей Л. С. занимался в военные годы, когда он находился в эвакуации в Казани. Там он сблизился с С. Л. Соболевым, которого очень высоко ценил как математика, и даже участвовал в его семинаре по проблемам гидродинамической устойчивости в баллистике. Семинар был ориентирован на оборонные нужды страны и свое участие в нем Л. С. объяснял, в том числе, патриотическими чувствами.

В результате этого сотрудничества возникла очень влиятельная в функциональном анализе работа Л. С. об эрмитовых операторах в пространствах с индефинитной метрикой конечного индекса k, где доказано, что всякий эрмитов оператор в таком пространстве имеет инвариантное подпространство размерности k специального вида.

Сам Л. С. считал эту работу лучшей среди своих нетопологических работ раннего периода, потребовавшей от него наибольших усилий и времени.

Здесь уместно также сказать, что к своему соавторству в совместной с А. А. Андроновым работе по грубым системам на плоскости он относился не очень серьезно. Основные заслуги он приписывал А. А. Андронову, отмечая, что он лишь заметил одно условие, пропущенное А. А. Андроновым, согласно которому грубая система не может содержать сепаратрис, идущих из седла в седло.

Этими замечаниями я должен закончить свой обзор математических работ Л. С. Понтрягина, полностью опустив, к сожалению, его работы по гомотопической и гладкой топологии, что, безусловно, должно быть предметом особого обсуждения.

Я надеюсь, что несколько коротких фрагментов математической деятельности Л. С., которые я здесь описал, дадут некоторое представление о разнообразии и мощи его математических способностей. Мне он всегда напоминал легендарного царя Мидаса, превращая в золото любую математическую руду, к которой он прикасался.

В заключение, несколько слов о профессиональных взаимоотношениях Л. С. со своими учениками.

Своим студентам и аспирантам Л. С. уделял очень много времени и внимания, охотно и подолгу их выслушивал, если дело касалось их обучения, однако истинный научный интерес к их деятельности и желание к сотрудничеству он проявлял лишь в том случае, когда их тематика в точности совпадала с его собственными занятиями.

Я могу подтвердить сказанное на примере его наиболее известных учеников старшего поколения, которых я знал или знаю лично. С В. А. Рохлиным у Л. С. были не только служебные и дружеские отношения, но и тесное научное сотрудничество именно в тот период, когда В. А., развивая метод оснащенных многообразий Понтрягина, получил свои известные результаты по гладкой топологии трехмерных многообразий.

С В. Г. Болтянским его также связывала долголетняя дружба и сотрудничество, до определенного момента, и наивысшие достижения В. Г. Болтянского в теории размерности, в гомологической теории гомотопических задач и в теории оптимального управления также непосредственно связаны с математическими занятиями Л. С. в соответствующие периоды.

Наконец, Е. Ф. Мищенко был его ближайшим сотрудником в последние годы его деятельности, при разработке Л. С. теории сингулярно–возмущенных систем обыкновенных дифференциальных уравнений и теории дифференциальных игр.

Соответственно, известность этих математиков шла с Востока на Запад, в то время как известность четвертого ученика Л. С. начала пятидесятых — М. М. Постникова — пришла к нам с Запада. Его общая гомотопическая конструкция, обобщавшая конструкции Хопфа и Эйленберга–МакЛейна, оформленная впоследствии в виде “башни Постникова”, производящей важные “инварианты Постникова” пространства, в свое время осталась недооцененной у нас, так как ее тематика находилась в стороне от непосредственных математических занятий Л. С. и, в силу своей чрезвычайной общности и отсутствия конкретных результатов, не вызвала настоящей заинтересованности у Л. С.

Заканчивая свой краткий обзор, я хочу сказать, что чрезвычайно высоким “топологическим фоном” наша математика в большой степени обязана великолепному “Понтрягинскому периоду” нашей математики. Достаточно сказать, что в творчестве большинства ведущих Российских математиков, независимо от их узкой специализации или принадлежности к той или иной школе, топологическая тема всегда отчетливо присутствует.

А теория оптимального управления является в настоящее время необходимой темой научных исследований в каждом центре по Прикладной математике во всем мире.

Для развития математики и профессиональной науки вообще в Советском Союзе и в России научная деятельность Л. С. Понтрягина имела непреходящее значение. Многие из присутствующих здесь коллег знали Л. С. лично и могли на собственном опыте оценить масштабы этого великого математика. От имени Оргкомитета я хочу еще раз поблагодарить всех вас за то, что своим участием в конференции вы почтили память о нем.

Благодарю вас за внимание.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Pontryagin L.S.* Zum Alexanderschen Dualitätssatz // Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math.- phys. Kl.— 1927.— *4*.— C. 315–322
2. *Pontryagin L.S.* Zum Alexanderschen Dualitätssatz, 2. Mitt.// Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math.-phys. Kl.— 1927. — *4*.— C. 446–456
3. *Pontryagin L.S.* Über den algebraischen Inhalt topologischer Dualitätssätze// Math. Ann.— 1931.— *105*, No. 2.— C. 165–205
4. *Pontryagin L.S.* Der allgemeine Dualitätssatz für abgeschlossene Mengen// Verhandlungen des Internazionalen Mathematiker-Kongresses. Zürich, Leipzig.— 1932.— C. 195–197
5. *Pontryagin L.S.* The general topological theorem of duality for closed sets// Ann. Math.— 1934.— *35*, No. 4.— C. 904–914
6. *Pontryagin L.S.* The theory of topological commutative groups// Ann. Math.— 1934.— *35*, No. 2.— C. 361–388
7. *Pontryagin L.S.* Sur les groupes topologique compacts et le cinquième problème de M. Hilbert// C. r. Acad. sci. Paris.— 1934.— *19*, No. 3.— C. 238–240
8. *Pontryagin L.S.* Sur les group abèliens continues// C. r. Acad. sci. Paris.— 1934.— *19*, No. 3.— C. 328–330

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН,
ул. Губкина 8, Москва ГСП-1, 177966, Россия