

Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

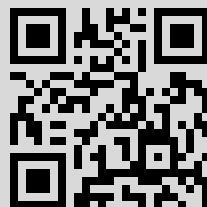
Р. В. Гамкредидзе, Необходимые условия первого порядка и аксиоматика экстремальных задач, *Тр. МИАН СССР*, 1971, том 112, 152–180

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 93.181.215.58

19 ноября 2015 г., 20:16:03



Р. В. ГАМКРЕЛИДЗЕ

НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА И АКСИОМАТИКА ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ

§ 1. Введение

В работе, специально подготовленной для настоящего юбилейного издания, изложены в несколько усовершенствованном и распиленном виде результаты моих работ [1, 2] и совместной с Г. Л. Харатишвили работы [3], касающиеся необходимых условий первого порядка в экстремальных, в частности в оптимальных, задачах.

После открытия принципа максимума Понтрягина в теории оптимального управления (см. [4]) окончательно прояснилась логическая природа необходимых условий первого порядка в экстремальных задачах: стало ясно, что все они в конечном счете сводятся к теоремам отделимости выпуклых множеств в линейных пространствах. Мы не будем приводить список многочисленных работ, появившихся после открытия принципа максимума и специально посвященных общему исследованию необходимых условий первого порядка и связанному с этим аксиоматическому построению теории экстремальных задач. Соответствующие литературные ссылки можно найти в [2] и [3].

Здесь излагается одна из возможных аксиоматик экстремальных задач и необходимых условий первого порядка.

§ 2. Конечномерный случай

Чтобы мотивировать данные в § 3, общие определения начнем с конечномерного случая. Пусть на открытом множестве $O \subset E_x^n$ n -мерного действительного пространства E_x^n точек *

$$x = \begin{pmatrix} x^1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x^n \end{pmatrix}$$

* Всюду в дальнейшем конечномерные векторы, обозначенные латинскими буквами, отождествляются со столбцами соответствующих размерностей, малыми греческими буквами — со строками. Скалярное произведение будет записываться в виде матричного умножения

$$\xi x = (\xi_1, \dots, \xi_n) \begin{pmatrix} x^1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x^n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \xi_i x^i.$$

заданы $1 + k \geq 1$ действительных непрерывно дифференцируемых функций $y^0(x)$, $y^1(x)$, ..., $y^k(x)$, и пусть $\tilde{x} \in O$ — точка условного экстремума функции $y^0(x)$ при условиях

$$y^1(x) = \dots = y^k(x) = 0,$$

т. е. существует такая окрестность $V_{\tilde{x}} \subset O$ точки $\tilde{x}$, что при отображении Y :

$$x \mapsto \begin{pmatrix} y^0(x) \\ y^1(x) \\ \vdots \\ y^k(x) \end{pmatrix} = Y(x) \in E_y^{1+k}, \quad x \in O,$$

точка $Y(\tilde{x})$ является либо «наивысшей», либо «наинизшей» точкой пересечения «вертикальной» оси y^0 пространства E_y^{1+k} с образом $Y(V_{\tilde{x}})$ множества $V_{\tilde{x}}$.

Обозначим через

$$dY_{\tilde{x}}: E_{dx}^n \rightarrow E_{dy}^{1+k}$$

дифференциал отображения Y в точке $\tilde{x}$, отображающий n -мерное «пространство дифференциалов» E_{dx}^n в $1 + k$ -мерное «пространство дифференциалов» E_{dy}^{1+k} :

$$dY_{\tilde{x}}(dx) = \begin{pmatrix} dy_{\tilde{x}}^0(dx) \\ dy_{\tilde{x}}^1(dx) \\ \vdots \\ dy_{\tilde{x}}^k(dx) \end{pmatrix} = \frac{\partial Y(\tilde{x})}{\partial x} dx = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n \frac{\partial y^0(\tilde{x})}{\partial x^i} dx^i \\ \dots \\ \sum_{i=1}^n \frac{\partial y^k(\tilde{x})}{\partial x^i} dx^i \end{pmatrix}.$$

Правило множителей Лагранжа утверждает, что существует ненулевая $(1 + k)$ -мерная строка $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_k)$, ортогональная к подпространству $dY_{\tilde{x}}(E_{dx}^n) \subset E_{dy}^{1+k}$:

$$\lambda dY_{\tilde{x}}(dx) = \lambda \frac{\partial Y(\tilde{x})}{\partial x} dx = \sum_{j=0}^k \lambda_j \text{grad } y^j(\tilde{x}) dx = 0 \quad \forall dx \in E_{dx}^n,$$

или, так как $dx \in E_{dx}^n$ произвольно,

$$\sum_{j=0}^k \lambda_j \text{grad } y^j(\tilde{x}) = 0.$$

При доказательстве правила множителей решающим оказывается то обстоятельство, что образ экстремальной точки $Y(\tilde{x})$ принадлежит границе множества $Y(V_{\tilde{x}})$, т. е. не является внутренней точкой множества $Y(V_{\tilde{x}}) \subset E_y^{1+k}$. Этот факт можно использовать для обобщения понятия экстремальной точки, и таким образом мы придем к понятию критической точки непрерывного отображения и необходимому условию критичности, из которого не только будет следовать условие множителей Лагранжа, но которое почти автоматически можно будет обобщить на бесконечномерный случай, достаточно общий, чтобы охватить основные оптимальные задачи, описы-

ваемые обыкновенными дифференциальными уравнениями.

Имея в виду дальнейшие приложения, мы изменим обозначения и предположим, что D — открытое множество n -мерного пространства E_z^n , точек z и что задано непрерывно дифференцируемое отображение

$$P: D \rightarrow E_p^m, \\ P(z) = \begin{pmatrix} p^1(z) \\ \vdots \\ p^m(z) \end{pmatrix}, \quad z \in D, \quad (2.1)$$

где $p^i(z)$, $i = 1, \dots, m$ — непрерывно дифференцируемые действительные функции на D .

Обозначим дифференциал этого отображения в точке $\bar{z} \in D$ через

$$dP_{\bar{z}}: E_{dz}^n \rightarrow E_{dp}^m. \quad (2.2)$$

Пусть $\Phi_{\bar{z}}$ — произвольный фильтр в E_z^n , пересечение всех элементов которого содержит $\bar{z}$, и пусть существует базис фильтра $\Phi_{\bar{z}}$, все элементы которого содержатся в D , или, как мы будем говорить, пусть *отображение (2.1) определено на фильтре $\Phi_{\bar{z}}$* . При рассмотрении экстремальной точки $\bar{x}$ роль фильтра $\Phi_{\bar{z}}$ играл фильтр окрестностей точки $\bar{x}$.

Определение 2.1. Отображение (2.1) называется *критическим на фильтре $\Phi_{\bar{z}}$* или фильтр $\Phi_{\bar{z}}$ называется *критическим для отображения (2.1)*, если существует такой элемент $\tilde{W} \in \Phi_{\bar{z}}$, $\tilde{W} \subset D$, что точка $P(\bar{z})$ принадлежит границе множества $P(\tilde{W}) \subset E_p^m$.

В том случае, когда $\Phi_{\bar{z}}$ совпадает с фильтром окрестностей точки $\bar{z} \in D$, мы будем говорить о *критичности отображения (2.1) в точке $\bar{z}$* или о *критической точке $\bar{z}$ отображения (2.1)*.

Следующий прием получения фильтров, участвующих в определении 2.1, вполне достаточен для наших целей. Пусть M — произвольное подмножество в D . Класс $B_{\bar{z}}$ всевозможных пересечений $M \cap V_{\bar{z}}$, где $V_{\bar{z}}$ — произвольная окрестность точки $\bar{z} \in M$, является фильтром в множестве M — фильтром окрестностей точки $\bar{z}$ в индуцированной на M из E_z^n топологии. Этот же класс является базисом фильтра $\Phi_{\bar{z}}$ в E_z^n , который будем называть *фильтром окрестностей точки $\bar{z} \in M$ относительно M* . Если $\bar{z}$ — внутренняя точка $M \subset E_z^n$, то $\Phi_{\bar{z}}$ совпадает с фильтром окрестностей точки $\bar{z}$ в E_z^n . Если отображение (2.1) критично на фильтре $\Phi_{\bar{z}}$, то мы будем говорить еще, что точка $\bar{z} \in M$ — *критическая точка отображения*

$$P: M \rightarrow E_p^m \quad (2.3)$$

— ограничения отображения (2.1) на M . Точка $\bar{z}$ является одновременно критической и для отображения (2.1), если она внутренняя точка M .

В определении 2.1 критичности нигде не использована непрерывная дифференцируемость отображения (2.1), она нужна для доказательства необходимого условия критичности. Однако одной только дифференцируемости отображения (1.1) для этого недостаточно, следует ограничить и класс рассматриваемых фильтров.

Фильтр окрестностей точки $\bar{z} \in E_z^n$ обладает одним важным свойством, которое естественно назвать *выпуклостью*. Именно, существует базис, состоящий из выпуклых множеств. Произвольный фильтр в линейном пространстве будем называть *выпуклым*, если он имеет базис, состоящий из выпуклых множеств. Соответственно множество $M \subset E_z^n$ будем называть *локально выпуклым в точке $\bar{z} \in M$* , если фильтр окрестностей точки $\bar{z}$ относительно M выпуклый.

Теорема 2.1. *Необходимое условие критичности. Если отображение (2.1) определено и критично на выпуклом фильтре $\Phi_{\bar{z}}$, все элементы которого содержат точку $\bar{z}$, то существует такое выпуклое множество $\tilde{W} \in \Phi_{\bar{z}}$, что образ множества*

$$\tilde{W} - \bar{z} = \{z - \bar{z}, z \in \tilde{W}\}$$

при линейном отображении (2.2) содержит нуль пространства E_{dp}^m в качестве граничной точки, т. е. нуль пространства E_{dp}^m , принадлежащий множеству

$$dP_{\bar{z}}(\tilde{W} - \bar{z}) \subset E_{dp}^m \quad (2.4)$$

(ибо $\bar{z} \in \tilde{W}$), не является его внутренней точкой.

В частности, если множество $M \subset D$ локально выпукло в точке $\bar{z} \in M$ и отображение (2.3) критично в точке $\bar{z}$, то точка $o \in E_{dp}^m$ принадлежит границе множества $dP_{\bar{z}}(\tilde{W} - \bar{z})$.

Прежде чем доказать теорему 2.1, покажем, что из нее непосредственно следует правило множителей. Пусть $L^{m-1} - (m-1)$ -мерная опорная плоскость к выпуклому множеству (2.4), проходящая через нуль-граничную точку множества (2.4).

Обозначим через $\tilde{\lambda} = (\tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_m)$ ненулевую ортогональную к L^{m-1} m -мерную строку, направленную в противоположную от множества $dP_{\bar{z}}(\tilde{W} - \bar{z})$ сторону. Тогда

$$\tilde{\lambda} dP_z(dz) = \tilde{\lambda} \frac{\partial P(\bar{z})}{\partial z} dz = \sum_{j=1}^m \tilde{\lambda}_j \operatorname{grad} p^j(\bar{z}) dz \leq 0 \quad \forall dz \in K(\tilde{W} - \bar{z}), \quad (2.5)$$

где

$$K(\tilde{W} - \bar{z}) = \{dz : dz = \tau(z - \bar{z}), \quad z \in \tilde{W}, \tau \geq 0\}$$

— конус, натянутый на $\tilde{W} - \bar{z}$. Полученное неравенство и выражает правило множителей в рассматриваемом случае. Если $\Phi_{\bar{z}}$ — фильтр окрестностей точки $\bar{z} \in M$ относительно локально выпуклого в $\bar{z}$ множества M , то множество $\tilde{W}$ имеет вид

$$\tilde{W} = M \cap V_{\bar{z}},$$

где $V_{\bar{z}}$ — окрестность точки $\bar{z}$ в E_z^n . Наконец, если $\bar{z}$ — внутренняя точка множества $M \subset E_z^n$, то $\tilde{W} = V_{\bar{z}}$ и

$$K(\tilde{W} - \bar{z}) = E_{dz}^n,$$

поэтому в формуле (2.5) dz — произвольный n -мерный столбец, и, следо-

вательно, условие множителей принимает вид

$$\tilde{\lambda} \frac{\partial P(z)}{\partial z} = \sum_{j=1}^m \tilde{\lambda}_j \operatorname{grad} p^j(z) = 0.$$

Без условия выпуклости фильтра $\Phi_{\bar{z}}$ необходимое условие критичности (теорема 2.1) перестает быть справедливым. Например, в двумерной плоскости $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ рассмотрим кривую $y - x^3 = 0$, в качестве $\bar{z}$ примем точку $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ и зададим фильтр $\Phi_{\bar{z}}$ базисом, состоящим из кусков нашей кривой вида

$$W_{\varepsilon} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : y - x^3 = 0, \quad -\varepsilon \leq x \leq \varepsilon, \quad \varepsilon > 0 \right\}.$$

Отображение P плоскости $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ на ось E_p^1 , при котором все множества W_{ε} отображаются в нуль, определим формулой

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto y - x^3;$$

следовательно, P критично на $\Phi_{\bar{z}}$. Дифференциал $dP_{\bar{z}}$ задается строкой $(0, 1)$, и нулевая точка оси E_{dp}^1 является внутренней для любого множества

$$dP_{\bar{z}}(W_{\varepsilon}) = \left\{ dp : dp = (0, 1) \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = dy, \quad \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} \in W_{\varepsilon} \right\},$$

пбо кривая $y - x^3 = 0$ расположена по обе стороны оси x , и, следовательно, dy может принимать значения обоих знаков.

Точка $0 \in E_{dp}^m$ может принадлежать границе множества (2.4), однако правило множителей (2.5) не выполнится, если множество M не локально-выпукло в точке $\bar{z} \in M$. В качестве примера можно взять внешность M треугольника на плоскости (вместе с границей); отображение (2.1) — тождественное отображение этой плоскости в себя, $\bar{z}$ — одна из трех вершин треугольника.

Доказательство необходимого условия. Предположим, что отображение (2.1) критично на выпуклом фильтре $\Phi_{\bar{z}}$, однако для любого выпуклого $\tilde{W} \in \Phi_{\bar{z}}$ точка $0 \in E_{dp}^m$ — внутренняя для множества

$$dP_{\bar{z}}(\tilde{W} - \bar{z}) \subset E_{dp}^m.$$

Покажем, что это приводит к противоречию, которое будет состоять в том, что, каково бы ни было выпуклое множество $\tilde{W} \in \Phi_{\bar{z}}$, $\tilde{W} \subset D$ и каков бы ни был достаточно малый по модулю вектор $p \in E_p^m$ *, мы докажем разрешимость относительно z уравнения

$$P(z) = P(\bar{z}) + p, \quad z \in \tilde{W}, \quad (2.6)$$

тем самым доказав, что $P(\bar{z})$ — внутренняя точка множества $P(\tilde{W}) \subset E_p^m$.

* Под модулем конечномерного вектора $p \in E_p^m$ или $\zeta \in E_{\bar{z}}^n$ будем понимать его евклидову норму $|p| = p^T p = \sum_{i=1}^m (p^i)^2$ или $|\zeta| = \zeta \zeta^T = \sum_{i=1}^n (\zeta_i)^2$, где индексом T будем обозначать транспонирование.

Согласно сделанному допущению $0 \in E_{dp}^m$ — внутренняя точка множества

$$dP_{\bar{z}}(\tilde{W} - \bar{z}) \subset E_{dp}^m,$$

и, следовательно, в нем можно выбрать $1 + m$ независимых точек $dp_0, dp_1, \dots, dp_m$ так, чтобы натянутый на них m -мерный симплекс $[dp_0, dp_1, \dots, dp_m]^*$ содержал нуль в качестве внутренней точки. Если $dz_0, dz_1, \dots, dz_m$ — какие-либо прообразы точек $dp_0, dp_1, \dots, dp_m$ при отображении

$$dP_{\bar{z}}: \tilde{W} - \bar{z} \rightarrow E_{dp}^m,$$

то в силу выпуклости множества $\tilde{W} - \bar{z}$ m -мерный симплекс $[dz_0, dz_1, \dots, dz_m] \subset \tilde{W} - \bar{z}$. Так как $\bar{z} \in \tilde{W}$, то $0 \in \tilde{W} - \bar{z}$, и, следовательно, для любого ε , $0 \leq \varepsilon \leq 1$, $\varepsilon[dz_0, dz_1, \dots, dz_m] \subset \tilde{W} - \bar{z}$ или

$$\bar{z} + \varepsilon[dz_0, dz_1, \dots, dz_m] \subset \tilde{W}, \quad 0 \leq \varepsilon \leq 1.$$

Докажем существование такого $\bar{\varepsilon} > 0$, что при любом заданном ε , где $0 < \varepsilon \leq \bar{\varepsilon}$, разрешимо относительно z следующее более сильное, чем (2.6), уравнение

$$P(z) = P(\bar{z}) + p, \quad z \in \bar{z} + \varepsilon[dz_0, dz_1, \dots, dz_m], \quad 0 < \varepsilon \leq \bar{\varepsilon}, \quad (2.7)$$

при достаточно малом $|p|$. В самом деле, обозначим через ρ расстояние точки $0 \in E_{dp}^m$ до границы симплекса $[dp_0, dp_1, \dots, dp_m]$, и пусть при $0 < \varepsilon \leq \bar{\varepsilon}$ для представления

$$P(\bar{z} + \varepsilon dz) = P(\bar{z}) + \varepsilon dP_{\bar{z}}(dz) + o(\varepsilon dz)$$

справедлива оценка

$$\left| \frac{o(\varepsilon dz)}{\varepsilon} \right| \leq \frac{\rho}{2} \quad \forall dz \in [dz_0, dz_1, \dots, dz_m].$$

Перепишем уравнение (2.7) в виде эквивалентного уравнения относительно dz :

$$dP_{\bar{z}}(dz) = \frac{p}{\varepsilon} - \frac{o(\varepsilon dz)}{\varepsilon}, \quad dz \in [dz_0, dz_1, \dots, dz_m]. \quad (2.8)$$

Если $|p| \leq \varepsilon \frac{\rho}{2}$ и $\varepsilon \leq \bar{\varepsilon}$, то

$$\left| \frac{p}{\varepsilon} - \frac{o(\varepsilon dz)}{\varepsilon} \right| \leq \rho,$$

т. е.

$$\frac{p}{\varepsilon} - \frac{o(\varepsilon dz)}{\varepsilon} \in [dp_0, dp_1, \dots, dp_m] \quad \forall dz \in [dz_0, dz_1, \dots, dz_m],$$

и уравнение (2.8) эквивалентно уравнению

$$dz = dP_{\bar{z}}^{-1} \left(\frac{p}{\varepsilon} - \frac{o(\varepsilon dz)}{\varepsilon} \right), \quad dz \in [dz_0, dz_1, \dots, dz_m], \quad (2.9)$$

где $dP_{\bar{z}}^{-1}$ — обратное отображение к невырожденному отображению

$$dP_{\bar{z}}: [dz_0, dz_1, \dots, dz_m] \rightarrow [dp_0, dp_1, \dots, dp_m].$$

* В дальнейшем через $[M]$ будем обозначать выпуклую оболочку произвольного множества M , лежащего в линейном пространстве.

Правую часть (2.9) можно рассматривать как непрерывное отображение симплекса $[dz_0, dz_1, \dots, dz_m]$ в себя, и, следовательно, всякая неподвижная точка $d\bar{z}$ этого отображения является решением уравнения (2.8), а потому $\bar{z} + \epsilon d\bar{z}$ будет решением уравнений (2.7) или (2.6).

В заключение покажем, что правило множителей (2.5) применимо к точкам условного экстремума и в том случае, когда в качестве ограничений вводятся не только равенства, но и неравенства.

Пусть на открытом множестве $O \subset E_x^m$ заданы $1 + k + l$ непрерывно дифференцируемых действительных функций

$$y^0(x), y^i(x), y^{k+j}(x), \quad i = 1, \dots, k; \quad j = 1, \dots, l,$$

и пусть $\bar{x} \in O$ — точка условного экстремума функции $y^0(x)$ при условиях

$$y^i(x) = 0, \quad y^{k+j}(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, k; \quad j = 1, \dots, l,$$

т. е. существует такая окрестность $V_{\bar{x}} \subset O$ точки $\bar{x}$, что при отображении

$$Y: x \mapsto \begin{pmatrix} y^0(x) \\ y^1(x) \\ \vdots \\ y^{k+l}(x) \end{pmatrix} = Y(x) \in E_y^{1+k+l}, \quad x \in O,$$

точка $Y(\bar{x})$ принадлежит пересечению образа $Y(V_{\bar{x}})$ с множеством в E_y^{1+k+l} , заданным соотношениями

$$y^1(x) = \dots = y^k(x) = 0, \quad y^{k+1}(x) \leq 0, \dots, y^{k+l}(x) \leq 0,$$

и имеет среди всех точек этого пересечения либо наибольшую, либо наименьшую координату y^0 . Для определенности допустим, что она наименьшая.

Введем $1 + l$ -мерное пространство E_q^{1+l} точек $q = (q^0, q^1, \dots, q^l)^T$ и определим

$$E_z^n = E_x^m \times E_q^{1+l}, \quad z = \begin{pmatrix} x \\ q \end{pmatrix},$$

$$D = O \times E_q^{1+l} \subset E_z^n.$$

Далее определим отображение

$$P: D \rightarrow E_p^{1+k+l} \quad (2.10)$$

с помощью формулы

$$P(z) = (p^0(z), p^1(z), \dots, p^{k+l}(z))^T, \quad z \in D,$$

где

$$p^0(z) = y^0(x) + q^0,$$

$$p^i(z) = y^i(x), \quad i = 1, \dots, k,$$

$$p^{k+j}(z) = y^{k+j}(x) + q^j, \quad j = 1, \dots, l.$$

Наконец, зададим выпуклое множество $Q \subset E_q^{1+l}$ и точку $\tilde{q} = (\tilde{q}^0, \tilde{q}^1, \dots, \tilde{q}^l)^T$ соотношениями

$$Q = \{q = (q^0, q^1, \dots, q^l)^T : q^0 \geq 0, q^1 \geq 0, \dots, q^l \geq 0\},$$

$$\tilde{q}^0 = 0, \quad \tilde{q}^j = -y^{k+j}(\bar{x}), \quad j = 1, \dots, l,$$

и пусть

$$\tilde{z} = \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{q} \end{pmatrix}.$$

Множество $M = O \times Q \subset D$ как произведение открытого множества $O \subset E_x^m$ на выпуклое множество $Q \subset E_q^{1+l}$ локально выпукло в каждой точке, в частности в точке $\tilde{z} \in M$, и базис фильтра окрестностей точки

$\tilde{z} = \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{q} \end{pmatrix}$ относительно множества M состоит из выпуклых множеств

$$V_{\tilde{x}} \cap (V_{\tilde{q}} \times Q),$$

где $V_{\tilde{x}}$, $V_{\tilde{q}}$ — произвольные выпуклые окрестности точек $\tilde{x} \in E_x^m$, $\tilde{q} \in E_q^{1+l}$. Легко видеть, что $\tilde{z}$ — критическая точка отображения

$$P: M \rightarrow E_p^{1+k+l}$$

— ограничения отображения (2.10) на M . На основании правила множителей (2.5) существует такой элемент фильтра окрестностей точки $\tilde{z}$ относительно M

$$\tilde{W} = \tilde{V}_{\tilde{x}} \times (\tilde{V}_{\tilde{q}} \cap Q)$$

и такая ненулевая $1 + k + l$ -строка

$$\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{k+l}),$$

что

$$\begin{aligned} \lambda \frac{\partial P(\tilde{z})}{\partial z} dz &= \left(\lambda_0 \frac{\partial y^0(\tilde{x})}{\partial x} + \sum_{i=1}^k \lambda_i \frac{\partial y^i(\tilde{x})}{\partial x} + \sum_{j=1}^l \lambda_{k+j} \frac{\partial y^{k+j}(\tilde{x})}{\partial x} \right) dx + \\ &+ \lambda_0 dq^0 + \sum_{j=1}^l \lambda_{k+j} dq^j \leq 0 \quad \forall dx \in K(\tilde{V}_{\tilde{x}} - \tilde{x}), \quad \forall dq \in K(\tilde{V}_{\tilde{q}} \cap Q - \tilde{q}). \end{aligned}$$

Очевидно, $K(\tilde{V}_{\tilde{x}} - \tilde{x}) = E_x^m$, $K(\tilde{V}_{\tilde{q}} \cap Q - \tilde{q})$ содержит все положительные полуоси $dq^j \geq 0$ и, более того, целиком всю ось dq^j , если для соответствующего j $y^{k+j}(\tilde{x}) < 0$. Поэтому последнее неравенство эквивалентно следующему правилу множителей Лагранжа:

$$\begin{aligned} \lambda_0 \text{grad } y^0(\tilde{x}) + \sum_{i=1}^k \lambda_i \text{grad } y^i(\tilde{x}) + \sum_{j=1}^l \lambda_{k+j} \text{grad } y^{k+j}(\tilde{x}) &= 0, \\ \lambda_0 \leq 0, \quad \lambda_{k+j} \leq 0, \quad \lambda_{k+j} y^{k+j}(\tilde{x}) &= 0, \quad j = 1, \dots, l. \end{aligned}$$

§ 3. Бесконечномерный случай

Незначительное и естественное обобщение данных в § 2 определений приводит нас к формулировке общей экстремальной задачи, включающей оптимальные задачи для функций от одной независимой переменной.

E_z будет обозначать теперь произвольное действительное линейное пространство точек z (без какой-либо топологии), D — конечно-открытое множество в E_z (пересечение D с любым конечномерным линейным много-

образом L из E_z открыто в конечномерной топологии многообразия L), и пусть задано отображение

$$P : D \rightarrow E_p^m, \quad (3.1)$$

ограничение которого *непрерывно* на любом множестве $D \cap L$ в конечномерной топологии конечномерного линейного многообразия L . Конечномерность E_p^m учитывает лишь специфику экстремальных задач для функций от одной независимой переменной, т. е. оптимальных систем с сосредоточенными параметрами (см. ниже); системы с распределенными параметрами требуют рассмотрения отображений в линейные топологические пространства и здесь не затрагиваются. Мы будем говорить, что отображение (3.1) имеет дифференциал в точке $z \in D$, если существует такое линейное отображение

$$dP_z : E_{dz} \rightarrow E_{dp}^m, \quad (3.2)$$

что для любого конечномерного линейного многообразия $L \subset E_z$, проходящего через точку z , ограничение отображения (3.1) на $D \cap L$ имеет в z дифференциал (в обычном смысле), совпадающий с ограничением (3.2) на $L - z$; следовательно, при $z + dz \in D \cap L$ имеем

$$P(z + dz) = P(z) + dP_z(dz) + o(dz).$$

Пусть θ — произвольная векторная * топология в E_z и Φ — произвольный фильтр в E_z . Мы будем говорить, что *отображение* (3.1) *определено на фильтре* Φ (и *непрерывно на* Φ в топологии θ), если существует базис фильтра Φ , все элементы которого содержатся в D (и ограничение отображения (3.1) на каждом из них непрерывно в θ). Наконец, *выпуклой оболочкой* $[\Phi]$ *фильтра* Φ будем называть фильтр, определенный базисом, элементами которого служат выпуклые оболочки произвольного базиса Φ .

Определение 3.1. Фильтр Φ , на котором определено отображение (3.1), называется *критическим для* (3.1) (или *отображение* (3.1) *критично на* Φ), если для любой точки z , принадлежащей всем элементам Φ , найдется такое множество $W \in \Phi$, $W \subset D$, что $P(z)$ принадлежит границе множества $P(W) \subset E_p^m$.

В этом определении топология вовсе не фигурирует в E_z . Далее, если Φ_1 мажорируется фильтром Φ_2 и если отображение (3.1) критично на Φ_1 , то оно, очевидно, критично и на Φ_2 , т. е. чем сильнее фильтр, тем «слабее» соответствующее понятие критичности.

Предположим теперь, что дифференцируемое отображение (3.1) критично на *выпуклом* фильтре Φ . Тогда справедливо правило множителей, формулировка и доказательство которого дословно совпадают с (2.5); нужно только предположить, что $\tilde{z}$ принадлежит всем множествам фильтра. Таким образом, этот случай эквивалентен конечномерному и требует учета лишь линейной структуры бесконечномерного пространства E_z и топологии его конечномерных подпространств (до размерности m) без привлечения какой-либо топологии в E_z .

* Все векторные топологии, рассматриваемые в дальнейшем, предполагаются separable.

Однако после сведения вариационных и оптимальных задач к указанной здесь схеме соответствующие фильтры не являются выпуклыми, а имеют более тонкое строение. Поэтому задача предлагаемой аксиоматики — выделить класс фильтров, достаточно широкий, чтобы охватить все интересные задачи, и в то же время наделенный достаточно богатой структурой, чтобы получить содержательное необходимое условие критичности, в частности содержащее соответствующие необходимые условия экстремальности первого порядка, в том числе и принцип максимума.

Оказывается, что такой класс возможно выделить, и мы будем называть его классом квазивыпуклых фильтров. Он определяется с помощью введения в E_z произвольной векторной топологии θ и зависит от нее (в отличие от понятия выпуклого фильтра, учитывающего лишь линейную структуру пространства E_z). Векторное топологическое пространство, получаемое введением в E_z топологии θ , будем обозначать через E_z^θ .

Определение 3.2. Фильтр Φ в E_z называется *квазивыпуклым* в векторной топологии θ пространства E_z^θ (θ -квазивыпуклым), если для любого $W \in \Phi$ и любого целого $s \geq 0$ существует такой элемент $\tilde{W} = \tilde{W}(W, s) \in \Phi$, что для произвольных $1 + s$ точек $z_0, z_1, \dots, z_s$ из $\tilde{W}$ и произвольной окрестности нуля V^θ в E_z^θ можно найти непрерывное в топологии θ отображение

$$\varphi: [z_0, z_1, \dots, z_s] \rightarrow W \subset E_z^\theta, \quad (3.3)$$

удовлетворяющее условию

$$z - \varphi(z) \in V^\theta \quad \forall z \in [z_0, z_1, \dots, z_s]. \quad (3.4)$$

Очевидно, можно считать, что $\tilde{W} \subset W$, но выпуклая оболочка $[z_0, z_1, \dots, z_s]$ может не принадлежать ни W , ни тем более $\tilde{W}$; однако согласно (3.3), (3.4) ее всегда можно непрерывным и «сколь угодно малым» в топологии θ «шевелением» перевести в W . Далее очевидно, что каждый выпуклый фильтр — квазивыпуклый во всякой топологии, и если векторная топология θ_1 слабее векторной топологии θ_2 , то всякий θ_2 -квазивыпуклый фильтр будет и θ_1 -квазивыпуклым, т. е. чем слабее топология θ , тем больше квазивыпуклых фильтров в E_z^θ (в противоположность поведению класса непрерывных отображений из фиксированного пространства в пространство E_z^θ , которое тем меньше, чем слабее θ ; см. по этому поводу ниже).

Имея понятие квазивыпуклого фильтра, можно сформулировать общее необходимое условие критичности следующим образом.

Теорема 3.1. *Необходимое условие критичности. Пусть отображение (3.1) определено на выпуклой оболочке $[\Phi]$ произвольного фильтра Φ в E_z и критично на Φ . Если в E_z существует векторная топология θ , в которой Φ является квазивыпуклым, а отображение (3.1) θ -непрерывно на $[\Phi]$, то для любой точки $\tilde{z}$, принадлежащей всем множествам фильтра Φ и в которой отображение (3.1) имеет дифференциал (3.2), существует такой элемент $\tilde{W} \in \Phi$, что нуль пространства $E_{d_p}^m$ принадлежит границе множества*

$$dP_{\tilde{z}}([\tilde{W}] - \tilde{z}) \subset E_{d_p}^m.$$

Как и в конечномерном случае, отсюда непосредственно следует правило множителей: если вектор $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ ортогонален к опорной $(m-1)$ -мерной плоскости множества $dP_z([\tilde{W}] - \bar{z})$ в нуле и направлен в соответствующую сторону, то

$$\lambda dP_z(dz) = \sum_{i=1}^m \lambda_i dp_z^i(dz) \leq 0, \quad \forall dz \in K([\tilde{W}] - \bar{z}). \quad (3.5)$$

Полученному неравенству можно придать форму «принципа максимума». Пусть

$$dP_z^*: (E_{dp}^m)^* \rightarrow (E_{dz})^*$$

— сопряженное отображение к (3.2). Тогда для любых

$$\chi = (\chi_1, \dots, \chi_m) \in (E_{dp}^m)^*, \quad dz \in E_{dz},$$

имеем $\chi dP_z(dz) = dP_z^*(\chi) dz$ и, следовательно,

$$dP_z^*(\lambda) dz = dP_z^*(\lambda)(z - \bar{z}) \leq 0, \quad \forall (z - \bar{z}) \in K([\tilde{W}] - \bar{z}),$$

или

$$dP_z^*(\lambda) z \leq dP_z^*(\lambda) \bar{z}, \quad \forall z \in \bar{z} + K([\tilde{W}] - \bar{z}).$$

Наиболее удобно пользоваться необходимым условием критичности в форме неравенства (3.5); поэтому мы приведем еще одно важное следствие, вытекающее из (3.5). Предположим, что ограничение дифференциала $dP_z: E_{dz} \rightarrow E_{dp}^m$ на некоторое множество $M \supset [\tilde{W}]$ непрерывно в топологии θ . Обозначим через $[\tilde{W}]_M^\theta$ замыкание множества $[\tilde{W}]$ относительно M в топологии θ и через $K([\tilde{W}]_M^\theta - z)$ — конус, натянутый на множество $[\tilde{W}]_M^\theta - \bar{z}$. Тогда, очевидно, неравенство (3.5) можно заменить более сильным неравенством

$$\lambda dP_z(dz) \leq 0, \quad \forall dz \in K([\tilde{W}]_M^\theta - \bar{z}). \quad (3.6)$$

Доказательство необходимого условия критичности. Как и в конечномерном случае, предположим, что для любого $W \in \Phi$, $W \subset D$, точка $0 \in E_{dp}^m$ является внутренней для множества

$$dP_z([W] - \bar{z}) \subset E_{dp}^m.$$

Выберем элемент $\hat{W} \in \Phi$ так, чтобы $[\hat{W}] \subset D$ и ограничение отображения (3.1) на $[\hat{W}]$ было непрерывно, а точка $P(\bar{z})$ принадлежала границе множества $P(\hat{W}) \subset E_p^m$. Мы докажем разрешимость относительно z уравнения

$$P(z) = P(\bar{z}) + p, \quad z \in \hat{W}$$

при любом достаточно малом по модулю векторе $p \in E_p^m$, что будет противоречить выбору множества $\hat{W}$.

Обозначим через $\tilde{W} = \hat{W}(\hat{W}, (1+m)^2)$ элемент квазивыпуклого фильтра Φ , удовлетворяющий условию (см. определение 3.2): для любой окрестности нуля V^θ в E_z^θ и любых $1 + (1+m)^2$ точек $z_0, z_1, \dots, z_{(1+m)^2}$ из $\tilde{W}$ существует θ -непрерывное отображение

$$\varphi: [z_0, z_1, \dots, z_{(1+m)^2}] \rightarrow \tilde{W}, \quad (3.7)$$

удовлетворяющее условию

$$z - \varphi(z) \in V^0 \quad \forall z \in [z_0, z_1, \dots, z_{(1+m)^2}]. \quad (3.8)$$

Кроме того, можно считать, что $\tilde{W} \subset \hat{W}$.

Согласно сделанному допущению $0 \in E_{dp}^m$ — внутренняя точка множества

$$dP_{\tilde{z}}([\tilde{W}] - \tilde{z}) \subset E_{dp}^m,$$

и потому существуют $1 + m$ независимых точек $dp_0, dp_1, \dots, dp_m$, принадлежащих $dP_{\tilde{z}}([\tilde{W}] - \tilde{z})$ и таких, что m -мерный симплекс $[dp_0, dp_1, \dots, dp_m]$ содержит $0 \in E_{dp}^m$ в качестве внутренней точки. Так как E_{dp}^m m -мерно, то каждая из точек

$$dp_i \in dP_{\tilde{z}}([\tilde{W}] - \tilde{z}) = [dP_{\tilde{z}}(\tilde{W} - \tilde{z})], \quad i = 0, 1, \dots, m,$$

представима в виде

$$dp_i = \sum_{j=0}^m \mu_{ij} dq_{ij}, \quad dq_{ij} \in dP_{\tilde{z}}(\tilde{W} - \tilde{z}), \quad \mu_{ij} \geq 0, \quad \sum_{j=0}^m \mu_{ij} = 1.$$

Пусть $d\zeta_{ij}$ — прообразы точек dq_{ij} при отображении

$$dP_{\tilde{z}}: \tilde{W} - \tilde{z} \rightarrow E_{dp}^m \quad (3.9)$$

и пусть $dz_i = \sum_{j=0}^m \mu_{ij} d\zeta_{ij}$, $i = 0, 1, \dots, m$. Очевидно, dz_i — прообразы точек dp_i при отображении (3.9), причем выпуклая оболочка $[\tilde{z}, \tilde{z} + dz_0, \dots, \tilde{z} + dz_m]$ содержится в выпуклой оболочке $1 + (1 + m)^2$ точек $\tilde{z}, \tilde{z} + d\zeta_{ij}$ из $\tilde{W}$. Следовательно, при $0 \leq \varepsilon \leq 1$

$$\tilde{z} + \varepsilon [dz_0, dz_1, \dots, dz_m] \subset [\tilde{z}, \tilde{z} + d\zeta_{00}, \dots, \tilde{z} + d\zeta_{mm}] \subset [\tilde{W}] \subset [\hat{W}] \subset D. \quad (3.10)$$

Пусть $\rho > 0$ — расстояние точки $0 \in E_{dp}^m$ до границы симплекса $[dp_0, dp_1, \dots, dp_m]$. Из θ -непрерывности отображения

$$P: [\hat{W}] \rightarrow E_p^m,$$

компактности множества $\tilde{z} + \varepsilon [dz_0, dz_1, \dots, dz_m]$ при всяком ε и включении (3.10) непосредственно следует существование для каждого $\varepsilon > 0$ такой окрестности нуля V_ε^0 в E_p^0 , что

$$|P(z') - P(z'')| \leq \varepsilon \frac{\rho}{3}, \quad (3.11)$$

$$z' \in \tilde{z} + \varepsilon [dz_0, dz_1, \dots, dz_m], \quad z'' \in [\hat{W}], \quad z' - z'' \in V_\varepsilon^0.$$

Наконец, выбор множества $\tilde{W}$ (см. (3.7), (3.8)) и включения (3.10) обеспечивают существование зависящего от ε семейства θ -непрерывных отображений

$$\varphi_\varepsilon: \tilde{z} + \varepsilon [dz_0, dz_1, \dots, dz_m] \rightarrow \hat{W},$$

удовлетворяющих условию

$$z - \varphi(z) \in V_\varepsilon^0 \quad \forall z \in \tilde{z} + \varepsilon [dz_0, dz_1, \dots, dz_m]. \quad (3.12)$$

Покажем, что уравнение относительно z

$$P(\varphi_\varepsilon(z)) = P(\tilde{z}) + \varepsilon p, \quad z \in \tilde{z} + \varepsilon [dz_0, dz_1, \dots, dz_m] \quad (3.13)$$

разрешимо при достаточно малых ε и произвольном $p \in E_p^m$, удовлетворяющем условию

$$|p| \leq \frac{\rho}{3}. \quad (3.14)$$

Будем рассматривать столь малые $\varepsilon > 0$, чтобы в выражении

$$P(\bar{z} + \varepsilon dz) = P(\bar{z}) + \varepsilon dP_{\bar{z}}(dz) + o(\varepsilon dz), \quad (3.15)$$

$$dz \in [dz_0, dz_1, \dots, dz_m],$$

функция $o(\varepsilon dz)$ удовлетворяла условию

$$\left| \frac{o(\varepsilon dz)}{\varepsilon} \right| \leq \frac{\rho}{3} \quad \forall dz \in [dz_0, dz_1, \dots, dz_m]. \quad (3.16)$$

Перепишем уравнение (3.13) в виде

$$P(z) = P(\bar{z}) + \varepsilon p + P(z) - P(\varphi_{\varepsilon}(z)),$$

$$z \in \bar{z} + \varepsilon [dz_0, dz_1, \dots, dz_m]$$

или, воспользовавшись выражением (3.15), в виде уравнения относительно dz

$$dP_{\bar{z}}(dz) = p - \frac{o(\varepsilon dz)}{\varepsilon} + \frac{P(\bar{z} + \varepsilon dz) - P(\varphi_{\varepsilon}(\bar{z} + \varepsilon dz))}{\varepsilon}, \quad (3.17)$$

$$dz \in [dz_0, dz_1, \dots, dz_m].$$

Оценки (3.14), (3.16), (3.11) и включение (3.12) дают

$$p - \frac{o(\varepsilon dz)}{\varepsilon} + \frac{P(\bar{z} + \varepsilon dz) - P(\varphi_{\varepsilon}(\bar{z} + \varepsilon dz))}{\varepsilon} \in [dp_0, dp_1, \dots, dp_m].$$

Следовательно, уравнение (3.17) эквивалентно уравнению

$$dz = dP_{\bar{z}}^{-1} \left(p - \frac{o(\varepsilon dz)}{\varepsilon} + \frac{P(\bar{z} + \varepsilon dz) - P(\varphi_{\varepsilon}(\bar{z} + \varepsilon dz))}{\varepsilon} \right), \quad (3.18)$$

$$dz \in [dz_0, dz_1, \dots, dz_m],$$

где $dP_{\bar{z}}^{-1}$ — обратное отображение к линейному невырожденному отображению

$$dP_{\bar{z}}: [dz_0, dz_1, \dots, dz_m] \rightarrow [dp_0, dp_1, \dots, dp_m].$$

Правую часть уравнения (3.18) можно рассматривать как непрерывное отображение симплекса $[dz_0, dz_1, \dots, dz_m]$ в себя, и всякая неподвижная точка этого отображения является решением уравнения (3.18).

Сведение оптимальных задач к изложенной схеме происходит автоматически (аналогично сведению в конечномерном случае в § 2), за исключением одного пункта — указания топологии θ , в которой возникающий при таком сведении фильтр Φ θ -квазивыпуклый, а отображение (3.1) θ -непрерывно на $[\Phi]$. Чем слабее θ , тем больше шансов превратить Φ в θ -квазивыпуклый фильтр, однако тем меньше шансов, что отображение (3.1) останется θ -непрерывным на $[\Phi]$; усилением топологии мы можем добиться θ -непрерывности отображения (3.1) на $[\Phi]$, однако сам фильтр Φ может перестать быть θ -квазивыпуклым. Нужная топология, если она вообще существует, лежит где-то «посередине», и ее нахождение фактически и составляет решение вариационной задачи. Выбор подходящих

топологий θ в нетривиальных случаях подсказан изучением оптимальных скользящих режимов, а доказательство квазивыпуклости опирается на лемму, с помощью которой скользящий оптимальный режим аппроксимируется обычным управлением (см. § 5 и [2, 3]).

Наконец, доказательство θ -непрерывности отображения (3.1) на возникающих фильтрах опирается на общие теоремы о непрерывной зависимости решений обыкновенных дифференциальных уравнений от начальных данных и правых частей. Сказанное иллюстрируется в § 4—6, в которых приведены наиболее типичные примеры оптимальных задач.

§ 4. Пример

Пусть G — открытое множество в E_x^n , J — открытый интервал временной оси t , $f(t, x)$ — произвольная n -мерная функция на $J \times G$, непрерывно дифференцируемая по x , измеримая вместе с матрицей

$$f_x(t, x) = \frac{\partial f(t, x)}{\partial x} = \left(\frac{\partial f^i(t, x)}{\partial x^j} \right), \quad i, j = 1, \dots, n,$$

по t и такая, что для любого компакта $K \subset G$ существует суммируемая на J функция $m(t)$ (зависящая от f и K), удовлетворяющая условию*

$$|f(t, x)| + |f_x(t, x)| \leq m(t) \quad \forall x \in K, \forall t \in J. \quad (4.1)$$

Функции f будем рассматривать с точностью до эквивалентности: f_1 и f_2 эквивалентны, если при всяком фиксированном $x \in G$ и почти всех $t \in J$ $f_1(t, x) - f_2(t, x) = 0$. Линейное пространство классов эквивалентностей обозначим через E_f и в дальнейшем будем отождествлять, там где это не вызовет недоразумений, элементы из E_f с соответствующими функциями.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad f(t, x) \in E_f. \quad (4.2)$$

Нас будут интересовать решения $x(t)$ этого уравнения на отрезке с концами $t_1, t_2 \in J$, причем мы допускаем обе возможности: $t_1 \leq t_2$, $t_2 \leq t_1$.

Обозначим через D множество точек

$$z = (t_1, t_2, x_1, f), \quad t_1, t_2 \in J, \quad x_1 \in G, \quad f \in E_f$$

в «пространстве уравнений»

$$E_z = E_{(t_1, t_2)^T}^2 \times E_{x_1}^n \times E_f,$$

такое, что $\forall z = (t_1, t_2, x_1, f) \in D$ соответствующее уравнение (4.2) имеет решение $x(t)$, определенное на отрезке с концами t_1, t_2 и удовлетворяющее начальному условию $x(t_1) = x_1$. Тогда определено отображение

$$S: D \rightarrow E_{(t_1, t_2, x_1, x_2)^T}^{2+2n}$$

* Под модулем $|f_x|$ матрицы f_x будем подразумевать, например, ее операторную норму

$$|f_x| = \max_{|\hat{x}|=1} |f_x \hat{x}|.$$

из D в «пространство краевых значений» $E_{(t_1, t_2, x_1, x_2)^T}^{2+2n}$ по формуле

$$(t_1, t_2, x_1, f) \mapsto (t_1, t_2, x_1, x_2)^T,$$

где $x_2 = x(t_2)$ — значение соответствующего решения в момент t_2 .

Множество $D \subset E_z$ — конечно-открыто, и ограничение S на $D \cap L$, где $L \subset E_z$ — произвольное конечномерное линейное многообразие, непрерывно на $D \cap L$. Это утверждение является обычной теоремой о непрерывной зависимости решения уравнения (4.2) от начальных данных и конечного числа скалярных параметров.

Предположим теперь, что задано дифференцируемое отображение

$$Q: E_{(t_1, t_2, x_1, x_2)^T}^{2+2n} \rightarrow E_p^m,$$

где

$$Q(t_1, t_2, x_1, x_2) = (p^1(t_1, t_2, x_1, x_2), \dots, p^m(t_1, t_2, x_1, x_2))^T$$

и p^i — дифференцируемые скалярные функции своих аргументов.

Рассмотрим отображение

$$P = Q \circ S: D \rightarrow E_p^m. \quad (4.3)$$

С помощью обычного метода «уравнения в вариациях» нетрудно показать (подробные вычисления см. в [3]), что оно имеет дифференциал в каждой точке $\bar{z} = (\bar{t}_1, \bar{t}_2, \bar{x}_1, \bar{f}) \in D$, для которой функция $\bar{f}(t, x)$ непрерывна в точках $(\bar{t}_1, \bar{x}_1)^T$, $(\bar{t}_2, \bar{x}_2)^T = (\bar{t}_2, \bar{x}(\bar{t}_2))^T$, где $\bar{x}(t)$ — решение уравнения $\frac{dx}{dt} = \bar{f}(t, x)$ с начальным значением $\bar{x}(\bar{t}_1) = \bar{x}_1$. Чтобы выписать формулу для дифференциала, обозначим через $\Gamma(t)$, $t \in [\bar{t}_1, \bar{t}_2]$, $\Gamma(\bar{t}_1) = I$ (единица), фундаментальную матрицу уравнения

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \bar{f}(t, \bar{x}(t)) \Gamma.$$

Тогда дифференциал $dP_{\bar{z}}$ отображения (4.3) в точке $\bar{z} = (\bar{t}_1, \bar{t}_2, \bar{x}_1, \bar{f})$ задается формулой ($dz = (dt_1, dt_2, dx_1, \delta f(t, x))$):

$$dP_{\bar{z}}(dz) = \frac{\partial \bar{Q}}{\partial t_1} dt_1 + \frac{\partial \bar{Q}}{\partial t_2} dt_2 + \frac{\partial \bar{Q}}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \bar{Q}}{\partial x_2} dx_2,$$

$$dx_2 = \bar{f}(\bar{t}_2, \bar{x}_2) dt_2 + \Gamma(\bar{t}_2) \left[dx_1 - \bar{f}(\bar{t}_1, \bar{x}_1) dt_1 + \int_{\bar{t}_1}^{\bar{t}_2} \Gamma^{-1}(t) \delta f(t, \bar{x}(t)) dt \right],$$

где волны над Q обозначают дифференцирование в точке $(\bar{t}_1, \bar{t}_2, \bar{x}_1, \bar{x}_2)$, или

$$\begin{aligned} dP_{\bar{z}}(dz) = & \left(\frac{\partial \bar{Q}}{\partial t_1} - \frac{\partial \bar{Q}}{\partial x_2} \bar{\Gamma}_2 \bar{f}_1 \right) dt_1 + \left(\frac{\partial \bar{Q}}{\partial t_2} + \frac{\partial \bar{Q}}{\partial x_2} \bar{f}_2 \right) dt_2 + \left(\frac{\partial \bar{Q}}{\partial x_1} + \frac{\partial \bar{Q}}{\partial x_2} \bar{\Gamma}_2 \right) dx_1 + \\ & + \frac{\partial \bar{Q}}{\partial x_2} \bar{\Gamma}_2 \int_{\bar{t}_1}^{\bar{t}_2} \Gamma^{-1}(t) \delta f(t, \bar{x}(t)) dt. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Пусть θ_f — векторная топология в E_f и $\Phi_{\bar{f}} = \theta_f$ — квазивыпуклый фильтр в E_f , все элементы которого содержат $\bar{f}$. Зададим в E_z фильтр $\Phi_{\bar{z}}$, $\bar{z} = (\bar{t}_1, \bar{t}_2, \bar{x}_1, \bar{f})$, с помощью базисных множеств

$$W_{\bar{z}} = V_{(\bar{t}_1, \bar{t}_2)^T} \times V_{\bar{x}_1} \times W_{\bar{f}},$$

где $V_{(\tilde{t}_1, \tilde{t}_2)}$, $V_{\tilde{x}_1}$ — произвольные окрестности точек $(\tilde{t}_1, \tilde{t}_2)^T$, $\tilde{x}_1$ в $E_{(t_1, t_2)^T}^2$, $E_{x_1}^n$ и $W_{\tilde{f}} \in \Phi_{\tilde{f}}$. Очевидно, все элементы $W \in \Phi_{\tilde{z}}$ содержат точку $\tilde{z}$ и $\Phi_{\tilde{z}}$ является θ -квазивыпуклым, где θ — топология произведения $E_{(t_1, t_2)^T}^2 \times E_{x_1}^n \times E_{\tilde{f}}^0$; второе утверждение непосредственно следует из выпуклости фильтров окрестностей точек $(t_1, t_2)^T$, x_1 и $\theta_{\tilde{f}}$ -квазивыпуклости фильтра $\Phi_{\tilde{f}}$.

Таким образом, если отображение (4.3) критично и θ -непрерывно на $\Phi_{\tilde{z}}$, то правило множителей (3.5) и выражение для дифференциала (4.4) дают: существуют такие $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \neq 0$ и $\tilde{W}_{\tilde{z}} = \tilde{V}_{(\tilde{t}_1, \tilde{t}_2)^T} \times \tilde{V}_{\tilde{x}_1} \times \tilde{W}_{\tilde{f}} \in \Phi_{\tilde{z}}$, что $\forall dz \in K([\tilde{W}_{\tilde{z}}] - \tilde{z})$

$$\begin{aligned} \lambda dP_z(dz) = & \lambda \left(\frac{\partial \tilde{Q}}{\partial t_1} - \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial x_2} \tilde{\Gamma}_2 \tilde{f}_1 \right) dt_1 + \lambda \left(\frac{\partial \tilde{Q}}{\partial t_2} + \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial x_2} \tilde{f}_2 \right) dt_2 + \\ & + \lambda \left(\frac{\partial \tilde{Q}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial x_2} \tilde{\Gamma}_2 \right) dx_1 + \lambda \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial x_2} \tilde{\Gamma}_2 \int_{\tilde{t}_1}^{\tilde{t}_2} \Gamma^{-1}(t) \delta f(t, \tilde{x}(t)) dt \leq 0. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Условие

$$dz = (dt_1, dt_2, dx_1, \delta f) \in K([\tilde{W}_{\tilde{z}}] - \tilde{z})$$

эквивалентно, очевидно, условию

$$(dt_1, dt_2)^T \in E_{(dt_1, dt_2)^T}^2, dx_1 \in E_{dx_1}^n, \delta f \in K([\tilde{W}_{\tilde{f}}] - \tilde{f}),$$

и потому неравенство (4.5) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \lambda \left(\frac{\partial \tilde{Q}}{\partial t_1} - \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial x_2} \tilde{\Gamma}_2 \tilde{f}_1 \right) &= \lambda \left(\frac{\partial \tilde{Q}}{\partial t_2} + \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial x_2} \tilde{f}_2 \right) = 0, \\ \lambda \left(\frac{\partial \tilde{Q}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial x_2} \tilde{\Gamma}_2 \right) &= 0, \\ \lambda \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial x_2} \tilde{\Gamma}_2 \int_{\tilde{t}_1}^{\tilde{t}_2} \Gamma^{-1}(t) \delta f(t, \tilde{x}(t)) dt &\leq 0 \quad \forall \delta f \in K([\tilde{W}_{\tilde{f}}] - \tilde{f}). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Наконец, соотношения (4.6) приводятся к следующей «канонической» форме. С помощью функции

$$\tilde{\Psi}(t) = \lambda \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial x_2} \tilde{\Gamma}_2 \Gamma^{-1}(t), \quad t \in [\tilde{t}_1, \tilde{t}_2],$$

удовлетворяющей уравнению

$$\frac{d\tilde{\Psi}}{dt} = -\tilde{\Psi} \tilde{f}_x(t, \tilde{x}(t)), \quad (4.7)$$

неравенство в (4.6) можно записать в виде

$$\int_{\tilde{t}_1}^{\tilde{t}_2} \tilde{\Psi}(t) \delta f(t, \tilde{x}(t)) dt \leq 0 \quad \forall \delta f \in K([\tilde{W}_{\tilde{f}}] - \tilde{f}), \quad (4.8)$$

а равенства (4.6) — в виде равенств

$$\begin{aligned} \lambda \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial t_1} &= \tilde{\Psi}(\tilde{t}_1) \tilde{f}(\tilde{t}_1, \tilde{x}_1) = \tilde{\Psi}_1 \tilde{f}_1, \\ \lambda \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial t_2} &= -\tilde{\Psi}(\tilde{t}_2) \tilde{f}(\tilde{t}_2, \tilde{x}_2) = -\tilde{\Psi}_2 \tilde{f}_2, \\ \lambda \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial x_1} &= -\tilde{\Psi}_1, \end{aligned} \quad (4.9)$$

к которым припишем равенство

$$\lambda \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial x_2} = \tilde{\Psi}_2. \quad (4.10)$$

Введем теперь скалярную функцию — «гамильтонову функцию» задачи

$$H = (t, \psi, x) = \psi f(t, x) = \sum_{i=1}^n \psi_i f^i(t, x)$$

трех аргументов: $t, \psi = (\psi_1, \dots, \psi_n), x = (x^1, \dots, x^n)^T$; в частности, обозначим

$$\tilde{H}(t, \psi, x) = \psi \tilde{f}(t, x).$$

Согласно определению $\tilde{x}(t)$ и уравнению (4.7) имеем почти всюду при $t \in [\tilde{t}_1, \tilde{t}_2]$

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{x}}{dt} &= \frac{\partial}{\partial \psi} \tilde{H}(t, \tilde{\psi}(t), \tilde{x}(t)), \\ \frac{d\tilde{\psi}}{dt} &= -\frac{\partial}{\partial x} \tilde{H}(t, \tilde{\psi}(t), \tilde{x}(t)). \end{aligned} \quad (4.11)$$

Далее, неравенство (4.8) принимает вид

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{t}_1}^{\tilde{t}_2} \tilde{H}(t, \tilde{\psi}(t), \tilde{x}(t)) dt &\geq \int_{\tilde{t}_1}^{\tilde{t}_2} H(t, \tilde{\psi}(t), \tilde{x}(t)) dt, \\ \forall H(t, \psi, x) &= \psi f(t, x), \quad f \in \tilde{f} + K([\tilde{W}_{\tilde{f}}] - \tilde{f}), \end{aligned} \quad (4.12)$$

а равенства (4.9), (4.10) эквивалентны утверждению, что $(2 + 2n)$ -мерная строка

$$(\tilde{H}(\tilde{t}_1, \tilde{\psi}_1, \tilde{x}_1), -\tilde{H}(\tilde{t}_2, \tilde{\psi}_2, \tilde{x}_2), -\tilde{\psi}_1, \tilde{\psi}_2) = (\tilde{H}_1 - \tilde{H}_2, -\tilde{\psi}_1, \tilde{\psi}_2)$$

ортогональна к $(2 + 2n - m)$ -мерной поверхности $Q(t_1, t_2, x_1, x_2) = \text{const}$ в точке $(\tilde{t}_1, \tilde{t}_2, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2)^T$. Это последнее условие естественно назвать условием трансверсальности и записать в виде

$$(\tilde{H}_1, -\tilde{H}_2, -\tilde{\psi}_1, \tilde{\psi}_2) \perp \{Q(t_1, t_2, x_1, x_2) = \text{const}\} \quad (4.13)$$

при $(t_1, t_2, x_1, x_2)^T = (\tilde{t}_1, \tilde{t}_2, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2)^T$.

Система уравнений (4.11) является гамильтоновой, а неравенство (4.12) выражается *принцип максимума в интегральной форме*. Совокупность соотношений (4.11), (4.12), (4.13) и представляет *систему необходимых условий критичности первого порядка*, записанную в «канонической» форме. Эта совокупность соотношений тривиальна, если $\tilde{\psi}(t) = 0$; чтобы исключить этот случай, потребуем, чтобы $m \times (2 + 2n)$ -матрица

$$\left(\frac{\partial \tilde{Q}}{\partial t_1}, \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial t_2}, \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial x_1}, \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial x_2} \right)$$

имела ранг m . Тогда, как показывают соотношения (4.9), (4.10), $\tilde{\psi}(t) \neq 0$, ибо $\lambda \neq 0$.

§ 5. Примеры квазивыпуклых фильтров

Сейчас мы приведем примеры квазивыпуклых фильтров, появляющихся в наиболее типичных оптимальных задачах, и укажем топологию, в которой они квазивыпуклы. Доказательство квазивыпуклости опирается на следующую «аппроксимационную лемму».

Пусть заданы $m+1$ функций $f_0(t, x), f_1(t, x), \dots, f_m(t, x), (t, x) \in J \times G$, удовлетворяющих условиям, перечисленным в § 4, и пусть J_α , $\alpha = \pm 1, \pm 2, \dots$ — некоторое разбиение интервала J на отрезки J_α . Каждой точке $\mu = (\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_m)$ m -мерного симплекса

$$\Sigma = \left\{ \mu = (\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_m) : \sum_{i=0}^m \mu_i = 1, \mu_i \geq 0 \right\}$$

сопоставим функцию $f_\mu(t, x)$ следующим путем. Точке $\mu = (\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_m)$ поставим в соответствие подразделение каждого из отрезков J_α на $1+m$ отрезков $J_{\alpha i}^\mu$, $i = 0, 1, \dots, m$, определенное условием

$$\text{meas } J_{\alpha i}^\mu / \text{meas } J_{\alpha j}^\mu = \mu_i / \mu_j;$$

если $\mu_i = 0$, то соответствующий отрезок вырождается в точку.

Функцию $f_\mu(t, x)$ определим формулой

$$\begin{aligned} f_\mu(t, x) &= f_i(t, x) \quad \forall t \in J_{\alpha i}^\mu \quad \forall x \in G, \\ \alpha &= \pm 1, \pm 2, \dots; \quad i = 0, 1, \dots, m, \end{aligned} \quad (5.1)$$

которая однозначно определяет функцию $f_\mu(t, x)$, за исключением значений t в концах отрезков $J_{\alpha i}^\mu$, что, однако, не будет иметь значения. Отображение симплекса Σ , заданное формулой

$$\mu \mapsto f_\mu(t, x), \quad \mu \in \Sigma,$$

и зависящее от подразделения J_α , можно, очевидно, считать отображением Σ в линейное пространство E_f из § 4; мы обозначим его через

$$\sigma_{J_\alpha} : \Sigma \rightarrow E_f.$$

Аппроксимационная лемма. Для произвольного компакта $K \subset G$ и произвольного $\varepsilon > 0$ можно найти такое (достаточно мелкое) подразделение J_α , что для $\forall t_1, t_2 \in J$, $\forall x \in K$, $\forall \mu = (\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_m) \in \Sigma$ имеем

$$\left| \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{i=0}^m \mu_i f_i(t, x) - f_\mu(t, x) \right) dt \right| \leq \varepsilon; \quad (5.2)$$

далее, существует такое $\delta = \delta(\varepsilon, K) > 0$, что для $\forall \mu', \mu'' \in \Sigma$ при $|\mu' - \mu''| \leq \delta$ и для произвольного подразделения J_α имеем

$$\int \sup_{x \in K} \left(|f_{\mu'}(t, x) - f_{\mu''}(t, x)| + \left| \frac{\partial f_{\mu'}(t, x)}{\partial x} - \frac{\partial f_{\mu''}(t, x)}{\partial x} \right| \right) dt \leq \varepsilon \quad \forall x \in K. \quad (5.3)$$

Доказательство этой леммы см. в [2] или [3].

Введем в пространство E_f примера § 4 следующую векторную локально-выпуклую топологию, с помощью которой и будут заданы интересные нас фильтры.

Пусть $K_i \subset G$, $i = 1, 2, \dots$ — возрастающая последовательность компактов из G , объединение которых совпадает с G . Если $f \in E_f$, то обозначим

$$\|f\|_i^s = \int \sup_{x \in K_i} (|f(t, x)| + |f_x(t, x)|) dt. \quad (5.4)$$

Очевидно, $\|\cdot\|_i^s$, $i = 1, 2, \dots$ — возрастающая последовательность полунорм, т. е. $\forall f \in E_f \quad \|f\|_i^s \leq \|f\|_{i+1}^s$. Топологию, определенную этой последовательностью, обозначим через T^s ; нетрудно видеть, что она задается инвариантной относительно сдвигов метрикой

$$\rho^s(f_1, f_2) = \|f_1 - f_2\|_\infty^s,$$

где

$$\|f\|_\infty^s = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{\|f\|_i^s}{1 + \|f\|_i^s}.$$

Предположим теперь, что задана n -мерная функция $f(x, u, t)$ трех переменных: n -мерной x , r -мерной u и времени t , — определенная на $G \times O \times J$, где G , O — открытые множества в E_x^n , E_u^r , J — открытый интервал временной оси. Функцию $f(x, u, t)$ предполагаем непрерывной на $G \times O \times J$ и непрерывно дифференцируемой по x ; далее предполагаем, что для любых компактов $K_G \subset G$, $K_O \subset O$ существует интегрируемая на J функция $m(t)$, удовлетворяющая неравенству

$$|f(x, u, t)| + |f_x(x, u, t)| \leq m(t) \quad \forall x \in K_G \quad \forall u \in K_O \quad \forall t \in J. \quad (5.5)$$

Пусть U — произвольное подмножество в O . Обозначим через Ω_U^∞ множество измеримых на J r -мерных функций $u(t)$, удовлетворяющих условию: $u(t) \in U$, замыкание множества значений функции $u(t)$ в E_u^r компактно и лежит в O . Семейство всевозможных функций вида $f(x, u, (t), t)$, где $u(t) \in \Omega_U^\infty$, обозначим F_U^∞ :

$$F_U^\infty = \{f(t, x) : f(t, x) = f(x, u(t), t), u(t) \in \Omega_U^\infty\}.$$

Очевидно, F_U^∞ можно отождествить с подмножеством из E_f .

Пусть $f(x, u, t)$ удовлетворяет прежним условиям, за исключением неравенства (5.5), которое заменим следующим: существует такое число $p \geq 1$, что для любого компакта $K \subset G$ можно найти измеримые положительные функции $m(t)$, $\mu(t)$, удовлетворяющие неравенству

$$|f(x, u, t)| + |f_x(x, u, t)| \leq m(t) + \mu(t) |u|^p \quad \forall x \in K \quad \forall u \in O \quad \forall t \in J, \quad (5.6)$$

причем $m(t)$ интегрируема на J , а $\mu(t)$ интегрируема на J в степени $q = \frac{p}{p-1} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \right)$. Обозначим через Ω_U^p множество всех измеримых интегрируемых на J в степени p функций $u(t)$, принимающих значения в U , и определим семейство F_U^p формулой

$$F_U^p = \{f(t, x) : f(t, x) = f(x, u(t), t), u(t) \in \Omega_U^p\}. \quad (5.7)$$

Очевидно, F_U^p также можно отождествить с подмножеством из E_f . Для удобства мы будем считать, что в формуле (5.7) $1 \leq p \leq \infty$, включая сюда тем самым и семейство F_U^∞ .

Фильтры $\Phi_f(F_U^p)$. Интересующие нас фильтры задаются в E_f следом фильтра окрестностей произвольной точки

$$\tilde{f} \in F_U^p, \quad \tilde{f} = f(x, \tilde{u}(t), t), \quad \tilde{u}(t) \in \Omega_U^p$$

в топологии T^s на множестве F_U^p , т. е. базисом

$$\{W : W = F_U^p \cap V_{\tilde{f}}^s\}, \quad (5.8)$$

где $V_{\tilde{f}}^s$ — произвольная окрестность точки $\tilde{f} \in F_U^p$ в топологии T^s .

Легко видеть, что фильтры $\Phi_f(F_U^p)$ не являются, вообще говоря, квазивыпуклыми в топологии T^s . Однако, пользуясь аппроксимационной леммой, мы покажем, что они квазивыпуклы в некоторой другой, более слабой, чем T^s , топологии, которую мы сейчас определим.

По аналогии с (5.4) полагаем

$$\|f\|_i^w = \left\{ \sup_{t_1, t_2, x} \left| \int_{t_1}^{t_2} f(t, x) dt \right| : t_1, t_2 \in J, x \in K_i \right\},$$

$$\|f\|_\infty^w = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{\|f\|_i^w}{1 + \|f\|_i^w}.$$

Топология T^w , определенная возрастающей последовательностью полунорм $\|\cdot\|_i^w$, $i = 1, 2, \dots$, задается инвариантной относительно сдвигов метрикой

$$\rho^w(f_1, f_2) = \|f_1 - f_2\|_\infty^w,$$

является локально выпуклой топологией в E_f и, очевидно, слабее топологии T^s .

Покажем, что фильтры $\Phi_f(F_U^p)$ квазивыпуклы в топологии T^w . Пусть заданы произвольное целое $m > 0$ и произвольный элемент W базиса (5.8). Существуют такое $\varepsilon_1 > 0$ и такой номер j_1 , что окрестность $V_{\tilde{f}}^s$ содержит множество

$$V_{K_{j_1}, \varepsilon_1}^s(\tilde{f}) = \{f : \|f - \tilde{f}\|_{j_1}^s \leq \varepsilon_1\} \quad (5.9)$$

и, следовательно,

$$W = F_U^p \cap V_{\tilde{f}}^s \supset F_U^p \cap V_{K_{j_1}, \varepsilon_1}^s(\tilde{f}).$$

Покажем, что в качестве соответствующего $\tilde{W} = \tilde{W}(W, m)$ (см. определение (3.2)) можно взять множество

$$\tilde{W} = F_U^p \cap V_{K_{j_1}, \frac{\varepsilon_1}{m+1}}^s(\tilde{f}).$$

Если $f_0(t, x), f_1(t, x), \dots, f_m(t, x)$ суть $1 + m$ точек из $\tilde{W}$, то

$$f_i(t, x) = f(x, u_i(t), t), \quad u_i(t) \in \Omega_U^p,$$

$$\int_j \sup_{x \in K_j} (|\tilde{f}(t, x) - f_i(t, x)| + |\tilde{f}_x(t, x) - f_{ix}(t, x)|) dt =$$

$$= \|\tilde{f} - f_i\|_{j_1}^s \leq \frac{\varepsilon}{m+1}. \quad (5.10)$$

Согласно аппроксимационной лемме для любого подразделения J_α интервала J отображение

$$\sigma_{J_\alpha}: \mu \mapsto f_\mu(t, x), \quad \mu = (\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_m) \in \Sigma,$$

непрерывно в топологии T^s и, следовательно, в более слабой топологии T^w (см. неравенство (5.3)). Элемент $f_\mu(t, x)$ имеет вид (см. (5.1))

$$\begin{aligned} f_\mu(t, x) &= f(x, u_\mu(t), t), \quad x \in G, \quad t \in J, \\ u_\mu(t) &= u_i(t), \quad t \in J_{\alpha_i}^\mu, \quad \alpha = \pm 1, \pm 2, \dots, \\ &\quad i = 0, 1, \dots, m, \end{aligned} \quad (5.11)$$

и, если подразделение J_α достаточно мелкое, выполняется неравенство (см. (5.2))

$$\left| \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{i=0}^m \mu_i f_i(t, x) - f_\mu(t, x) \right) dt \right| \leq \varepsilon_2 \forall t_1 t_2 \in J \forall x \in K_{j_2},$$

т. е.

$$\left\| \sum_{i=0}^m \mu_i f_i(t, x) - f_\mu(t, x) \right\|_{j_2}^w \leq \varepsilon_2,$$

где ε_2 и j_2 заданы.

Таким образом, если точки $f_0, f_1, \dots, f_m$ независимы в E_f , то формула

$$\mu_0 f_0 + \mu_1 f_1 + \dots + \mu_m f_m \mapsto f_\mu, \quad \mu \in \Sigma,$$

определяет непрерывное в топологии T^w отображение

$$\varphi: [f_0, f_1, \dots, f_m] \rightarrow E_f,$$

удовлетворяющее условию

$$\|z - \varphi(z)\|_{j_2}^w \leq \varepsilon \quad \forall z \in [f_0, f_1, \dots, f_m], \quad (5.12)$$

где наперед заданное $\varepsilon_2 > 0$ — сколь угодно мало, а целое j_2 — сколь угодно велико.

Если точки $f_0, f_1, \dots, f_m$ зависимы, то триангулируем выпуклое множество $[f_0, f_1, \dots, f_m]$ так, чтобы вершины триангуляции содержались среди точек $f_0, f_1, \dots, f_m$, и каждый симплекс $[f_{i_0}, f_{i_1}, \dots, f_{i_r}]$ триангуляции отобразим в E_f по формуле

$$\mu_{i_0} f_{i_0} + \mu_{i_1} f_{i_1} + \dots + \mu_{i_r} f_{i_r} \mapsto f_{(\mu_{i_0}, \mu_{i_1}, \dots, \mu_{i_r})}.$$

Тем самым определим непрерывное отображение всего множества $[f_0, f_1, \dots, f_m]$ в $E_f^{T^w}$

$$\varphi: [f_0, f_1, \dots, f_m] \rightarrow E_f^{T^w},$$

так как на пересечении двух симплексов триангуляции соответствующие отображения совпадают, причем опять выполняется соотношение (5.12). Таким образом, остается показать, что $\varphi(z) \in W$, т. е.

$$f_\mu(t, x) \in F_\mathcal{U}^p \cap V_f^s \quad \forall \mu \in \Sigma.$$

Включение $f_\mu(t, x) \in F_\mathcal{U}^p$ следует из определения f_μ , формула (5.11). Покажем, что

$$f_\mu(t, x) \in V_{K_{j_1}, \varepsilon_1}^s(j) \subset V_f^s.$$

Имеем при $x \in K_{j_1}$ (см. (5.11), (5.10))

$$\begin{aligned} & \int_J \sup_{x \in K_{j_1}} \left(|\tilde{f}(t, x) - f_\mu(t, x)| + \left| \frac{\partial \tilde{f}(t, x)}{\partial x} - \frac{\partial f_\mu(t, x)}{\partial x} \right| \right) dt = \\ &= \sum_{i=0}^m \int_{\bigcup_{\alpha=-\infty}^{\infty} J_{\alpha i}^\mu} \sup_{x \in K_{j_1}} \left(|\tilde{f}(t, x) - f_i(t, x)| + \left| \frac{\partial \tilde{f}(t, x)}{\partial x} - \frac{\partial f_i(t, x)}{\partial x} \right| \right) dt \leq \\ &\leq \sum_{i=0}^m \int_J \sup_{x \in K_j} \left(|\tilde{f}(t, x) - f_i(t, x)| + \left| \frac{\partial \tilde{f}(t, x)}{\partial x} - \frac{\partial f_i(t, x)}{\partial x} \right| \right) dt = \\ &= \sum_{i=0}^m \|f_i - \tilde{f}\|_{j_1}^s \leq \sum_{i=0}^m \frac{\varepsilon_1}{m+1} = \varepsilon_1. \end{aligned}$$

Фильтры $\Phi_f(F_\ell^p)$ обладают еще одним важным для нас свойством, которое будет сейчас доказано. Пусть W — произвольный элемент фильтра $\Phi_f(F_\ell^p)$; можно считать, что (см. (5.9))

$$W = F_\ell^p \cap V_{K_{j_1}, \varepsilon_1}^s(\tilde{f}); \quad (5.13)$$

пусть

$$M = \{f : \|f - \tilde{f}\|_{j_2}^s \leq \varepsilon_2\}, \quad (5.14)$$

где целое $j_2 > 0$ и $\varepsilon_2 > 0$ произвольны, но фиксированны. Через $\bar{W}_M^w$ обозначим замыкание относительно M множества $W \cap M$ в топологии, индуцированной на M топологией T^w . Тогда утверждение заключается в формуле

$$K(\bar{W}_M^w - \tilde{f}) \supset K(F_\ell^p - \tilde{f}), \quad (5.15)$$

где K — конус, натянутый на соответствующее множество в скобках.

Возьмем произвольный элемент из F_ℓ^p $f = f(x, u(t), t)$, $u(t) \in \Omega_\ell^p$ и обозначим точки отрезка

$$[\tilde{f}, f] = (1 - \mu)f(x, \tilde{u}(t), t) + \mu f(x, u(t), t), \quad 0 \leq \mu \leq 1,$$

через g_μ . Пусть при $i \rightarrow \infty$ $\varepsilon_i \rightarrow 0$ ($\varepsilon_i > 0$); зададим последовательность непрерывных в T^w отображений

$$\varphi_i : [\tilde{f}, f] \rightarrow F_\ell^p,$$

удовлетворяющих условию

$$\|g_\mu - \varphi_i(g_\mu)\|_i^w \leq \varepsilon_i, \quad \forall \mu \in [0, 1]. \quad (5.16)$$

Отображения φ_i на основании аппроксимационной леммы можно задать в виде

$$\left. \begin{aligned} \varphi_i(g_\mu) &= f(x, u_\mu(t), t), \quad x \in G, \quad t \in J, \\ u_\mu(t) &= \begin{cases} \tilde{u}(t), & t \in J_{\alpha 0}^\mu, \\ u(t), & t \in J_{\alpha 1}^\mu, \end{cases} \\ \text{meas } J_{\alpha 0}^\mu / \text{meas } J_{\alpha 1}^\mu &= \frac{1 - \mu}{\mu}, \\ \alpha &= \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned} \right\} \quad (5.17)$$

При этом соответствующее разбиение J_α будет зависеть, очевидно, от i , становясь все более мелким с возрастанием i .

Из формулы (5.16) следует, что $\varphi_i(g_\mu) \xrightarrow{w} g_\mu$ при $i \rightarrow \infty$. Поэтому включение (5.15) будет доказано, если доказать существование такого $\tilde{\mu}$, $0 < \tilde{\mu} < 1$, что

$$\|\varphi_i(g_\mu) - \tilde{f}\|_j \leq \varepsilon \quad \forall \mu \in [0, \tilde{\mu}], \quad i = 1, 2, \dots, \quad (5.18)$$

где $j = \max(j_1, j_2)$, $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, так как в этом случае будем иметь

$$\varphi_i(g_\mu) \in M \cap W, \quad 0 \leq \mu \leq \tilde{\mu}, \quad i = 1, 2, \dots$$

Имеем (см. (5.17))

$$\begin{aligned} & \int_J \sup_{x \in K_j} \left(|\varphi_i(g_\mu) - \tilde{f}| + \left| \frac{\partial \varphi_i(g_\mu)}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x} \right| \right) dt = \\ &= \int_{\bigcup_{\alpha=-\infty}^{\infty} J_{\alpha 1}^\mu} \sup_{x \in K_j} (|f(x, u(t), t) - f(x, \tilde{u}(t), t)| + |f_x(x, u(t), t) - \\ & \quad - f_x(x, \tilde{u}(t), t)|) dt. \end{aligned}$$

Пусть $\Delta \subset J$ — такое компактное множество, что

$$\int_{J \setminus \Delta} \sup_{x \in K_j} (|f - \tilde{f}| + |f_x - \tilde{f}_x|) dt \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Независимо от выбора подразделения J_α имеем при $\mu \rightarrow 0$

$$\text{meas} \left(\Delta \cap \left(\bigcup_{\alpha=-\infty}^{\infty} J_{\alpha 1}^\mu \right) \right) \rightarrow 0.$$

Поэтому существует независимое от номера i отображения φ_i , число $\tilde{\mu}$, $0 < \tilde{\mu} < 1$, такое, что при $0 \leq \mu \leq \tilde{\mu}$ справедливо неравенство

$$\begin{aligned} & \int_J \sup_{x \in K_j} \left(|\varphi_i(g_\mu) - \tilde{f}| + \left| \frac{\partial \varphi_i(g_\mu)}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x} \right| \right) dt \leq \\ & \leq \int_{\Delta \cap \left(\bigcup_{\alpha=-\infty}^{\infty} J_{\alpha 1}^\mu \right)} \sup_{x \in K_j} (|f - \tilde{f}| + |f_x - \tilde{f}_x|) dt + \\ & + \int_{J \setminus \Delta} \sup_{x \in K_j} (|f - \tilde{f}| + |f_x - \tilde{f}_x|) dt \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

которое и доказывает неравенство (5.18).

Продолжение примера § 4. Возьмем в примере § 4 в качестве фильтра $\Phi_{\tilde{f}}$ фильтр $\Phi_{\tilde{f}}(F_{\tilde{f}}^p)$, в качестве топологии $\theta_{\tilde{f}}$ — топологию T^w ; тогда θ^w — топология прямого произведения

$$E_{\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}}^2 \times E_{x_1}^n \times E_{\tilde{f}}^{T^w} = E_z^{\theta^w}.$$

Фильтр Φ_z , $z = (\tilde{t}_1, \tilde{t}_2, \tilde{x}_1, \tilde{f})$, заданный базисом

$$\left\{ W_{\tilde{z}} : W_{\tilde{z}} = V_{\begin{pmatrix} \tilde{t}_1 \\ \tilde{t}_2 \end{pmatrix}} \times V_{\tilde{x}_1} \times W_{\tilde{f}}, \quad W_{\tilde{f}} \in \Phi_{\tilde{f}}(F_{\tilde{f}}^p) \right\},$$

является, как это было только что показано, θ^w -квазивыпуклым, а отображение (4.3) θ^w -непрерывно на выпуклой оболочке $[\Phi_{\bar{x}}]$; это последнее утверждение — непосредственное следствие общей теоремы о непрерывной зависимости решения обыкновенного дифференциального уравнения от начальных данных и правой части и может быть без труда выведено из известных теорем (доказательство см., например, в [3]). Следовательно, необходимые условия критичности (4.11) — (4.13) применимы к данному случаю.

Докажем непрерывность в топологии θ^w ограничения дифференциала (4.4) на любое множество вида

$$E_{(dt_1)}^2 \times E_{dx_1}^n \times M,$$

где M задано формулой

$$M = \{\delta f(t, x) : \|\delta f(t, x)\|_{i_0}^s \leq \text{const}\}, \quad (5.19)$$

причем i_0 настолько велико, что компакт K_{i_0} содержит некоторую окрестность траектории $\bar{x}(t)$, $t \in [\bar{t}_1, \bar{t}_2]$. Для этого достаточно доказать T^w -непрерывность отображения множества M , заданного формулой

$$\delta f(t, x) \mapsto \int_{\bar{t}_1}^{\bar{t}_2} \Gamma^{-1}(t) \delta f(t, \bar{x}(t)) dt, \quad \delta f \in M. \quad (5.20)$$

Тогда мы сможем, воспользовавшись формулой (3.6) и включением (5.15), заменить неравенство (4.12) более сильным неравенством

$$\int_{\bar{t}_1}^{\bar{t}_2} \bar{\psi}(t) f(\bar{x}(t), \bar{u}(t), t) dt \geq \int_{\bar{t}_1}^{\bar{t}_2} \bar{\psi}(t) f(\bar{x}(t), u(t), t) dt \quad (5.21)$$

$$\forall u(t) \in \Omega_{\bar{t}}^p.$$

Так как

$$\begin{aligned} \int_{\bar{t}_1}^{\bar{t}_2} \Gamma^{-1}(t) \delta f(t, \bar{x}(t)) dt &= \Gamma^{-1}(\bar{t}_2) \int_{\bar{t}_1}^{\bar{t}_2} \delta f(t, \bar{x}(t)) dt - \\ &\quad - \int_{\bar{t}_1}^{\bar{t}_2} \frac{d\Gamma^{-1}(t)}{dt} \left(\int_{\bar{t}_1}^t \delta f(\tau, \bar{x}(\tau)) d\tau \right) dt, \end{aligned}$$

то T^w -непрерывность (5.20) будет доказана, если доказать, что произвольная последовательность точек $\delta f_j(t, x)$ из M w -стремящаяся к нулю

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|\delta f_j(t, x)\|_i^w = 0, \quad i = 1, 2, \dots, \quad (5.22)$$

удовлетворяет также соотношению

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\bar{t}_1}^{\bar{t}_2} \delta f_j(t, \bar{x}(t)) dt = 0. \quad (5.23)$$

Пусть

$$\|\delta f(t, x)\|_{i_0}^w \leq \varepsilon.$$

Обозначим через $\omega(h)$ модуль непрерывности функции $\tilde{x}(t)$, $\tilde{t}_1 \leq t \leq \tilde{t}_2$:

$$\omega(h) = \max_{\substack{t', t'' \in [\tilde{t}_1, \tilde{t}_2] \\ |t' - t''| \leq h}} |\tilde{x}(t') - \tilde{x}(t'')|, \quad 0 \leq h \leq \tilde{t}_2 - \tilde{t}_1.$$

Докажем, что для любого достаточно большого m

$$\left| \int_{t'}^{t''} \delta f(t, \tilde{x}(t)) dt \right| \leq \omega\left(\frac{|t' - t''|}{m}\right) \|\delta f(t, x)\|_{i_0}^s + \\ + m \|\delta f(t, x)\|_{i_0}^w \quad \forall t', t'' \in [\tilde{t}_1, \tilde{t}_2]. \quad (5.24)$$

Подразделим отрезок $[t', t'']$ на m равных частей Δ_i , $i=1, 2, \dots, m$, и пусть $t_i \in \Delta_i$; тогда

$$\int_{t'}^{t''} \delta f(t, \tilde{x}(t)) dt = \sum_{i=1}^m \int_{\Delta_i} [\delta f(t, \tilde{x}(t)) - \delta f(t, \tilde{x}(t_i))] dt + \sum_{i=1}^m \int_{\Delta_i} \delta f(t, \tilde{x}(t_i)) dt.$$

Имеем

$$\delta f(t, \tilde{x}(t)) - \delta f(t, \tilde{x}(t_i)) = \int_0^1 \delta f_x(t, \tilde{x}(t_i) + \tau(\tilde{x}(t) - \tilde{x}(t_i))) (\tilde{x}(t) - \tilde{x}(t_i)) d\tau.$$

Следовательно, предполагая m настолько большим, чтобы при $t \in \Delta_i$ было

$$\tilde{x}(t_i) + \tau(\tilde{x}(t) - \tilde{x}(t_i)) \in K_{i_0}, \quad 0 \leq \tau \leq 1, \quad i=1, \dots, m,$$

получим

$$\left| \int_{t'}^{t''} \delta f(t, \tilde{x}(t)) dt \right| \leq \sum_{i=1}^m \int_{\Delta_i} \left[\int_0^1 |\delta f_x(t, \tilde{x}(t_i) + \tau(\tilde{x}(t) - \tilde{x}(t_i)))| d\tau \right] \times \\ \times |\tilde{x}(t) - \tilde{x}(t_i)| dt + \sum_{i=1}^m \left| \int_{\Delta_i} \delta f(t, \tilde{x}(t_i)) dt \right| \leq \omega\left(\frac{|t' - t''|}{m}\right) \times \\ \times \sum_{i=1}^m \int_{\Delta_i} \sup_{x \in K_{i_0}} |\delta f_x(t, x)| dt + \sum_{i=1}^m \sup_{x \in K_{i_0}} \left| \int_{\Delta_i} \delta f(t, x) dt \right| \leq \\ \leq \omega\left(\frac{|t' - t''|}{m}\right) \|\delta f(t, x)\|_{i_0}^s + m \|\delta f(t, x)\|_{i_0}^w.$$

Таким образом, формула (5.24) дает при $\delta f_j \in M$ (см. (5.19))

$$\left| \int_{\tilde{t}_1}^{\tilde{t}_2} \delta f_j(t, \tilde{x}(t)) dt \right| \leq \omega\left(\frac{|\tilde{t}_1 - \tilde{t}_2|}{m}\right) \text{const} + m \|\delta f_j(t, x)\|_{i_0}^w.$$

Так как m сколь угодно велико и $\omega\left(\frac{|\tilde{t}_1 - \tilde{t}_2|}{m}\right) \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$, то из (5.22) следует (5.23).

Формула (5.21) — принцип максимума в «интегральной» форме.

В рассматриваемом случае из него легко следует принцип максимума в форме Понтрягина. В самом деле, пусть $t' \in [\tilde{t}_1, \tilde{t}_2]$ — произвольная точка дифференцируемости неопределенного интеграла

$$\int_{\tilde{t}_1}^t \tilde{\varphi}(\tau) f(\tilde{x}(\tau), u(\tau), \tau) d\tau, \quad t \in [\tilde{t}_1, \tilde{t}_2].$$

Обозначим через Δ_h отрезок $t' \leq t \leq t' + h$ и зададим управление $u(t) \in \Omega_t^p$ формулой

$$u(t) = \begin{cases} \tilde{u}(t) & \text{при } t \notin \Delta_h, \\ u' & \text{при } t \in \Delta_h, \end{cases} \text{ где } u' \in U.$$

Из (5.21) следует

$$\frac{1}{h} \int_{t'}^{t'+h} \tilde{\varphi}(t) f(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t), t) dt \geq \frac{1}{h} \int_{t'}^{t'+h} \tilde{\varphi}(t) f(\tilde{x}(t), u', t) dt.$$

При $h \rightarrow 0$ предел слева существует по предположению, а предел справа — из-за непрерывности функции $f(x, u, t)$ по совокупности аргументов. Следовательно, почти всюду на $[\tilde{t}_1, \tilde{t}_2]$ для произвольного $u' \in U$ имеем

$$\tilde{\varphi}(t) f(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t), t) \geq \tilde{\varphi}(t) f(\tilde{x}(t), u', t)$$

или

$$H(\tilde{\varphi}(t), \tilde{x}(t), \tilde{u}(t), t) \geq \tilde{\varphi}(t) f(\tilde{x}(t), u', t)$$

— принцип максимума Понтрягина.

§ 6. Приложения к оптимальным задачам

В этом параграфе, воспользовавшись полученными результатами, мы докажем принцип максимума для основных оптимальных задач. Пусть задана n -мерная функция $f(x, u, t)$, удовлетворяющая условиям, сформулированным в § 5.

Рассмотрим «управляемое» дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u, t), \quad (6.1)$$

содержащее r -мерный «управляющий» параметр u . Множества Ω_t^p , $1 \leq p \leq \infty$, будем теперь называть *классами допустимых управлений*, а элементы $u(t) \in \Omega_t^p$ — *допустимыми управлениями*. Будем считать, что зафиксирован некоторый класс допустимых управлений Ω_t^p , и будем подставлять в (6.1) вместо параметра u элементы $u(t) \in \Omega_t^p$. Тогда мы получим семейство дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u(t), t), \quad u(t) \in \Omega_t^p, \quad (6.2)$$

определяемое семейством правых частей (см. § 5):

$$F_t^p = \{f(t, x) : f(t, x) = f(x, u(t), t), u(t) \in \Omega_t^p\}.$$

Пусть заданы краевые условия для решений уравнения (6.2) $x(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$, не зависящие от выбора $u(t) \in \Omega_t^p$:

$$q^i(t_1, t_2, x(t_1), x(t_2)) = q^i(t_1, t_2, x_1, x_2) = 0 \quad i = 1, \dots, k, \quad (6.3)$$

и скалярная функция от тех же переменных

$$q^0(t_1, t_2, x_1, x_2). \quad (6.4)$$

Функции q^0, q^i предполагаются непрерывно дифференцируемыми во всем пространстве $E_{(t_1, t_2, x_1, x_2)T}^{2+2n}$; в (6.3) не исключается случай $k=0$ (отсутствие краевых условий).

В дальнейшем ради удобства будем говорить не о решении $x(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$, уравнения (6.2) при заданном $u(t) \in \Omega_U^p$, а о решении уравнения (6.1) $u(t)$, $x(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$, где всегда $u(t) \in \Omega_U^p$; однако, говоря о краевых условиях решения, мы всегда будем предполагать условия (6.3), учитывающие только краевые значения функции $x(t)$.

О п р е д е л е н и е. Решение

$$\tilde{u}(t), \quad \tilde{x}(t), \quad \tilde{t}_1 \leq t \leq \tilde{t}_2, \quad (6.5)$$

уравнения (6.1), удовлетворяющее краевым условиям (6.3), будем называть (*сильной*) *экстремалью* оптимальной задачи, заданной уравнением (6.1), семейством допустимых управлений Ω_U^p , краевыми условиями (6.3) и экстремизируемой функцией (6.4), если существуют такая окрестность $V_{\tilde{f}}^s$ точки $f(x, \tilde{u}(t), t) = \tilde{f}(t, x) \in F_U^p$ в топологии T^s (§ 5) и такое число $\varepsilon > 0$, что для произвольного решения уравнения (6.1) $u(t)$, $x(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$, удовлетворяющего краевым условиям (6.3) и соотношениям

$$|t_1 - \tilde{t}_1| + |t_2 - \tilde{t}_2| + |x_1 - \tilde{x}_1| \leq \varepsilon, \quad f(x, u(t), t) \in V_{\tilde{f}}^s,$$

всегда справедливо либо неравенство

$$q^0(\tilde{t}_1, \tilde{t}_2, \tilde{x}(\tilde{t}_1), \tilde{x}(\tilde{t}_2)) \leq q^0(t_1, t_2, x(t_1), x(t_2))$$

— *случай (сильного) минимума*, либо неравенство

$$q^0(\tilde{t}_1, \tilde{t}_2, \tilde{x}(\tilde{t}_1), \tilde{x}(\tilde{t}_2)) \geq q^0(t_1, t_2, x(t_1), x(t_2))$$

— *случай (сильного) максимума*.

Если в определении 6.1 топологию T^s заменить какой-либо более сильной векторной топологией, сохранив все остальные условия без изменений, то получим более «слабое» понятие экстремали. Покажем, что по заданной экстремали с помощью однозначно определенной простой конструкции, фактически повторяющей соответствующую конечномерную конструкцию § 2, можно построить некоторое отображение и фильтр, на котором это отображение критично.

Будем предполагать, что решение (6.5) осуществляет сильный минимум. Пусть

$$E_\zeta = E_y^1 \times E_z = E_y^1 \times E_{(t_1, t_2)}^2 \times E_{x_1}^n \times E_f,$$

$$\zeta = (y, z) = (y, t_1, t_2, x_1, f)$$

— произведение одномерного пространства параметра y на линейное пространство E_z примера § 4, 5 и $D \subset E_z$ — введенное там же конечно-открытое множество. Тогда конечно-открыто и множество

$$D_\zeta = E_y^1 \times D \subset E_\zeta,$$

и мы можем определить на нем отображение

$$P: D_\zeta \rightarrow E_p^{1+k}$$

по формуле

$$P(\zeta) = \begin{pmatrix} p^0(\zeta) \\ p^1(\zeta) \\ \vdots \\ p^k(\zeta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q^0(S(z)) + y \\ q^1(S(z)) \\ \vdots \\ q^k(S(z)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q^0(t_1, t_2, x_1, x_2) + y \\ q^1(t_1, t_2, x_1, x_2) \\ \vdots \\ q^k(t_1, t_2, x_1, x_2) \end{pmatrix}, \quad (6.6)$$

где $\zeta = (y, z)$, $S(z) = (t_1, t_2, x_1, x_2)^T$ — введенное в примере § 4 отображение множества D в $E_{(t_1, t_2, x_1, x_2)}^{2+2n}$.

Обозначим через $Y \subset E_y^1$ положительную полуось $y \geq 0$ и определим в E_z фильтр Φ_ζ с помощью базисных множеств

$$W_\zeta = (Y \cap V_0) \times V_{\begin{pmatrix} \tilde{t}_1 \\ \tilde{t}_2 \end{pmatrix}} \times V_{\tilde{x}_1} \times (F_U^p \cap V_f^s) = (Y \cap V_0) \times W_{\tilde{z}}, \quad (6.7)$$

где $W_{\tilde{z}} \in \Phi_{\tilde{z}}$.

Точка

$$\tilde{\zeta} = (0, \tilde{t}_1, \tilde{t}_2, \tilde{x}_1, \tilde{f}) = (0, \tilde{z}) \in E_{\tilde{\zeta}} \quad (6.8)$$

является единственной принадлежащей всем множествам (6.7), т. е. всем множествам фильтра Φ_ζ . Отображение (6.6) определено на Φ_ζ (см. пример § 5), а из определения непосредственно следует существование такого множества W_ζ вида (6.7), что точка $P(\tilde{\zeta})$ является граничной («наинизшей») точкой пересечения «вертикальной» оси p^0 с образом $P(W_\zeta)$, т. е. критичность отображения на фильтре.

Напишем необходимое условие критичности

$$\lambda dP_{\tilde{z}}(\delta\tilde{\zeta}) = \sum_{i=0}^k \lambda_i dp^i(\delta\tilde{\zeta}) \leq 0, \quad (6.9)$$

$$\forall \delta\tilde{\zeta} \in Y \times K([W_{\tilde{z}}] - \tilde{z}).$$

Полагая в (6.9) $\delta z = 0$, получим $\lambda_0 \delta y \leq 0$, $\forall \delta y \in Y$, т. е. $\lambda_0 \leq 0$. Полагая $\delta y = 0$, получим соотношение

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i dp^i(\delta\tilde{\zeta}) \leq 0 \quad \forall \delta\tilde{\zeta} \in 0 \times K([W_{\tilde{z}}] - \tilde{z}),$$

идентичное соотношению (4.5). Поэтому, вводя функцию

$$H(\psi, x, u, t) = \psi f(x, u, t),$$

можно утверждать следующее. Существует такая n -мерная функция

$$\tilde{\psi}(t), \quad \tilde{t}_1 \leq t \leq \tilde{t}_2,$$

и такая $(k+1)$ -мерная ненулевая строка

$$\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_k), \quad \lambda_0 \leq 0,$$

что на отрезке $\tilde{t}_1 \leq t \leq \tilde{t}_2$ удовлетворяется гамильтонова система

$$\frac{d\tilde{x}}{dt} = \frac{\partial}{\partial \psi} H(\tilde{\psi}(t), \tilde{x}(t), \tilde{u}(t), t),$$

$$\frac{d\tilde{\psi}}{dt} = - \frac{\partial}{\partial x} H(\tilde{\psi}(t), \tilde{x}(t), \tilde{u}(t), t)$$

и выполняется принцип максимума

$$\int_{\tilde{t}_1}^{\tilde{t}_2} H(\tilde{\psi}(t), \tilde{x}(t), \tilde{u}(t), t) dt \geq \int_{\tilde{t}_1}^{\tilde{t}_2} H(\tilde{\psi}(t), \tilde{x}(t), u(t), t) dt,$$

$$\forall u(t) \in \Omega_U^p.$$

Наконец, выполняется условие трансверсальности

$$(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_k) \left(\frac{\partial \tilde{Q}}{\partial t_1}, \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial t_2}, \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial x_1}, \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial x_2} \right) = \tilde{H}(\tilde{t}_1), -\tilde{H}(\tilde{t}_2), -\tilde{\psi}(\tilde{t}_1), \tilde{\psi}(\tilde{t}_2),$$

где

$$\tilde{H}(t) = H(\tilde{\psi}(t), \tilde{x}(t), \tilde{u}(t), t),$$

$$Q(t_1, t_2, x_1, x_2) = \begin{pmatrix} q^0(t_1, t_2, x_1, x_2) \\ q^1(t_1, t_2, x_1, x_2) \\ \dots \\ q^k(t_1, t_2, x_1, x_2) \end{pmatrix},$$

и волна сверху в $\frac{\partial \tilde{Q}}{\partial t_1}, \dots, \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial x_2}$ означает, что соответствующие градиенты берутся в точке $(\tilde{t}_1, \tilde{t}_2, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2)^T$.

Чтобы гарантировать нетривиальность функции $\tilde{\psi}(t)$, т. е. $\tilde{\psi}(t) \not\equiv 0$, $t_1 \leq t \leq t_2$, достаточно предположить (см. пример § 4), что ранг $(1+k) \times \times (2+2n)$ -матрицы

$$\left(\frac{\partial \tilde{Q}}{\partial t_1}, \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial t_2}, \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial x_1}, \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial x_2} \right)$$

равен $1+k$, т. е. что $2+2n - (1+k)$ -мерная поверхность

$$Q(t_1, t_2, x_1, x_2) = \text{const}$$

регулярна в точке $(\tilde{t}_1, \tilde{t}_2, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2)^T$.

В заключение отметим, что из неравенства (5.12) следует принцип максимума в форме Понтрягина: почти всюду на $\tilde{t}_1 \leq t \leq \tilde{t}_2$

$$H(\tilde{\psi}(t), \tilde{x}(t), \tilde{u}(t), t) \geq \sup_{u \in U} H(\tilde{\psi}(t), \tilde{x}(t), u, t),$$

(см. пример § 5).

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. В. Гамкрелидзе. О скользящих оптимальных режимах. — Докл. АН СССР, 1962, **134**, № 6, 106—128.
2. R. V. Gamkrelidze. On some extremal problems in the theory of differential equations. — J. SIAM Contr., 1965, N 3, 106—128.
3. Р. В. Гамкрелидзе, Г. Л. Харатишвили. Экстремальные задачи в линейных топологических пространствах. — Изв. АН СССР, серия матем., 1969, **33**, 784—839.
4. Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко. Математическая теория оптимальных процессов. М., Физматгиз, 1961.