

Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

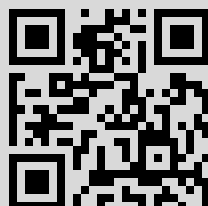
Р. В. Гамкредидзе, Скользящие режимы в теории оптимального управления, *Тр. МИАН СССР*, 1985, том 169, 180–193

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 95.129.140.250

20 ноября 2015 г., 11:32:50



УДК 517.977.5

Р. В. ГАМКРЕЛИДЗЕ

СКОЛЬЗЯЩИЕ РЕЖИМЫ В ТЕОРИИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Скольльзящие режимы — это процессы в управляемой системе, соответствующие обобщенным управлениям, т. е. управлениям, которые в отличие от обычных управлений — конечномерных векторных функций времени $u(t)$, являются зависящими от времени t семействами вероятностных мер μ_t на R^r с компактными носителями. Если для любого t мера μ_t является δ -мерой, мы получаем обычное управление.

В линейном пространстве обобщенных управлений можно ввести некоторую локально-выпуклую топологию, которую мы называем топологией скольльзящего режима и в котором множество обычных управлений оказывается расположенной всюду плотно в пространстве всех обобщенных управлений (см. аппроксимационную лемму в п. 4).

Этот результат позволяет придать теории необходимых условий первого порядка законченный вид и свести соответствующие задачи к выпуклым задачам управления. В чисто техническом отношении аппроксимационная лемма позволила сильно упростить доказательства всех основных теорем оптимального управления.

Скольльзящие режимы и обобщенные управления введены мною в работе [1]. Дальнейшее развитие этой теории содержится в [2, 3].

Здесь мы изложим основные свойства обобщенных управлений, включая доказательство аппроксимационной леммы, и дадим их приложения к построению скольльзящих режимов. При этом рассмотрим лишь оптимальную по быстродействию задачу с фиксированными концами, так как она наименее громоздка с точки зрения формулировки результатов и в то же время содержит все существенные трудности, характерные для оптимальных задач.

1. Постановка оптимальной по быстродействию задачи

Рассмотрим n -мерное управляемое уравнение

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad (1)$$

в котором $t \in R$ — время, $x \in R^n$ — фазовая точка, $u \in R^r$ — управляющий параметр. Предполагается, что функция f непрерывна по совокупности аргументов и непрерывно дифференцируема по x .

В пространстве параметров задано произвольное множество $U \subset R^r$ — множество допустимых значений управляющего параметра. Допустимым управлением будем называть произвольную измеримую и ограниченную функцию $u(t)$, $t \in R$, со значениями в U . Класс всех допустимых управлений обозначим через Ω_U .

Если в управляемое уравнение (1) вместо параметра u подставить произвольное допустимое управление $u(t)$, то получим дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = f(t, x, u(t)) = F(t, x), \quad (2)$$

причем вектор F и матрица F_x частных производных по x непрерывны по x , измеримы по t и для любого компакта $K \subset R^n$ существует локально суммируемая функция $m(t)$, дающая оценку

$$|F(t, x)| + |F_x(t, x)| \leq m(t) \quad \forall t \in R, \quad \forall x \in K, \quad (3)$$

где вертикальные черточки обозначают (произвольные) нормы в соответствующих пространствах. Следовательно, к уравнению (2) применимы общие теоремы о существовании решений и их непрерывной зависимости от правой части.

Оптимальная по быстродействию задача с фиксированными концами формулируется следующим образом.

В фазовом пространстве R^n заданы две точки x_1, x_2 и задан начальный момент t_1 ; требуется выбрать допустимое управление $\tilde{u}(t)$ так, чтобы дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = f(t, x, \tilde{u}(t))$$

имело решение $\tilde{x}(t)$ на некотором отрезке времени $t_1 \leq t \leq t_2$, удовлетворяющее краевым условиям

$$t = t_1, \quad \tilde{x}(t_1) = x_1, \quad \tilde{x}(t_2) = x_2,$$

причем время перехода $t_2 - t_1$ из x_1 в x_2 было минимально.

Управление $\tilde{u}(t)$ называется *оптимальным (по быстродействию) управлением*, $\tilde{x}(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$ — *соответствующей оптимальной траекторией*. Пару $\tilde{u}(t)$, $\tilde{x}(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$, будем называть также *оптимальным решением*, или *решением оптимальной (по быстродействию) задачи*

$$\begin{aligned} \dot{x} = f(t, x, u), \quad u(t) \in U, \quad t = t_1, \quad x(t_1) = x_1, \quad x(t_2) = x_2, \\ t_2 - t_1 \rightarrow \min. \end{aligned} \quad (4)$$

Если опустить условие $t_2 - t_1 \rightarrow \min$, мы получим *задачу управления с заданными краевыми условиями*

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad u(t) \in U, \quad t = t_1, \quad x(t_1) = x_1, \quad x(t_2) = x_2. \quad (5)$$

2. Обобщенные управления и выпуклая задача управления

Пусть μ_t , $t \in R^r$, — семейство мер Радона на R^r , зависящее от параметра t , и пусть $g(u)$ — непрерывная функция на R^r с компактным носителем. Если для произвольной функции такого вида функция

$$h(t) = \int_{R^r} g(u) d\mu_t(u), \quad t \in R^r$$

измерима по Лебегу, мы называем семейство μ_t *слабо измеримым (по t)*.

Если существует такой компакт $K \subset R^r$, не зависящий от t , что меры μ_t сосредоточены на K для почти всех t (в смысле меры Лебега), то мы называем семейство μ_t , $t \in R$, *финитным*.

Результат интегрирования непрерывной функции $g(t, u)$ по мере μ_t обозначим через

$$\langle \mu_t, g(t, u) \rangle = \int_{R^r} g(t, u) d\mu_t.$$

Допустимое управление $u(t) \in U$ можно рассматривать как семейство δ -мер на R^r вида $\delta_{u(t)}$, $t \in R$, где $\delta_{u(t)}$ — единичная (положительная) мера, сосре-

доточенная в точке $u(t)$ и действующая на функцию $g(t, u)$ по формуле $\langle \delta_{u(t)}, g(t, u) \rangle = g(t, u(t))$. Так как мы рассматриваем только ограниченные управления, принимающие значения в U , то множество

$$N = \{u(t); t \in R\} \subset U \subset R^r$$

ограничено и, следовательно, все меры $\delta_{u(t)}$ сосредоточены на N , т. е. семейство мер $\delta_{u(t)}$ финитно. Так как функции $u(t) \in U$ измеримы, то и функция

$$h(t) = \langle \delta_{u(t)}, g(t, u) \rangle = g(t, u(t))$$

измерима, т. е. семейство мер $\delta_{u(t)}$ слабо измеримо.

Наоборот, если мы имеем произвольное слабо измеримое финитное семейство δ -мер $\delta_{v(t)}$, $t \in R$, где мера $\delta_{v(t)}$ сосредоточена в точке $v(t) \in U$, то из данных определений непосредственно следует, что функция $v(t)$ измерима и (существенно) ограничена.

Тем самым установлено естественное соответствие между допустимыми управлениями $u(t) \in U$ и слабо измеримыми финитными семействами δ -мер $\delta_{u(t)}$, $t \in R$, сосредоточенными на $U \subset R^r$.

Дадим теперь следующее определение.

Обобщенным управлением называется всякое слабо измеримое финитное семейство вероятностных, т. е. (положительных) единичных мер Радона μ_t , $t \in R$, сосредоточенных на множестве $U \subset R^r$. Класс всех обобщенных управлений обозначим через $\mathfrak{M}_U$.

Причина, по которой в определении обобщенного управления стоит именно вероятностная мера, а не произвольная мера Радона, заключается в том, что основным свойством обобщенных управлений, делающим их полезными в задачах управления и выраженным в аппроксимационной лемме (см. п. 4), обладают только семейства вероятностных мер.

Подстановкой обобщенного управления μ_t в $g(t, u)$ вместо аргумента u назовем результат интегрирования $g(t, u)$ по мере μ_t , т. е. следующую функцию t :

$$\langle \mu_t, g(t, u) \rangle = \int_{R^r} g(t, u) d\mu_t, \quad t \in R.$$

Это согласуется с обычной терминологией — подстановка функции $u(t)$ в $g(t, u)$ приводит к тому же результату, что и подстановка соответствующего семейства δ -мер $\delta_{u(t)}$. Поэтому в дальнейшем мы будем отождествлять $u(t)$ с $\delta_{u(t)}$, т. е. считать, что $\Omega_U \subset \mathfrak{M}_U$.

Подставив в правую часть уравнения (1) вместо параметра u обобщенное управление μ_t , получим дифференциальное уравнение:

$$\dot{x} = \langle \mu_t, f(t, x, u) \rangle = \int_{R^r} f(t, x, u) d\mu_t = F(t, x), \quad (6)$$

правая часть которого удовлетворяет условию (3).

По аналогии с п. 1 можно поставить краевую задачу: найти такое обобщенное управление μ_t , что решение соответствующего уравнения (6) удовлетворяет краевым условиям

$$t = t_1, x(t_1) = x_1, \quad x(t_2) = x_2.$$

Если к этим краевым условиям добавить еще условие $t_2 - t_1 \mapsto \min$, мы получим оптимальную задачу в классе обобщенных управлений:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \langle \mu_t, f(t, x, u) \rangle, & \mu_t &\in \mathfrak{M}_U, \\ t &= t_1, x(t_1) = x_1, & x(t_2) &= x_2, & t_2 - t_1 &\mapsto \min. \end{aligned} \quad (7)$$

О п р е д е л е н и е. Выпуклой задачей управления, соответствующей задаче управления (5), называется задача управления

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \langle \mu_t, f(t, x, u) \rangle, & \mu_t &\in \mathfrak{M}_U, \\ t &= t_1, & x(t_1) &= x_1, & x(t_2) &= x_2, \end{aligned} \quad (8)$$

а оптимальная задача (7) называется выпуклой задачей оптимизации, соответствующей задаче (4).

Так как $\Omega_U \subset \mathfrak{M}_U$, то исходная оптимальная задача может не иметь решения, в то время как соответствующая ей выпуклая задача будет разрешима.

Укажем геометрический смысл перехода к выпуклой задаче управления, оправдывающий ее название.

Прежде всего ясно, что множество всех обобщенных управлений $\mathfrak{M}_U$ выпукло, ибо если μ_t, ν_t — два обобщенных управления, то при любых постоянных α, β семейство мер $\alpha\mu_t + \beta\nu_t, t \in R$, слабо измеримо, финитно и при любом t мера $\alpha\mu_t + \beta\nu_t$ сосредоточена на U , если же α, β удовлетворяют условиям $\alpha \geq 0, \beta \geq 0, \alpha + \beta = 1$, то мера $\alpha\mu_t + \beta\nu_t$ вероятностная.

Далее, множество правых частей уравнения (6) имеет вид

$$\{F(t, x); F(t, x) = \langle \mu_t, f(t, x, u) \rangle, \mu_t \in \mathfrak{M}_U\},$$

и оно всегда выпукло (независимо от выбора f и U), ибо вместе с функциями

$$F_1(t, x) = \langle \mu_t, f(t, x, u) \rangle, F_2(t, x) = \langle \nu_t, f(t, x, u) \rangle$$

этому множеству принадлежит в силу выпуклости $\mathfrak{M}_U$ и функция

$$\begin{aligned} [\alpha F_1(t, x) + \beta F_2(t, x) &= \langle \alpha\mu_t + \beta\nu_t, f(t, x, u) \rangle, \\ \alpha, \beta &\geq 0, \alpha + \beta = 1. \end{aligned}$$

В частности, множество $P_{\mathfrak{M}}(t, x)$ всех возможных фазовых скоростей уравнения (6) при фиксированных t, x выпукло в R^n . Впрочем, это свойство множества $P_{\mathfrak{M}}(t, x)$ непосредственно вытекает и из очевидного представления

$$P_{\mathfrak{M}}(t, x) = \{p; p = \langle \mu, f(t, x, u) \rangle\},$$

где μ — произвольная вероятностная мера, сосредоточенная на конечной части множества U .

Можно дать и более точное описание множества $P_{\mathfrak{M}}(t, x)$. Именно, докажем, что множество всех возможных фазовых скоростей $P_{\mathfrak{M}}(t, x)$ уравнения (6) совпадает с выпуклой оболочкой множества всех возможных фазовых скоростей $P(t, x)$ исходного уравнения (1):

$$P_{\mathfrak{M}}(t, x) = \text{conv } P(t, x) = \text{conv } \{p; p = f(t, x, u), u \in U\}.$$

Так как множество $P_{\mathfrak{M}}(t, x)$ выпукло и $P_{\mathfrak{M}}(t, x) \supset P(t, x)$, то следует лишь доказать включение $P_{\mathfrak{M}}(t, x) \subset \text{conv } P(t, x)$.

Пусть точка $\hat{p} \notin \text{conv } P(t, x)$ и тем не менее существует такая вероятностная мера $\hat{\mu}$, сосредоточенная на U , что $\langle \hat{\mu}, f(t, x, u) \rangle = \hat{p}$.

Проведем в R^n через $\hat{p}$ $(n-1)$ -мерную плоскость Γ^{n-1} так, чтобы выпуклое множество $\text{conv } P(t, x)$ лежало по одну сторону от нее. Характеристическую функцию прообраза гиперплоскости Γ^{n-1} при отображении $u \mapsto f(t, x, u)$ обозначим через $\chi_1(u)$, характеристическую функцию дополнения — через $\chi_2(u)$:

$$\begin{aligned} \chi_1(u) &= \begin{cases} 1 & \text{при } f(t, x, u) \in \Gamma^{n-1}, \\ 0 & \text{при } f(t, x, u) \notin \Gamma^{n-1}, \end{cases} \\ \chi_2(u) &= 1 - \chi_1(u). \end{aligned}$$

Так как мера $\hat{\mu}$ вероятностная, то $\hat{p} = \langle \hat{\mu}, \hat{p} \rangle$ и, следовательно,
 $\langle \hat{\mu}, f(t, x, u) - \hat{p} \rangle = \langle \hat{\mu}, \chi_1(u) (f(t, x, u) - \hat{p}) \rangle + \langle \hat{\mu}, \chi_2(u) (f(t, x, u) - \hat{p}) \rangle = 0$.

Обозначим через ξ вектор, ортогональный к Γ^{n-1} и направленный в сторону множества $\text{con} P(t, x)$. Умножая скалярно последнее равенство на ξ , получим

$$\langle \hat{\mu}, \chi_1(u) \xi \cdot (f(t, x, u) - \hat{p}) \rangle + \langle \hat{\mu}, \chi_2(u) \xi \cdot (f(t, x, u) - \hat{p}) \rangle = 0.$$

Первое слагаемое левой части равно нулю, ибо для тех u , для которых $\chi_1(u) \neq 0$, скалярное произведение $\xi \cdot (f(t, x, u) - \hat{p}) = 0$, поэтому $\langle \hat{\mu}, \chi_2(u) \xi \cdot (f - \hat{p}) \rangle = 0$. Так как мера $\hat{\mu}$ положительна, а скалярная функция $\chi_2(u) \xi \cdot (f(t, x, u) - \hat{p}) > 0$ при $f(t, x, u) \in \Gamma^{n-1}$ (ибо множество $\text{con} P(t, x)$ лежит по одну сторону от Γ^{n-1}), то заключаем, что мера $\hat{\mu}$ сосредоточена на прообразе гиперплоскости Γ^{n-1} при отображении $u \mapsto f(t, x, u)$.

Проведенное рассуждение с заменой R^n на Γ^{n-1} и множества $\text{con} P(t, x)$ на $\Gamma^{n-1} \cap \text{con} P(t, x)$, убеждает нас, что мера $\hat{\mu}$ сосредоточена на прообразе некоторой $(n-2)$ -мерной плоскости $\Gamma^{n-2} \subset \Gamma^{n-1} \subset R^n$ при отображении $u \mapsto f(t, x, u)$, причем $\hat{p} \in \Gamma^{n-2}$. Понижая таким образом размерность, мы убеждаемся, что мера $\hat{\mu}$ сосредоточена на прообразе точки $\hat{p}$ при отображении $u \mapsto f(t, x, u)$, что, однако, противоречит предположениям, что положительная мера $\hat{\mu}$ сосредоточена на U и $\hat{p} \notin \text{con} P(t, x)$.

Следующий пример обобщенного управления в известном смысле является типичским, см. п. 5, и по причинам, которые обсуждаются в п. 5, называется *управлением скользящего режима* или *осциллирующим управлением*.

Пусть $u_1(t), \dots, u_s(t)$ — произвольное число допустимых управлений и $\mu_1(t), \dots, \mu_s(t)$, $t \in R$, равное им количество действительных измеримых (по Лебегу) функций, удовлетворяющих для (почти) всех t условиям

$$\mu_i(t) \geq 0, \quad \sum_{i=1}^s \mu_i(t) = 1.$$

Они определяют обобщенное управление

$$\mu_t = \sum_{i=1}^s \mu_i(t) \delta_{u_i(t)}, \quad t \in R, \quad (9)$$

называемое *осциллирующим управлением*. В каждый момент времени мера μ_t сосредоточена в точках $u_1(t), \dots, u_s(t)$ с соответствующими «весами» $\mu_1(t), \dots, \mu_s(t)$; управление μ_t как бы «размазано» по s точкам $u_1(t), \dots, u_s(t)$ в пропорциях $\mu_1(t) : \mu_2(t) : \dots : \mu_s(t)$. При $s = 1$ получаем обычное управление $\mu_t = \delta_{u_1(t)} \in \Omega_U$. Если управлять с помощью такого управления, то управляемое уравнение принимает вид

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^s \mu_i(t) f(t, x, u_i(t)).$$

3. Сходимость обобщенных управлений

Пользуясь понятием слабой сходимости для мер Радона, мы определим сейчас понятие слабой сходимости для обобщенных управлений.

Пусть последовательность мер Радона ν_i , $i = 1, 2, \dots$, заданных на некотором R^m , слабо сходится к мере ν , т. е. для любой функции с компактным носителем $g(z)$ на R^m имеем

$$\langle \nu_i - \nu, g(z) \rangle = \int_{R^m} g(z) d(\nu_i - \nu) \rightarrow 0 \quad (i \rightarrow \infty).$$

Как известно, в линейном пространстве всех мер Радона на R^m можно ввести локально-выпуклую (нормируемую) топологию с помощью семейства полунорм $\|v\|_g^* = |\langle v, g(z) \rangle|$, где g — произвольная непрерывная функция с компактным носителем на R^m , и слабая сходимость мер является сходимостью в этой топологии.

Произвольное обобщенное управление μ_t , которое при фиксированном t является мерой Радона на R^r , можно рассматривать как меру Радона v на $(1+r)$ -мерном пространстве $R \times R^r$ точек (t, x) , определяя его действие на непрерывную функцию $g(t, u)$ с компактным носителем на R^{1+r} по формуле

$$\langle v, g(t, u) \rangle = \int_R dt \int_{R^r} g(t, u) d\mu_t(u) = \int_R \langle \mu_t, g(t, u) \rangle dt,$$

где интегрирование на R производится по мере Лебега, а «скалярное произведение» $\langle \mu_t, g(t, u) \rangle$ есть интегрирование при фиксированном t по вероятностной мере μ_t . Соответствующая топология в пространстве всех мер Радона на R^{1+r} индуцирует на обобщенных управлениях топологию, которую мы будем называть *слабой*, или *топологией скользящего режима*.

Таким образом, последовательность обобщенных управлений $\mu_t^{(i)}$, $i = 1, 2, \dots$, слабо сходится к обобщенному управлению μ_t при $i \rightarrow \infty$, если для произвольной непрерывной функции $g(t, u)$ на R^{1+r} с компактным носителем имеем

$$\int_R \langle \mu_t^{(i)}, g(t, u) \rangle dt \rightarrow \int_R \langle \mu_t, g(t, u) \rangle dt \quad (i \rightarrow \infty). \quad (10)$$

В связи с данным определением сделаем одно терминологическое замечание.

Для последовательности интегрируемых (по Лебегу) r -мерных функций $v_i(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$, $i = 1, 2, \dots$, существует общепринятое определение слабой сходимости, согласно которому $v_i(t)$ сходится к $v(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$, слабо при $i \rightarrow \infty$, если для любой непрерывной r -мерной строки $\varphi(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$, имеем

$$\int_{t_1}^{t_2} \varphi(t) v_i(t) dt \rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \varphi(t) v(t) dt \quad (i \rightarrow \infty). \quad (11)$$

Если рассматривается последовательность обычных управлений $\mu_t^{(i)} = \delta_{u_i(t)}$, $t \in R$, где функции $u_i(t)$, $t \in R$, предположим равномерно ограниченными по i , то можно исследовать последовательность $u_i(t)$ на сходимость к некоторому пределу в смысле определения (10), подразумевая при этом слабую сходимость обобщенных управлений $\delta_{u_i(t)}$ к некоторому обобщенному управлению, а можно исследовать на сходимость ту же самую последовательность $u_i(t)$ (на произвольном отрезке $t_1 \leq t \leq t_2$) в смысле определения (11). Это два различных вида сходимости, что хорошо поясняется следующим примером.

Рассмотрим для простоты скалярный случай ($r = 1$) и предположим, что задана последовательность разбиений действительной оси $t \in R$ на отрезки равной длины, причем длина отрезков i -го разбиения стремится к нулю при $i \rightarrow \infty$. Функция $u_i(t)$, $t \in R$, определяется с помощью i -го разбиения — она равна на каждом частичном отрезке либо 1, либо -1 , попеременно перескакивая с одного значения на другое, когда аргумент t переходит с одного отрезка на следующий. При больших значениях i функция $u_i(t)$ «быстро осциллирует», задерживаясь на каждом из значений ± 1 на равную долю времени, и очевидно,

что для любой непрерывной функции $\varphi(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$,

$$\int_{t_1}^{t_2} \varphi(t) u_i(t) dt \rightarrow 0 \quad (i \rightarrow \infty),$$

т. е. $u_i(t) \rightarrow 0$ ($i \rightarrow \infty$) в смысле (11).

Однако в смысле сходимости обобщенных управлений (10) последовательность $\delta_{u_i(t)}$ вовсе не стремится к нулю, ибо для любой непрерывной функции $g(t, u)$ будем иметь

$$\int_{t_1}^{t_2} \langle \delta_{u_i(t)}, g(t, u) \rangle dt = \int_{t_1}^{t_2} g(t, u_i(t)) dt \rightarrow \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} g(t, 1) dt + \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} g(t, -1) dt \quad (i \rightarrow \infty),$$

и, следовательно, если $g(t, u)$ имеет компактный носитель в R^{1+r} , то

$$\begin{aligned} \int_R \langle \delta_{u_i(t)}, g(t, u) \rangle dt &\rightarrow \frac{1}{2} \int_R g(t, 1) dt + \frac{1}{2} \int_R g(t, -1) dt = \\ &= \int_R \langle \mu_t, g(t, u) \rangle dt \quad (i \rightarrow \infty), \end{aligned}$$

где

$$\mu_t = \frac{1}{2} \delta_1 + \frac{1}{2} \delta_{-1}.$$

Таким образом, последовательность $u_i(t)$ сходится в смысле сходимости обобщенных управлений к обобщенному управлению $\frac{1}{2} \delta_1 + \frac{1}{2} \delta_{-1}$. Чем больше i , с тем большей частотой управление $u_i(t)$ «осциллирует» между значениями ± 1 , задерживаясь на каждом из них на равные доли времени, и тем «ближе» оно в смысле топологии скользящего режима к осциллирующему (в смысле (9)) управлению $\frac{1}{2} \delta_1 + \frac{1}{2} \delta_{-1}$, «размазанному» по двум точкам ± 1 , с одинаковыми весами $\frac{1}{2}$.

По аналогии со слабой сходимостью можно ввести и понятие сильной сходимости обобщенных управлений, воспользовавшись соответствующим понятием сильной сходимости для мер Радона.

Пусть $C^0(R^m)$ — нормированное пространство всех непрерывных на R^m скалярных функций $g(z)$ с компактными носителями с нормой равномерной сходимости.

Норму (полную вариацию) меры Радона ν на R^m будем обозначать через $\|\nu\|$:

$$\|\nu\| = \sup \{ \langle \nu, g(z) \rangle; \|g(z)\| \leq 1, g(z) \in C^0(R^m) \}.$$

Нетрудно видеть, что если ν_t , $t \in R$, слабо измеримое семейство мер Радона на R^m , то функция $h(t) = \|\nu_t\|$ измерима по Лебегу.

Последовательность обобщенных управлений $\mu_t^{(i)}$, $i = 1, 2, \dots$, сильно сходится к обобщенному управлению μ_t при $i \rightarrow \infty$, если

$$\int_R \|\mu_t^{(i)} - \mu_t\| dt \rightarrow 0 \quad (i \rightarrow \infty).$$

Как и для общих мер Радона, из сильной сходимости обобщенных управлений следует слабая сходимость, но не наоборот. В качестве примера можно взять последовательность точек u_i в R^r , стремящуюся к точке $\hat{u}$, причем $u_i \neq \hat{u}$. Положим $\mu_t^{(i)} \equiv \delta_{u_i}$, $\hat{\mu}_t \equiv \delta_{\hat{u}} \forall t \in R$. Имеем

$$\langle \delta_{u_i}, g(t, u) \rangle = g(t, u_i) \rightarrow g(t, \hat{u}) = \langle \delta_{\hat{u}}, g(t, u) \rangle,$$

откуда

$$\int_R \langle \delta_{u_i}, g(t, u) \rangle dt \rightarrow \int_R \langle \delta_{\hat{u}}, g(t, u) \rangle dt \quad (i \rightarrow \infty),$$

т. е. $\delta_{u_i} \rightarrow \delta_{\hat{u}}$ слабо, но не сильно, ибо из $u_i \neq \hat{u} \quad \forall i = 1, 2, \dots$, следует $\|\delta_{u_i} - \delta_{\hat{u}}\| = 1$.

4. Аппроксимационная лемма

Пусть Σ — метрическое пространство и предположим, что задано некоторое семейство обобщенных управлений

$$\{\mu_t(\sigma); \sigma \in \Sigma\} \subset \mathfrak{M}_U.$$

Будем называть это семейство *слабо непрерывно зависящим от параметра σ* , если для любой функции с компактным носителем $g(t, u)$ из $\sigma_i \rightarrow \hat{\sigma} \quad (i \rightarrow \infty)$ следует

$$\int_R \langle \mu_t(\sigma_i) - \mu_t(\hat{\sigma}), g(t, u) \rangle dt \rightarrow 0 \quad (i \rightarrow \infty).$$

Заменив это условие условием

$$\int_R \|\mu_t(\sigma_i) - \mu_t(\hat{\sigma})\| dt \rightarrow 0 \quad (i \rightarrow \infty),$$

получим *сильно непрерывно зависящее от σ семейство*.

Всякое сильно непрерывное семейство слабо непрерывно, но не наоборот.

Аппроксимационная лемма утверждает, что всякое сильно непрерывное семейство обобщенных управлений $\mu_t(\sigma)$, $\sigma \in \Sigma$ можно сколь угодно хорошо аппроксимировать в смысле слабой сходимости некоторым, также сильно непрерывным семейством обычных управлений $\delta_{u(t, \sigma)}$, причем эта аппроксимация будет равномерной по $\sigma \in \Sigma$. Таким образом, обычные управления не только всюду плотно расположены (в смысле слабой сходимости) в классе всех обобщенных управлений, но и позволяют сколь угодно хорошо равномерно аппроксимировать произвольные сильно непрерывные семейства обобщенных управлений.

Точную формулировку сказанного содержит следующая

А п п р о к с и м а ц и о н н а я л е м м а. Пусть $\mu_t(\sigma)$, $\sigma \in \Sigma$, — сильно непрерывное семейство обобщенных управлений и пусть все меры $\mu_t(\sigma)$, $t \in R$, $\sigma \in \Sigma$, сосредоточены на одном и том же ограниченном множестве $N \subset U \subset R^n$.

Тогда можно построить такую последовательность обычных управлений

$$\delta_{u^{(i)}(t, \sigma)} \in \Omega_U, \quad i = 1, 2, \dots,$$

сильно непрерывно зависящих от $\sigma \in \Sigma$ при каждом $i = 1, 2, \dots$, что все меры $\delta_{u^{(i)}(t, \sigma)}$ сосредоточены на N (т. е. $u^{(i)}(t, \sigma) \in N \quad \forall t, \forall \sigma$) и при $i \rightarrow \infty$ последовательность $\delta_{u^{(i)}(t, \sigma)}$ слабо сходится к $\mu_t(\sigma)$, равномерно относительно $\sigma \in \Sigma$; другими словами, для любой непрерывной на $R \times R^n$ функции с компактным носителем $g(t, u)$ имеем

$$\int_R \langle \mu_t(\sigma) - \delta_{u^{(i)}(t, \sigma)}, g(t, u) \rangle dt \rightarrow 0 \quad (i \rightarrow \infty),$$

где стремление к нулю происходит равномерно относительно $\sigma \in \Sigma$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Прежде всего мы построим последовательность осциллирующих уравнений (см. п. 2) вида

$$\Delta_t^{(i)}(\sigma) = \sum_{j=1}^{s_i} \lambda_j^{(i)}(t, \sigma) \delta_{u_j^{(i)}}, \quad u_j^{(i)} \in N, \quad i = 1, 2, \dots, \quad (12)$$

сильно непрерывно зависящих от σ и стремящихся слабо к $\mu_t(\sigma)$ при $i \rightarrow \infty$ равномерно относительно $\sigma \in \Sigma$.

Для этого рассмотрим последовательность покрытий замыкания $\bar{N}$ открытыми множествами

$$\{O_1^{(i)}, \dots, O_{s_i}^{(i)}\}, \quad i = 1, 2, \dots,$$

причем диаметры множеств $O_j^{(i)}$ стремятся к нулю при $i \rightarrow \infty$. Обозначим через

$$\{\alpha_j^{(i)}(u), j = 1, 2, \dots, s_i\}, \quad i = 1, 2, \dots,$$

разложение единицы на компакте $\bar{N}$, подчиненное i -му покрытию. Очевидно, функции

$$\lambda_j^{(i)}(t, \sigma) = \langle \mu_t(\sigma), \alpha_j^{(i)}(u) \rangle, \quad t \in R,$$

измеримы по t и удовлетворяют условиям

$$0 \leq \lambda_j^{(i)}(t, \sigma) \leq 1, \quad \sum_{j=1}^{s_i} \lambda_j^{(i)}(t, \sigma) \equiv 1, \quad i = 1, 2, \dots$$

Для каждого i выберем в пересечении $O_j^{(i)} \cap N$, $j = 1, \dots, s_i$, произвольную точку $u_j^{(i)}$ (предположим, что пересечения не пусты), и составим из функций $\lambda_j^{(i)}$ и точек $u_j^{(i)}$ последовательность осциллирующих управлений (12).

Чтобы доказать сильную непрерывность $\Delta_t^{(i)}(\sigma)$ от σ , докажем, что при $\sigma \rightarrow \hat{\sigma}$

$$\sum_{j=1}^{s_i} \int_R |\lambda_j^{(i)}(t, \sigma) - \lambda_j^{(i)}(t, \hat{\sigma})| dt \rightarrow 0. \quad (13)$$

Имеем в силу $0 \leq \alpha_j^{(i)}(u) \leq 1$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{s_i} \int_R |\lambda_j^{(i)}(t, \sigma) - \lambda_j^{(i)}(t, \hat{\sigma})| dt &\leq \sum_{j=1}^{s_i} \int_R |\langle \mu_t(\sigma) - \mu_t(\hat{\sigma}), \alpha_j^{(i)}(u) \rangle| dt \leq \\ &\leq \sum_{j=1}^{s_i} \int_R \|\mu_t(\sigma) - \mu_t(\hat{\sigma})\| dt = s_i \int_R \|\mu_t(\sigma) - \mu_t(\hat{\sigma})\| dt \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Остается показать, что последовательность (12) слабо сходится при $i \rightarrow \infty$ к $\mu_t(\sigma)$ равномерно относительно σ .

Пусть $g(t, u)$ — произвольная непрерывная функция с компактным носителем, пусть I_g — проекция ее носителя на ось t . Обозначим

$$\eta^{(i)} = \max_j \sup_{(t, u)} \{ |g(t, u) - g(t, u_j^{(i)})|; (t, u) \in I_g \times O_j^{(i)}, j = 1, \dots, s_i \};$$

следовательно, $\eta^{(i)} \rightarrow 0$ ($i \rightarrow \infty$). Имеем

$$\begin{aligned} \left| \int_R \langle \mu_t(\sigma) - \Delta_t^{(i)}(\sigma), g(t, u) \rangle dt \right| &= \left| \int_R \left\langle \mu_t(\sigma), \sum_{j=1}^{s_i} \alpha_j^{(i)}(u) (g(t, u) - g(t, u_j^{(i)})) \right\rangle dt \right| \leq \\ &\leq \eta^{(i)} \sum_{j=1}^{s_i} \int_{I_g} \langle \mu_t(\sigma), \alpha_j^{(i)}(u) \rangle dt = \eta^{(i)} \int_{I_g} dt \int_N d\mu_t(\sigma) = \eta^{(i)} |I_g| \rightarrow 0 \quad (i \rightarrow \infty), \end{aligned}$$

причем, как видно из оценки, сходимость равномерна по σ .

Теперь мы построим такую последовательность обычных управлений (а фактически — даже кусочно-постоянных управлений)

$$\delta_{u^{(i)}(t, \sigma)} \in \Omega_U, \quad i = 1, 2, \dots,$$

сильно непрерывно зависящих от σ , что равномерно относительно σ будем иметь сходимость

$$\int_R \langle \Delta_t^{(i)}(\sigma) - \delta_{u^{(i)}(t, \sigma)}, g(t, u) \rangle dt \rightarrow 0 \quad (i \rightarrow \infty) \quad (14)$$

для любой непрерывной функции $g(t, u)$ с компактным носителем. Тем самым лемма будет доказана.

При каждом $i = 1, 2, \dots$ подразделим отрезок $[-i, i]$ на $2i^2$ отрезков $I_k^{(i)}$ равной длины $1/i$, $k = 1, 2, \dots, 2i^2$, а каждый из отрезков $I_k^{(i)}$ подразделим на s_i частичных отрезков $I_{kj}^{(i)}(\sigma)$, $j = 1, \dots, s_i$ (зависящих от σ) длины

$$|I_{kj}^{(i)}(\sigma)| = \int_{I_k^{(i)}} \lambda_j^{(i)}(t, \sigma) dt.$$

Отрезки будем считать занумерованными так, чтобы при $j' \leq j''$ отрезок $I_{kj'}^{(i)}$ был расположен левее отрезка $I_{kj''}^{(i)}$. Если $\lambda_j^{(i)}(t, \sigma) = 0$ для $\forall t \in I_k^{(i)}$, то соответствующий отрезок $I_{kj}^{(i)}(\sigma)$ вырождается в точку.

Определим функцию $u^{(i)}(t, \sigma)$ (с точностью до значений в конечном числе точек t), положив ее равной $\hat{u}$ (произвольная фиксированная точка в U) вне отрезка $[-i, i]$, а на каждом из отрезков $I_{kj}^{(i)}(\sigma)$ — равной $u_j^{(i)}$.

Чтобы доказать сходимость (14), положим i настолько большим, чтобы выполнялось включение $I_g \subset [-i, i]$ и возьмем в каждом отрезке $I_k^{(i)}$ по произвольной точке $t_k^{(i)}$. Тогда

$$\begin{aligned} & \int_R \langle \Delta_t^{(i)}(\sigma) - \delta_{u^{(i)}(t, \sigma)}, g(t, u) \rangle dt = \\ & = \sum_{k=1}^{2i^2} \int_{I_k^{(i)}} \langle \Delta_t^{(i)}(\sigma) - \delta_{u^{(i)}(t, \sigma)}, g(t, u) - g(t_k^{(i)}, u) \rangle dt, \end{aligned}$$

ибо

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{2i^2} \int_{I_k^{(i)}} \langle \Delta_t^{(i)}(\sigma) - \delta_{u^{(i)}(t, \sigma)}, g(t_k^{(i)}, u) \rangle dt = \sum_{k=1}^{2i^2} \left\{ \int_{I_k^{(i)}} \sum_{j=1}^{s_i} \lambda_j^{(i)}(t, \sigma) g(t_k^{(i)}, u_j^{(i)}) dt - \right. \\ & \left. - \sum_{j=1}^{s_i} \int_{I_{kj}^{(i)}} g(t_k^{(i)}, u_j^{(i)}) dt \right\} = \sum_{k=1}^{2i^2} \left\{ \sum_{j=1}^{s_i} g(t_k^{(i)}, u_j^{(i)}) \left(\int_{I_k^{(i)}} \lambda_j^{(i)}(t, \sigma) dt - \int_{I_{kj}^{(i)}} dt \right) \right\} = 0, \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} & \left| \int_R \langle \Delta_t^{(i)}(\sigma) - \delta_{u^{(i)}(t, \sigma)}, g(t, u) \rangle dt \right| \leq \\ & \leq \sum_{k=1}^{2i^2} \int_{I_k^{(i)}} \left| \langle \Delta_t^{(i)}(\sigma) - \delta_{u^{(i)}(t, \sigma)}, g(t, u) - g(t_k^{(i)}, u) \rangle \right| dt. \end{aligned}$$

Оценим правую часть. Пусть I — произвольный отрезок оси t , содержащий компактное множество I_g строго внутри. Тогда для больших i

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{2i^2} \int_{I_k^{(i)}} |\langle \Delta_t^{(i)}(\sigma) - \delta_{u^{(i)}(t, \sigma)}, g(t, u) - g(t_k^{(i)}, u) \rangle| dt \leq \\ & \leq \sum_{I_k^{(i)} \subset I} \int_{I_k^{(i)}} |\langle \Delta_t^{(i)}(\sigma) - \delta_{u^{(i)}(t, \sigma)}, g(t, u) - g(t_k^{(i)}, u) \rangle| dt. \end{aligned}$$

Так как $|I_k^{(i)}| = 1/i$, а мера $\Delta_t^{(i)}(\sigma) - \delta_{u^{(i)}(t, \sigma)}$ сосредоточена на ограниченном множестве N и ее норма не превосходит 2, то, обозначив

$$\zeta^{(i)} = \sup \left\{ |g(t', u) - g(t'', u)|; u \in N, t', t'' \in I, |t' - t''| \leq \frac{1}{i} \right\},$$

получим соотношения

$$\begin{aligned} & \sum_{I_k^{(i)} \subset I} \int_{I_k^{(i)}} |\langle \Delta_t^{(i)}(\sigma) - \delta_{u^{(i)}(t, \sigma)}, g(t, u) - g(t_k^{(i)}, u) \rangle| dt \leq \\ & \leq \int_I 2\zeta^{(i)} dt = 2\zeta^{(i)} |I| \rightarrow 0 \quad (i \rightarrow \infty), \end{aligned}$$

доказывающие (14).

Чтобы завершить доказательство леммы, остается еще доказать сильную непрерывность семейства $\delta_{u^{(i)}(t, \sigma)}$ от параметра σ .

Для этого заметим, что если $\hat{t}$ — внутренняя точка отрезка $I_{k_j}^{(i)}(\hat{\sigma})$ и точка σ достаточно близка к $\hat{\sigma}$, то в силу (13) и определения отрезков $I_{k_j}^{(i)}(\sigma)$ $\hat{t}$ будет внутренней точкой и для $I_{k_j}^{(i)}(\sigma)$ и, следовательно,

$$u^{(i)}(\hat{t}, \sigma) = u^{(i)}(\hat{t}, \hat{\sigma}) = u_j^{(i)}.$$

Поэтому при $\sigma \rightarrow \hat{\sigma}$ можно гарантировать сходимость к нулю нормы $\|\delta_{u^{(i)}(t, \sigma)} - \delta_{u^{(i)}(t, \hat{\sigma})}\|$ во всех точках t , отличных от концов отрезков $I_{k_j}^{(i)}(\hat{\sigma})$. Следовательно, переходя к пределу под знаком интеграла, получим доказываемую сильную непрерывность:

$$\int_R \|\delta_{u^{(i)}(t, \sigma)} - \delta_{u^{(i)}(t, \hat{\sigma})}\| dt \rightarrow 0 \quad (\sigma \rightarrow \hat{\sigma}).$$

З а м е ч а н и е п о п о в о д у т е р м и н о л о г и и. Из приведенного доказательства видно, что если задано обобщенное управление

$$\begin{aligned} \Delta_t &= \sum_{j=1}^s \lambda_j(t) \delta_{u_j}, \quad \lambda_j(t) \geq 0, \quad \sum_{j=1}^s \lambda_j(t) = 1, \\ u_j &\in U, \quad j = 1, \dots, s, \end{aligned}$$

то описанный процесс построения кусочно-постоянных управлений дает нам последовательность функций $u^{(i)}(t)$, быстро осциллирующих на отрезке $-i \leq t \leq i$ между значениями $u_1, \dots, u_s$. Именно, на каждом отрезке $k/i \leq t \leq (k+1)/i$, $k = -i^2, \dots, i^2$, функция $u^{(i)}(t)$ задерживается в точке u_j в течение времени

$$\left[\frac{k}{i}, \frac{k+1}{i} \right] \int \lambda_j(t) dt, \quad j = 1, \dots, s,$$

и эта последовательность все быстрее осциллирующих функций слабо сходится при $i \rightarrow \infty$ к обобщенному управлению Δ_t . Поэтому мы называем управление Δ_t «осциллирующим».

В действительности мы называли осциллирующими в п. 2 даже более общие управления, предполагая точки u_j не постоянными, а произвольными ограниченными измеримыми функциями t со значениями в U .

Незначительное изменение описанной конструкции позволяет и в этом случае строить слабо сходящуюся к Δ_t последовательность функций t , которые в известном смысле также можно считать быстро осциллирующими между теперь уже переменными точками $u_1(t), \dots, u_s(t)$.

Если кусочно-постоянными управлениями аппроксимируется не осциллирующее управление Δ_t , а произвольное обобщенное управление μ_t , то, как видно из данного доказательства, чем лучше аппроксимация, тем большее число точек нужно брать, между которыми осциллирует аппроксимирующая функция, так что «в пределе» она оказывается «размазанной» по всему множеству U с соответствующей плотностью в виде меры μ_t . Если же μ_t имеет вид Δ_t , это «предельное размазывание» происходит по s точками $u_1, \dots, u_s$ с плотностями $\lambda_1(t), \dots, \lambda_s(t)$.

5. Скользящие оптимальные режимы

В очень широких и естественных предположениях множество обобщенных управлений является компактным в топологии слабой сходимости. Именно, пользуясь условиями слабой компактности в пространстве мер Радона, нетрудно доказать (см. [4]), что если множество допустимых значений U компактно, то множество всех обобщенных управлений $\mathfrak{M}_U$ слабо (секвенциально) компактно. Иными словами, из произвольной последовательности обобщенных управлений $\mu_t^{(i)} \in \mathfrak{M}_U$, $i = 1, 2, \dots$, можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся слабо к некоторому обобщенному управлению.

Эта компактность в свою очередь влечет существование оптимальных решений для широкого класса выпуклых задач управления. Для точной формулировки результата введем следующее определение.

Будем говорить, что управляемое уравнение (1) обладает свойством неограниченной продолжаемости решений, если для произвольного обобщенного управления $\mu_t \in \mathfrak{M}_U$ и произвольных начальных данных τ, x_τ дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = \langle \mu_t, f(t, x, u) \rangle$$

имеет решение, удовлетворяющее начальному условию $x(\tau) = x_\tau$ и определенное на всей оси t . Из общих свойств дифференциальных уравнений легко следует, что (1) будет иметь сформулированное свойство, если $f(t, x, u)$ допускает оценку

$$|f(t, x, u)| \leq m(t) g(|x|) \quad \forall (t, x, u) \in R \times R^n \times U,$$

где $m(t)$ — локально суммируемая функция, а непрерывная функция g растет на бесконечности не быстрее первой степени от $|x|$.

Легким следствием слабой компактности $\mathfrak{M}_U$ при компактном U является следующая теорема существования для выпуклой оптимальной задачи (см. [4]).

Пусть выпуклая задача управления (7) обладает свойством неограниченной продолжаемости решений; предположим, что множество допустимых значений U компактно и что существует хотя бы одно (не обязательно оптимальное) решение. Тогда существует и оптимальное решение, т. е. существует решение $\tilde{\mu}_t, \tilde{x}(t), t_1 \leq t \leq t_2$, оптимальной задачи (8).

Оказывается, что оптимальное обобщенное управление $\bar{\mu}_t$ всегда можно реализовать на $[t_1, t_2]$ в виде осциллирующего управления

$$\bar{\mu}_t = \sum_{i=0}^n \lambda_i(t) \delta_{u_i(t)}, \quad u_i(t) \in U, \quad (15)$$

$$\lambda_i(t) \geq 0, \quad \sum_{i=0}^n \lambda_i(t) \equiv 1,$$

где n — размерность фазового пространства задачи.

Для доказательства введем n -мерный симплекс

$$\Lambda = \{\lambda = (\lambda_0, \dots, \lambda_n); \lambda_i \geq 0, \sum_{i=0}^n \lambda_i = 1\},$$

и обозначим через W $(n+1)$ -ю декартову степень множества U ,

$$W = \{w = (u_0, u_1, \dots, u_n); u_i \in U, i = 0, 1, \dots, n\}.$$

Пусть $g(t, \lambda, w)$ — функция на $R \times \Lambda \times W$, определенная формулой

$$g(t, \lambda, w) = \sum_{i=0}^n \lambda_i f(t, \bar{x}(t), u_i) - \langle \bar{\mu}_t, f(t, \bar{x}(t), u) \rangle.$$

Выражение

$$\sum_{i=0}^n \lambda_i f(t, \bar{x}(t), u_i), \quad u_i \in U,$$

является выпуклой оболочкой произвольных $n+1$ точек множества $P(t, \bar{x}(t))$, а вектор $\langle \bar{\mu}_t, f(t, \bar{x}(t), u) \rangle$ принадлежит множеству $\text{conv } P(t, \bar{x}(t))$, см. п. 2.

Поэтому из «леммы Каратеодори», см. [4], следует, что для $\forall t \in [t_1, t_2]$ уравнение относительно (λ, w)

$$g(t, \lambda, w) = 0, \quad (\lambda, w) \in \Lambda \times W$$

разрешимо. Воспользовавшись теперь «леммой Филиппова» (см. [4]), мы сможем выбрать измеримые функции $\lambda(t) \in \Lambda$, $w(t) \in W$, $t_1 \leq t \leq t_2$, удовлетворяющие уравнению $g(t, \lambda(t), w(t)) = 0$ тождественно по t . Следовательно, получим для почти всех $t \in [t_1, t_2]$ равенство

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}(t) &= \langle \bar{\mu}_t, f(t, \bar{x}(t), u) \rangle = \sum_{i=0}^n \lambda_i(t) f(t, \bar{x}(t), u_i(t)) = \\ &= \left\langle \sum_{i=0}^n \lambda_i(t) \delta_{u_i(t)}, f(t, \bar{x}(t), u) \right\rangle, \end{aligned}$$

доказывающее наше утверждение.

Согласно аппроксимационной лемме существует последовательность допустимых управлений $u^{(i)}(t)$, $i = 1, 2, \dots$, слабо сходящаяся к оптимальному осциллирующему управлению (15). Последовательность соответствующих траекторий $x^{(i)}(t)$ с начальным условием $x^{(i)}(t_1) = x_1$ равномерно сходится к оптимальной траектории $\bar{x}(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$, движение вдоль которой, вообще говоря, не соответствует никакому допустимому управлению из Ω_U . Поэтому, с точки зрения обычных управлений, движение вдоль $\bar{x}(t)$ является «предельным скольжением», которое сколь угодно точно аппроксимируется движением вдоль траектории управляемого уравнения (1).

Поэтому оптимальное решение $\sum_{i=0}^n \lambda_i(t) \delta_{u_i(t)}, \bar{x}(t), t_1 \leq t \leq t_2$, выпуклой задачи мы называем «скользящим оптимальным режимом» в исходной задаче уп-

равления (1), а оптимальное осциллирующее управление (15) — *управлением скользящего режима*. Последовательность допустимых (обычных) управлений $u^{(i)}(t)$, аппроксимирующих (15), и соответствующих им траекторий является минимизирующей (время перехода) последовательностью исходной оптимальной задачи (4).

Способ построения последовательности $u_{\lambda}^{(i)}(t)$ по управлению (15) описан при доказательстве аппроксимационной леммы. Само оптимальное осциллирующее управление (15) находится из принципа максимума Л. С. Понтрягина.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Гамкrellидзе Р. В. О скользящих оптимальных режимах. — Докл. АН СССР, 1962, т. 134, № 6, с. 1243—1245.
2. Gamkrelidze R. V. On some extremal problems in the theory of differential equations. — SIAM J. Contr., 1965, N 3, p. 106—128.
3. Гамкrellидзе Р. В. Необходимые условия первого порядка и аксиоматика экстремальных задач. — Тр. МИАН СССР, 1971, т. 112, с. 152—180.
4. Гамкrellидзе Р. В. Основы оптимального управления. Тбилиси: Изд-во Тбил. ун-та 1977.