Д. В. Аносов, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко, М. М. Постников, О математических трудах Л. С. Понтрягина, *Тр. МИАН СССР*, 1984, том 166, 3–17

Труды Математического института АН СССР
1984, том 166

УДК 517

Д. В. АНОСОВ, Р. В. ГАМКРЕЛИДЗЕ, Е. Ф. МИЩЕНКО,
М. М. ПОСТНИКОВ

О МАТЕМАТИЧЕСКИХ ТРУДАХ Л. С. ПОНТРЯГИНА

Научная деятельность Льва Семеновича Понтрягина оставила глубокий след во многих центральных областях современной математики — как чистой, так и прикладной. Труды Л. С. Понтрягина оказали определяющее влияние на развитие топологии и топологической алгебры, а созданная им теория оптимального управления принадлежит к числу актуальнейших направлений прикладной математики наших дней.

В настоящем обзоре важнейших математических трудов Л. С. Понтрягина мы не можем сколько-нибудь подробно разобрать их содержание, ни тем более описать то глубокое и многостороннее влияние, которое они оказали на развитие соответствующих разделов математики. Его следует рассматривать лишь как краткий путеводитель, которым при желании можно пользоваться при изучении трудов Л. С. Понтрягина.

Свою научную деятельность Л. С. Понтрягин начал на втором курсе физико-математического факультета Московского университета под руководством П. С. Александрова. Его интересы в этот ранний период концентрировались вокруг двух центральных проблем алгебраической (комбинаторной) топологии того времени — топологических теорем двойственности и теории размерности, причем на теорию размерности Л. С. смотрел как на некоторый локальный вариант теории двойственности.

Открытие «двойственности в смысле Понтрягина», увенчавшее исследования Л. С. по топологическим теоремам двойственности, и последовавшее за этим построение общей теории характеров локально-компактных коммутативных групп являются одними из наиболее блестящих научных достижений Л. С. Понтрягина и, без сомнения, одной из вершин современной математики.

Мы начинаем поэтому изложение с рассмотрения основных работ Л. С. Понтрягина по теории двойственности и топологической алгебре и остановимся на них несколько подробнее, чем на других работах. Чтобы полностью оценить проделанную здесь Л. С. работу, уместно вспомнить, что к моменту начала его деятельности понятие группы гомологий в топологии фактически не использовалось и его заменяли числа Бетти по различным модулям и коэффициенты кручения, а закон двойственности Александера формулировался как равенство чисел Бетти mod 2 размерностей $n-r-1$ и r полиэдра $K \subset R^n$ и дополнения $R^n \setminus K$:

$$p^r\,(R^n \setminus K) = p^{n-r-1}\,(K).$$

Первая опубликованная работа Л. С. Понтрягина [1] углубляет этот закон, распространяя двойственность между числами Бетти полиэдра в R^n и его дополнения, на двойственность между r-мерной и $n-r-1$-мерной группами гомологий mod 2 полиэдров $R^n \setminus K$, K. Вот ее полная формулировка.

В $R^n \setminus K$ и K можно выбрать такие базы r-мерных и $n-r-1$-мерных гомологий mod 2 соответственно

$$z_1^r, \ldots, z_k^r, \quad \zeta_1^{n-r-1}, \ldots, \zeta_k^{n-r-1},$$

что квадратная матрица, составленная из коэффициентов зацеплений

$$\| (z_i^r, \zeta_j^{n-r-1}) \|, \quad i, j = 1, \ldots, k,$$

является единичной.

Таким образом, двойственность между соответствующими группами гомологий mod 2 устанавливалась здесь с помощью коэффициентов зацеплений и приводила к изоморфизму групп.

В работе [2] решается прежняя задача, рассмотрения ведутся вновь по mod 2, однако теперь полиэдр K расположен в произвольном замкнутом n-мерном многообразии M^n. Решение задачи потребовало, по-видимому, впервые в истории топологии рассмотрения гомологических свойств непрерывных отображений. Именно, пришлось изучать ядра и образы гомоморфизмов групп гомологий mod 2, соответствующих вложениям $K \subset M^n$, $M^n \setminus K \subset M^n$. Впоследствии изучение гомологических свойств отображений приобрело выдающееся значение в топологии и явилось одним из главных источников гомологической алгебры.

Основные результаты работы можно сформулировать (несколько модернизируя терминологию работы) в виде следующих трех предложенией А) — С).

А) Пусть G^r, Γ^{n-r-1} — ядра гомоморфизмов вложения r-мерной и $n-r-$ -1-мерной групп гомологий полиэдров $M \setminus K^n \subset M^n$ и $K \subset M^n$ соответственно. Тогда группы G^r и Γ^{n-r-1} двойственны относительно взятия зацеплений в M^n по mod 2, т. е. ранги G^r и Γ^{n-r-1} равны, причем в них можно выбрать базы

$$z_1^r, \ldots, z_k^r; \quad \zeta_1^{n-r-1}, \ldots, \zeta_k^{n-r-1}$$

Таким образом, что квадратная матрица, составленная из коэффициентов зацеплений (z_i^r, ζ_j^{n-r-1}), является единичной.

В) Если r-мерный цикл z^r из M^n имеет с каждым $n-r$-мерным циклом из K нулевой индекс пересечения, то цикл z^r гомологически можно «снять» с полиэдра K, т. е. существует r-мерный цикл, гомологичный в M^n циклу z^r и целиком расположенный в $M^n \setminus K$.

С) Имеет место формула

$$p^r (M^n \setminus K) = q^{n-r-1} (K) + p^r (M^n) - (p^{n-r} (K) - q^{n-r}(K)),$$

где p^r — r-мерное число Бетти; $q^s (K)$ — ранг ядра гомоморфизма вложения.

Явно в работе сформулированы предложения А) и С), предложение В) фактически содержится в доказательстве формулы С) и стало известно как «теорема о снятии цикла». Оно нашло впоследствии применение в топологической теории вариационных задач, сам Л. С. использовал ее для оценки категории многообразия.

Из сказанного видно, как далеко была продвинута одна из центральных проблем алгебраической топологии конца 20-х годов двумя небольшими по объему работами девятнадцатилетнего студента второго курса.

Следующей работой, посвященной теоремам двойственности, была дипломная работа Л. С. Понтрягина [3], написанная под сильным влиянием прослушанного им курса Э. Нетер по алгебре. Здесь алгебраическая природа топологических теорем двойственности вскрыта весьма глубоко. При этом двойственность по произвольному модулю $m > 0$ получила в работе окончательное решение как изоморфизм соответствующих групп в силу того обстоятельства, что циклическая группа конечного порядка двойственна самой себе в смысле Понтрягина (понятие, которым Л. С. в то время еще не владел). Поэтому сформулируем сначала основные результаты работы для случая ненулевого модуля m, а затем более кратко упомянем результаты работы, относящиеся к целочисленным группам гомологий.

Пусть между двумя абелевыми группами с конечным числом образующих X, Y определено (дистрибутивное относительно сложения) спаривание в циклическую группу Z_m конечного порядка m. Такая пара называется в работе примитивной, если аннулятор каждой из них (относительно введенного спаривания) совпадает с нулевым элементом другой. Доказывается, что всякая примитивная пара состоит из изоморфных групп.

Две основные теоремы двойственности, содержащиеся в работе, мы сформулируем в виде предложений А) и В), условившись обозначать через $H_m^s(L)$ s-мерную группу гомологий по mod m.

А) Обобщенная теорема двойственности Пуанкаре — Веблена. Для произвольного ориентированного замкнутого многообразия M^n группы $H_m^r(M^n)$ и $H_m^{n-r}(M^n)$ образуют примитивную пару, если в качестве спаривания со значениями в Z_m принять индекс пересечения их элементов; следовательно, эти группы изоморфны. Если M^n не ориентируемо, предложение остается в силе при $m = 2$.

В) Обобщенная теорема двойственности Александера. Пусть K — (конечный) полиэдр в ориентированном замкнутом многообразии M^n.

а) Обозначим через A_m^r, B_m^{n-r} образы при гомоморфизмах вложения $M^n \setminus K \subset M^n$, $K \subset M^n$ групп $H_m^r(M^n \setminus K)$, $H_m^{n-r}(K)$ соответственно. Тогда каждая из групп $A_m^r \subset H_m^r(M^n)$, $B_m^{n-r} \subset H_m^{n-r}(M^n)$ является аннулятором для другой при двойственности, существующей между $H_m^r(M^n)$ и $H_m^{n-r}(M^n)$ согласно предложению А).

б) Обозначим через C_m^r, D_m^{n-r-1} ядра гомоморфизмов вложения $M^n \setminus K \subset M^n$, $K \subset M^n$ групп $H_m^r(M^n \setminus K)$, $H_m^{n-r-1}(K)$ соответственно. Оказывается, что группы C_m^r и D_m^{n-r-1} образуют примитивную пару относительно взятия зацеплений в M^n по mod m. Если M^n не ориентируемо, то предложение остается в силе при $m = 2$.

Таким образом, двойственность здесь все еще сводится к изоморфизму между соответствующими группами, дополненному инвариантной формулировкой теоремы о снятии цикла по произвольному модулю $m > 0$ (предложение В) — а)). В частности, из В) — б) вытекает, что все гомологические группы mod m дополнения $R^n \setminus K$ инвариантны, т. е. зависят лишь от соответствующих гомологических групп полиэдра K, но не от расположения полиэдра в R^n.

Теоремы двойственности для полных групп гомологий по целочисленным коэффициентам не имеют характера изоморфизма, поэтому они не включились еще в приведенную схему. Например, полная r-мерная целочисленная группа гомологий $H^r(R^n \setminus K)$ не только не изоморфна группе $H^{n-r-1}(K)$, но вообще ее не определяет. Существует лишь изоморфизм (также отмеченный в работе) отдельно между r-мерными и $n - r - 1$-мерными группами слабых гомологий и отдельно между r-мерными и $n - r - 2$-мерными группами кручений множеств $R^n \setminus K$ и K, из которых уже очевидным образом вытекала инвариантность полных групп целочисленных гомологий дополнения $R^n \setminus K$.

Если вместо конечного полиэдра K рассматривать произвольное компактное множество $F \subset R^n$, то соответствующие группы целочисленных и слабых гомологий уже не являются, вообще говоря, конечно-порожденными, и вопрос об инвариантности групп гомологий дополнения $R^n \setminus F$, требует особого изучения. В работе изучается методом проекционных спектров П. С. Александрова двойственность и для случая произвольного компактного $F \subset R^n$, причем установлена инвариантность групп $H^r_m (R^n \setminus F)$, $m > 0$, а также инвариантность групп слабых гомологий $H^r_0 (R^n \setminus F)$, что было существенным продвижением проблемы.

Однако центральный вопрос о независимости полной группы целочисленных гомологий $H^r (R^n \setminus F)$ от расположения компакта $F \subset R^n$ оставался открытым. Он потребовал для своего разрешения введения нового гомологического инварианта множества F — его группы гомологий не с дискретной, а с компактной группой коэффициентов, что позволило отказаться от узкого взгляда на двойственность как на изоморфизм и определить его как «двойственность в смысле Понтрягина». Этот радикальный шаг, полностью разрешивший все относящиеся сюда проблемы двойственности, а также давно стоявшую проблему удовлетворительного определения групп гомологий компактных метрических пространств, был сделан Л. С. Понтрягиным в 1931—1932 гг. и заключался в следующем.

Коэффициенты при построении группы гомологий $H^r (F)$ множества F берутся не из дискретной группы вычетов mod m или группы целых чисел, а из компактной топологической группы вращений окружности; сама группа $H^r (F)$ также является в этом случае компактной коммутативной топологической группой. Оказалось, что группа $H^r (F)$ и целочисленная $n - r - 1$-мерная группа гомологий $H^{n-r-1}(R^n \setminus F)$ двойственны в смысле Понтрягина, т. е. каждая из них является группой характеров другой (подробное изложение теории характеров см. в [4]).

Более общо, пусть Γ, G — двойственная пара групп, т. е. каждая из них является группой характеров другой, и пусть группа Γ компактна, а G — дискретна. Примем Γ за группу коэффициентов при построении группы гомологий $H^r_\Gamma (F)$; тогда двойственной ей (т. е. группой характеров) оказывается группа гомологий дополнения $H^{n-r-1}_G (R^n \setminus F)$, при построении которой в качестве коэффициентов следует взять двойственную к Γ группу G; двойственность осуществляется с помощью коэффициентов зацепления.

Краткое сообщение об общей теореме двойственности для замкнутого множества $F \subset R^n$ появилось впервые в трудах Международного математического конгресса в Цюрихе в 1932 г., полное изложение — в работе [5].

Этой работой фактически завершаются исследования Л. С. Понтрягина по топологическим теоремам двойственности. Они полностью разрешили центральную проблему алгебраической топологии 30-х годов, явившись одновременно мощным методом изучения общих гомологических проблем топологии. В частности, после работ Л. С. Понтрягина по теореме двойственности группы гомологий окончательно утвердились как основные гомологические инварианты топологии вместо чисел Бетти и коэффициентов кручения, которые вполне заменяли группы гомологий, пока основной круг изучавшихся топологических проблем приводил к конечно-порожденным группам.

В окончательной форме изложение топологических теорем двойственности для (конечного) полиэдра K, лежащего в произвольном замкнутом n-мерном многообразии M^n, содержится в работе [6].

Непосредственным и логическим продолжением работ по теории двойственности явилось создание Л. С. Понтрягиным общей теории характеров локально-компактных коммутативных групп. Ее центральным результатом была теорема о том, что всякая компактная коммутативная топологическая группа является группой характеров некоторой дискретной группы. Доказательство теоремы опиралось на конструкцию Хаара инвариантной меры (1933 г.), сыгравшую существенную роль в развитии топологической алгебры.

Общая теория характеров позволила Л. С. Понтрягину выяснить структуру компактных и локально-компактных групп, причем в компактном и коммутативном случаях результаты получились окончательными. Из этих результатов, в частности, вытекало положительное решение пятой проблемы Гильберта для случая компактных и коммутативных локально-компактных групп. (Подробное изложение строения компактных и локально-компактных коммутативных групп см. в третьем издании «Непрерывных групп».)

Этим, однако, значение общей теории характеров локально-компактных топологических групп не исчерпывается. Ее создание фактически знаменовало начало топологической алгебры как самостоятельной науки, приведшей к построению общего гармонического анализа на топологических группах. Работы Л. С. Понтрягина по теории двойственности и теории характеров оказали глубокое влияние на все алгебро-топологическое мышление 30-х годов, в частности они сыграли выдающуюся роль в выработке «функториального мышления» в математике.

Первыми публикациями по общей теории характеров коммутативных топологических групп и по изучению структуры компактных групп и локально-компактных коммутативных групп являются работы [7—9].

К работам по топологической алгебре следует отнести и замечательную теорему Л. С. Понтрягина, в силу которой единственными локально-компактными связными телами являются поле действительных чисел, поле комплексных чисел или тело кватернионов (см. [10]).

Методы, разработанные в этой работе, были в полной мере использованы Л. С. Понтрягиным впоследствии при изучении структуры локально-компактных коммутативных групп с помощью теории характеров, о чем было сказано выше.

Итогом занятий топологической алгеброй стала знаменитая монография Л. С. Понтрягина «Непрерывные группы», появившаяся впервые в 1938 г., а затем много раз переиздававшаяся как в СССР, так и во многих странах мира на всех основных европейских языках. Эта поистине классическая книга, формировавшая научное мировоззрение многих поколений математиков, сохраняет удивительную актуальность даже в наши дни, спустя сорок с лишним лет после опубликования — явление чрезвычайно редкое в математике. Ее третье русское издание появилось в 1973 г. (см. [4]).

К ранним топологическим работам Л. С. Понтрягина относятся его работы по теории размерности. Здесь им были построены примеры компактных метрических пространств, имеющих различные размерности по разным модулям. Те же примеры были затем использованы (см. [11]) для построения знаменитых «размерно неполноценных» континуумов, опровергавших давно стоявшую гипотезу о том, что при топологическом перемножении компактов их размерности складываются — размерность произведения построенных в работе двух двумерных компактов равнялась не четырем, а трем. К работам по теории размерности следует также отнести его теорему о том, что всякий n-мерный компакт гомеоморфно отображается в R^{2n+1} (см. [12]).

Работы Л. С. Понтрягина по теории размерности сыграли существенную роль при построении П. С. Александровым гомологической теории размерности. В творчестве самого Л. С. Понтрягина они имели далеко идущие последствия — под их влиянием он занялся в середине 30-х годов систематическим изучением гомотопических проблем топологии.

Работы по гомотопической топологии также завершились (к концу 40-х — началу 50-х годов) созданием методов, во многом определяющих целое направление современной математики — дифференциальной топологии. Мы имеем в виду открытие характеристических классов и участие в создании теории расслоенных пространств.

Однако прежде чем перейти к «гомотопическому периоду», мы отметим здесь одну замечательную топологическую работу Л. С. Понтрягина, выполненную им в 1935 г. (см. [13], подробное изложение в [14]).

В ней решается задача Э. Картана о вычислении групп гомологий компактных групповых многообразий для четырех основных серий компактных групп Ли. Исторически это была первая работа, в которой были найдены гомологические инварианты большого и чрезвычайно важного класса многообразий, заданных не своей триангуляцией, а аналитическими (в данном случае алгебраическими) соотношениями.

Основная идея решения Л. С. Понтрягина опирается не на метод, предложенный самим Э. Картаном и основанный на изучении алгебры внешних инвариантных форм на группе, а на метод М. Морса задания гладкой функции на многообразии с изолированными критическими точками и к построению ортогональных траекторий к поверхностям уровня функции. Этот метод подвергся здесь обобщению в том отношении, что критические точки функции были уже не изолированными, а составляли целые «критические подмногообразия».

Методы, развитые в этой работе, оказали значительное влияние на дальнейшее развитие топологии групповых многообразий и однородных пространств в работах Х. Хопфа и других математиков, а также были использованы самим Л. С. Понтрягиным впоследствии при решении некоторых вспомогательных задач, связанных: гомотопическим направлением, в частности при вычислении групп гомологий грассмановых многообразий. Кроме того, ее прямым следствием явилась одна очень тонкая топологическая работа, выполненная много позднее (см. [15]).

Дело в том, что во всех компактных простых группах Ли числа Бетти оказались равными соответствующим числам Бетти прямых произведений сфер различных размерностей. Поэтому возник вопрос, не гомеоморфна ли компактная простая группа Ли произведению сфер соответствующих размерностей. Этот вопрос решается отрицательно в названной работе с помощью гомотопических методов. Именно, специальная унитарная группа матриц третьего порядка имеет те же числа Бетти, что и произведение трехмерной сферы на пятимерную, но сама группа не гомеоморфна произведению сфер, что удалось установить, используя классификацию отображений сферы S^4 на S^3.

Теперь мы переходим к гомотопическим работам Л. С. Понтрягина. Центральной задачей начального периода развития гомотопической топологии была задача гомотопической классификации отображений сфер в сферы низших размерностей. Л. С. Понтрягин пришел к ней, безуспешно пытаясь дать локальную характеристику размерности компактного множества, лежащего в R^n, через гомологические характеристики дополнения.

Вначале он пытался задачу гомотопической классификации отображений сферы S^{n+k} на S^n решать гомологическими методами, однако вскоре, узнав о работе Х. Хопфа о классах отображений S^3 на S^2, он полностью оценил ситуацию, и с этого времени начинается примерно 15-летний период занятий Л. С. Понтрягина гомотопической топологией.

Прежде всего им было доказано, что хопфовский инвариант отображения S^3 в S^2 является единственным и, следовательно, что конструкция Хопфа дает все классы отображений S^3 в S^2; таким образом, была получена полная классификация отображений S^3 в S^2. Вскоре затем в 1936 г. Л. С. Понтрягиным был получен поразительный результат — число классов отображений S^{n+1} в S^n при $n \geqslant 3$ равно 2 (см. [16]). При классификации отображений S^{n+2} и S^n была допущена вычислительная ошибка, повлекшая к неверному результату; она была исправлена Л. С. Понтрягиным в 1950 г. (см. [17]); и здесь число классов отображений оказалось равным 2.

Первоначальный вариант доказательства этих результатов чрезвычайно сложен. Лишь позднее, после создания метода оснащенных многообразий (см. ниже), их удалось предельно упростить.

Далее последовало решение целого ряда задач гомотопической классификации полиэдров в сферы и сфер в полиэдры. Из этой серии работ мы отметим здесь лишь две (см. [18, 19]). В них впервые введены такие основополагающие понятия теории гомотопий, как препятствия и различающие, а также вводится (во второй работе) новая когомологическая операция — «понтрягинский квадрат», послуживший прототипом важнейших когомологических операций Стинрода.

Однако центральная проблема — задача классификации отображений S^{n+k} в S^n при $k \geqslant 3$ — не поддавалась решению. Она и привела Л. С. к созданию так называемого «метода оснащенных многообразий», к открытию новых инвариантов гладких многообразий — характеристических классов, вошедших в математику под названием «понтрягинских классов», и к созданию теории расслоенных пространств, т. е. к созданию нового и очень важного раздела современной математики — дифференциальной топологии.

Первоисследователями здесь наряду с. Л. С. Понтрягиным следует назвать Х. Хопфа, Э. Штифеля, Х. Уитни и С. Чженя.

Метод оснащенных многообразий был создан для изучения гомотопических свойств отображений, при этом использовалась информация о дифференциально-топологической структуре многообразия, и с его помощью удалось проклассифицировать отображения S^{n+k} на S^n лишь при $k \leqslant 3$ (для $k = 1$, 2 самим Л. С. Понтрягиным, о чем сказано выше, для $k = 3$ — В. А. Рохлиным в начале 50-х годов) вследствие того, что при $k > 3$ метод потребовал информации о гладких многообразиях размерностей > 3, которую имевшимися (в начале 50-х годов) методами получить не удалось. Однако метод оснащенных многообразий в равной мере может служить и для обратной цели — для изучения гладкого многообразия, когда мы располагаем гомотопической информацией, которую с гораздо большим успехом можно черпать с помощью алгебраического метода Лере (спектральных последовательностей). Такое обращение метода было развито Р. Томом под названием теории бордизмов. Многие наиболее глубокие результаты современной теории гладких многообразий были получены именно комбинированием дифференциально-топологического метода Л. С. Понтрягина и Р. Тома и алгебраического метода Лере.

В настоящее время характеристические классы являются центральным объектом не только дифференциальной топологии, но и всей современной дифференциальной геометрии, а теория расслоенных пространств уже давно превратилась в стандартное орудие исследования как в топологии и геометрии, так и в анализе.

Долгое время проблема топологической инвариантности характеристических классов (которые, по определению, являются инвариантами гладкого многообразия) была одной из центральных в топологии многообразий. Ею занимался и Л. С. Понтрягин, однако решить ее удалось лишь в середине 60-х годов С. П. Новикову, опираясь на методы, разработанные уже после 50-х годов. Оказалось, что если в качестве поля коэффициентов брать рациональные числа, то характеристические классы действительно являются топологическими инвариантами многообразия, однако целочисленные классы конечного порядка топологически не инвариантны, что было обнаружено Дж. Милнором еще до работы С. П. Новикова в начала 60-х годов.

Теория характеристических классов и тесно связанная с ней теория особенностей векторных полей изложены в трех больших работах [24—26]. Предварительные публикации соответствующих результатов появились в более ранних работах [20—23]. В работе [22] содержится также краткое изложение теории классифицирующих пространств, сыгравшей впоследствии важную роль в развитии теории расслоенных пространств.

Изложение метода оснащенного многообразия вместе с полной классификацией отображения S^{n+k} в S^n при $k = 0, 1, 2$ можно найти в монографии [27], содержащей и первое в мировой литературе изложение основ дифференциальной топологии.

Для полноты отметим еще известный учебник Л. С. Понтрягина по алгебраической топологии [28].

Работой [27] заканчивается «топологический период» в творчестве Л. С. Понтрягина, и он полностью переключается в начале 50-х годов в область исследований, связанную исключительно с прикладной математикой. До этого времени Л. С. Понтрягин обращался к нетопологической и прикладной тематике эпизодически, однако с большим успехом.

Рассмотрение ранних нетопологических работ мы начнем со знаменитой работы [29], выполненной совместно с А. А. Андроновым, в которой впервые вводится понятие структурно-устойчивой динамической системы на плоскости под названием грубой системы и формулируется условие грубости.

В самом общем плане идея грубости имеет два источника — физический и математический. Физическая мотивировка возникла в связи с изучением А. А. Андроновым автоколебаний и заключается в том, что если динамическая система, описывающая физическое явление, известна лишь приближенно, то качественная картина разбиения фазовой плоскости системы на траектории может отражать рассматриваемое явление лишь в том случае, когда эта картина не меняется при малых изменениях динамической системы. Математическая мотивировка связана с идеей «типичности» или «общего положения», которая вовсе не является специфической для дифференциальных уравнений и широко применяется во многих разделах математики, в том числе в топологических работах Л. С. Для случая «общего положения» картину следует ожидать более простой, чем для исключительных случаев, в то же время именно случай «общего положения» заслуживает первостепенного внимания.

Гладкий поток (класса C^1) в области $O \subset R^2$, ограниченной гладкой замкнутой кривой, всюду трансверсальной к траекториям, называется в работе грубым, если для любого потока, достаточно близкого к исходному в смысле C^1, имеется гомеоморфизм области O на себя, C^0 — близкий к тождественному и переводящий траектории одного потока в траектории другого с сохранением направления движения по ним.

Дав это определение, авторы показывают, что на плоскости грубые системы являются типичными (образуют открытое всюду плотное множество), а качественная картина для них весьма проста. Фактически здесь как бы сливаются воедино три идеи — «простота» системы, грубость и «типичность» (соответствующие классы систем совпадают). Это «слияние» специфично для малой размерности фазового пространства и отсутствует в высших размерностях. Однако сами по себе эти три свойства сохраняют первостепенный интерес и для многомерных систем, и вопросы о поведении траекторий для соответствующих классов систем и о взаимоотношениях между этими классами доминировали при изучении гладких динамических систем за последние 20—25 лет и восходят в конечном счете к [29].

Еще раньше сказалось влияние работы [29] на двумерную качественную теорию дифференциальных уравнений. Во-первых, в [29] была отмечена роль «особых» (орбитно-неустойчивых) траекторий, разбивающих фазовую плоскость на «ячейки», заполненные траекториями с одинаковым поведением. Во-вторых, решение вопроса о грубых системах на плоскости создало основу для исследования в двумерном случае «типичных» бифуркаций динамической системы, зависящей от параметра.

Из ранних работ Л. С. Понтрягина по теории динамических систем отметим еще работу [30], в которой даны весьма простые и удобные для практических применений условия рождения предельного цикла из замкнутой траектории плоской нелинейной гамильтоновой системы при малом автономном (неконсервативном) возмущении.

Среди ранних нетопологических работ Л. С. Понтрягина особого упоминания заслуживает также работа [31], оказавшая значительное влияние на развитие функционального анализа пространств с индефинитной метрикой. Она была выполнена в Казани во время Великой Отечественной войны и была вызвана чисто прикладной проблемой, связанной с некоторой баллистической задачей об устойчивости. Ее основной результат заключается в том, что всякий эрмитов оператор в гильбертовом пространстве с индефинитной метрикой индекса k имеет k-мерное инвариантное подпространство, на котором все собственные значения оператора имеют неотрицательные мнимые части, а основная (индефинитная) форма пространства неотрицательна.

Еще одна работа военного времени, выполненная в Казани, имела отношение к теории устойчивости. В ней были найдены условия, при которых квазимногочлен имеет корни с отрицательными действительными частями (см. [32]). Позже эти условия были обобщены для функций вида f/g, где f — квазимногочлен, g — многочлен, причем отношение не имеет полюсов ([см. [33]).

Теперь мы переходим к периоду научной деятельности Л. С. Понтрягина, начало которого можно датировать примерно началом 50-х годов и продолжается по сей день и в течение которого все его усилия направлены на решение проблем прикладной математики.

Здесь еще раз с огромной силой проявился исключительный дар Л. С. Понтрягина распознавать в первозданном хаосе каждой новой проблемы тот главный путь, который быстрейшим образом ведет к цели, и продвигаться по нему, преодолевая технические трудности, порой казавшиеся неприступными.

Для изучения новой тематики Л. С. Понтрягин основал в 1952 г. в Математическом институте им. В. А. Стеклова АН СССР специальный семинар по математическим проблемам теории колебаний и теории управления. Он считал, что для истинного успеха во всякой области прикладной математики нецелесообразно ограничивать себя исследованием уже готовых математических моделей, а следует начинать изучение проблемы с самих инженерных задач для того, чтобы не только лучше разобраться в уже существующих моделях, но и прийти к постановке совершенно новых математических задач, имеющих, кроме технического, и чисто математический интерес.

В результате работы семинара очень скоро определились два больших направления исследования, которыми и начал с большим успехом заниматься Л. С. Понтрягин совместно со своими учениками В. Г. Болтянским, Р. В. Гамкрелидзе и Е. Ф. Мищенко,— теория релаксационных (разрывных) колебаний и теория оптимального управления.

К числу важных областей применения теории обыкновенных дифференциальных уравнений относится радиотехника. Система уравнений, описывающая работу любого радиотехнического прибора, всегда составляется на основе некоторой идеализации прибора. Радиотехнический прибор собирается из ряда деталей: транзисторов, конденсаторов, индуктивностей и т. п. Физические величины, характеризующие эти детали, как-то: числовая величина емкости конденсатора, числовая величина индуктивности и т. п.— называются параметрами прибора. Кроме деталей, предусмотренных конструкцией прибора, в него, как правило, входят паразитные детали; им соответствуют паразитные, обычно малые параметры. Таковы внутренние емкости, индуктивности коротких соединяющих проводов и т. п. При идеализации естественно пренебречь малыми паразитными параметрами. Обнаружилось, однако, что такое пренебрежение в ряде случаев дает не только неточное, но даже качественно неправильное описание работы прибора. Если составить систему дифференциальных уравнений с учетом малых паразитных параметров, то может случиться, что они входят коэффициентами при высших производных, так что, считая эти параметры равными нулю, мы получаем систему уравнений более низкого порядка, притом зачастую неразрешимую относительно оставшихся высших производных. Именно при этих обстоятельствах пренебрежение малыми паразитными параметрами может привести к неадекватному описанию физического явления. Л. С. Понтрягин рассматривал довольно общую систему, которая в ряде случаев дала правильное объяснение работы соответствующего прибора, невозможное при пренебрежении малыми параметрами.

С другой стороны рассмотрение этой общей системы привело к постановке и решению новых задач, представляющих и чисто математический интерес. Эта система такова:

$$\varepsilon\dot{x} = f(x, y), \qquad \dot{y} = g(x, y),$$

где x — k-мерный вектор; y — l-мерный вектор; $k+l=n$; ε — малый положительный параметр. Переменные x и y здесь не равноправны: вектор v фазовой скорости в пространстве переменных (x, y) распадается на два вектора:

$$v=\left(\frac{1}{\varepsilon} f(x, y), g(x, y)\right),$$

причем второй из них $g(x, y)$ не зависит от ε, а первый стремится к бесконечности при $\varepsilon \to 0$, если только $f(x, y) \neq 0$. На основании этого переменные x можно назвать быстро меняющимися, а переменные y — медленно меняющимися. Основной подход к рассматриваемой системе, предложенный Л. С. Понтрягиным, заключается в том, что сперва изучается поведение быстро меняющихся переменных при постоянном значении медленно меняющихся переменных. Таким образом, сначала рассматривается система

$$\varepsilon \dot{x}=f(x, y),$$

в которой вектор y считается параметром. Относительно поведения ее решений можно делать различные предположения, и от них зависит поведение решений полной системы. Л. С. Понтрягин изучил как случай, когда система уравнений быстрых движений имеет своими стационарными решениями лишь положения равновесия, так и случай, когда среди стационарных решений есть и устойчивые предельные циклы. Он обнаружил, что в первом случае наиболее важные и интересные асимптотические явления происходят в окрестности так называемых точек срыва, т. е. точек, где сливаются устойчивое и неустойчивое положения равновесия. Такие точки не являются исключительным явлением на траекториях вырожденной системы уравнений

$$f(x, y)=0, \qquad \dot{y}=g(x, y),$$

а, наоборот, весьма типичны и, в частности, необходимо присутствуют на траектории каждого разрывного периодического решения вырожденной системы. Таким образом, результаты Л. С. Понтрягина об асимптотике решений невырожденной системы в окрестности точек срыва оказались ключевыми при решении трудной математической задачи — изучении асимптотики релаксационных колебаний. К настоящему времени в работах Л. С. Понтрягина и его учеников эта задача далеко продвинута в многомерном случае и решена полностью в случае $n=2$. Большим подспорьем для Л. С. в этих исследованиях была его редкая способность проводить в уме длинные вычисления и удерживать в памяти сложнейшие выражения. (Работы Л. С. Понтрягина по этой тематике см. в кн.: Лев Семенович Понтрягин. М.: Наука, 1983.)

В теории оптимального управления Л. С. Понтрягин открыл в середине 50-х годов знаменитый «принцип максимума Понтрягина», который явился универсальным и одновременно очень просто формулируемым и действенным методом решения задач оптимизации чрезвычайно широкого спектра — от чисто прикладных, взятых из самых различных областей техники, до задач теоретического характера. Принцип максимума содержит в себе фактически и всю теорию первого порядка классического вариационного исчисления, однако последняя оказалась бессильной для решения многих задач новой техники, анализ которых и привел к открытию принципа.

Принцип максимума очень просто формулируется, и мы приведем здесь его формулировку для важнейшего случая оптимальности по быстродействию.

Процесс называется управляемым, если он описывается n-мерным векторным дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = f(x, u),$$

где $x \in R^n$ — фазовая точка; u — r-мерный векторный управляющий параметр, который может принимать значения из некоторого заданного множества $U \subset R^n$, в большинстве приложений оказывающегося замкнутой областью. Ставится следующая задача: выбрать управление $u(t) \in U$ как функцию времени t таким образом, чтобы соответствующая ей траектория $x(t)$ уравнения

$$\dot{z} = f(x, u(t))$$

перешла из заданного положения x_0 в другое заданное положение x_1 за минимальное время. Такое управление и соответствующая ей траектория называются оптимальными. Введем скалярную функцию

$$H(x, \psi, u) = \psi f(x, u),$$

где справа стоит скалярное произведение n-мерного вектора ψ на f, и напишем каноническую систему уравнений

$$\dot{x} = f = \partial H/\partial\psi, \quad \dot{\psi} = -\psi\, \partial f/\partial x = -\partial H/\partial x.$$

Тогда принцип максимума Понтрягина утверждает, что для оптимальности управления $u(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, и соответствующей траектории $x(t)$ необходимо существование такого ненулевого переменного вектора $\psi(t)$, что $u(t)$, $x(t)$, $\psi(t)$ удовлетворяют написанной канонической системе и «условию максимума Понтрягина»

$$H(x(t), \psi(t), u(t)) = \max_{u \in U} H(x(t), \psi(t), u) \quad \forall t \in [t_0, t_1].$$

Открытие принципа максимума оказалось настолько значительным явлением в прикладной математике, что очень скоро оно привело к созданию целого нового направления в ней — теории оптимального управления, являющейся в настоящее время одной из наиболее развивающихся и актуальных разделов прикладной математики, а поток работ, вызванный этой теорией во всем мире, в буквальном смысле слова необозрим.

Среди работ Л. С. Понтрягина, оказавших наибольшее влияние на развитие теории оптимального управления, мы отметим его пленарный доклад на Эдинбургском математическом конгрессе 1958 г. [34], а также его совместную с В. Г. Болтянским, Р. В. Гамкрелидзе и Е. Ф. Мищенко монографию [35], удостоенную Ленинской премии в 1962 г.

Естественным развитием теории оптимального управления Л. С. Понтрягиным явилась теория дифференциальных игр. Хотя сама постановка задачи преследования одного управляемого объекта другим управляемым объектом возникла у него даже раньше, чем открытие принципа максимума, однако первая его работа по теории дифференциальных игр появилась в «Успехах математических наук» лишь в 1966 г. (см. [36]). В этой работе рассматривалась общая нелинейная игра преследования

$$\dot{z} = F(z, u, v),$$

где z — вектор n-мерного евклидова векторного пространства R^n; u и v — соответственно управления преследования и убегания, на которые наложены ограничения $u \in P, v \in Q$; P и Q — некоторые компактные множества из R^n. Рассматривая задачу преследования в этой игре, Л. С. Понтрягин, используя методы оптимального управления, получил общую теорему, дающую достаточные условия для ее завершения. Хотя эти условия довольно громоздки, из них, однако, вытекало окончательное решение задачи преследования для двух объектов, описываемых линейными дифференциальными уравнениями

$$\ddot{x} + \alpha\dot{x} = \rho u, \quad \ddot{y} + \beta\dot{y} = \sigma v, \quad |u| \leqslant 1, \ |v| \leqslant 1,$$

(α, β, ρ, σ — положительные константы), до того не поддававшейся решению.

Однако впоследствии Л. С. предпочел другой путь развития теории линейных игр, т. е. игр, описываемых системой уравнений

$$\dot{z} = Cz - u + v, \quad u \in P, \quad v \in Q,$$

где P и Q — произвольные компактные выпуклые множества в R^n; C — постоянная квадратная матрица. Он расчленил изучение дифференциальной игры на решение двух отдельных задач — задачи преследования и задачи убегания — и в решении обеих задач получил фундаментальные результаты. Результаты эти сформулированы им в виде достаточных условий преследования и убегания, и в общих чертах их легко описать. Для этого уточним сначала саму постановку задач преследования и убегания.

Будем говорить, что в дифференциальной игре преследование может быть закончено из точки z_0, если существует такое число $T\ (z_0)$, что при произвольном измеримом изменении управления $v = v\ (t)$ можно подобрать такое измеримое изменение управления $u = u\ (t)$, что точка $z\ (t)$, являющаяся решением уравнения

$$\dot{z} = Cz - u\ (t) + v\ (t), \quad z_0 = z\ (0),$$

попадает на некоторое множество $M \subset R^n$ за время, не превосходящее $T\ (z_0)$. При этом для нахождения $u\ (t)$ в каждый момент времени t разрешается использовать значение $z\ (t)$ в тот же момент времени t и управление $v\ (\tau)$ на отрезке $[t,\ t + \varepsilon]$, где ε — малое положительное число, и не разрешается использовать значение $v\ (\tau)$ при $\tau > t + \varepsilon$. В задаче преследования такая постановка вполне допустима; она соответствует ситуации, когда преследующий объект гонится не за самим убегающим объектом, а за той точкой, где убегающий находился ε-секунд назад. Примерно так же ставится и задача убегания.

Сформулируем основные результаты Л. С. Понтрягина для наиболее простого случая, когда M — линейное векторное подпространство пространства R^n. Для этого обозначим через L ортогональное дополнение к M в R^n, через π — оператор проектирования из R^n на L. Наконец под геометрической разностью $A \overset{*}{-} B$ двух замкнутых множеств A и B из R^n будем понимать совокупность всех векторов d, таких, что $d + B \subset A$. Рассмотрим теперь выпуклое замкнутое множество

$$W\ (t) = \int\limits_0^t (\pi e^{rC} P \overset{*}{-} \pi e^{rC} Q)\, dr,$$

зависящее от t, и пусть для некоторого $t = t_1$ имеет место включение $\pi e^{t_1 C} z_0 \in W\ (t_1)$. В этом случае легко доказать существование наименьшего из таких чисел t_1, которое обозначим $\tau\ (z_0)$. Тогда линейная игра, начинающаяся в точке z_0, может быть завершена за время, не превосходящее числа $\tau\ (z_0)$.

Так же просто формулируются и достаточные условия для игры убегания. Именно, пусть существует такое двумерное подпространство L^2 пространства L, что в нем нет никакого фиксированного одномерного подпространства L^1, для которого имеется включение $\pi e^{\tau C}Q \overset{*}{\subset} L_1$ при всех малых положительных τ. Пусть, кроме того, существует такая константа $\mu > 1$, что $\mu \pi e^{\tau C}P \overset{*}{\subset} \pi e^{\tau C}Q$ при всех достаточно малых положительных τ. Тогда при любом начальном значении $z_0 \notin M$ можно так вести игру убегания, что точка $z(t)$ никогда не достигнет подпространства M и даже некоторой его окрестности.

Обзор линейной теории дифференциальных игр содержится в пленарном докладе Л. С. Понтрягина на Математическом конгрессе в 1970 г. в Ницце (см. [37]), а их подробное изложение — в работах [38, 39].

Результатом регулярных занятий дифференциальными уравнениями и теорией колебаний явился замечательный учебник Л. С. Понтрягина по обыкновенным дифференциальным уравнениям [40]. В этом учебнике все было оригинально — и отбор материала, и его расположение, равно как и способ изложения и целенаправленность всего курса. Теорема существования и единственности формулировалась и использовалась с самого начала, хотя доказывалась она много позднее, теория линейных систем предшествовала общей теории; значительно подробнее, чем обычно, излагалась теория положений равновесия и предельных циклов и теория устойчивости; впервые в начальном учебнике по дифференциальным уравнениям теория работы электрических схем излагалась как органическая составная часть курса, а не как иллюстративный материал. Книга была написана на основе курса лекций и учебных семинаров, которые Л. С. Понтрягин проводил в течение ряда лет в МГУ, и ее первое издание появилось в 1961 г. В дальнейшем учебник выдержал еще три издания у нас и был переведен на многие языки мира. В 1975 г. учебник был удостоен Государственной премии СССР.

ЛИТЕРАТУРА

(работы Л. С. Понтрягина,
на которые есть ссылки в тексте)

1. Zum alexanderschen Dualitätssatz.— Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, 1927, H. 4, S. 315—322.
2. Zum alexanderschen Dualitätssatz. Zweite Mitteilung.— Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, 1927, H. 4, S. 446—457.
3. Über den algebraischen Inhalt topologischer Dualitätssätze.— Math. Ann., 1931, Bd. 105, H. 2, S. 165—205.
4. Непрерывные группы. 3-е изд. М.: Наука, 1973.
5. The general topological theorem of duality for closed sets.— Ann. Math., 1934, vol. 35, N 4, p. 904—914.
6. Топологические теоремы двойственности.— Успехи мат. наук, 1947, т. 2, вып. 2, с. 21—44.
7. The theory of topological commutative groups.— Ann. Math., 1934, vol. 35, N 2, p. 361—388.
8. Sur les groupes abéliens continus.— C. r. Acad. sci., P., 1934, vol. 198, N 4, p. 328—330.
9. Sur les groupes topologique compact et le cinquième probleme de M. Hilbert.— C. r. Acad. sci., P., 1934, vol. 198, N 3, p. 238—240.
10. Über stetige algebraische Körper.— Ann. Math., 1932, vol. 33, N 1, p. 163—174.

11. Sure une hypotèse fondamentale de la théorie de la dimension.— C. r. Acad. sci., P., 1930, vol. 190, N 19, p. 1105—1107.
12. Beweis des Mengerschen Einbettungssatzes.— Math. Ann., 1931, Bd. 105, H. 5, S. 734—745. (In Gemeinschaft mit G. Tolstowa).
13. Sur les nombres de Betti des groups de Lie.— C. r. Acad. sci. P., 1935, vol. 200, N 15, p. 1277—1280.
14. Homologies in compact Lie groups.— Мат. сб., 1939, т. 6, вып. 3, с. 389—422.
15. Über die topologische Struktur der Lieschen Gruppen.— Comment. math. helv., 1940/ /41, vol. 13, p. 277—283.
16. Sur les transformations des sphères en sphères.— In: C. r. Congr. Intern. Math. Oslo, 1937, vol. 2, p. 140.
17. Гомотопическая классификация отображений $n+2$-мерной сферы в n-мерную.— ДАН СССР, 1950, т. 70, № 6, с. 957—959.
18. A classification of mappings of K^3 into S^2.— Мат. сб., 1941, т. 9, вып. 2, с. 331—363.
19. Отображения трехмерной сферы в n-мерный комплекс.— ДАН СССР, 1942, т. 34, № 2, с. 39—41.
20. Характеристические циклы многообразий.— ДАН СССР, 1942, т. 35, № 2, с. 35—39.
21. Некоторые топологические инварианты римановых многообразий.— ДАН СССР, 1944, т. 43, № 3, с. 95—98.
22. Классификация некоторых косых произведений.— ДАН СССР, 1945, т. 47, № 5, с. 327—330.
23. Характеристические циклы.— ДАН СССР, 1945, т. 47, № 4, с. 246—249.
24. Характеристические циклы дифференцируемых многообразий.— Мат. сб., 1947, т. 21, № 2, с. 233—284.
25. Некоторые топологические инварианты замкнутых римановых многообразий.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1949, т. 13, № 2, с. 125—162.
26. Векторные поля на многообразиях.— Мат. сб., 1949, т. 24, № 2, с. 128—162.
27. Гладкие многообразия и их применения в теории гомотопий. М.: Наука, 1955. (Тр. Мат. ин-та им. А. В. Стеклова АН СССР; Т. 45).
28. Основы комбинаторной топологии. М.: Гостехтеориздат, 1947; 2-е изд. М.: Наука, 1976.
29. Грубые системы.— ДАН СССР, 1937, т. 14, № 5, с. 247—250 (совм. с А. А. Андроновым).
30. О динамических системах, близких к гамильтоновым.— ЖЭТФ, 1934, т. 4, № 9, с. 883—885.
31. Эрмитовы операторы в пространстве с индефинитной метрикой.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1944, т. 8, № 6, с. 243—280.
32. О нулях некоторых элементарных трансцендентных функций.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1942, т. 6, № 3, с. 115—134.
33. О нулях некоторых трансцендентных функций (добавление).— ДАН СССР, 1953, т. 91, № 6, с. 1279—1280.
34. Оптимальные процессы регулирования.— In: Proc. Intern. Congr. of Mathematicians, 1958. Cambridge: Univ. press, 1960, p. 182—202.
35. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматгиз, 1961 (совм. с В. Г. Болтянским, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко).
36. К теории дифференциальных игр.— Успехи мат. наук, 1966, т. 21, вып. 4, с. 219—274.
37. Les jeux differentiels lineaires.— In: Actes du Congr. Intern. des mathematiciens, 1970, Nice. P., 1971, vol. 1, p. 163—171.
38. Линейная дифференциальная игра убегания.— Тр. Мат. ин-та им. А. В. Стеклова, 1971, т. 112, с. 30—63.
39. Линейные дифференциальные игры преследования.— Мат. сб., 1980, т. 112, № 3, с. 307—330.
40. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Физматгиз, 1961.