Р. В. Гамкрелидзе, Г. Л. Харатишвили, Экстремальные задачи в линейных топологических пространствах, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, 1969, том 33, выпуск 4, 781–839

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
33 (1969), 781—839

УДК 519.3

Р. В. ГАМКРЕЛИДЗЕ и Г. Л. ХАРАТИШВИЛИ

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ В ЛИНЕЙНЫХ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

В работе строится аксиоматическая теория первой вариации для экстремальных задач в линейных топологических пространствах.

Введение

В настоящей работе строится аксиоматическая теория первой вариации для экстремальных задач в линейных топологических пространствах, а также формулируется и доказывается необходимое условие экстремальности первого порядка для таких задач. Эта теория охватывает основные вариационные и оптимальные задачи для функций от одной независимой переменной, а из доказанного здесь необходимого условия экстремальности следуют все необходимые условия первого порядка вариационных и оптимальных задач, в частности, гамильтонов формализм и принцип максимума Понтрягина (1).

В основу изложенной аксиоматики положено понятие квазивыпуклого фильтра, возникшее в результате исследований по скользящим оптимальным режимам [см. (2), (3)].

Данная нами аксиоматика включает также экстремальные задачи, в которых экстремируются функционалы неинтегрального типа, например, функционалы типа максимума, на которые принцип максимума был распространен в работах А. Я. Дубовицкого, А. А. Милютина (4) и L. W. Neustadt'a (5), (6).

Абстрактная вариационная теория с приложениями к оптимальным задачам разрабатывалась на основе понятия скользящих оптимальных режимов и в работах американских математиков L. W. Neustadt'a и H. Halkin'a [см. (5), (6), (7)].

Результаты настоящей работы частично содержатся в более ранних публикациях авторов (8), (9).

Дадим краткое содержание работы.

Экстремальные задачи изучаемого нами типа удобно формулировать как задачи на определение критических фильтров отображений в конечномерные линейные пространства. В § 1 введено понятие критического фильтра отображения, а сведение вариационных и оптимальных задач к нахождению критических фильтров соответствующих отображений дано в § 5. Для формулировки нетривиальных критериев критичности необходимо наложить некоторые условия как на класс рассматриваемых отображений, так и на класс искомых критических фильтров. Однако эти классы должны быть достаточно широки для того, чтобы охватить все основные вариационные и оптимальные задачи. Относительно рассматриваемых в дальнейшем отображений мы предполагаем, что они дифференцируемы; все необходимые определения даны в § 2. Искомые же критические фильтры мы будем предполагать квазивыпуклыми; соответствующие определения даны в § 3.

Оказывается, что все основные вариационные и оптимальные задачи таковы, что для них соответствующие отображения дифференцируемы, а фильтры квазивыпуклы. Далее, оказывается, что можно сформулировать необходимое условие критичности квазивыпуклого фильтра дифференцируемого отображения, из которого будут следовать все необходимые условия экстремальности первого порядка.

Формулировка и доказательство необходимого условия критичности при указанных предположениях, а также вывод гамильтонова формализма и принципа максимума даны в § 4.

В § 5 предложенная аксиоматика прилагается к обычным оптимальным задачам, а в § 6 — к экстремальным задачам с экстремируемыми функционалами неинтегрального типа.

Наконец, в Добавлении (§ 7) сформулированы и доказаны теоремы о дифференцируемости и непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений от правых частей, на которые мы неоднократно будем ссылаться в основном тексте.

В заключение авторы считают своим приятным долгом выразить искреннюю признательность Л. С. Понтрягину за несколько замечаний, позволивших существенно упростить изложение.

§ 1. Формулировка задачи

Экстремальные задачи удобно формулировать как задачи на отыскание критических фильтров заданного отображения. Поэтому настоящий параграф мы посвящаем относящимся сюда общим определениям.

Через E_x, $E_y, \dots$ будем обозначать линейные (действительные) пространства точек x, $y, \dots$. Конечномерные пространства будем обозначать через E_x^n, E_y^m, $\dots$, где верхний индекс указывает на размерность. В конечномерном случае векторы, обозначенные малыми латинскими буквами x, $y, \dots$, всегда будут отождествляться со столбцами соответствующих размерностей:

$$x = \begin{pmatrix} x^1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x^n \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y^1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y^m \end{pmatrix}, \; \dots .$$

Векторы пространств, сопряженных к конечномерным пространствам векторов-столбцов, будем представлять в виде строк соответствующих размерностей и обозначать греческими буквами. Например, сопряженные к E_x^n, E_y^m пространства будем обозначать через E_ξ^n, E_η^m, где

$$\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n), \quad \eta = (\eta_1, \ldots, \eta_m).$$

Скаляры и векторы бесконечномерных пространств будем обозначать как латинскими, так и греческими буквами.

Скалярное произведение векторов из сопряженных пространств будем записывать в виде матричного умножения:

$$\xi x = (\xi_1, \ldots, \xi_n)\begin{pmatrix} x^1 \\ \cdot \\ \vdots \\ \cdot \\ x^n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \xi_i x^i.$$

Звездочка сверху будет обозначать транспонирование матрицы, например:

$$x^* = \begin{pmatrix} x^1 \\ \cdot \\ \vdots \\ \cdot \\ x^n \end{pmatrix}^* = (x^1, \ldots, x^n),$$

$$\xi^* = (\xi_1, \ldots, \xi_n)^* = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \cdot \\ \vdots \\ \cdot \\ \xi_n \end{pmatrix}.$$

Под модулем вектора $x \in E_x^n$ будем понимать эвклидов модуль:

$$|x|^2 = x^* x = \sum_{i=1}^{n} (x^i)^2.$$

Пусть θ — топология в линейном пространстве E_z, которая превращает E_z в линейное топологическое пространство, обозначаемое через E_z^θ, чтобы подчеркнуть зависимость от топологии θ. Всякую такую топологию будем называть *векторной топологией* в E_z. Во всем дальнейшем, если явно не оговорено противное, все векторные топологии будут предполагаться отделимыми (хаусдорфовыми). Следовательно, топология всякого конечномерного линейного многообразия в E_z^θ, индуцированная топологией θ, совпадает с обычной конечномерной топологией этого многообразия. Конечномерные пространства будут всегда предполагаться снабженными обычной (эвклидовой) топологией.

Предположим, что D — некоторое множество в E_z и что задано отображение

$$P\colon D \to E_p^s \tag{1.1}$$

множества D в s-мерное пространство E_p^s точек p.

Пусть Φ — произвольный фильтр в E_z.

Условимся говорить, что *отображение* (1.1) *определено на фильтре* Φ, если существует такой базис B фильтра Φ, что из $W \in B$ следует $W \subset D$.

Далее, будем говорить, что определенное на Φ отображение (1.1) *непрерывно на фильтре* Φ *в топологии* θ, если дополнительно из $W \in B$

следует, что ограничение отображения (1.1)

$$P\colon W \to E_p$$

непрерывно в индуцированной из E_z^θ топологии.

Определение 1.1. Пусть в E_z задан произвольный фильтр Φ, на котором определено отображение (1.1). Будем называть Φ *критическим фильтром отображения* (1.1), или же отображение (1.1) будем называть *критичным на фильтре* Φ, если для любой точки z, принадлежащей всем множествам фильтра Φ, найдется такой элемент $W \in \Phi$, что $W \subset D$ и точка $P(z)$ является граничной точкой множества $P(W) \subset E_p^s$.

Если в определении 1.1 в качестве Φ взят фильтр окрестностей некоторой точки $z \in D$ в топологии θ, то будем говорить о *критической точке z отображения* (1.1) *в топологии* θ, или же о *критичности отображения* (1.1) *в точке z в топологии* θ.

Если фильтр Φ_1 мажорируется фильтром Φ_2 и если отображение (1.1) критично на фильтре Φ_1, то оно, очевидно, критично и на Φ_2. Следовательно, чем сильнее фильтр Φ в определении 1.1, тем «слабее» соответствующее понятие критичности, т. е. тем «легче» для фильтра быть критичным при заданном отображении.

Наша основная задача будет заключаться в нахождении необходимых условий критичности отображения (1.1) на фильтре Φ.

При сделанных нами общих предположениях — произвольность отображения (1.1) и искомого фильтра Φ — невозможно дать нетривиальные условия критичности. Поэтому мы ограничим классы рассматриваемых отображений (1.1) и фильтров Φ, чтобы получить содержательное условие критичности. При этом такие классы должны быть достаточно широки для того, чтобы охватить все основные вариационные и оптимальные задачи. Относительно рассматриваемых отображений (1.1) мы будем предполагать, что они заданы на конечно-открытых множествах $D \subset E_z$ и дифференцируемы на них; все необходимые определения даны в § 2. Относительно фильтров Φ мы будем предполагать, что они квазивыпуклы — соответствующие определения даны в § 3.

Оказывается, что эти ограничения, с одной стороны, достаточно широки для того, чтобы охватить все основные вариационные и оптимальные задачи (§§ 5—6), а с другой стороны позволяют доказать необходимое условие критичности (§ 4), содержащее как частные случаи известные необходимые условия первого порядка для вариационных и оптимальных задач, в частности, принцип максимума в оптимальном управлении (§§ 4—5).

§ 2. Дифференцируемые отображения

Подмножество D линейного пространства E_z будем называть *конечно-открытым*, если его пересечение $D \cap L$ с произвольным конечномерным линейным многообразием $L \subset E_z$ открыто в конечномерной топологии многообразия L.

Пусть задано отображение

$$P\colon D \to E_p^s \tag{2.1}$$

конечно-открытого множества $D \subset E_z$ в s-мерное пространство E_p^s.

Определение 2.1. Мы будем говорить, что *отображение* (2.1) *имеет дифференциал в точке* $z \in D$, если для любого конечномерного линейного многообразия L_z, проходящего через точку z, ограничение отображения (2.1):

$$P\colon D \cap L_z \to E_p^s \tag{2.2}$$

на конечномерное открытое множество $D \cap L_z \subset L_z$ имеет дифференциал в точке z в обычном смысле.

Данное определение эквивалентно следующему представлению:

$$\left.\begin{aligned} P(z+\delta z) - P(z) = dP_z(\delta z) + o(\delta z),\\ z+\delta z \in D \cap L_z.\end{aligned}\right\} \tag{2.3}$$

Здесь

$$dP_z : (L_z - z) \to E_{dp}^s \tag{2.4}$$

— линейное отображение конечномерного подпространства $(L_z - z) \subset \subset E_{\delta z} = E_z - z$ в E_{dp}^s, а функция $o(\delta z)$ удовлетворяет условию

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{o(\varepsilon \delta z)}{\varepsilon} = 0 \tag{2.5}$$

равномерно относительно $\delta z \in V$, где V — некоторая относительно компактная окрестность нуля в $D \cap L_z - z$.

Конструкция отображения (2.4), так же как и функция $o(\delta z)$, зависят не только от точки z, но и от выбора конечномерного подпространства L_z. Однако легко видеть, что dP_z не зависит от L_z: если

$$dP'_z\colon (L'_z - z) \to E_{dp}^s,$$

$$dP''_z\colon (L''_z - z) \to E_{dp}^s,$$

где L'_z, L''_z — произвольные конечномерные линейные многообразия, проходящие через z, то dP'_z и dP''_z совпадают на пересечении

$$(L'_z - z) \cap (L''_z - z) = (L'_z \cap L''_z - z).$$

Поэтому определено линейное отображение

$$dP_z\colon E_{\delta z} \to E_{dp}^s. \tag{2.6}$$

Отображение (2.6) будем называть *дифференциалом в точке z отображения* (2.1). Если это последнее имеет дифференциал в каждой точке $z \in D$, то будем называть его *дифференцируемым на множестве D*.

Подчеркнем, что данное нами определение дифференцируемого отображения использует лишь линейную структуру пространства E_z (и топологию его конечномерных подпространств) и не предполагает, что в E_z введена топология в бесконечномерном случае. Если в E_z ввести некоторую векторную топологию θ, то может оказаться, что отображение (2.1) дифференцируемо на D, однако не является непрерывным в топологии θ. В качестве примера можно привести всякий неограниченный линейный функционал в нормированном пространстве.

Однако очевидно, что всякое ограничение (2.2) дифференцируемого на D отображения непрерывно на множестве $D \cap L_z$ и линейное отображение (2.4) является «первым приближением» к отображению

$$\delta z \to P(z+\delta z) - P(z), \quad \delta z \in (D \cap L_z - z),$$

в окрестности нуля конечномерного пространства $L_z - z$.

Пусть отображение (2.1) имеет дифференциал в точке $z \in D$ и его ограничение (2.2) непрерывно в окрестности точки z, каково бы ни было конечномерное линейное многообразие L_z. Пусть, далее,

$$Q: E_p^s \to E_q^m$$

— дифференцируемое отображение. Тогда отображение

$$QP: D \to E_q^m$$

конечно-открытого множества $D \subset E_z$ в E_q^m таково, что его ограничение

$$QP: D \cap L_z \to E_q^m$$

непрерывно в окрестности точки z для любого конечномерного L_z и, согласно «цепному правилу» дифференцирования в конечномерном случае, имеет дифференциал в z, который вычисляется по формуле

$$d(QP)_z(\delta z) = dQ_{P(z)}(dP_z(\delta z)) \qquad \forall \delta z \in E_{\delta z}. \tag{2.7}$$

Следующий важный пример вычисления дифференциала будет неоднократно использован в дальнейшем.

Пример 2.1. Пусть G — открытое множество в E_x^n, J — открытый интервал временной оси t. Рассмотрим множество n-мерных функций $f(x, t)$ на $G \times J$, удовлетворяющих следующим условиям. Функция $f(x, t)$ непрерывно дифференцируема по x при каждом фиксированном $t \in J$; при каждом фиксированном $x \in G$ она измерима на J вместе с матрицей

$$f_x(x,t) = \frac{\partial f(x,t)}{\partial x} = \left(\frac{\partial f^i(x,t)}{\partial x^j}\right), \quad i,j = 1,\dots,n.$$

Далее, для любой рассматриваемой функции $f(x,t)$ и любого компакта $K \subset G$ существует суммируемая на J функция $m(t)$, вообще говоря, зависящая от выбора f и K, такая, что при любом $x \in K$ и почти для всех $t \in J$.

$$|f(x, t)| + |f_x(x, t)| \leqslant m(t), \quad x \in K, \quad t \in J^*.$$

* Под модулем $|f_x(x, t)|$ матрицы f_x удобно подразумевать (что мы и будем делать в дальнейшем) ее норму, если f_x рассматривать как оператор в пространстве n-мерных столбцов x; следовательно, справедливо неравенство $|f_x x| \leqslant |f_x|\,|x|$.

Две функции $f_1(x,t)$, $f_2(x,t)$ рассматриваемого множества будем называть эквивалентными, если при всяком фиксированном $x \in G$ почти для всех $t \in J$

$$f_1(x,t) - f_2(x,t) = 0.$$

Классы эквивалентных между собой функций образуют линейное пространство, которое будем обозначать через E_f; мы будем называть их также функциями, что, однако, не может привести ни к каким недоразумениям (см. также Дополнение, § 7.1).

Пусть $t_1, t_2 \in J$; нас будут интересовать решения* $x(t)$ дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{dt} = f(x,t), \qquad f(x,t) \in E_f, \tag{2.8}$$

определенные на отрезке с концами t_1, t_2 и удовлетворяющие условию $x(t_1) = x_1 \in E^n_{x_1}$.

Следует иметь в виду, что мы допускаем обе возможности: $t_1 \leqslant t_2$, $t_2 \leqslant t_1$; поэтому в дальнейшем, как правило, будем говорить об отрезках с концами t_1, t_2, а не об отрезках $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$.

Обозначим через D множество точек

$$\zeta = (t_1, t_2, x_1, f), \qquad t_1, t_2 \in J, \qquad x_1 \in E^n_{x_1}, \qquad f \in E_f,$$

определенное условием: уравнение $dx/dt = f$ имеет решение $x(t)$, определенное на отрезке с концами t_1, t_2 и удовлетворяющее условию $x(t_1) = x_1$.

Линейное пространство

$$E_\zeta = E^2_{\binom{t_1}{t_2}} \times E^n_{x_1} \times E_f$$

назовем *пространством уравнений*. Таким образом, если в пространстве уравнений задана точка $\zeta = (t_1, t_2, x_1, f)$ из множества D, то ей однозначно отвечает решение $x(t)$ соответствующего уравнения вида (2.8), определенное на отрезке с концами t_1, t_2 и удовлетворяющее условию $x(t_1) = x_1$; значение решения при $t = t_2$ обозначим через x_2.

Следовательно, определено отображение

$$R: D \to E^{2+2n}_{(t_1,\, t_2,\, x_1,\, x_2)^*}, \tag{2.9}$$

переводящее точку $\zeta = (t_1, t_2, x_1, f) \in D$ из пространства уравнений в точку

$$R(\zeta) = (t_1, t_2, x_1, x(t_2))^* = (t_1, t_2, x_1, x_2)^* = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$(2+2n)$-мерного пространства $E^{2+2n}_{(t_1, t_2, x_1, x_2)^*}$, которое назовем *пространством краевых значений*.

---

* О решениях уравнений вида (2.8) см. Дополнение, § 7.1.

Множество D конечно-открыто в пространстве уравнений E_ζ и ограничение отображения (2.9) *на всяком множестве вида $D \cap L$, где L — конечномерное линейное многообразие в E_ζ, непрерывно на $D \cap L$.*

Это утверждение непосредственно следует из теоремы о непрерывной зависимости решения дифференциального уравнения от правой части и начальных данных (см. Дополнение, § 7.1).

Пусть задана точка $\tilde{\zeta} = (\tilde{t}_1, \tilde{t}_2, \tilde{x}_1, \tilde{f}) \in D$. Покажем, что если функция $\tilde{f}(x, t)$ непрерывна при значениях $x = \tilde{x}_1$, $t = \tilde{t}_1$ и $x = \tilde{x}_2$, $t = \tilde{t}_2$*, то отображение (2.9) имеет дифференциал в этой точке, и вычислим этот дифференциал.

Обозначим $\delta\zeta = (\delta t_1, \delta t_2, \delta x_1, \delta f)$; при $\tilde{\zeta} + \varepsilon\delta\zeta \in D$ имеем:

$$\begin{gathered}R(\tilde{\zeta} + \varepsilon\delta\zeta) - R(\tilde{\zeta}) = \\ = (\tilde{t}_1 + \varepsilon\delta t_1, \tilde{t}_2 + \varepsilon\delta t_2, \tilde{x}_1 + \varepsilon\delta x_1, x(\tilde{t}_2 + \varepsilon\delta t_2))^* - \\ - (\tilde{t}_1, \tilde{t}_2, \tilde{x}_1, \tilde{x}(\tilde{t}_2))^* = \varepsilon\left(\delta t_1, \delta t_2, \delta x_1, \frac{1}{\varepsilon}(x(\tilde{t}_2 + \varepsilon\delta t_2) - \tilde{x}(\tilde{t}_2))\right)^*,\end{gathered} \tag{2.10}$$

где $\tilde{x}(t)$ — решение уравнения

$$\frac{dx}{dt} = \tilde{f}(x, t), \tag{2.11}$$

определенное на отрезке с концами $\tilde{t}_1$, $\tilde{t}_2$ и удовлетворяющее условию $\tilde{x}(\tilde{t}_1) = \tilde{x}_1$, а $x(t)$ — решение уравнения

$$\frac{dx}{dt} = \tilde{f}(x, t) + \varepsilon\delta f(x, t),$$

удовлетворяющее условию

$$x(\tilde{t}_1 + \varepsilon\delta t_1) = \tilde{x}_1 + \varepsilon\delta x_1$$

и определенное на отрезке с концами $\tilde{t}_1 + \varepsilon\delta t_1$, $\tilde{t}_2 + \varepsilon\delta t_2$.

Чтобы отметить зависимость решения от $\varepsilon\delta\zeta = \varepsilon(\delta t_1, \delta t_2, \delta x_1, \delta f)$, будем писать $x(t) = x(t; \varepsilon\delta\zeta)$.

Из теоремы о непрерывной зависимости (§ 7.1) следует, что если $\mathrm{const} \geqslant 0$, функции $\delta f_1(x, t), \ldots, \delta f_k(x, t)$ фиксированы и

$$\left.\begin{gathered}|\delta t_1| \leqslant \mathrm{const}, \quad |\delta t_2| \leqslant \mathrm{const}, \quad |\delta x_1| \leqslant \mathrm{const}, \\ \delta f = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \delta f_i, \quad |\lambda_i| \leqslant \mathrm{const},\end{gathered}\right\} \tag{2.12}$$

то при достаточно малых ε $\tilde{\zeta} + \varepsilon\delta\zeta \in D$ равномерно относительно таких $\delta\zeta = (\delta t_1, \delta t_2, \delta x_1, \delta f)$. Покажем, что при этих условиях

$$x(\tilde{t}_2 + \varepsilon\delta t_2; \varepsilon\delta\zeta) = \tilde{x}(\tilde{t}_2) + \varepsilon\delta x_2 + o(\varepsilon\delta\zeta), \tag{2.13}$$

где n-мерный столбец δx_2 линейно зависит от δt_1, δt_2, δx_1, δf, не зависит от ε и при $\varepsilon \to 0$ $o(\varepsilon\delta\zeta)/\varepsilon \to 0$ равномерно относительно $\delta\zeta$, удовлетворяющих условиям (2.12).

* Точнее, если в классе эквивалентных функций, представляющих $f(x, t)$, найдется хотя бы одна с указанным свойством.

Следовательно, мы получим соотношение [см. (2.10)]

$$R(\tilde{\zeta}+\varepsilon\delta\zeta)-R(\tilde{\zeta})=\varepsilon(\delta t_1, \delta t_2, \delta x_1, \delta x_2)^*+(0, 0, 0, o(\varepsilon\delta\zeta))^*,$$

выражающее факт существования у отображения (2.9) дифференциала в точке $\tilde{\zeta}=(\tilde{t}_1, \tilde{t}_2, \tilde{x}_1, \tilde{f})$, причем

$$dR_{\tilde{\zeta}}(\delta\zeta)=dR_{\tilde{\zeta}}(\delta t_1, \delta t_2, \delta x_1, \delta f)=(\delta t_1, \delta t_2, \delta x_1, \delta x_2)^*. \tag{2.14}$$

Остается доказать существование δx_2; мы сделаем это, фактически вычислив δx_2, а тем самым и дифференциал (2.14).

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение относительно $\delta x(t)$ на отрезке $\tilde{t}_1-\eta\leqslant t\leqslant\tilde{t}_2+\eta$ (для определенности считаем, что $\tilde{t}_1<\tilde{t}_2$, $\eta>0$ достаточно мало):

$$\frac{d\delta x(t)}{dt}=\tilde{f}_x(\tilde{x}(t), t)\delta x(t), \tag{2.15}$$

где определенное первоначально на отрезке $\tilde{t}_1\leqslant t\leqslant\tilde{t}_2$ решение $\tilde{x}(t)$ уравнения (2.11) продолжено на отрезок $\tilde{t}_1-\eta\leqslant t\leqslant\tilde{t}_2+\eta$ согласно теоремам о непрерывной зависимости и единственности (см. Дополнение, § 7.1).

Через $\Gamma(t)$, $\tilde{t}_1-\eta\leqslant t\leqslant\tilde{t}_2+\eta$, обозначим фундаментальную матрицу уравнения (2.15), нормированную при $t=\tilde{t}_1$:

$$\frac{d\Gamma}{dt}=\tilde{f}_x(\tilde{x}(t), t)\Gamma, \quad \Gamma(\tilde{t}_1)=I. \tag{2.16}$$

При сделанных предположениях вектор (2.13) вычислен в Дополнении, § 7.2 (см. (7.39)). Он равен

$$x(\tilde{t}_2+\varepsilon\delta t_2;\ \varepsilon\delta\zeta)=\tilde{x}(\tilde{t}_2+\varepsilon\delta t_2)+\varepsilon\Gamma(\tilde{t}_2+\varepsilon\delta t_2)(\delta x_1-\tilde{f}(\tilde{x}_1, \tilde{t}_1)\delta t_1)+$$
$$+\varepsilon\Gamma(\tilde{t}_2+\varepsilon\delta t_2)\int_{\tilde{t}_1}^{\tilde{t}_2}\Gamma^{-1}(s)\delta f(\tilde{x}(s), s)\,ds+o_1(\varepsilon\delta\zeta),$$

где $o_1(\varepsilon\delta\zeta)/\varepsilon\to 0$ при $\varepsilon\to 0$ равномерно относительно $\delta\zeta$, удовлетворяющих условиям (2.12).

Пользуясь непрерывностью $f(x, t)$ при $x=\tilde{x}(\tilde{t}_2)=\tilde{x}_2$, $t=\tilde{t}_2$, можно, очевидно, написать:

$$x(\tilde{t}_2+\varepsilon\delta t_2;\ \varepsilon\delta\zeta)=\tilde{x}(\tilde{t}_2)+\varepsilon\tilde{f}(\tilde{x}_2, \tilde{t}_2)\delta t_2+$$
$$+\varepsilon\Gamma(\tilde{t}_2)\left[\delta x_1-\tilde{f}(\tilde{x}_1, \tilde{t}_1)\delta t_1+\int_{\tilde{t}_1}^{\tilde{t}_2}\Gamma^{-1}(s)\delta f(\tilde{x}(s), s)\,ds\right]+$$
$$+o(\varepsilon\delta\zeta)=\tilde{x}_2+\varepsilon\delta x_2+o(\varepsilon\delta\zeta),$$

где

$$\delta x_2=\tilde{f}(\tilde{x}_2, \tilde{t}_2)\delta t_2+\Gamma(\tilde{t}_2)(\delta x_1-\tilde{f}(\tilde{x}_1, \tilde{t}_1))\delta t_1+\int_{\tilde{t}_1}^{\tilde{t}_2}\Gamma^{-1}(s)\delta f(\tilde{x}(s), s)\,ds. \tag{2.17}$$

Таким образом, дифференциал отображения (2.9) в точке $\tilde{\zeta}$ задается формулой (2.14), где δx_2 вычисляется по формуле (2.17).

Предположим, что задано дифференцируемое отображение

$$Q : E^{2+2n}_{(t_1, t_2, x_1, x_2)^*} \to E^s_q.$$

Согласно «цепному правилу» отображение

$$QR\colon D \to E_q$$

имеет дифференциал в каждой точке $\tilde{\zeta} = (\tilde{t}_1, \tilde{t}_2, \tilde{x}_1, \tilde{f}) \in D$, для которой функция $\tilde{f}(x, t)$ непрерывна при $x = \tilde{x}_1$, $t = \tilde{t}_1$ и $x = \tilde{x}_2$, $t = \tilde{t}_2$, причем дифференциал можно вычислить на основании формул (2.7), (2.14):

$$d(QR)_{\tilde{\zeta}}(\delta\zeta) = \frac{\partial Q(\tilde{t}_1, \tilde{t}_2, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2)}{\partial t_1}\delta t_1 + \\ + \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial t_2}\delta t_2 + \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial x_1}\delta x_1 + \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial x_2}\delta x_2,$$

где волна над Q означает, что соответствующий градиент вычисляется в точке $(\tilde{t}_1, \tilde{t}_2, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2)^*$. Воспользовавшись выражением (2.17) для δx_2, получим окончательную формулу:

$$d(QR)_{\tilde{\zeta}}(\delta\zeta) = \left(\frac{\partial \tilde{Q}}{\partial t_1} - \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial x_2}\Gamma(\tilde{t}_2)\tilde{f}_1\right)\delta t_1 + \\ + \left(\frac{\partial \tilde{Q}}{\partial t_2} + \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial x_2}\tilde{f}_2\right)\delta t_2 + \left(\frac{\partial \tilde{Q}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial x_2}\Gamma(\tilde{t}_2)\right)\delta x_1 + \\ + \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial x_2}\Gamma(\tilde{t}_2)\int_{\tilde{t}_1}^{\tilde{t}_2}\Gamma^{-1}(s)\,\delta f(\tilde{x}(s), s)\,ds, \tag{2.18}$$

где

$$\tilde{f}_1 = \tilde{f}(\tilde{x}(\tilde{t}_1), \tilde{t}_1), \quad \tilde{f}_2 = \tilde{f}(\tilde{x}(\tilde{t}_2), \tilde{t}_2).$$

§ 3. Квазивыпуклые фильтры

Фильтр Φ, лежащий в линейном пространстве E_z, будем называть *выпуклым*, если существует базис этого фильтра, состоящий из выпуклых множеств. Приняв это определение, можно, например, охарактеризовать локально выпуклые пространства как линейные топологические пространства, в которых фильтры окрестностей нуля являются выпуклыми.

Мы введем сейчас понятие *квазивыпуклого фильтра в линейном топологическом пространстве*, существенно использующее, кроме линейной структуры пространства, его топологию.

Определение 3.1. Фильтр Φ в линейном пространстве E_z называется *квазивыпуклым в векторной топологии* θ *пространства* E_z (θ-*квазивыпуклым*) или *квазивыпуклым в линейном топологическом пространстве* E_z^θ, если для любого элемента $W \in \Phi$ и любого целого $s > 0$ существует такой элемент $\tilde{W} = \tilde{W}(W, s) \in \Phi$, что для произвольных $(s+1)$ точек $z_0, z_1, \ldots, z_s$ из $\tilde{W}(W, s)$ и произвольной окрестности нуля V^θ в E_z^θ можно найти непрерывное в топологии θ отображение выпуклой оболочки

$[z_0, z_1, \ldots, z_s]$ точек $z_0, z_1, \ldots, z_s$

$$\varphi: [z_0, z_1, \ldots, z_s] \to W, \tag{3.1}$$

удовлетворяющее условию

$$(z - \varphi(z)) \in V^\theta \quad \forall z \in [z_0, z_1, \ldots, z_s]\ *. \tag{3.2}$$

Интуитивный смысл данного определения заключается в следующем. Если фильтр Φ не выпуклый, то выпуклая оболочка точек $z_0, z_1, \ldots, z_s$ из $W \in \Phi$ не принадлежит, вообще говоря, множеству W. Однако для сколь угодно большого s всегда можно найти такой элемент фильтра $\tilde{W}$, что если $z_0, z_1, \ldots, z_s$ лежат в $\tilde{W}$, то их выпуклую оболочку $[z_0, z_1, \ldots, z_s]$ можно «сколь угодно малым» (формула (3.2)) и непрерывным в топологии θ «шевелением» (3.1) «отправить» в W.

Всякий выпуклый фильтр Φ в E_z является квазивыпуклым во всякой векторной топологии в E_z. В самом деле, каков бы ни был элемент $W \in \Phi$, найдется выпуклый элемент фильтра $\tilde{W} \subset W$, который и можно принять за $\tilde{W}(W, s)$ при произвольном s; в качестве отображения (3.1) следует взять тождественное отображение.

Если θ_1, θ_2 — две векторные топологии в E_z, причем θ_1 слабее топологии θ_2, и фильтр Φ является квазивыпуклым в θ_2, то из определения 3.1 непосредственно следует, что он будет квазивыпуклым и в топологии θ_1. Таким образом, чем слабее векторная топология θ в E_z, тем больше квазивыпуклых фильтров в $E_z{}^\theta$, т. е. тем «слабее» понятие квазивыпуклости фильтра.

Для построения примеров квазивыпуклых фильтров, постоянно встречающихся в оптимальных и вариационных задачах, введем некоторые линейные топологические пространства.

Пусть E_f — линейное пространство примера 2.1. Определим в E_f три различные локально выпуклые отделимые топологии, обозначаемые в дальнейшем через T, T^{L_1}, $T^{\sup}$. Мы зададим их с помощью базисов фильтров окрестностей нуля.

Именно, пусть K — произвольный компакт из G и $\delta > 0$. Через $V_{K,\delta}$ обозначим множество всевозможных $\delta f \in E_f$, удовлетворяющих соотношению $\left|\int\limits_{t_1}^{t_2} \delta f(x, t)\, dt\right| \leqslant \delta$ при произвольном фиксированном $x \in K$ и произвольных $t_1, t_2 \in J$:

$$V_{K,\delta} = \left\{\delta f : \left|\int\limits_{t_1}^{t_2} \delta f(x, t)\, dt\right| \leqslant \delta \ \ \forall x \in K, \ \ \forall t_1, t_2 \in J\right\}. \tag{3.3}$$

Соответственно, через $V^{L_1}_{K,\delta}$, $V^{\sup}_{K,\delta}$ обозначим множества

$$V^{L_1}_{K,\delta} = \left\{\delta f: \int\limits_J (|\delta f(x, t)| + |\delta f_x(x, t)|)\, dt \,|\leqslant \delta \ \ \forall x \in K\right\}, \tag{3.4}$$

$$V^{\sup}_{K,\delta} = \{\delta f : \sup_{t \in J} \operatorname{ess} |\delta f(x, t)| \leqslant \delta \ \ \forall x \in K\}, \tag{3.5}$$

---

* Через $[M]$ мы всегда будем обозначать выпуклую оболочку множества $M \subset E_z$. В частности, выпуклую оболочку точек $z_0, z_1, \ldots, z_s$ будем обозначать $[z_0, z_1, \ldots, z_s]$.

где, как обычно,

$$\sup_{t\in J} \operatorname{ess} \varphi(t) = \inf_{\operatorname{meas} A=0} \left(\sup_{t\in J\setminus A} \varphi(t) \right).$$

Каждое из введенных семейств, как нетрудно проверить, удовлетворяет следующим шести условиям, которые записаны для семейства множеств (3.3):

1) $V_{K_1,\delta_1} \cap V_{K_2,\delta_2} \supset V_{K_1\cup K_2,\min(\delta_1,\delta_2)}$.

2) Для произвольных $V_{K,\delta}$, $\delta f \in E_f$, найдется такое $\varepsilon > 0$, что при $|\mu| \leqslant \varepsilon$ $\mu\delta f \in V_{K,\delta}$, т. е. $V_{K,\delta}$ — поглощающие множества.

3) Для произвольных $V_{K,\delta}$ и μ, $|\mu| \leqslant 1$, из $\delta f \in V_{K,\delta}$ следует, что $\mu\delta f \in V_{K,\delta}$, т. е. $V_{K,\delta}$ — уравновешенные множества.

4) Если $\lambda > 0$, то $\lambda V_{K,\delta} = V_{K,\lambda\delta}$.

5) $V_{K,\delta}$ — выпуклые множества.

6) Пересечение всех $V_{K,\delta}$ содержит лишь нуль пространства E_f.

Из свойств 1)—6) легко следует (см. Бурбаки, «Топологические векторные пространства», гл. II, М., ИЛ., 1959), что семейства множеств (3.3), (3.4), (3.5) можно принять за фундаментальные системы окрестностей нуля однозначно определяемых локально выпуклых отделимых топологий, которые мы обозначим соответственно через T, T^{L_1}, $T^{\sup}$. Очевидно, из этих топологий T — наиболее слабая, $T^{\sup}$ — наиболее сильная: $T < T^{L_1} < T^{\sup}$.

При доказательстве квазивыпуклости построенных ниже фильтров мы существенно используем нижеследующую аппроксимационную лемму [см. ([2]), ([3])].

Пусть в E_f заданы $s+1$ точек $f_0(x, t), \ldots, f_s(x, t)$ и некоторое разбиение интервала J на отрезки J_α, $\alpha = \pm 1, \pm 2, \ldots$. С помощью этих данных можно сопоставить однозначным образом каждой точке $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_s)$ s-мерного симплекса

$$\Sigma = \left\{ \lambda = (\lambda_0, \ldots, \lambda_s) : \sum_{i=0}^{s} \lambda_i = 1 \ \ \forall \lambda_i \geqslant 0 \right\}$$

некоторую точку $f_\lambda(x, t) \in E_f$ следующим путем.

Поставим в соответствие произвольной точке $\lambda \in \Sigma$ подразделение каждого из отрезков J_α на $s+1$ отрезков $J^\lambda_{\alpha i}$, $i = 0, 1, \ldots, s$, определенное условием: длины отрезков $J^\lambda_{\alpha i}$, $J^\lambda_{\alpha j}$ относятся как λ_i, λ_j:

$$\operatorname{meas} J^\lambda_{\alpha i} / \operatorname{meas} J^\lambda_{\alpha j} = \lambda_i / \lambda_j; \tag{3.6}$$

если $\lambda_i = 0$, то соответствующий отрезок $J^\lambda_{\alpha i}$ вырождается в точку.

Элемент $f_\lambda(x, t) \in E_f$ определим как класс эквивалентности, содержащий функцию

$$\hat f_\lambda(x,t) = \hat f_i(x,t) \ \ \forall x \in G \ \ \forall t \in J^\lambda_{\alpha i}, \ \hat f_i \in f_i, \tag{3.7}$$

$$\alpha = \pm 1, \pm 2, \ldots; \quad i = 0, 1, \ldots, s.$$

Формула (3.7) однозначно определяет функцию $\hat{f}_\lambda(x, t)$ за исключением значений t в концах отрезков $J^\lambda_{\alpha i}$, что, однако, не имеет значения, поскольку нас интересует класс эквивалентности $f_\lambda(x, t)$.

Отображение

$$\lambda \to f_\lambda(x, t) \quad \forall \lambda \in \Sigma,$$

зависящее от подразделения J_α, обозначим

$$\sigma_{J_\alpha} : \Sigma \to E_f. \tag{3.8}$$

АППРОКСИМАЦИОННАЯ ЛЕММА. *Для произвольного подразделения* J_α *отображение* (3.8) *непрерывно в топологии* T^{L_1} *и, следовательно, в более слабой топологии* T. *Для произвольного компакта* $X \subset G$ *и произвольного* $\varepsilon > 0$ *можно найти такое (достаточно мелкое) подразделение* J_α, *что при* $x \in X$, $t_1, t_2 \in J$, $\lambda = (\lambda_0, \ldots, \lambda_s) \in \Sigma$ *будем иметь*:

$$\left| \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_{i=0}^{s} \lambda_i f_i(x, t) - f_\lambda(x, t) \right] dt \right| \leqslant \varepsilon^*. \tag{3.9}$$

Доказательство. Непрерывность отображения (3.8) легко следует из определения. В самом деле, пусть для заданного компакта $K \subset G$ $m_K(t)$ — интегрируемая на J функция, удовлетворяющая при любом $i=0, 1, \ldots, s$ условию

$$|\hat{f}_i(x, t)| + \left| \frac{\partial \hat{f}_i(x, t)}{\partial x} \right| \leqslant m_K(t) \quad \forall x \in K, \quad \forall t \in J$$

и, следовательно, условию

$$|\hat{f}_\lambda(x, t)| + \left| \frac{\partial \hat{f}_\lambda(x, t)}{\partial x} \right| \leqslant m_K(t) \quad \forall x \in K, \quad \forall t \in J, \quad \forall \lambda \in \Sigma. \tag{3.10}$$

На основании (3.7) заключаем, что если величина $|\lambda' - \lambda''|$ достаточно мала, то независимо от $\lambda', \lambda'' \in \Sigma$ выражение

$$|\hat{f}_{\lambda'}(x, t) - \hat{f}_{\lambda''}(x, t)| + \left| \frac{\partial \hat{f}_{\lambda'}(x, t)}{\partial x} - \frac{\partial \hat{f}_{\lambda''}(x, t)}{\partial x} \right|$$

может быть отлично от нуля лишь на множестве $G \times \mathscr{E}$, $\mathscr{E} \subset J$, где мера пересечения $\mathscr{E}$ с любым наперед заданным компактом из J сколь угодно мала.

Таким образом, если $\delta > 0$ задано, то при достаточно малом $|\lambda' - \lambda''|$ имеем

$$\int_{\mathscr{E}} m_K(t)\, dt \leqslant \frac{\delta}{4}$$

---

* Неравенство (3.9) можно записать, очевидно, и так:

$$\sum_{i=0}^{s} \lambda_i f_i(x, t) - f_\lambda(x, t) \in V_{X, \varepsilon},$$

где $V_{X, \varepsilon}$ — произвольная наперед заданая окрестность нуля в топологии T.

и потому оценка (3.10) дает:

$$\int_J \left(|\hat{f}_{\lambda'} - \hat{f}_{\lambda''}| + \left| \frac{\partial \hat{f}_{\lambda'}}{\partial x} - \frac{\partial \hat{f}_{\lambda''}}{\partial x} \right| \right) dt = \int_{\mathscr{E}} \Big(|(\hat{f}_{\lambda'} - \hat{f}_{\lambda''})| +$$

$$+ \left| \frac{\partial \hat{f}_{\lambda'}}{\partial x} - \frac{\partial \hat{f}_{\lambda''}}{\partial x} \right| \Big) dt \leqslant 4 \int_{\mathscr{E}} m_K(t)\, dt \leqslant \delta \quad \forall x \in K, \tag{3.11}$$

т. е. если величина $|\lambda' - \lambda''|$ достаточно мала, то для любой наперед заданной окрестности нуля $V_{K,\delta}^{L_1}$ в топологии T^{L_1} имеем

$$f_{\lambda'} - f_{\lambda''} \in V_{K,\delta}^{L_1}.$$

Для доказательства соотношения (3.9) заметим прежде всего, что интеграл

$$\int_J \left| \sum_{i=0}^{s} \lambda_i f_i(x, t) - f_\lambda(x, t) \right| dt$$

непрерывен по совокупности переменных x, λ, что непосредственно следует из непрерывности интеграла по x и соотношения (3.11). Поэтому существует такой отрезок $[\tau_1, \tau_2] \subset J$, что

$$\int_{J \setminus [\tau_1, \tau_2]} \left| \sum_{i=0}^{s} \lambda_i f_i(x, t) - f_\lambda(x, t) \right| dt \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall x \in X \quad \forall \lambda \in \Sigma. \tag{3.12}$$

Далее, пусть интегрируемая на J функция $m(t)$ такова, что

$$\left| \sum_{i=0}^{s} \lambda_i \hat{f}_i(x, t) - \hat{f}_\lambda(x, t) \right| \leqslant m(t) \quad \forall \lambda \in \Sigma \quad \forall t \in J. \tag{3.13}$$

Наконец, пусть $g_i(x, t)$, $x \in X$, $t \in J$, $i = 0, 1, \ldots, s$,— непрерывные по совокупности переменных x, t функции, удовлетворяющие условиям

$$\int_J |f_i(x, t) - g_i(x, t)|\, dt \leqslant \frac{\varepsilon}{12(s+1)} \quad \forall x \in X. \tag{3.14}$$

Существование таких функций мы докажем ниже, чтобы не прерывать изложения.

Выберем теперь подразделение J_α таким образом, чтобы выполнялись условия:

$$|g_i(x, t') - g_i(x, t'')| \leqslant \frac{\varepsilon}{12(\tau_2 - \tau_1)} \quad \forall x \in X \ \forall t', t'' \in J_\alpha,$$

$$\int_{J_\alpha} m(t)\, dt \leqslant \frac{\varepsilon}{12}, \quad i = 0, 1, \ldots, s; \ \alpha = \pm 1, \pm 2, \ldots. \tag{3.15}$$

Оценим величину

$$\sum_{\alpha=-k_1}^{k_2} \left| \int_{J_\alpha} \left(\sum_{i=0}^{s} \lambda_i f_i(x, t) - f_\lambda(x, t) \right) dt \right|,$$

где k_1, k_2 — произвольные натуральные числа, воспользовавшись равенством [см. (3.7)]

$$\int\limits_{J_\alpha} f_\lambda(x, t)\,dt = \sum_{i=0}^{s} \int\limits_{J_{\alpha i}^{\lambda}} f_i(x, t)\,dt, \quad \alpha = \pm 1, \pm 2, \ldots .$$

Имеем:

$$\left| \int\limits_{J_\alpha} \left(\sum_{i=0}^{s} \lambda_i f_i - f_\lambda \right) dt \right| = \left| \int\limits_{J_\alpha} \sum_{i=0}^{s} \lambda_i (f_i - g_i)\,dt + \int\limits_{J_\alpha} \sum_{i=0}^{s} \lambda_i g_i dt - \right.$$

$$\left. - \sum_{i=0}^{s} \int\limits_{J_{\alpha i}^{\lambda}} g_i dt + \sum_{i=0}^{s} \int\limits_{J_{\alpha i}^{\lambda}} (g_i - f_i)\,dt \right| \leqslant 2 \sum_{i=0}^{s} \int\limits_{J_\alpha} |f_i - g_i|\,dt +$$

$$+ \left| \int\limits_{J_\alpha} \sum_{i=0}^{s} \lambda_i g_i dt - \sum_{i=0}^{s} \int\limits_{J_{\alpha i}^{\lambda}} g_i dt \right| .$$

Отсюда следует [см. (3.14)]:

$$\sum_{\alpha=-k_1}^{k_2} \left| \int\limits_{J_\alpha} \left(\sum_{i=0}^{s} \lambda_i f_i(x, t) - f_\lambda(x, t) \right) dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{6} + \sum_{\alpha=-k_1}^{k_2} \left| \int\limits_{J_\alpha} \sum_{i=0}^{s} \lambda_i g_i(x, t)\,dt - \sum_{i=0}^{s} \int\limits_{J_{\alpha i}^{\lambda}} g_i(x, t)\,dt \right| \quad \forall x \in X, \quad \lambda \in \Sigma. \tag{3.16}$$

Для оценки правой части полученного неравенства обозначим через $g_{i\alpha}(x) = g_{i\alpha}$ значение функции $g_i(x, t)$ в точке (x, t_α), где t_α — произвольное значение из промежутка J_α, $\alpha = \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Равенства (3.6) дают:

$$\int\limits_{J_\alpha} \sum_{i=0}^{s} \lambda_i g_{i\alpha}(x)\,dt = \sum_{i=0}^{s} g_{i\alpha} \operatorname{meas} J_{\alpha i}^{\lambda} = \sum_{i=0}^{s} \int\limits_{J_{\alpha i}^{\lambda}} g_{i\alpha} dt.$$

Следовательно [см. (3.15)],

$$\left| \int\limits_{J_\alpha} \sum_{i=0}^{s} \lambda_i g_i dt - \sum_{i=0}^{s} \int\limits_{J_{\alpha i}^{\lambda}} g_i dt \right| \leqslant \int\limits_{J_\alpha} \sum_{i=0}^{s} \lambda_i \,|g_i(x, t) - g_{i\alpha}|\,dt +$$

$$+ \sum_{i=0}^{s} \int\limits_{J_{\alpha i}^{\lambda}} |g_i(x, t) - g_{i\alpha}|\,dt \leqslant \frac{\varepsilon}{6(\tau_2 - \tau_1)} \operatorname{meas} J_\alpha \quad \forall x \in X, \quad \forall \lambda \in \Sigma.$$

Таким образом, неравенство (3.16) можно записать в виде

$$\sum_{\alpha=-k_1}^{k_2} \left| \int\limits_{J_\alpha} \left(\sum_{i=0}^{s} \lambda_i f_i - f_\lambda \right) dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{6(\tau_2 - \tau_1)} \sum_{\alpha=-k_1}^{k_2} \operatorname{meas} J_\alpha \quad \forall x \in X \quad \forall \lambda \in \Sigma. \tag{3.17}$$

Предположим теперь, что $t_1, t_2 \in J$ произвольны. Обозначим

$$\Delta_1 = [\tau_1, \tau_2] \cap [t_1, t_2], \qquad \Delta_2 = (J \setminus [\tau_1, \tau_2]) \cap [t_1, t_2],$$

и пусть натуральные числа k_1, k_2 таковы, что

$$\int_{\Delta_1} \Big(\sum_{i=0}^{s} \lambda_i f_i(x, t) - f_\lambda(x, t) \Big) dt = \sum_{\alpha=-k_1}^{k_2} \int_{J_\alpha} \Big(\sum_{i=0}^{s} \lambda_i f_i - f_\lambda \Big) dt +$$
$$+ \int_{\mathscr{E}_1} \Big(\sum_{i=0}^{s} \lambda_i f_i(x, t) - f_\lambda \Big) dt + \int_{\mathscr{E}_2} \Big(\sum_{i=0}^{s} \lambda_i f_i - f_\lambda \Big) dt,$$

где $\mathscr{E}_1 \subset J_{\alpha_1}$, $\mathscr{E}_2 \subset J_{\alpha_2}$ при некоторых α_1, α_2.

На основании (3.13), (3.15), (3.17) имеем:

$$\Big| \int_{\Delta_1} \Big(\sum_{i=0}^{s} \lambda_i f_i - f_\lambda \Big) dt \Big| \leqslant \sum_{\alpha=-k_1}^{k_2} \Big| \int_{J_\alpha} \Big(\sum_{i=0}^{s} \lambda_i f_i - f_\lambda \Big) dt \Big| +$$
$$+ \Big| \int_{\mathscr{E}_1} \Big(\sum_{i=0}^{s} \lambda_i f_i - f_\lambda \Big) dt \Big| + \Big| \int_{\mathscr{E}_2} \Big(\sum_{i=0}^{s} \lambda_i f_i - f_\lambda \Big) dt \Big| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{6(\tau_2 - \tau_1)} \sum_{\alpha=-k_1}^{k_2} \operatorname{meas} J_\alpha + \frac{\varepsilon}{6} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall x \in X \quad \forall \lambda \in \Sigma,$$

так как

$$\sum_{\alpha=-k_1}^{k_2} \operatorname{meas} J_\alpha \leqslant \tau_2 - \tau_1.$$

С помощью полученного неравенства и неравенства (3.12) выводим окончательную оценку:

$$\Big| \int_{t_1}^{t_2} \Big(\sum_{i=0}^{s} \lambda_i f_i - f_\lambda \Big) dt \Big| \leqslant \Big| \int_{\Delta_1} \Big(\sum_{i=0}^{s} \lambda_i f_i - f_\lambda \Big) dt \Big| +$$
$$+ \int_{\Delta_2} \Big| \sum_{i=0}^{s} \lambda_i f_i - f_\lambda \Big| dt \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \forall x \in X \quad \forall \lambda \in \Sigma.$$

Доказательство существования функций $g_i(x, t)$. Докажем, например, существование $g_1(x, t)$. Покроем компакт X конечным числом открытых множеств V_j, $j = 1, \ldots, k$, столь малого диаметра, чтобы при $x', x'' \in V_j$, $j = 1, \ldots, k$, было

$$\int_J |f_1(x', t) - f_1(x'', t)| \, dt \leqslant \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.18}$$

Выберем в каждой окрестности V_j, $j = 1, \ldots, k$, по одной точке x_j. Существуют такие k непрерывных на J функций $h_j(t)$, что

$$\int_J |f_1(x_j, t) - h_j(t)| \, dt \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall j = 1, \ldots, k. \tag{3.19}$$

Пусть непрерывные на X функции $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ образуют «разбиение единицы» по отношению к покрытию V_j: $\varphi_j(x) \geqslant 0$, $\varphi_j(x) = 0$ при $x \notin V_j$, $\sum_{j=1}^{k} \varphi_j(x) \equiv 1$. Покажем, что функция

$$g_1(x,t) = \sum_{j=1}^{k} \varphi_j(x) h_j(t)$$

является искомой. Имеем:

$$\int_J |f_1(x,t) - g_1(x,t)|\,dt \leqslant \sum_{j=1}^{k} \varphi_j(x) \int_J |f_1(x,t) - f_1(x_j,t)|\,dt + \\ + \sum_{j=1}^{k} \varphi_j(x) \int_J |f_1(x_j,t) - h_j(t)|\,dt. \tag{3.20}$$

В каждой точке $x \in X$ справедливо неравенство

$$\varphi_j(x) \int_J |f_1(x,t) - f_1(x_j,t)|\,dt \leqslant \frac{\varepsilon\varphi_j(x)}{2} \quad \forall j = 1, \ldots, k,$$

которое следует из (3.18) при $x \in V_j$, а при $x \notin V_j$ — из того, что $\varphi_j(x) = 0$. Следовательно, воспользовавшись неравенством (3.19), можно неравенству (3.20) придать вид

$$\int_J |f_1(x,t) - g_1(x,t)|\,dt \leqslant \sum_{j=1}^{k} \frac{\varepsilon\varphi_j(x)}{2} + \sum_{j=1}^{k} \frac{\varepsilon\varphi_j(x)}{2} = \varepsilon.$$

Переходим к построению примеров.

Пусть $f(x,u,t)$ — n-мерная функция трех переменных: n-мерной x, r-мерной u и времени t, определенная на $G \times O \times J$, где G — открытое множество в E , O — открытое множество в E_u^r, J — интервал временной оси E_t^1. Функция $f(x,u,t)$ предполагается непрерывной на $G \times O \times J$ и непрерывно дифференцируемой на G при любых фиксированных u, t. Далее предполагается, что для любых компактов $K_G \subset G$, $K_O \subset O$ существует такая интегрируемая на J функция $m(t)$, что при $x \in K_G$, $u \in K_O$ имеем почти всюду на J:

$$|f(x,u,t)| + |f_x(x,u,t)| \leqslant m(t). \tag{3.21}$$

Пусть U — произвольное подмножество в O. Обозначим через Ω_U^∞ множество измеримых на J r-мерных функций $u(t)$, удовлетворяющих условию: $u(t) \in U$, замыкание множества значений функции $u(t)$ в E_u^r компактно и лежит в O.

Семейство всевозможных функций вида $f(x,u(t),t)$, $u(t) \in \Omega_U^\infty$, обозначим через F_U^∞:

$$F_U^\infty = \{f(x,t) : f(x,t) = f(x,u(t),t),\ u(t) \in \Omega_U^\infty\}. \tag{3.22}$$

Из сделанных предположений о функции $f(x,u,t)$ и семействе Ω_U^∞ непосредственно следует, что F_U^∞ можно отождествить с подмножеством из E_f.

Предположим теперь, что $f(x, u, t)$ удовлетворяет прежним условиям, за исключением неравенства (3.21), которое заменим следующим: существует такое число $p \geqslant 1$, что для любого компакта $K \subset G$ можно найти измеримые положительные функции $m(t)$, $\mu(t)$, удовлетворяющие при $x \in K$, $u \in O$ неравенству

$$|f(x, u, t)| + |f_x(x, u, t)| \leqslant m(t) + \mu(t)|u|^p$$

почти для всех $t \in J$, где $m(t)$ интегрируема на J, а $\mu(t)$ интегрируема на J в степени

$$q = \frac{p}{p-1} \quad \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right).$$

Обозначим через Ω_U^p множество всех измеримых и суммируемых на J в степени p функций $u(t)$, принимающих значения в U,

$$\Omega_U^p = \left\{u(t) : \int_J |u(t)|^p dt < \infty, \ u(t) \in U\right\},$$

и определим семейство F_U^p формулой

$$F_U^p = \{f(x, t) : f(x, t) = f(x, u(t), t), u(t) \in \Omega_U^p\}. \tag{3.23}$$

Очевидно, F_p^U также можно отождествить с подмножеством из E_f.

Для удобства мы будем предполагать, что в формуле (3.23) $1 \leqslant p \leqslant \leqslant \infty$, включая тем самым семейство (3.22) в семейства вида (3.23).

Пример 3.1. Фильтры $\Phi_{\tilde{f}}^{L_1}(F_U^p)$. Фильтр $\Phi_{\tilde{f}}^{L_1}(F_U^p)$ задается в E_f следом фильтра окрестностей точки $\tilde{f} \in F_U^p \subset E_f$ в топологии T^{L_1} на множестве F_U^p, т. е. следующим базисом:

$$B_{\tilde{f}}^{L_1}(F_U^p) = \{W : W = (\tilde{f} + V_{K,\delta}^{L_1}) \cap F_U^p\}.$$

Легко видеть, что фильтр $\Phi_{\tilde{f}}^{L_1}(F_U^p)$ не является, вообще говоря, квазивыпуклым в топологии T^{L_1}. Однако, пользуясь аппроксимационной леммой, мы покажем, что он квазивыпуклый в более слабой топологии T.

Пусть заданы произвольное целое $s > 0$ и произвольный элемент базиса

$$W = (\tilde{f} + V_{K,\delta}^{L_1}) \cap F_U^p.$$

Покажем, что в качестве соответствующего $\widetilde{W} = \widetilde{W}(W, s)$ (см. определение 3.1) можно взять множество

$$\widetilde{W} = (\tilde{f} + V_{K, \frac{\delta}{s+1}}^{L_1}) \cap F_U^p. \tag{3.24}$$

Допустим, что заданы $s+1$ точек из $\widetilde{W}$ $f_0(x, t), \ldots, f_s(x, t)$:

$$\left.\begin{gathered} f_i(x, t) = f(x, u_i(t), t), \quad u_i(t) \in \Omega_U^p, \\ \int_J \left(|\tilde{f}(x, t) - f_i(x, t)| + \left|\frac{\partial \tilde{f}(x, t)}{\partial x} - \frac{\partial f_i(x, t)}{\partial x}\right|\right) dt \leqslant \frac{\delta}{s+1}, \\ x \in K, \quad i = 0, 1, \ldots, s, \end{gathered}\right\} \tag{3.25}$$

и произвольная окрестность нуля $V_{K, \hat{\delta}}$ из топологии T.

Согласно аппроксимационной лемме существует такое подразделение J_α интервала J, что отображение

$$\sigma_{J_\alpha}: \lambda \to f_\lambda(x, t), \quad \lambda = (\lambda_0, \ldots, \lambda_s) \in \Sigma,$$

непрерывно в топологии T (и даже в T^{L_1}), функция $f_\lambda(x, t)$ (точнее представитель из $f_\lambda(x, t)$) имеет вид

$$f_\lambda(x, t) = f(x, u_\lambda(t), t), \quad x \in G, \quad t \in J, \tag{3.26}$$

$$u_\lambda(t) = u_i(t), \quad t \in J_{\alpha i}^\lambda, \quad \alpha = \pm 1, \pm 2, \ldots; \quad i = 0, \ldots, s,$$

и выполняется соотношение

$$\left| \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{i=0}^{s} \lambda_i f_i(x, t) - f_\lambda(x, t) \right) dt \right| \leqslant \hat{\delta} \qquad \forall x \in \hat{K} \qquad \forall t_1, t_2 \in J,$$

эквивалентное соотношению

$$\left\{ \sum_{i=0}^{s} \lambda_i f(x, u_i(t), t) - f(x, u_\lambda(t) t) \right\} \in V_{\hat{K}, \hat{\delta}}.$$

Если точки $f_0, f_1, \ldots, f_s$ находятся в общем положении в E_f, то отображение

$$\varphi: [f_0, f_1, \ldots, f_s] \to E_f,$$

определенное формулой

$$\lambda_0 f_0 + \ldots + \lambda_s f_s \to f_\lambda \quad \forall \lambda \in \Sigma,$$

непрерывно в топологии T и удовлетворяет условию

$$z - \varphi(z) \in V_{\hat{K}, \hat{\delta}} \quad \forall z \in [f_0, f_1, \ldots, f_s].$$

Если точки $f_0, f_1, \ldots, f_s$ произвольны, то выпуклое множество $[f_0, \ldots, f_s]$ превращаем в комплекс, вершины которого содержатся среди точек $f_0, \ldots, f_s$. Каждый симплекс $[f_{i_0}, \ldots, f_{i_k}]$ полученного комплекса отображаем в E_f по формуле

$$\lambda_{i_0} f_{i_0} + \cdots + \lambda_{i_k} f_{i_k} \to f_{(\lambda_{i_0}, \ldots, \lambda_{i_k})};$$

тем самым определено отображение всего множества $[f_0, \ldots, f_s]$ в E_f

$$\varphi: [f_0, \ldots, f_s] \to E_f,$$

так как на пересечении двух симплексов комплекса соответствующие отображения совпадают, причем опять выполняется соотношение

$$z - \varphi(z) \in V_{\hat{K}, \hat{\delta}} \quad \forall z \in [f_0, \ldots, f_s].$$

Таким образом, остается еще показать, что $f_\lambda(x, t) \in (\tilde{f} + V_{K, \delta}^{L_1}) \cap F_U^p$. Соотношение $f_\lambda(x, t) \in F_U^p$ непосредственно следует из определения $f_\lambda(x, t)$ — формулы (3.26) и определения семейства F_U^p (формула (3.23)). Покажем, что $f_\lambda(x, t) \in (\tilde{f} + V_{K, \delta}^{L_1})$. Имеем при $x \in K$ [см. (3.25), (3.26)]:

$$\int_J \left(|\tilde{f}(x, t) - f_\lambda(x, t)| + \left| \frac{\partial \tilde{f}(x, t)}{\partial x} - \frac{\partial f_\lambda(x, t)}{\partial x} \right| \right) dt =$$

$$= \sum_{i=0}^{s} \int\limits_{\bigcup\limits_{\alpha=-\infty}^{\infty} J_{\alpha i}^{\lambda}} \left(|\tilde{f}(x, t) - f_i(x, t)| + \left| \frac{\partial \tilde{f}(x, t)}{\partial x} - \frac{\partial f_i(x, t)}{\partial x} \right| \right) dt \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=0}^{s} \int_J \left(|\tilde{f}(x, t) - f_i(x, t)| + \left| \frac{\partial \tilde{f}(x, t)}{\partial x} - \frac{\partial f_i(x, t)}{\partial x} \right| \right) dt \leqslant \sum_{i=0}^{s} \frac{\delta}{s+1} = \delta.$$

Пример 3.2. Фильтры $\Phi_{\tilde{f}}^{\sup}(F_U^p)$. Эти фильтры определяются совершенно аналогично фильтрам $\Phi_{\tilde{f}}^{L_1}(F_U^p)$, если только в определении последних заменить топологию T^{L_1} на топологию $T^{\sup}$. Таким образом, фильтр $\Phi_{\tilde{f}}^{\sup}(F_U^p)$ определяется базисом

$$B_{\tilde{f}}^{\sup}(F_U^p) = \{W : W = (\tilde{f} + V_{K,\delta}^{\sup}) \cap F_U^p\},$$

где $\tilde{f} \in F_U^p$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

С помощью аппроксимационной леммы доказывается квазивыпуклость фильтров $\Phi_{\tilde{f}}^{\sup}(F_U^p)$ в топологии T. В данном случае $\widetilde{W}(W, s) = W$ при любом s, где

$$W = (\tilde{f} + V_{K,\delta}^{\sup}) \cap F_U^p.$$

Пример 3.3. Фильтры $\Phi_{\tilde{f}}^{L_1}(G^p)$. Пусть

$$g(x, u, t) = A(t)x + B(t)u,$$

где $A(t)$ — $n \times n$-матрица с интегрируемыми на J элементами, $B(t)$ — $n \times r$-матрица с измеримыми и интегрируемыми в степени q на J элементами, где $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

Введем множество

$$S^p = \left\{ u(t) : u(t) \text{ измерима на } J \text{ и } \int_J |u(t)|^p dt \leqslant 1 \right\}.$$

Семейство G^p зададим формулой

$$G^p = \{f(x, t) : f(x, t) = g(x, u(t), t),\ u(t) \in S^p\};$$

G^p отождествим с подмножеством в E_f.

Наконец, зададим фильтр $\Phi_{\tilde{f}}^{L_1}(G^p)$ с помощью базиса

$$B_{\tilde{f}}^{L_1}(G^p) = \{W : W = (\tilde{f} + V_{K,\delta}^{L_1}) \cap G^p\},$$

где $\tilde{f} \in G^p$.

Доказательство квазивыпуклости фильтра $\Phi_{\tilde{f}}^{L_1}(G^p)$ в топологии T незначительно отличается от доказательства в примере 3.1. Поэтому укажем только на соответствующие изменения. Именно, вместо $\widetilde{W}(W, s)$ заданного формулой (3.24), следует взять

$$\widetilde{W} = \left(\tilde{f} + V^{L_1}_{K, \frac{\delta}{2(s+1)}}\right) \cap G^p.$$

Тогда при достаточно мелком подразделении J_α, $\alpha = \pm 1, \pm 2, \ldots,$ и при $\mu < 1$, достаточно близком к 1, в качестве отображения $\sigma_{J_\alpha} : \Sigma \to E_f$ можно взять отображение

$$\lambda \to f_\lambda(x, t),$$

где

$$f_\lambda(x, t) = g(x, u_\lambda(t), t) = A(t)x + B(t)u_\lambda(t),$$

$$u_\lambda(t) = \mu u_i(t) \quad \forall t \in J^\lambda_{\alpha i}, \quad \alpha = \pm 1, \pm 2, \ldots; \quad i = 0, 1, \ldots, s.$$

§ 4. Необходимое условие критичности

Пусть D — конечно-открытое множество в линейном пространстве E_z, на котором задано отображение

$$P : D \to E^s_p. \tag{4.1}$$

ТЕОРЕМА 4.1 (Необходимое условие критичности). *Пусть в линейном пространстве E_z задан фильтр Φ, на котором отображение* (4.1) *определено и критично. Если в E_z существует векторная топология θ, в которой отображение* (4.1) *непрерывно на фильтре Φ, а Φ является квазивыпуклым, то для любой точки $\tilde{z}$, принадлежащей всем множествам фильтра Φ, в которой отображение* (4.1) *имеет дифференциал*

$$dP_{\tilde{z}} : E_{\delta z} \to E^s_{dp}, \tag{4.2}$$

существует такой элемент $\tilde{W} \in \Phi$, что нуль пространства E^s_{dp} является граничной точкой множества

$$dP_{\tilde{z}}([\tilde{W}] - \tilde{z}) \subset E^s_{dp}. \tag{4.3}$$

Прежде чем перейти к доказательству, сформулируем несколько следствий из этой теоремы.

Множество (4.3), как образ выпуклого множества при линейном отображении, само выпукло. Так как нуль $0 \in E^s_{dp}$ — граничная точка выпуклого множества (4.3), то через 0 можно провести $(s-1)$-мерную опорную плоскость $\Pi \subset E^s_{dp}$ к множеству $dP_z([\tilde{W}] - \tilde{z})$.

Обозначим через $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_s)$ вектор, ортогональный к Π и направленный в противоположную от множества (4.3) сторону. Тогда скалярное произведение

$$\pi dP_{\tilde{z}}(\delta z) = \sum_{i=1}^{s} \pi_i dp^i(\delta z) \leqslant 0$$

для любого $\delta z \in ([\tilde{W}] - \tilde{z})$; здесь

$$dP_{\tilde{z}}(\delta z) = \begin{pmatrix} dp^1(\delta z) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ dp^s(\delta z) \end{pmatrix}.$$

Следовательно, теорема 4.1 может быть сформулирована следующим образом.

ТЕОРЕМА 4.2. *Если условия теоремы 4.1 выполнены, то для любой точки $\tilde{z}$, принадлежащей всем множествам из Φ, в которой существует дифференциал (4.2), найдется такой элемент $\tilde{W} \in \Phi$ и такая ненулевая s-мерная строка $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_s)$, что*

$$\pi dP_{\tilde{z}}(\delta z) = \sum_{i=1}^{s} \pi_i dp^i(\delta z) \leqslant 0 \quad \forall \delta z \in ([\tilde{W}] - \tilde{z}).$$

Полученное неравенство эквивалентно, в силу линейности выражения $\pi dP_{\tilde{z}}(\delta z)$ относительно δz, неравенству

$$\pi dP_{\tilde{z}}(\delta z) \leqslant 0 \qquad \forall \delta z \in K([\tilde{W}] - \tilde{z}), \tag{4.4}$$

где $K([\tilde{W}] - \tilde{z})$ — выпуклый конус, натянутый на множество $[\tilde{W}] - \tilde{z}$ из нуля пространства E_z.

Неравенству (4.4) можно придать следующую форму. Пусть

$$dP^*_{\tilde{z}} : (E^s_{dp})^* \to (E_{\delta z})^*$$

— сопряженное отображение к (4.2). Тогда для любых $\chi \in (E^s_{dp})^*$, $\delta z \in \in E_{\delta z}$ имеем $\chi dP_{\tilde{z}}(\delta z) = dP^*_{\tilde{z}}(\chi)\,\delta z$. Поэтому неравенство (4.4) можно записать в виде

$$dP^*_{\tilde{z}}(\pi)\,\delta z = dP^*_{\tilde{z}}(\pi)\,(z - \tilde{z}) \leqslant 0 \quad \forall (z - \tilde{z}) \in K([\tilde{W}] - \tilde{z}),$$

или

$$dP^*_{\tilde{z}}(\pi)\,z \leqslant dP^*_{\tilde{z}}(\pi)\,\tilde{z} \qquad \forall z \in \tilde{z} + K([\tilde{W}] - \tilde{z}).$$

Полученное неравенство выражает необходимое условие критичности в форме «принципа максимума»: *скалярное произведение $dP^*_{\tilde{z}}(\pi)\tilde{z}$ не меньше скалярного произведения $dP^*_{\tilde{z}}(\pi)z$, каково бы ни было $z \in \tilde{z} + K([\tilde{W}] - \tilde{z})$.*

Наиболее удобно пользоваться необходимым условием критичности в форме неравенства (4.4). Поэтому мы приведем здесь еще одно важное следствие теоремы 4.1, используя неравенство (4.4).

Предположим, что дифференциал (4.2) непрерывен в топологии θ. Тогда линейная форма $\pi dP_{\tilde{z}}(\delta z)$ переменной δz непрерывна в $E^\theta_{\delta z}$ и, следовательно, прообраз отрицательной полуоси $\pi dP_{\tilde{z}}(\delta z) \leqslant 0$ при отображении

$$\pi dP_{\tilde{z}} : E^\theta_{\delta z} \to E^1_{\pi dP_{\tilde{z}}}$$

является замкнутым в пространстве $E^\theta_{\delta z}$ конусом с вершиной в нуле и содержит множество $\bar{K}_\theta([\tilde{W}] - \tilde{z})$ — замыкание выпуклого конуса $K([\tilde{W}] - \tilde{z})$ в топологии θ.

Поэтому теорему 4.2 можно усилить следующим образом.

ТЕОРЕМА 4.3. *Пусть условия теоремы 4.1 выполнены; сохраняя прежние обозначения, предположим дополнительно, что дифференциал (4.2) непрерывен в топологии θ. Тогда найдется такой элемент $\tilde{W} \in \Phi$ и такая ненулевая s-мерная строка $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_s)$, что*

$$\pi dP(\delta z) \leqslant 0 \quad \forall \delta z \in \bar{K}_\theta([\tilde{W}] - \tilde{z}). \tag{4.5}$$

Доказательство теоремы 4.1. Предположим, что условия теоремы 4.1 выполнены, но для любого $W \in \Phi$, лежащего в D, точка $0 \in E^s_{dp}$ является внутренней для множества

$$dP_{\tilde{z}}([W] - \tilde{z}) \subset E^s_{dp}. \tag{4.6}$$

Покажем, что это допущение приводит к противоречию. Выберем элемент $W \in \Phi$ так, что $W \subset D$ и ограничение на нем отображения (4.1) непрерывно, причем точка $P(\tilde{z})$ принадлежит границе множества $P(W) \subset E^s_p$.

Мы докажем разрешимость следующего уравнения относительно z:

$$P(z) = P(\tilde{z}) + p, \quad z \in W, \tag{4.7}$$

при любом достаточно малом по модулю векторе $p \in E^s_p$ и тем самым будет доказано, вопреки выбору W, что $P(\tilde{z})$ — внутренняя точка множества $P(W) \subset E^s_p$.

Через $\tilde{W} = \tilde{W}(W, (s+1)^2)$ (см. определение 3.1) обозначим элемент квазивыпуклого фильтра Φ, удовлетворяющий условию: для любой окрестности нуля V^θ в топологии θ и любых $1 + (s+1)^2$ точек $z_0, z_1, \ldots$ $\ldots, z_{(s+1)^2}$ из $\tilde{W}$ существует непрерывное в топологии θ отображение

$$\varphi\colon [z_0, \ldots, z_{(s+1)^2}] \to W, \tag{4.8}$$

удовлетворяющее условию

$$z - \varphi(z) \in V^\theta \quad \forall z \in [z_0, \ldots, z_{(s+1)^2}]. \tag{4.9}$$

Согласно сделанному допущению $0 \in E^s_{dp}$ является внутренней точкой множества

$$dP_{\tilde{z}}([\tilde{W}] - \tilde{z}) \subset E^s_{dp}. \tag{4.10}$$

Следовательно, существуют $s + 1$ точек $\delta p_0, \delta p_1, \ldots, \delta p_s$, лежащих в (4.10) и находящихся в общем положении, причем s-мерный симплекс $[\delta p_0, \delta p_1, \ldots, \delta p_s]$ содержит $0 \in E^s_{dp}$ в качестве внутренней точки.

Так как пространство E^s_{dp} s-мерно, то каждая из точек

$$\delta p_i \in dP_{\tilde{z}}([\tilde{W}] - \tilde{z}) = [dP_{\tilde{z}}(\tilde{W} - \tilde{z})], \quad i = 0, \ldots, s,$$

представима в виде

$$\delta p_i = \sum_{j=0}^{s} \mu_{ij}\delta q_{ij}, \quad \delta q_{ij} \in dP_{\tilde{z}}(\tilde{W} - \tilde{z}), \quad \mu_{ij} \geqslant 0, \quad \sum_{j=0}^{s} \mu_{ij} = 1.$$

Пусть $\delta\zeta_{ij}$ — прообразы точек δq_{ij} при отображении

$$dP_{\tilde{z}}\colon \tilde{W} - \tilde{z} \to E^s_{dp},$$

и пусть

$$\delta z_i = \sum_{j=0}^{s} \mu_{ij}\delta\zeta_{ij}, \quad i = 0, 1, \ldots, s.$$

Очевидно, δz_i — прообразы точек δp_i и находятся в общем положении, а выпуклое множество $[\tilde{z}, \tilde{z}+\delta z_0, \ldots, \tilde{z}+\delta z_s]$ является выпуклой оболочкой $1+(s+1)^2$ точек $\tilde{z}, \tilde{z}+\delta\zeta_{ij}$ из $\tilde{W}$:

$$\begin{gathered}[\tilde{z}, \tilde{z}+\delta z_0, \ldots, \tilde{z}+\delta z_s] = [\tilde{z}, \tilde{z}+\delta\zeta_{00}, \ldots, \tilde{z}+\delta\zeta_{ss}], \\ \tilde{z}\in\tilde{W}, \quad \tilde{z}+\delta\zeta_{ij}\in\tilde{W}, \quad i, j = 0, 1, \ldots, s.\end{gathered} \tag{4.11}$$

Обозначим через $\rho > 0$ расстояние точки $0 \in E^s_{dp}$ до границы симплекса $[\delta p_0, \ldots, \delta p_s]$. При достаточно малых $\varepsilon > 0$ из конечной открытости D следует соотношение

$$\tilde{z}+\varepsilon[\delta z_0, \ldots, \delta z_s] \subset D,$$

а из существования дифференциала (4.2) — соотношение

$$\begin{gathered}P(\tilde{z}+\varepsilon\delta z) = P(\tilde{z}) + \varepsilon dP_{\tilde{z}}(\delta z) + o(\varepsilon\delta z), \\ \delta z \in [\delta z_0, \ldots, \delta z_s],\end{gathered} \tag{4.12}$$

где

$$\left|\frac{o(\varepsilon\delta z)}{\varepsilon}\right| \leqslant \frac{\rho}{3} \quad \forall\delta z \in [\delta z_0, \ldots, \delta z_s]. \tag{4.13}$$

Ограничение отображения (4.1)

$$P\colon (\tilde{z}+\varepsilon[\delta z_0, \ldots, \delta z_s]) \cup W \to E^s_p$$

θ-непрерывно при всяком фиксированном ε. Поэтому из компактности множества $\tilde{z}+\varepsilon[\delta z_0, \ldots, \delta z_s]$ следует существование для каждого ε такой окрестности нуля V^θ_ε в топологии θ, что при

$$z' \in \tilde{z}+\varepsilon[\delta z_0, \ldots, \delta z_s], \quad z'' \in W, \quad z'-z'' \in V^\theta_\varepsilon, \tag{4.14}$$

имеем

$$|P(z') - P(z'')| \leqslant \varepsilon\frac{\rho}{3}. \tag{4.15}$$

Из условий (4.8) — (4.9) и соотношения (4.11) непосредственно следует существование зависящего от ε семейства θ-непрерывных отображений

$$\varphi_\varepsilon\colon [\tilde{z}, \tilde{z}+\delta z_0, \ldots, \tilde{z}+\delta z_s] \to W,$$

удовлетворяющих условиям

$$z - \varphi_\varepsilon(z) \in V^\theta_\varepsilon \quad \forall z \in [\tilde{z}, \tilde{z}+\delta z_0, \ldots, \tilde{z}+\delta z_s].$$

При $0 < \varepsilon \leqslant 1$ симплекс $\tilde{z}+\varepsilon[\delta z_0, \ldots, \delta z_s]$ содержится в $[\tilde{z}, \tilde{z}+\delta z_0, \ldots$ $\ldots, \tilde{z}+\delta z_s]$ и потому

$$z - \varphi_\varepsilon(z) \in V^\theta_\varepsilon \quad \forall z \in \tilde{z}+\varepsilon[\delta z_0, \ldots, \delta z_s]. \tag{4.16}$$

Нетрудно видеть, что уравнение относительно z

$$P(\varphi_\varepsilon(z)) = P(\tilde{z}) + \varepsilon p, \quad z \in \tilde{z}+\varepsilon[\delta z_0, \ldots, \delta z_s], \tag{4.17}$$

разрешимо при достаточно малых ε и произвольном $p \in E^s_p$, удовлетворяющем условию

$$|p| \leqslant \frac{\rho}{3}. \tag{4.18}$$

В самом деле, перепишем его в виде

$$P(z) = P(\tilde{z}) + \varepsilon p + P(z) - P(\varphi_\varepsilon(z)), \quad z \in \tilde{z} + \varepsilon[\delta z_0, \ldots, \delta z_s],$$

или, воспользовавшись (4.12), в виде уравнения относительно δz:

$$dP_{\tilde{z}}(\delta z) = p - \frac{o(\varepsilon\delta z)}{\varepsilon} + \frac{P(\tilde{z} + \varepsilon\delta z) - P(\varphi_\varepsilon(\tilde{z} + \varepsilon\delta z)}{\varepsilon},$$
$$\delta z \in [\delta z_0, \ldots, \delta z_s]. \tag{4.19}$$

Если $\varepsilon > 0$ достаточно мало, то из соотношений (4,13), (4,14)—(4,16), (4.18) вытекает, что

$$\left(p - \frac{o(\varepsilon\delta z)}{\varepsilon} + \frac{P(z) - P(\varphi_\varepsilon(z))}{\varepsilon}\right) \in [\delta p_0, \ldots, \delta p_s],$$

и, следовательно, уравнение (4.19) эквивалентно уравнению

$$\delta z = dP_{\tilde{z}}^{-1}\left(p - \frac{o(\varepsilon\delta z)}{\varepsilon} + \frac{P(z) - P(\varphi_\varepsilon(z))}{\varepsilon}\right),$$
$$\delta z = (z - \tilde{z}) \in [\delta z_0, \ldots, \delta z_s], \tag{4.20}$$

где $dP_{\tilde{z}}^{-1}$ — обратное отображение к линейному невырожденному отображению

$$dP_{\tilde{z}}\colon [\delta z_0, \ldots, \delta z_s] \to [\delta p_0, \ldots, \delta p_s].$$

Правую часть уравнения (4.20) можно рассматривать как непрерывное отображение симплекса $[\delta z_0, \ldots, \delta z_s]$ в себя и, следовательно, всякая неподвижная точка этого отображения является решением уравнения (4.20). Тем самым доказана разрешимость уравнения (4.17) при произвольном p, удовлетворяющем условию (4.18), а значит, разрешимость уравнения (4.7) при достаточно малых по модулю p.

Следующий пример, играющий важную роль в приложениях к вариационным и оптимальным задачам, является продолжением примера 2.1. Все обозначения совпадают с соответствующими обозначениями в примере 2.1.

Пример 4.1. Пусть

$$E_\zeta = E^2_{\binom{t_1}{t_2}} \times E^n_{x_1} \times E_f$$

— введенное в примере 2.1 линейное пространство уравнений, $D \subset E_\zeta$ — введенное там же конечно-открытое множество точек $\zeta = (t_1, t_2, x_1, f)$ и

$$R : D \to E^{2+2n}_{(t_1, t_2, x_1, x_2)^*} \tag{4.21}$$

— отображение, переводящее точку $\zeta = (t_1, t_2, x_1, f) \in D$ из пространства уравнений в точку $(t_1, t_2, x_1, x(t_2))^* = (t_1, t_2, x_1, x_2)^*$ в пространстве краевых значений $E^{2+2n}_{(t_1,\, t_2,\, x_1,\, x_2)^*}$, где $x(t_2)$ — значение при $t = t_2$ решения $x(t)$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ уравнения $dx\,/\,dt = f$.

Пусть, далее, задано дифференцируемое отображение

$$Q : E^{2+2n}_{(t_1,\, t_2,\, x_1,\, x_2)^*} \to E^s_q$$

так, что определено отображение

$$QR : D \to E^s_q, \tag{4.22}$$

имеющее дифференциал в каждой точке $\zeta \in D$, в которой отображение (4.21) имеет дифференциал.

Пусть $\tilde{\zeta} = (\tilde{t}_1, \tilde{t}_2, \tilde{x}_1, \tilde{f})$ — произвольная точка из D, для которой функция $\tilde{f}(x, t)$ непрерывна при $x = \tilde{x}_1$, $t = \tilde{t}_1$; $x = \tilde{x}_2$, $t = \tilde{t}_2$, где $\tilde{x}_2 = \tilde{x}(\tilde{t}_2)$, $\tilde{x}(t)$, $\tilde{t}_1 \leqslant t \leqslant \tilde{t}_2$,— решение уравнения $dx\,/\,dt = \tilde{f}$ с начальным условием $\tilde{x}(\tilde{t}_1) = \tilde{x}_1$; следовательно, отображение (4.22) имеет в точке $\tilde{\zeta}$ дифференциал (см. пример 2.1). Пусть, далее, $V_{\binom{\tilde{t}_1}{\tilde{t}_2}}$ и $V_{\tilde{x}_1}$ — произвольные окрестности точек

$$\binom{\tilde{t}_1}{\tilde{t}_2} \in E^2_{\binom{t_1}{t_2}}, \quad \tilde{x}_1 \in E^n_{x_1}.$$

Предположим, что в E_f задана векторная топология θ_f и квазивыпуклый в топологии θ_f фильтр $\Phi_{\tilde{f}}$, причем точка $\tilde{f}$ содержится в произвольном элементе $W_{\tilde{f}}$ этого фильтра. Зададим в E_ζ фильтр $\Phi_{\tilde{\zeta}}$ с помощью базисных множеств

$$W_{\tilde{\zeta}} = V_{\binom{\tilde{t}_1}{\tilde{t}_2}} \times V_{\tilde{x}_1} \times W_{\tilde{f}}$$

и предположим, что отображение (4.22) определено и непрерывно на фильтре $\Phi_{\tilde{\zeta}}$ в векторной топологии θ_ζ пространства E_ζ, определяемой топологией θ_f. Очевидно, точка $(\tilde{t}_1, \tilde{t}_2, \tilde{x}_1, \tilde{f})$ содержится во всех элементах фильтра $\Phi_{\tilde{\zeta}}$.

Далее, фильтр $\Phi_{\tilde{\zeta}}$ является прямым произведением двух выпуклых фильтров, определяемых окрестностями $V_{\binom{\tilde{t}_1}{\tilde{t}_2}}$, $V_{\tilde{x}_1}$ и квазивыпуклого в $E_f^{\theta_f}$ фильтра $\Phi_{\tilde{f}}$, и следовательно, является квазивыпуклым в топологии θ_ζ.

Допустим, наконец, что отображение (4.22) критично на фильтре $\Phi_{\tilde{\zeta}}$. Тогда все предположения теоремы 4.2 выполнены и мы можем применить необходимое условие критичности: существуют такая ненулевая s-мерная строка $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_s)$ и такой элемент фильтра $\Phi_{\tilde{\zeta}}$

$$\tilde{W}_{\tilde{\zeta}} = \tilde{V}_{\binom{\tilde{t}_1}{\tilde{t}_2}} \times \tilde{V}_{\tilde{x}_1} \times \tilde{W}_{\tilde{f}},$$

что

$$\pi d\,(QR)_{\tilde{\zeta}}\,(\delta\zeta) \leqslant 0 \quad \forall \delta\zeta \in K\,([\tilde{W}_{\tilde{\zeta}}] - \tilde{\zeta}). \tag{4.23}$$

Условие

$$\delta\zeta = (\delta t_1,\ \delta t_2,\ \delta x_1,\ \delta f) \in K([\widetilde{W}_{\widetilde{\zeta}}] - \widetilde{\zeta})$$

эквивалентно, очевидно, условию

$$\begin{pmatrix}\delta t_1\\ \delta t_2\end{pmatrix} \in E^2_{\left(\begin{smallmatrix}t_1\\ t_2\end{smallmatrix}\right)}, \quad \delta x_1 \in E^n_{x_1}, \quad \delta f \in K([\widetilde{W}_{\widetilde{f}}] - \widetilde{f}). \tag{4.24}$$

Используя выражение для дифференциала $d(QR)_{\widetilde{\xi}}$ [см. (2.18)], неравенство (4.23) можно переписать в виде:

$$\pi\left(\frac{\partial\widetilde{Q}}{\partial t_1} - \frac{\partial\widetilde{Q}}{\partial x_2}\Gamma(\widetilde{t}_2)\widetilde{f}_1\right)\delta t_1 + \pi\left(\frac{\partial\widetilde{Q}}{\partial t_2} + \frac{\partial\widetilde{Q}}{\partial x_2}\widetilde{f}_2\right)\delta t_2 +$$

$$+\pi\left(\frac{\partial\widetilde{Q}}{\partial x_1} + \frac{\partial\widetilde{Q}}{\partial x_2}\Gamma(\widetilde{t}_2)\right)\delta x_1 + \pi\frac{\partial\widetilde{Q}}{\partial x_2}\Gamma(\widetilde{t}_2)\int_{\widetilde{t}_1}^{\widetilde{t}_2}\Gamma^{-1}(s)\,\delta f(\widetilde{x}(s),\ s)\,ds \leqslant 0, \tag{4.25}$$

где δt_1, δt_2, δx_1, δf удовлетворяют условиям (4.24). Полагая в (4.25) $\delta f = 0$ $(\in K([\widetilde{W}_{\widetilde{f}}] - \widetilde{f}))$ и учитывая, что δt_1, δt_2, δx_1 могут принимать произвольные значения, найдем:

$$\left.\begin{aligned}
\pi\left(\frac{\partial\widetilde{Q}}{\partial t_1} - \frac{\partial\widetilde{Q}}{\partial x_2}\Gamma(\widetilde{t}_2)\widetilde{f}_1\right) &= 0,\\
\pi\left(\frac{\partial\widetilde{Q}}{\partial t_2} + \frac{\partial\widetilde{Q}}{\partial x_2}\widetilde{f}_2\right) &= 0,\\
\pi\left(\frac{\partial\widetilde{Q}}{\partial x_1} + \frac{\partial\widetilde{Q}}{\partial x_2}\Gamma(\widetilde{t}_2)\right) &= 0.
\end{aligned}\right\} \tag{4.26}$$

Если в (4.23) положить $\delta t_1 = \delta t_2 = 0$, $\delta x_1 = 0$, то получим:

$$\begin{gathered}
\pi\frac{\partial\widetilde{Q}}{\partial x_2}\Gamma(\widetilde{t}_2)\int_{\widetilde{t}_1}^{\widetilde{t}_2}\Gamma^{-1}(s)\,\delta f(\widetilde{x}(s),\ s)\,ds \leqslant 0\\
\forall\delta f \in K([\widetilde{W}_{\widetilde{f}}] - \widetilde{f}).
\end{gathered} \tag{4.27}$$

Неравенство (4.27) и равенства (4.26) совместно эквивалентны неравенству (4.23) и могут быть преобразованы к следующей «канонической» форме.

Матрица $\Gamma(t)$, $\widetilde{t}_1 \leqslant t \leqslant \widetilde{t}_2$, удовлетворяет уравнению [см. (2.16)]

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \widetilde{f}_x(\widetilde{x}(t), t)\Gamma, \quad \Gamma(\widetilde{t}_1) = I;$$

следовательно, обратная матрица $\Gamma^{-1}(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\Gamma^{-1}}{dt} = -\Gamma^{-1}\widetilde{f}_x(\widetilde{x}(t), t), \quad \Gamma^{-1}(\widetilde{t}_1) = I.$$

Для n-мерной строки $\pi\dfrac{\partial\widetilde{Q}}{\partial x_2}\Gamma(\widetilde{t}_2)$ введем обозначение

$$\xi = \pi\frac{\partial\widetilde{Q}}{\partial x_2}\Gamma(\widetilde{t}_2).$$

Функция

$$\tilde{\psi}(t) = \xi\Gamma^{-1}(t), \quad \tilde{t}_1 \leqslant t \leqslant \tilde{t}_2,$$

удовлетворяет, очевидно, линейному уравнению

$$\frac{d\tilde{\psi}}{dt} = -\tilde{\psi}\tilde{f}_x(\tilde{x}(t), t).$$

Неравенство (4.27) можно теперь записать в виде

$$\int_{\tilde{t}_1}^{\tilde{t}_2} \tilde{\psi}(s)\,\delta f(\tilde{x}(s), s)\,ds \leqslant 0 \quad \forall \delta f \in K([\tilde{W}_{\tilde{f}}] - \tilde{f}),$$

или

$$\int_{\tilde{t}_1}^{\tilde{t}_2} \tilde{\psi}(s)\tilde{f}(\tilde{x}(s), s)\,ds \geqslant \int_{\tilde{t}_1}^{\tilde{t}_2} \tilde{\psi}(s) f(\tilde{x}(s), s)\,ds$$

$$\forall f \in \tilde{f} + K([\tilde{W}_{\tilde{f}}] - \tilde{f}), \tag{4.28}$$

где $\tilde{f} + K([\tilde{W}_{\tilde{f}}] - \tilde{f}]$ — конус, натянутый на $[\tilde{W}_{\tilde{f}}]$ из $\tilde{f}$.

Далее, имеем:

$$\tilde{\psi}(\tilde{t}_1) = \xi = \pi\frac{\partial\tilde{Q}}{\partial x_2}\Gamma(\tilde{t}_2),$$

$$\tilde{\psi}(\tilde{t}_2) = \xi\Gamma^{-1}(\tilde{t}_2) = \pi\frac{\partial\tilde{Q}}{\partial x_2}.$$

Следовательно, равенства (4.26) можно переписать в виде

$$\left.\begin{aligned} \pi\frac{\partial\tilde{Q}}{\partial t_1} &= \tilde{\psi}(\tilde{t}_1)\tilde{f}(\tilde{x}_1, \tilde{t}_1), \\ \pi\frac{\partial\tilde{Q}}{\partial t_2} &= -\tilde{\psi}(\tilde{t}_2)\tilde{f}(\tilde{x}_2, \tilde{t}_2), \\ \pi\frac{\partial\tilde{Q}}{\partial x_1} &= -\tilde{\psi}(\tilde{t}_1), \end{aligned}\right\} \tag{4.29}$$

к которым припишем еще равенство

$$\pi\frac{\partial\tilde{Q}}{\partial x_2} = \tilde{\psi}(\tilde{t}_2). \tag{4.30}$$

Введем теперь скалярную функцию

$$H(\psi, x, t) = \psi f(x, t) = \sum_{i=1}^{n} \psi_i f^i(x, t)$$

трех аргументов: $\psi = \psi_1, \ldots, \psi_n)$, $x = (x^1, \ldots, x^n)^*$, t; в частности,

$$\tilde{H}(\psi, x, t) = \psi\tilde{f}(x, t).$$

Имеем почти всюду на $\tilde{t}_1 \leqslant t \leqslant \tilde{t}_2$:

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{x}}{dt} &= \frac{\partial}{\partial\psi} \tilde{H}(\tilde{\psi}(t), \tilde{x}(t), t), \\ \frac{d\tilde{\psi}}{dt} &= -\frac{\partial}{\partial x} \tilde{H}(\tilde{\psi}(t), \tilde{x}(t), t). \end{aligned} \tag{4.31}$$

Далее, неравенство (4.28) принимает вид

$$\begin{gathered} \int_{\tilde{t}_1}^{\tilde{t}_2} \tilde{H}(\tilde{\psi}(t), \tilde{x}(t), t)\, dt \geqslant \int_{\tilde{t}_1}^{\tilde{t}_2} H(\tilde{\psi}(t), \tilde{x}(t), t)\, dt, \\ H(\psi, x, t) = \psi f(x, t), \quad f \in \tilde{f} + K([\tilde{W}_{\tilde{f}}] - \tilde{f}). \end{gathered} \tag{4.32}$$

Наконец, соотношения (4.29), (4.30) эквивалентны утверждению, что $(2 + 2n)$-мерная строка

$$\begin{aligned} (\tilde{H}(\tilde{\psi}(\tilde{t}_1), \tilde{x}(\tilde{t}_1), \tilde{t}_1), -\tilde{H}(\tilde{\psi}(\tilde{t}_2), \tilde{x}(\tilde{t}_2), \tilde{t}_2), -\tilde{\psi}(\tilde{t}_1), \tilde{\psi}(\tilde{t}_2)) &= \\ = (\tilde{H}_1, -\tilde{H}_2, -\tilde{\psi}_1, \tilde{\psi}_2)& \end{aligned}$$

ортогональна к $(2n + 2 - s)$-мерной поверхности

$$Q(t_1, t_2, x_1, x_2) = \text{const}$$

в точке $(\tilde{t}_1, \tilde{t}_2, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2)^*$. Это последнее условие естественно назвать условием трансверсальности и записать в виде

$$\left. \begin{aligned} (\tilde{H}_1, -\tilde{H}_2, -\tilde{\psi}_1, \tilde{\psi}_2) \perp (Q(t_1, t_2, x_1, x_2) = \tilde{Q}) \\ \text{при } (t_1, t_2, x_1, x_2)^* = (\tilde{t}_1, \tilde{t}_2, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2)^*. \end{aligned} \right\} \tag{4.33}$$

Система уравнений (4.31) является гамильтоновой, а неравенство (4.32) выражает принцип максимума в интегральной форме.

Совокупность условий (4.31), (4.32), (4.33) тривиальна, если $\psi(t) = 0$. Чтобы исключить этот случай, мы должны потребовать, чтобы $s \times (2+2n)$-матрица

$$\left(\frac{\partial\tilde{Q}}{\partial t_1}, \frac{\partial\tilde{Q}}{\partial t_2}, \frac{\partial\tilde{Q}}{\partial x_1}, \frac{\partial\tilde{Q}}{\partial x_2} \right)$$

имела ранг s. Тогда, как показывают соотношения (4.29), (4.30), $\psi(t) \neq 0$.

Пример 4.2. Возьмем в качестве топологии θ_f предыдущего примера топологию T (см. § 3), а в качестве фильтра $\Phi_{\tilde{f}}$ — фильтр $\Phi_{\tilde{f}}^{L_1}(F_U^p)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ (см. пример 3.1). Топологию в E_ζ, определяемую топологией T, обозначим через T_ζ, а фильтр, заданный базисными элементами

$$W_{\tilde{\zeta}} = V_{\binom{\tilde{t}_1}{\tilde{t}_2}} \times V_{\tilde{x}_1} \times W_{\tilde{f}}, \quad W_{\tilde{f}} \in \Phi_{\tilde{f}}^{L_1}(F_U^p),$$

будем обозначать через $\Phi_{\tilde{\zeta}}^p$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Очевидно, $\Phi_{\tilde{\zeta}}^p$ при любом p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$,— квазивыпуклый в топологии T_ζ фильтр и точка $\tilde{\zeta} = (\tilde{t}_1, \tilde{t}_2, \tilde{x}_1, \tilde{f})$ содержится во всех множествах фильтра.

Далее, нетрудно видеть, что дифференциал отображения (4.22), заданный формулой (2.18), непрерывен в топологии T_ζ. Поэтому вместо неравенства (4.23) можно воспользоваться необходимым условием в более сильной форме (4.5):

$$\pi d(QR)_{\tilde\zeta}(\delta\zeta)\leqslant 0 \quad \forall\delta\zeta\in\overline{K}_{T_\zeta}([\widetilde W_{\tilde\zeta}]-\tilde\zeta)$$

и, следовательно, принцип максимума (4.32) можно записать в виде:

$$\int_{\tilde t_1}^{\tilde t_2}\widetilde H(\tilde\psi(t),\tilde x(t),t)\,dt\geqslant\int_{\tilde t_1}^{\tilde t_2}H(\tilde\psi(t),\tilde x(t),t)\,dt, \tag{4.34}$$

$$\forall H(\psi,x,t)=\psi f(x,t),\qquad f\in\tilde f+\overline{K}_{T_\zeta}([\widetilde W_{\tilde f}-\tilde f]).$$

Остальные условия экстремальности остаются без изменений.

Покажем, что

$$\tilde f+\overline{K}_{T_\zeta}(\widetilde W_{\tilde f}-\tilde f)\supset F^p_U \tag{4.35}$$

и тем более

$$\tilde f+\overline{K}_{T_\zeta}([\widetilde W_{\tilde f}]-\tilde f)\supset F^p_U,$$

каков бы ни был элемент $\widetilde W_{\tilde f}\in\Phi^{L_1}_{\tilde f}(F^p_U)$. Так как элементы

$$(\tilde f+V_{K,\delta})\cap F^p_U$$

образуют базис фильтра $\Phi^{L_1}_{\tilde f}(F^p_U)$ (см. пример (3.1), то можно считать, что

$$\widetilde W_{\tilde f}=(\tilde f+V^{L_1}_{\tilde K,\tilde\delta})\cap F^p_U. \tag{4.36}$$

Возьмем произвольный элемент $f=f(x,u(t),t)\in F^p_U$, $u(t)\in\Omega^p_U$, и обозначим точки отрезка

$$[\tilde f,f]=[f(x,\tilde u(t),t),f(x,u(t),t)]=$$
$$=\lambda f(x,\tilde u(t),t)+(1-\lambda)f(x,u(t),t),\qquad 0\leqslant\lambda\leqslant1,$$

через g_λ. Для любой окрестности нуля $V_{K,\delta}$ пространства E^T_f существует такое непрерывное (в топологии T) отображение

$$\varphi\colon [f(x,\tilde u(t),t),f(x,u(t),t)]\to \overset{p}{F_U}, \tag{4.37}$$

что

$$\varphi(g_\lambda)-g_\lambda\in V_{K,\delta}\quad\forall\lambda\in[0,1]. \tag{4.38}$$

Отображение (4.37) можно задать в виде (см. аппроксимационную лемму в § 3):

$$\left.\begin{aligned}
&\varphi(g_\lambda)=f(x,u_\lambda(t),t),\qquad x\in G,\qquad t\in J,\\
&u_\lambda(t)=\begin{cases}\tilde u(t), & t\in J^\lambda_{\alpha_0},\\ u(t), & t\in J^\lambda_{\alpha_1},\end{cases}\\
&\operatorname{meas} J^\lambda_{\alpha_0}/\operatorname{meas} J^\lambda_{\alpha_1}=\lambda/1-\lambda,\\
&\alpha=\pm1,\pm2,\ldots.
\end{aligned}\right\} \tag{4.39}$$

Докажем существование такого $\tilde{\lambda}$, $0 < \tilde{\lambda} < 1$, не зависящего от $V_{K,\delta}$ и от отображения (4.39), что

$$\varphi(g_\lambda) \in (\tilde{f} + V^{L_1}_{\tilde{K},\tilde{\delta}}) \quad \forall \lambda \in [\tilde{\lambda}, 1]. \tag{4.40}$$

Тем самым будет доказано, что каждая точка отрезка

$$[f(x, \tilde{u}(t), t),\ \tilde{\lambda} f(x, \tilde{u}(t), t) + (1 - \tilde{\lambda}) f(x, u(t), t)]$$

является точкой прикосновения множества $\tilde{W}_{\tilde{f}}$, откуда непосредственно следует доказываемое нами соотношение (4.35).

Имеем [см. (4.39)]:

$$\int_J \left(|\tilde{f} - \varphi(g_\lambda)| + \left| \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x} - \frac{\partial \varphi(g_\lambda)}{\partial x} \right| \right) dt =$$

$$= \int\limits_{\bigcup\limits_{\alpha=-\infty}^{+\infty} J^\lambda_{\alpha 1}} (|f(x, \tilde{u}(t), t) - f(x, u(t), t)| + |f_x(x, \tilde{u}(t), t) - f_x(x, u(t), t)|)\, dt.$$

Пусть $\Delta \subset J$ — такое компактное множество, что при $x \in \tilde{K}$

$$\int_{J-\Delta} (|\tilde{f} - f| + |\tilde{f}_x - f_x|)\, dt \leqslant \frac{\tilde{\delta}}{2},$$

где $\tilde{K}$, $\tilde{\delta}$ взяты из (4.36). Независимо от выбора подразделения J_α имеем при $\lambda \to 1$:

$$\operatorname{meas}(\Delta \cap (\bigcup_{\alpha=-\infty}^{+\infty} J^\lambda_{\alpha 1})) \to 0.$$

Поэтому существует независимое от выбора φ число $\tilde{\lambda}$, $0 < \tilde{\lambda} < 1$, такое, что при $\tilde{\lambda} \leqslant \lambda \leqslant 1$, $x \in \tilde{K}$ справедливо неравенство

$$\int (|\tilde{f} - \varphi(g_\lambda)| + \left| \tilde{f}_x - \frac{\partial \varphi(g_\lambda)}{\partial x} \right|) dt \leqslant \int\limits_{\Delta \cap \left(\bigcup\limits_{\alpha=-\infty}^{+\infty} J^\lambda_{\alpha 1}\right)} (|\tilde{f} - f| + |\tilde{f}_x - f_x|)\, dt +$$

$$+ \int_{J \setminus \Delta} (|\tilde{f} - f| + |\tilde{f}_x - f_x|)\, dt \leqslant \frac{\tilde{\delta}}{2} + \frac{\tilde{\delta}}{2} = \tilde{\delta},$$

которое и доказывает (4.40).

Таким образом, соотношение (4.35) доказано. Пользуясь им, принципу максимума (4.34) можно придать вид:

$$\int_{\tilde{t}_1}^{\tilde{t}_2} \tilde{\psi}(t) f(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t), t)\, dt \geqslant \int_{\tilde{t}_1}^{\tilde{t}_2} \tilde{\psi}(t) f(\tilde{x}(t), u(t), t)\, dt \qquad \forall u(t) \in \Omega^p_U. \tag{4.41}$$

Из полученной формулы нетрудно вывести для рассматриваемого случая принцип максимума в форме Понтрягина.

В самом деле, пусть $t' \in [\tilde{t}_1, \tilde{t}_2]$ — произвольная точка дифференцируемости неопределенного интеграла

$$\int_{\tilde{t}_1}^{t} \tilde{\psi}(s) f(\tilde{x}(s), \tilde{u}(s), s)\, ds, \quad t \in [\tilde{t}_1, \tilde{t}_2].$$

Обозначим через Δ_h отрезок $t' \leqslant t \leqslant t' + h$ и зададим управление $u(t) \in \Omega_U^p$ формулой

$$u(t) = \begin{cases} \tilde{u}(t) & \text{при } t \notin \Delta_h, \\ u' & \text{при } t \in \Delta_h, \text{ где } u' \in U. \end{cases}$$

Из (4.41) следует:

$$\frac{1}{h} \int_{t'}^{t'+h} \tilde{\psi}(t) f(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t), t)\, dt \geqslant \frac{1}{h} \int_{t'}^{t'+h} \tilde{\psi}(t) f(\tilde{x}(t), u', t)\, dt.$$

При $h \to 0$ предел слева существует по предположению, а предел справа — из-за непрерывности функции $f(x, u, t)$ по совокупности аргументов. Следовательно, почти всюду на $[\tilde{t}_1, \tilde{t}_2]$ для произвольного $u' \in U$ имеем:

$$\tilde{\psi}(t) f(\tilde{x}(t) \tilde{u}(t), t) \geqslant \tilde{\psi}(t) f(\tilde{x}(t), u', t),$$

или

$$H(\tilde{\psi}(t), \tilde{x}(t), \tilde{u}(t), t) = \sup_{u' \in U} H(\tilde{\psi}(t), \tilde{x}(t), u', t)$$

— принцип максимума Понтрягина.

Отметим, что если в рассматриваемом примере фильтр $\Phi_{\tilde{f}}^{L_1}(F_U^p)$ заменить фильтром $\Phi_{\tilde{f}}^{L_1}(G^p)$ (см. пример (3.3)), то формула (4.41) заменится аналогичной — именно, формулой

$$\int_{\tilde{t}_1}^{\tilde{t}_2} \tilde{\psi}(t) f(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t), t)\, dt \geqslant \int_{\tilde{t}_1}^{\tilde{t}_2} \tilde{\psi}(t) f(\tilde{x}(t), u(t), t)\, dt$$

$$\forall u(t) \in \Sigma^p = \left\{ u(t) : \int_J |u(t)|^p\, dt \leqslant \infty \right\},$$

однако из этой последней, как легко видеть, вовсе не вытекает принцип максимума в форме Понтрягина, который в данном случае несправедлив.

Наконец, если заменить фильтр $\Phi_{\tilde{f}}^{L_1}(F_U^p)$ фильтром $\Phi_{\tilde{f}}^{\sup}(F_U^p)$, то вместо (4.41) мы получим принцип максимума в более слабой форме: существуют такой компакт $K \subset G$ и $\delta > 0$, что при

$$\sup_{t \in J} \operatorname{essent} |f(x, \tilde{u}(t), t) - f(x, u(t), t)| \leqslant \delta \quad \forall x \in K$$

имеем

$$\int_{\tilde{t}_1}^{\tilde{t}_2} \tilde{\psi}(t) f(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t), t)\, dt \geqslant \int_{\tilde{t}_1}^{\tilde{t}_2} \tilde{\psi}(t) f(\tilde{x}(t), u(t), t)\, dt.$$

§ 5. Приложения к оптимальным задачам

В этом параграфе, воспользовавшись полученными результатами, мы докажем принцип максимума для основных оптимальных задач.

Пусть задана n-мерная функция $f(x, u, t)$, удовлетворяющая условиям, сформулированным в § 3.

Рассмотрим *«управляемое» дифференциальное уравнение*

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u, t), \tag{5.1}$$

содержащее r-мерный *«управляющий» параметр* u.

Множества Ω_U^p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, будем теперь называть *классами допустимых управлений*, а элементы $u(t) \in \Omega_U^p$ — *допустимыми управлениями*. Будем считать, что зафиксирован некоторый класс допустимых управлений Ω_U^p и будем подставлять в (5.1) вместо параметра u элементы $u(t) \in \Omega_U^p$. Тогда мы получим семейство дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u(t), t), \quad u(t) \in \Omega_U^p, \tag{5.2}$$

определяемое семейством правых частей (см. § 3)

$$F_U^p = \{f(x,t) : f(x, t) = f(x, u(t), t),\ u(t) \in \Omega_U^p\}.$$

Пусть заданы краевые условия для решений уравнения (5.2) $x(t)$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, не зависящие от выбора $u(t) \in \Omega_U^p$:

$$q^i(t_1, t_2, x(t_1), x(t_2)) = q^i(t_1, t_2, x_1, x_2) = 0, \tag{5.3}$$

и скалярная функция от тех же переменных t_1, t_2, x_1, x_2

$$q^0(t_1, t_2, x_1, x_2). \tag{5.4}$$

Функции q^0, q^i предполагаются непрерывно дифференцируемыми во всем пространстве $E^{2+2n}_{(t_1, t_2, x_1, x_2)*}$; в (5.3) не исключается случай $k = 0$ (отсутствие краевых условий).

В дальнейшем, ради удобства, будем говорить не о решении $x(t)$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, уравнения (5.2) при заданном $u(t) \in \Omega_U^p$, а о решении уравнения (5.1) $u(t)$, $x(t)$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, где всегда $u(t) \in \Omega_U^p$; однако, говоря о краевых условиях решения, мы всегда будем предполагать условия (5.3), учитывающие только краевые значения функции $x(t)$.

Определение 5.1. *Решение*

$$\tilde{u}(t), \tilde{x}(t), \quad \tilde{t}_1 \leqslant t \leqslant \tilde{t}_2, \tag{5.5}$$

уравнения (5.1), *удовлетворяющее краевым условиям* (5.3), *будем называть сильной экстремалью оптимальной задачи, заданной уравнением* (5.1), *семейством допустимых управлений* Ω_U^p , *краевыми условиями* (5.3) *и экстремируемой функцией* (5.4), *если существуют такая окрестность* $V_{\tilde{f}}^{L_1}$ *точки* $f(x, \tilde{u}(t), t) = \tilde{f}(x, t) \in F_U^p$ *в топологии* T^{L_1} (§ 3) *и такое число* $\eta > 0$, *что для произвольного решения уравнения* (5.1) $u(t)$, $x(t)$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, *удовлетворяющего краевым условиям* (5.3) *и соотношениям*

$$|t_1 - \tilde{t}_1| + |t_2 - \tilde{t}_2| + |x_1 - \tilde{x}_1| \leqslant \eta, \quad f(x, u(t), t) \in V_{\tilde{f}}^{L_1},$$

всегда справедливо либо неравенство

$$q^0(\tilde{t}_1, \tilde{t}_2, \tilde{x}(\tilde{t}_1), \tilde{x}(\tilde{t}_2)) \leqslant q^0(t_1, t_2, x(t_1), x(t_2))$$

— случай сильного минимума, либо неравенство

$$q^0(\tilde{t}_1, \tilde{t}_2, \tilde{x}(\tilde{t}_1), \tilde{x}(\tilde{t}_2)) \geqslant q^0(t_1, t_2, x(t_1), x(t_2))$$

— случай сильного максимума.

Если в определении 5.1 топологию T^{L_1} заменить более сильной топологией $T^{\sup}$ (§ 3), сохранив все остальные условия без изменений, то получим понятие *слабой экстремали.*

Покажем теперь, что по заданной экстремали с помощью однозначно определенной и весьма простой конструкции можно построить некоторое отображение и фильтр, на котором это отображение критично.

Будем предполагать, что решение (5.5) осуществляет сильный минимум.

Пусть

$$E_z = E_y^1 \times E_\zeta = E_y^1 \times E^2_{\binom{t_1}{t_2}} \times E^n_{x_1} \times E_f,$$
$$z = (y, \zeta) = (y, t_1, t_2, x_1, f),$$

— произведение одномерного пространства параметра y на линейное пространство E_ζ, введенное в примере 2.1, и $D \subset E_\zeta$ — введенное там же конечно-открытое множество. Тогда конечно-открыто и множество

$$D_z = \overset{1}{E_y} \times D \subset E_z,$$

и мы можем определить на нем отображение

$$P\colon D_z \to E_p^{1+k}$$

по формуле

$$P(z) = \begin{pmatrix} p^0(z) \\ p^1(z) \\ \vdots \\ p^k(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q^0(R(\zeta)) + y \\ q^1(R(\zeta)) \\ \dots\dots\dots \\ q^k(R(\zeta)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1^0(t_1, t_2, x_1, x_2) + y \\ q^1(t_1, t_2, x_1, x_2) \\ \dots\dots\dots\dots \\ q^k(t_1, t_2, x_1, x_2) \end{pmatrix}, \qquad (5.6)$$

где $z = (y, \zeta)$, $R(\zeta) = (t_1, t_2, x_1, x_2)^*$ — введенное в примере 2.1 отображение множества D в $E^{2n}_{(t_1, t_2, x_1, x_2)^*}$.

Обозначим через $Y \subset E_y{}^1$ положительную полуось $y \geqslant 0$ и определим в E_z фильтр Φ_z с помощью базисных множеств

$$W_z = (Y \cap V_0) \times V_{\binom{\tilde{t}_1}{\tilde{t}_2}} \times V_{\tilde{x}_1} \times (F_U^p \cap V_{\tilde{f}}^{L_1}) = (Y \cap V_0) \times W_{\tilde{\zeta}}, \qquad (5.7)$$

где V_0, $V_{\binom{\tilde{t}_1}{\tilde{t}_2}}$, $V_{\tilde{x}_1}$, $V_{\tilde{f}}^{L_1}$ — произвольные окрестности точек $0 \in E_y^1$, $\binom{\tilde{t}_1}{\tilde{t}_2} \in E^2_{\binom{t_1}{t_2}}$, $\tilde{x}_1 \in E^n_{x_1}$, $\tilde{f} \in E_f^{TL_1}$.

Точка

$$(0,\ \tilde{t}_1,\ \tilde{t}_2,\ \tilde{x}_1,\ \tilde{f}) = (0,\ \tilde{\zeta}) \in E_z \tag{5.8}$$

является единственной, принадлежащей всем множествам (5.7), т. е. всем множествам фильтра Φ_z. Из теоремы о непрерывной зависимости (см. § 7.1) следует, что отображение (5.6) определено на Φ_z, а из определения 5.1 непосредственно следует существование такого множества W_z вида (5.7), что его образ $P(W_z) \subset E_p^{1+k}$ не содержит точек отрицательной оси p^0, т. е. Φ_z является критическим фультром для отображения P.

Чтобы применить необходимое условие критичности, следует, во-первых, найти такую векторную топологию в E_z, в которой отображение (5.6) непрерывно на фильтре Φ_z, а фильтр Φ_z — квазивыпуклый, и, во-вторых, потребовать, чтобы в точке (5.8) отображение (5.6) имело дифференциал.

Искомую топологию в E_z можно задать, задав в E_f топологию T (см. § 3); в силу теоремы о непрерывной зависимости (§ 7.1) отображение (5.6) непрерывно на фильтре Φ_z в этой топологии; квазивыпуклость Φ_z в этой топологии следует из квазивыпуклости в топологии T фильтра, определенного базисом $\{F_U^p \cap V_{\tilde{f}}^{L_1}\}$ (см. пример 3.1), и из того, что фильтры, определенные в E_y^1, $E^2_{\binom{t_1}{t_2}}$, $E^n_{x_1}$ базисами $\{Y \cap V_0\}$, $\{V_{\binom{\tilde{t}_1}{\tilde{t}_2}}\}$, $\{V_{\tilde{x}_1}\}$, выпуклы, и, следовательно, Φ_z — прямое произведение выпуклых фильтров на квазивыпуклый фильтр.

Чтобы отображение (5.6) имело дифференциал в точке (5.8), потребуем непрерывность функции $\tilde{f}(x, t) = f(x, \tilde{u}(t), t)$ при значениях $x = \tilde{x}_1$, $t = \tilde{t}_1$; $x = \tilde{x}_2$, $t = \tilde{t}_2$ (см. пример 2.1).

Напишем теперь необходимое условие критичности (см. (4.5), (4.23)):

$$\begin{gathered} \pi dP_{\tilde{z}}(\delta z) = \sum_{i=0}^{k} \pi_i\, dp^i(\delta z) \leqslant 0 \\ \forall \delta z = (\delta y,\ \delta\zeta) \in Y \times \overline{K}([W_{\tilde{\zeta}}] - \tilde{\zeta}), \end{gathered} \tag{5.9}$$

где замыкание конуса берется в топологии, определяемой топологией T.

Полагая в (5.9) $\delta\zeta = 0$, получим $\pi_0 \delta y \leqslant 0 \quad \forall \delta y \in Y$, т. е. $\pi_0 \leqslant 0$.

Полагая $\delta y = 0$, получим соотношение

$$\sum_{i=1}^{k} \pi_i\, dp^i(\delta\zeta) \leqslant 0 \quad \forall \delta\zeta \in \overline{K}([W_{\tilde{\zeta}}] - \tilde{\zeta}),$$

идентичное соотношение (4.23). Поэтому вводя функцию

$$H(\psi, x, u, t) = \psi f(x, u, t),$$

можно утверждать следующее.

Существует такая n-мерная функция

$$\tilde{\psi}(t), \quad \tilde{t}_1 \leqslant t \leqslant \tilde{t}_2, \tag{5.10}$$

что на отрезке $\tilde{t}_1 \leqslant t \leqslant \tilde{t}_2$ удовлетворяется гамильтонова система

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{x}(t)}{dt} &= \frac{\partial}{\partial \psi} H(\tilde{\psi}(t), \tilde{x}(t), \tilde{u}(t), t), \\ \frac{d\tilde{\psi}}{dt} &= -\frac{\partial}{\partial x} H(\tilde{\psi}(t), \tilde{x}(t), \tilde{u}(t), t) \end{aligned} \tag{5.11}$$

и выполняется принцип максимума

$$\int_{\tilde{t}_1}^{\tilde{t}_2} H(\tilde{\psi}(t), \tilde{x}(t), \tilde{u}(t), t)\, dt \geqslant \int_{\tilde{t}_1}^{\tilde{t}_2} H(\tilde{\psi}(t), \tilde{x}(t), u(t), t)\, dt \tag{5.12}$$

$$\forall u(t) \in \Omega_U^p.$$

Наконец, выполняется условие трансверсальности

$$(\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_k)\left(\frac{\partial \tilde{Q}}{\partial t_1}, \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial t_2}, \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial x_1}, \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial x_2}\right) =$$

$$= (\tilde{H}(\tilde{t}_1), -\tilde{H}(\tilde{t}_2), -\tilde{\psi}(\tilde{t}_1), \tilde{\psi}(\tilde{t}_2)), \tag{5.13}$$

где

$$\tilde{H}(t) = H(\tilde{\psi}(t), \tilde{x}(t), \tilde{u}(t), t),$$

$$Q(t_1, t_2, x_1, x_2) = \begin{pmatrix} q^0(t_1, t_2, x_1, x_2) \\ \cdots\cdots\cdots \\ q^k(t_1, t_2, x_1, x_2) \end{pmatrix}$$

и волна сверху в $\frac{\partial \tilde{Q}}{\partial t_1}, \ldots, \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial x_2}$ означает, что соответствующие градиенты берутся в точке $(\tilde{t}_1, \tilde{t}_2, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2)^*$.

Чтобы гарантировать нетривиальность функции $\tilde{\psi}(t)$, т. е. $\tilde{\psi}(t) \not\equiv 0$, $\tilde{t}_1 \leqslant t \leqslant \tilde{t}_2$, достаточно предположить (см. пример 4.1), что ранг $(1+k) \times \times (2+2n)$-матрицы

$$\left(\frac{\partial \tilde{Q}}{\partial t_1}, \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial t_2}, \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial x_1}, \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial x_2}\right)$$

равен $1+k$, т. е. что $2+2n-(1+k)$-мерная поверхность

$$Q(t_1, t_2, x_1, x_2) = \tilde{q}(=Q(\tilde{t}_1, \tilde{t}_2, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2))$$

регулярна в точке $(\tilde{t}_1, \tilde{t}_2, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2)^*$.

Итак, система необходимых условий того, что решение (5.5) уравнения (5.2) является точкой сильного минимума для экстремальной задачи, определенной экстремируемой функцией (5.4) и краевыми условиями (5.3), заключается в существовании такой ненулевой строки $\pi = (\pi_0, \ldots, \pi_k)$

и абсолютно непрерывной функции (5.10), что удовлетворяется гамильтонова система (5.11) и выполняются принцип максимума (5.12), условие трансверсальности (5.13) и неравенство $\pi_0 \leqslant 0$.

В заключение отметим, что из неравенства (5.12) следует принцип максимума в форме Понтрягина: почти всюду на $\tilde{t}_1 \leqslant t \leqslant \tilde{t}_2$

$$H(\tilde{\psi}(t), \tilde{x}(t), \tilde{u}(t), t) = \sup_{u \in U} H(\tilde{\psi}(t), \tilde{x}(t), u, t)$$

(см. пример 4.2).

§ 6. Минимизация функционалов с выпуклым дифференциалом

Скалярную функцию $\omega(z)$, заданную на линейном пространстве E_z, будем называть *выпуклой*, если для произвольных z_1, $z_2 \in E_z$ и произвольного $\lambda \geqslant 0$

$$\omega(z_1 + z_2) \leqslant \omega(z_1) + \omega(z_2),$$

$$\omega(\lambda z) = \lambda \omega(z).$$

Предположим, что $p^0(z)$ — скалярная функция, определенная на конечно-открытом множестве $D \subset E_z$.

Будем говорить, что *функция* $p^0(z)$ *имеет выпуклый дифференциал в точке* $\tilde{z} \in D$, если существует такая выпуклая функция $\omega(\delta z)$ на $E_{\delta z}$, что для произвольного конечномерного линейного многообразия L, проходящего через $\tilde{z}$, справедливо представление

$$p^0(\tilde{z} + \varepsilon \delta z) - p^0(\tilde{z}) = \varepsilon \omega(\delta z) + o(\varepsilon \delta z),$$

$$\tilde{z} + \varepsilon \delta z \in D \cap L, \qquad \varepsilon \geqslant 0.$$

Функцию $\omega(\delta z) = \omega_{\tilde{z}}(\delta z)$ будем называть выпуклым *дифференциалом функции* $p^0(z)$ *в точке* $\tilde{z}$. Если $\omega(\delta z)$ — линейный функционал, то мы приходим к данному в § 2 определению.

В дальнейшем, говоря о дифференциале, мы будем иметь в виду линейный дифференциал (в смысле § 2), выпуклый же дифференциал будем каждый раз оговаривать.

Предположим теперь, что заданы еще k функций на D $p^i(z)$, $i = 1, \ldots, k$.

Введем отображение

$$P: D \to E_p^{1+k}, \tag{6.1}$$

определенное формулой

$$P(z) = \begin{pmatrix} p^0(z) \\ p^1(z) \\ \cdots \\ p^k(z) \end{pmatrix}, \quad z \in D.$$

Будем говорить, что *отображение* (6.1) *имеет выпуклый дифференциал в точке* $\tilde{z} \in D$, если функция $p^0(z)$ имеет в $\tilde{z}$ выпуклый дифференциал, а функции p^i, $i = 1, \ldots, k$,— обычный (линейный) дифференциал. Как и прежде, дифференциал будем обозначать

$$dP_{\tilde{z}} : E_{\delta z} \to E_{dp}^{1+k}, \tag{6.2}$$

где

$$dP_{\tilde{z}}(\delta z) = (dp^0_{\tilde{z}}(\delta z), \ldots, dp^k_{\tilde{z}}(\delta z))^*,$$

причем $dp^0_{\tilde{z}}(\delta z) = \omega_{\tilde{z}}(\delta z)$ — выпуклая функция (выпуклый функционал) на $E_{\delta z}$, $dp^i_{\tilde{z}}(\delta z)$ — линейные функционалы.

Основное необходимое условие критичности — теорема 4.1 — остается справедливой и в рассматриваемом случае:

ТЕОРЕМА 6.1. *Пусть в E_z задан фильтр Φ, и предположим, что отображение* (6.1) *определено и критично на фильтре Φ. Если существует векторная топология θ в E_z, в которой отображение* (6.1) *непрерывно на фильтре Φ, и Φ — квазивыпуклый, то для любой точки $\tilde{z}$, принадлежащей всем множествам фильтра, в которой отображение* (6.1) *имеет выпуклый дифференциал, найдется такой элемент $\tilde{W} \in \Phi$, что нуль пространства E_{dp}^{1+k} является граничной точкой множества $dP_{\tilde{z}}([\tilde{W}] - \tilde{z}) \subset E_{dp}^{1+k}$, где $dP_{\tilde{z}}$ — выпуклый дифференциал отображения* (6.1) *в точке $\tilde{z}$.*

Доказательство лишь незначительно отличается от доказательства теоремы 4.1 и потому мы его здесь опускаем.

Из теоремы 6.1 не следует, что через точку $0 \in E^{1+k}_{dp}$ можно провести k-мерную опорную плоскость к множеству

$$dP_{\tilde{z}}([\tilde{W}] - \tilde{z}) \subset E_{dp}^{1+k}, \tag{6.3}$$

так как это последнее, вообще говоря, не выпукло.

Однако в задачах минимизации выпуклый дифференциал $\omega_{\tilde{z}}(\delta z)$ и фильтр Φ имеют специальный вид, при котором множество (6.3) выпукло. Мы укажем здесь этот вид, имея в виду именно задачи минимизации.

Пространство E^θ_z есть прямое произведение

$$E_y \times E^\theta_\zeta,$$

фильтр Φ есть прямое произведение некоторого фильтра Φ_ζ в E_ζ на фильтр Φ_y в $E_y{}^1$, который задается единственным выпуклым базисным множеством $Y = \{y \colon y \geqslant 0\}$, дифференциал (6.2) задается формулами

$$\begin{aligned} dp^0_{\tilde{z}}(\delta z) &= \omega_{\tilde{z}}(\delta z) = \Omega(\delta\zeta) + \delta y, \\ dp^i_{\tilde{z}}(\delta z) &= l^i(\delta\zeta), \quad i = 1, \ldots, k, \end{aligned} \tag{6.4}$$

где $\Omega(\delta\zeta)$ — произвольная выпуклая функция на E_ζ.

Легко видеть, что образ множества $[\tilde{W}] - \tilde{z} = ([\tilde{W}_\zeta] - \tilde{\zeta}) \times Y$ при отображении (6.4) является выпуклым, ибо в силу выпуклости Ω и того, что $\delta y \geqslant 0$, имеем:

$$\begin{aligned} &t\Omega(\delta\zeta_1) + (1-t)\Omega(\delta\zeta_2) + \delta y = \Omega(t\delta\zeta_1 + (1-t)\delta\zeta_2) + \\ &+ (t\Omega(\delta\zeta_1) + (1-t)\Omega(\delta\zeta_2) - \Omega(t\delta\zeta_1 + (1-t)\delta\zeta_2)) + \delta y, \end{aligned}$$

где

$$t\Omega(\delta\zeta_1) + (1-t)\Omega(\delta\zeta_2) - \Omega(t\delta\zeta_1 + (1-t)\delta\zeta_2) + \delta y \geqslant 0.$$

Таким образом, существует такая ненулевая $(1+k)$-мерная строка $\pi=(\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_k)$, что выполняются неравенства (см. аналогичное рассуждение в § 5):

$$\left.\begin{aligned} &\pi_0\Omega(\delta\zeta)+\sum_{i=1}^{k}\pi_i l^i(\delta\zeta)\leqslant 0,\\ &\pi_0\leqslant 0\\ &\forall\delta\zeta\in K([\tilde{W}_\zeta]-\tilde{\zeta}). \end{aligned}\right\} \tag{6.5}$$

Исследуем подробнее случай $\pi_0\neq 0$; можно принять $\pi_0=-1$, тогда первое из неравенств (6.5) дает:

$$\begin{aligned} &\Omega(\delta\zeta)\geqslant\sum_{i=1}^{k}\pi_i l^i(\delta\zeta)=L(\delta\zeta)\\ &\forall\delta\zeta\in K([\tilde{W}_\zeta]-\tilde{\zeta}). \end{aligned} \tag{6.6}$$

В пространстве $E_\eta=E^1_\Omega\times E_{\delta\zeta}$, $\eta=(\Omega,\delta\zeta)$, рассмотрим два выпуклых множества Γ_Ω, Γ_L, определив их следующим образом (будем представлять себе ось Ω направленной вертикально вверх, а подпространство $E_{\delta\zeta}$ горизонтальным).

Множество Γ_Ω состоит из точек пространства E_η, «лежащих над» графиком выпуклой функции $\Omega(\delta\zeta)$:

$$\Gamma_\Omega=\{(\Omega,\delta\zeta)\colon\delta\zeta\in E_{\delta\zeta},\quad \Omega>\Omega(\delta\zeta)\}.$$

Множество Γ_L — часть графика линейной функции $L(\delta\zeta)$, заданная соотношением

$$\Gamma_L=\{(\Omega,\delta\zeta)\colon\delta\zeta\in K([\tilde{W}_\zeta]-\tilde{\zeta}),\quad \Omega=L(\delta\zeta)\}.$$

Легко видеть, что Γ_Ω — выпуклое множество, и оно открыто в конечно-открытой топологии пространства E_η (эта топология, как известно, не обязана быть векторной топологией в E_η).

Неравенство (6.6) утверждает, что Γ_Ω и Γ_L не пересекаются и потому их можно отделить гиперплоскостью (максимальным подпространством) в E_η (см., например, Хилле — Филлипс, Функциональный анализ и полугруппы, гл. II).

Другими словами, существует такой линейный функционал $\Lambda(\delta\zeta)$ на $E_{\delta\zeta}$, что

$$\begin{aligned} &\Lambda(\delta\zeta)\leqslant\Omega(\delta\zeta)\quad\forall\delta\zeta\in E_{\delta\zeta},\\ &-\Lambda(\delta\zeta)+L(\delta\zeta)\leqslant 0\quad\forall\delta\zeta\in K([\tilde{W}_\zeta]-\tilde{\zeta}). \end{aligned} \tag{6.7}$$

Если предположить, что функция $\Omega(\delta\zeta)$ непрерывна в заданной векторной топологии θ, то множество Γ_Ω, как легко видеть, открыто в $E^\theta_{\delta\zeta}$ и, следовательно, отделяющую гиперплоскость можно предполагать замкнутой в топологии θ, т. е. функционал $\Lambda(\delta\zeta)$ в (6.7) можно считать непрерывным в θ (см., например Бурбаки, Топологические векторные пространства, гл. II, М., ИЛ., 1959). Если, кроме того, считать, что и функции $l^i(\delta\zeta)$ непрерывны в θ, то вместо (6.7) мы получим более сильные условия (см. аналогичное обобщение в § 4, теорема 4.3):

$$\begin{gathered}\Lambda(\delta\zeta) \leqslant \Omega(\delta\zeta) \quad \forall \delta\zeta \in E_{\delta\zeta}, \\ -\Lambda(\delta\zeta) + L(\delta\zeta) \leqslant 0 \quad \forall \delta\zeta \in \bar{K}_\theta([\tilde{W}_\zeta] - \tilde{\zeta}),\end{gathered} \tag{6.8}$$

где Λ — непрерывный линейный функционал в пространстве $E^\theta_{\delta\zeta}$, $\bar{K}_\theta([\tilde{W}_\zeta] - \tilde{\zeta})$ — замыкание в том же пространстве конуса $K([\tilde{W}_\zeta] - \tilde{\zeta})$.

Пример 6.1 (Дубовицкий — Милютин ([4])). Рассмотрим задачу нахождения сильного минимума, вполне аналогичную экстремальной задаче § 5, за одним лишь исключением — минимизировать мы будем не функцию $q^0(t_1, t_2, x_1, x_2)$, а функционал от траектории $x(t)$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, вида

$$q^0(x(t)) = \max_{t \in [t_1, t_2]} g(x(t)), \tag{6.9}$$

где $g(x)$ — дифференцируемая скалярная функция от $x \in E^n_x$. Все остальные обозначения этого примера совпадают с соответствующими обозначениями § 5.

Функционал (6.9) будем считать заданным на пространстве непрерывных n-мерных функций $x(t)$, $t \in J$, с топологией равномерной сходимости, предполагая, что при подстановке решения $x(t)$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, уравнения (5.1) в (6.9), $x(t)$ продолжено влево от t_1 и вправо от t_2 с помощью условий

$$x(t) = x(t_1), \quad t \leqslant t_1; \quad x(t) = x(t_2), \quad t \geqslant t_2.$$

Непосредственные выкладки показывают, что функционал (6.9) имеет выпуклый дифференциал при $x(t) = \tilde{x}(t)$, $\tilde{t}_1 \leqslant t \leqslant \tilde{t}_2$, равный

$$dq^0_{\tilde{x}(t)}(\delta x(t)) = \max_{t \in M} g_x(\tilde{x}(t))\,\delta x(t),$$

где M — множество из $\tilde{t}_1 \leqslant t \leqslant \tilde{t}_2$, на котором функция $g(\tilde{x}(t))$ достигает максимума.

Отображение $\delta\zeta = (\delta t_1, \delta t_2, \delta x_1, \delta f) \to \delta x(t)$ линейно и непрерывно в топологии T^{L_1} (см. § 3), так как согласно формуле (7.39)

$$\delta x(t) = \Gamma(t)(\delta x_1 - \tilde{f}_1 \delta t_1) + \Gamma(t) \int_{\tilde{t}_1}^{t_1} \Gamma^{-1}(s)\,\delta f\,ds, \tag{6.10}$$

где $\tilde{f}_1 = \tilde{f}(\tilde{x}_1, \tilde{t}_1)$.

Следовательно, отображение

$$S\colon \delta\zeta \to g_x(\tilde{x}(t))\,\delta x(t) \tag{6.11}$$

пространства $E^{T^{L_1}}_{\delta\zeta}$ в пространство C_J непрерывных на J скалярных функций с топологией равномерной сходимости линейно и непрерывно, а потому непрерывна и выпуклая функция

$$\Omega(\delta\zeta) = \max_{t \in M} S(\delta\zeta) = \max_{t \in M} g_x(\tilde{x}(t))\,\delta x(t). \tag{6.12}$$

Кроме того, непрерывна линейная функция (см. (6.6), (2.18))

$$L(\delta\zeta) = \sum_{i=1}^{k} \pi_i \left[\left(\frac{\partial \widetilde{q}^i}{\partial t_1} - \frac{\partial \widetilde{q}^i}{\partial x_2} \Gamma(\widetilde{t}_2) \widetilde{f}_1 \right) \delta t_1 + \right.$$
$$+ \left(\frac{\partial \widetilde{q}^i}{\partial t_2} + \frac{\partial \widetilde{q}^i}{\partial x_2} \widetilde{f}_2 \right) \delta t_2 + \left(\frac{\partial \widetilde{q}^i}{\partial x_1} + \frac{\partial \widetilde{q}^i}{\partial x_2} \Gamma(\widetilde{t}_2) \right) \delta x_1 +$$
$$\left. + \frac{\partial \widetilde{q}^i}{\partial x_2} \Gamma(\widetilde{t}_2) \int_{\widetilde{t}_1}^{\widetilde{t}_2} \Gamma^{-1}(t)\, \delta f(\widetilde{x}(t), t)\, dt \right]. \qquad (6.13)$$

Из соотношений (6.8), (6.12) следует, что $\Lambda(\delta\zeta)$ — непрерывный линейный функционал в $E^{TL_1}_{\delta\zeta}$ и обращается в нуль на ядре отображения (6.11). Поэтому $\Lambda(\delta\zeta)$ можно считать непрерывным линейным функционалом на подпространстве $S(E^{TL_1}_{\delta\zeta}) \subset C_J$. Отсюда заключаем, на основании теоремы Хана — Банаха о распространении линейного функционала и теоремы Рисса о представлении непрерывных линейных функционалов в C_J, о существовании такой функции ограниченной вариации $\sigma(t)$, что

$$\int_J \varphi(t)\, d\sigma(t) \leqslant \max_{t \in M} \varphi(t) \quad \forall \varphi(t) \in C_J, \qquad (6.14)$$

причем на подпространстве $S(E^{TL_1}_{\delta\zeta}) \subset C_J$

$$\Lambda(\delta\zeta) = \int_J \varphi(t)\, d\sigma(t) = \int_J g_x(\widetilde{x}(t))\, \delta x(t)\, d\sigma(t). \qquad (6.15)$$

Из (6.14) следует, что $\sigma(t)$ — неубывающая функция, постоянная на каждом смежном интервале открытого множества $J \setminus M$, т. е. $\sigma(t)$ — положительная мера, сосредоточенная на M.

Преобразуем интеграл (6.15), подставив в него вместо $\delta x(t)$ выражение (6.10):

$$\Lambda(\delta\zeta) = \int_{\widetilde{t}_1}^{\widetilde{t}_2} g_x(\widetilde{x}(t))\, \Gamma(t) \left(\delta x_1 - \widetilde{f}_1 \delta t_1 + \int_{\widetilde{t}_1}^{t} \Gamma^{-1}(s)\, \delta f\, ds \right) d\sigma(t) =$$
$$= \int_{\widetilde{t}_1}^{\widetilde{t}_2} g_x(\widetilde{x}(t))\, \Gamma(t)\, \gamma(t)\, d\sigma(t) = \int_{\widetilde{t}_1}^{\widetilde{t}_2} \left(d \int_{\widetilde{t}_1}^{t} g_x(\widetilde{x}(s))\, \Gamma(s)\, d\sigma(s) \right) \gamma(t) =$$
$$= \left(\int_{\widetilde{t}_1}^{\widetilde{t}_2} g_x(\widetilde{x}(s))\, \Gamma(s)\, d\sigma(s) \right) \gamma(t_2) - \int_{\widetilde{t}_1}^{\widetilde{t}_2} \left(\int_{\widetilde{t}_1}^{t} g_x(\widetilde{x}(s))\, \Gamma(s)\, d\sigma(s) \right) \Gamma^{-1}(t)\, \delta f\, dt.$$

Обозначим

$$\beta = \int_{\widetilde{t}_1}^{\widetilde{t}_2} g_x(\widetilde{x}(s))\, \Gamma(s)\, d\sigma(s);$$

тогда

$$\Lambda(\delta\zeta)=\int_{\tilde t_1}^{\tilde t_2} g_x(\tilde x(s))\,\Gamma(s)\,(\delta x_1-\tilde f_1\delta t_1)\,d\sigma(s)+$$

$$+\int_{\tilde t_1}^{\tilde t_2}\Big(\beta-\int_{\tilde t_1}^{t} g_x(\tilde x(s))\,\Gamma(s)\,d\sigma(s)\Big)\,\Gamma^{-1}(t)\,\delta f(\tilde x(t),\,t)\,dt=$$

$$=\int_{\tilde t_1}^{\tilde t_2} g_x(\tilde x(t))\,\Gamma(t)\,(\delta x_1-\tilde f_1\delta t_1)\,d\sigma(t)+\int_{\tilde t_1}^{\tilde t_2}\alpha(t)\,\Gamma^{-1}(t)\,\delta f\,dt, \qquad (6.16)$$

где

$$\alpha(t)=\beta-\int_{\tilde t_1}^{t} g_x(\tilde x(s))\,\Gamma(s)\,d\sigma(s). \qquad (6.17)$$

Подставив во второе неравенство (6.8) выражения (6.13), (6.16) для $L(\delta\zeta)$, $\Lambda(\delta\zeta)$, после элементарных преобразований получим:

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{k}\pi_i\left(\frac{\partial\tilde q^i}{\partial t_1}-\frac{\partial\tilde q^i}{\partial x_2}\,\Gamma(\tilde t_2)\tilde f_1\right)+\left(\int_{\tilde t_1}^{\tilde t_2} g_x(\tilde x(t))\,\Gamma(t)\,d\sigma(t)\right)\tilde f_1=0,\\
&\sum_{i=1}^{k}\pi_i\left(\frac{\partial\tilde q^i}{\partial t_2}+\frac{\partial\tilde q^i}{\partial x_2}\tilde f_2\right)=0,\\
&\sum_{i=1}^{k}\pi_i\left(\frac{\partial\tilde q^i}{\partial x_1}+\frac{\partial\tilde q^i}{\partial x_2}\,\Gamma(t_2)\right)-\int_{\tilde t_1}^{\tilde t_2} g_x(\tilde x(t))\,\Gamma(t)\,d\sigma(t)=0,
\end{aligned}\right\}\qquad (6.18)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int_{\tilde t_1}^{\tilde t_2}\Big(\chi-\beta+\int_{\tilde t_1}^{t} g_x(x(s))\,\Gamma(s)\,d\sigma(s)\Big)\,\Gamma^{-1}(t)\,\delta f\,dt\leqslant 0\\
&\forall\delta f\in\overline{K}_T([\mathfrak{F}_f]-\tilde f),
\end{aligned}\right\}\qquad (6.19)$$

где

$$\chi=\sum_{i=1}^{k}\pi_i\frac{\partial\tilde q^i}{\partial x_2}\,\Gamma(\tilde t_2).$$

Соотношения (6.18) дают условия трансверсальности, неравенство (6.19) — условие максимума в рассматриваемом случае; оно отличается от условия максимума (4.27) тем, что вместо функции $\psi(t)$, удовлетворяющей на $\tilde t_1\leqslant t\leqslant\tilde t_2$ уравнению

$$\frac{d\psi}{dt}=-\psi f_x(\tilde x(t),t),$$

мы имеем здесь функцию

$$\rho(t)=(\chi-\beta+\int_{\tilde t_1}^{t} g_x(\tilde x(s))\,\Gamma(s)\,d\sigma(s))\,\Gamma^{-1}(t),\qquad \tilde t_1\leqslant t\leqslant\tilde t_2,$$

которая удовлетворяет, очевидно, уравнению

$$\rho(t) = \rho(\tilde{t}_1) + \int_{\tilde{t}_1}^{t} g_x(\tilde{x}(s))\, d\sigma(s) - \int_{\tilde{t}_1}^{t} \rho(s)\, \tilde{f}_x(\tilde{x}(s), s)\, ds, \tag{6.20}$$

ибо

$$\frac{d}{dt}\Gamma^{-1}(t) = -\Gamma^{-1}(t)\tilde{f}_x(\tilde{x}(t), t).$$

Если мера $\sigma(t)$ дифференцируема, то (6.20) можно переписать в дифференциальной форме

$$\frac{d\rho}{dt} = g_x(\tilde{x}(t))\frac{d\sigma(t)}{dt} - \rho\tilde{f}_x(\tilde{x}(t), t).$$

Воспользовавшись функцией $\rho(t)$, условия трансверсальности (6.18) можно переписать в виде:

$$\sum_{i=1}^{k} \pi_i \frac{\partial\tilde{q}^i}{\partial t_1} = \sum_{i=1}^{k} \pi_i \frac{\partial\tilde{q}^i}{\partial x_2}\Gamma(\tilde{t}_2)\tilde{f}_1 - \int_{\tilde{t}_1}^{\tilde{t}_2} g_x\Gamma\, d\sigma\, \tilde{f}_1 = \rho(\tilde{t}_1)\tilde{f}_1,$$

$$\sum_{i=1}^{k} \pi_i \frac{\partial\tilde{q}^i}{\partial t_2} = -\sum_{i=1}^{k} \pi_i \frac{\partial\tilde{q}^i}{\partial x_2}\tilde{f}_2 = -\rho(\tilde{t}_2)\tilde{f}_2,$$

$$\sum_{i=1}^{k} \pi_i \frac{\partial\tilde{q}^i}{\partial x_1} = -\sum_{i=1}^{k} \pi_i \frac{\partial\tilde{q}^i}{\partial x_2}\Gamma(\tilde{t}_2) + \int_{\tilde{t}_1}^{\tilde{t}_2} g_x\Gamma\, d\sigma = -\rho(\tilde{t}_1). \tag{6.21}$$

Если к (6.21) приписать еще соотношение

$$\sum_{i=1}^{k} \pi_i \frac{\partial\tilde{q}^i}{\partial x_2} = \rho(\tilde{t}_2),$$

то условия трансверсальности можно сформулировать, сказав, что $(2+2n]$-мерная строка

$$(\rho(\tilde{t}_1)\tilde{f}_1,\ -\rho(\tilde{t}_2)\tilde{f}_2,\ -\rho(\tilde{t}_1),\ \rho(\tilde{t}_2))$$

ортогональна к $(2+2n-k)$-мерной поверхности

$$q^i(t_1, t_2, x_1, x_2) = \text{const}, \quad i = 1, \ldots, k,$$

в точке $(\tilde{t}_1, \tilde{t}_2, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2)^*$.

О хорошо известных связях между рассмотренной в этом примере задачей и оптимальной задачей с ограниченными фазовыми координатами мы здесь не останавливаемся.

§ 7. Дополнение

1. Непрерывная зависимость решений. Пусть G — открытое множество в E^n_x, J — открытый интервал временной оси t.

Рассмотрим множество n-мерных функций $\bar{f}(x, t)$ на $G \times J$, удовлетворяющих следующим условиям. Функция $\bar{f}(x, t)$ непрерывно дифференцируема по x при каждом фиксированном $t \in J$; при каждом фиксированном $x \in G$ она измерима на J, а также измерима на J матрица

$$\bar{f}_x(x,t)=\frac{\partial\bar{f}(x,t)}{\partial x}=\left(\frac{\partial\bar{f}^i(x,t)}{\partial x^j}\right),\quad i,j=1,\dots,n.$$

Далее, для любой рассматриваемой функции $\bar{f}(x,\ t)$ и любого компакта $K\subset G$ существует суммируемая на J функция $m(t)$ $\left(\int\limits_{\tau} m(t)\,dt<\infty\right)$, вообще говоря, зависящая от выбора $\bar{f}$ и K, такая, что при любом $x\in K$ и почти для всех $t\in J$

$$|\bar{f}(x,\ t)|+|\bar{f}_x(x,\ t)|\leqslant m(t). \tag{7.1}$$

Две функции рассматриваемого множества $\bar{f}_1(x,\ t)$, $\bar{f}_2(x,\ t)$ будем называть эквивалентными, если при всяком фиксированном $x\in G$ функция $\bar{f}(x,t)=\bar{f}_1(x,t)-\bar{f}_2(x,t)=0$ почти всюду на J.

Классы эквивалентных между собой функций образуют линейное пространство E_f. Элементы пространства E_f будем обозначать теми же буквами, что и функции, но без черты сверху.

Легко видеть, что если неравенство (7.1) выполняется для какой-нибудь функции $\bar{f}(x,\ t)$, то оно выполняется (с теми же $m(t)$ и K) для любой другой эквивалентной функции. Поэтому неравенство (7.1) можно относить к элементам E_f.

Множество M из E_f будем называть ограниченным, если для произвольного компакта $K\subset G$ существует такая константа $C_K>0$, что для любого элемента $f\in M$ существует соответствующая ему и компакту K функция $m(t)$, мажорирующая на компакте K элемент $|f|+|f_x|$ (неравенство (7.1)) и удовлетворяющая условию

$$\int\limits_J m(t)\,dt\leqslant C_K.$$

В этом определении важно то, что хотя $m(t)$ может зависеть не только от K, но и от $f\in M$, интеграл от $m(t)$ оценивается константой, зависящей только от K, но не от $f\in M$.

Элементы из E_f можно, очевидно, интегрировать по t при фиксированном x, т. е. имеет смысл выражение

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} f(x,t)\,dt,\quad f(x,t)\in E_f,$$

ибо если функция $\bar{f}_1(x,\ t)$, $\bar{f}_2(x,\ t)$, эквивалентны, то

$$\int\limits_{t_1}^{t_2}(\bar{f}_1(x,t)-\bar{f}_2(x,t))\,dt=0$$

при любом фиксированном $x\in G$ и любых $t_1,\ t_2\in J$.

Введем теперь в E_f векторную локально выпуклую отделимую (хаусдорфову) топологию T, определенную в § 3. Она превращает линейное пространство E_f в линейное топологическое (локально выпуклое и отделимое) пространство E_f^T.

Пусть $\bar{f}_1(x,\ t)$, $\bar{f}_2(x,\ t)$ — две эквивалентные функции, и пусть $x(t)$ — произвольная непрерывная на J кривая в E_x^n. Тогда почти всюду на J

имеем:

$$\bar{f}_1(x(t),\, t) - \bar{f}_2(x(t),\, t) = 0.$$

Это непосредственно следует из доказанного ниже соотношения (7.2), которое будет использовано и при доказательстве теоремы 7.1.

Пусть $x(t)$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, $t_1, t_2 \in J$, $x(t) \in G$,— фиксированная непрерывная кривая, $K \subset G$ — компакт, содержащий некоторую окрестность этой кривой, и пусть для любой фиксированной точки $x \in K$ и любых $t', t'' \in J$ функция $\bar{f}(x, t)$ удовлетворяет условию

$$\left| \int_{t'}^{t''} \bar{f}(x,t)\,dt \right| \leqslant \delta.$$

Обозначим через $\sigma(h)$ модуль непрерывности функции $x(t)$:

$$\sigma(h) = \max_{\substack{t',\, t'' \in [t_1,\, t_2] \\ |t'-t''| \leqslant h}} |x(t') - x(t'')|, \qquad 0 \leqslant h \leqslant t_2 - t_1.$$

Наконец, пусть $m(t)$ — интегрируемая на J функция, удовлетворяющая неравенству (7.1) для рассматриваемых $\bar{f}(x, t)$ и K. Тогда для любых $t', t'' \in [t_1, t_2]$ и любого достаточно большого целого p

$$\left| \int_{t'}^{t''} \bar{f}(x(t),t)\,dt \right| \leqslant \sigma\left(\frac{|t'-t''|}{p} \right) \int_J m(t)\,dt + p\delta. \tag{7.2}$$

В самом деле, подразделим отрезок $[t', t'']$ на p равных частей Δ_i, $i = 1, \ldots, p$, и пусть $t_i \in \Delta_i$; тогда

$$\int_{t'}^{t''} \bar{f}(x(t),t)\,dt = \sum_{i=1}^{p} \int_{\Delta_i} [\bar{f}(x(t),t) - \bar{f}(x(t_i),t)]dt + \\ + \sum_{i=1}^{p} \int_{\Delta_i} \bar{f}(x(t_i),t)\,dt.$$

Но

$$\bar{f}(x(t),t) - \bar{f}(x(t_i),t) = \int_0^1 \bar{f}_x(x(t_i) + s(x(t) - x(t_i)),t)\,(x(t) - x(t_i))\,ds.$$

Следовательно, предполагая p настолько большим, чтобы при $t \in \Delta_i$ было

$$x(t_i) + s(x(t) - x(t_i)) \in K, \quad 0 \leqslant s \leqslant 1, \quad i = 1, \ldots, p,$$

получим:

$$\left| \int_{t'}^{t''} \bar{f}(x(t),t)\,dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{p} \int_{\Delta_i} \left| \int_0^1 |\bar{f}_x(x(t_i) + s(x(t) - x(t_i)),t)|\,ds \right| |x(t) - x(t_i)|\,dt + \\ + \sum_{i=1}^{p} \left| \int_{\Delta_i} \bar{f}(x(t_i),t)\,dt \right| \leqslant \sigma\left(\frac{|t'-t''|}{p} \right) \sum_{i=1}^{p} \int_{\Delta_i} m(t)\,dt + \sum_{i=1}^{p} \delta \leqslant$$

$$\leqslant \sigma\left(\frac{|t'-t''|}{p}\right)\int\limits_J m(t)\,dt + p\delta.$$

Таким образом, при заданном элементе $f(x, t) \in E_f$ однозначно определено отображение

$$x(t) \to \int\limits_\tau f(x(s), s)\,ds, \quad x(t) \in G, \quad \tau \in J,$$

если только $x(t)$ — непрерывная функция на J.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = \tilde{f}(x, t), \quad \tilde{f} \in E_f. \tag{7.3}$$

Решением этого уравнения на отрезке $[t_1, t_2] \subset J$ будем называть всякую абсолютно непрерывную на $[t_1, t_2]$ функцию $\tilde{x}(t)$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, $\tilde{x}(t) \in G$, удовлетворяющую соотношению

$$\tilde{x}(t) = \tilde{x}_\tau + \int\limits_{\tilde{\tau}}^{t} \tilde{f}(\tilde{x}(s), s)\,ds, \quad t \in [t_1, t_2], \tag{7.4}$$

где $\tilde{\tau} \in [t_1, t_2]$, $\tilde{x}_\tau \in G$. Мы будем говорить, что решение (7.4) удовлетворяет начальному условию

$$\tilde{x}(\tilde{\tau}) = \tilde{x}_\tau, \quad \tilde{\tau} \in [t_1, t_2], \quad \tilde{x}_\tau \in G. \tag{7.5}$$

Обычным путем, с помощью леммы Гронуолла, доказывается единственность решений. Именно, если

$$x'(t), \quad t_1' \leqslant t \leqslant t_2'; \quad x''(t), \quad t_1'' \leqslant t \leqslant t_2'',$$

— два решения уравнения (7.3), удовлетворяющие одному и тому же начальному условию

$$x'(\tau) = x''(\tau) = x_\tau; \quad \tau \in [t_1', t_2'] \cap [t_1'', t_2''],$$

то при любом $t \in [t_1', t_2'] \cap [t_1'', t_2'']$

$$x'(t) = x''(t).$$

Следующую теорему естественно назвать теоремой о непрерывной зависимости решения дифференциального уравнения от правой части и начального условия.

ТЕОРЕМА 7.1. *Пусть задано произвольное уравнение вида* (7.3), *и пусть* (7.4) — *его решение, удовлетворяющее начальному условию* (7.5). *Тогда для любого ограниченного множества* $M \subset E_f$ *и любого* $\varepsilon > 0$ *можно найти такое* $\eta > 0$ *и такую окрестность нуля* $V_{K,\delta}$ *пространства* E_f^T, *что для произвольных* $\tau \in J$, $x_\tau \in G$, $\delta f \in E_f$, *удовлетворяющих условиям*

$$|\tau - \tilde{\tau}| \leqslant \eta, \quad |x_\tau - \tilde{x}_\tau| \leqslant \eta, \quad \delta f \in M \cap V_{K,\delta}, \tag{7.6}$$

уравнение

$$\frac{dx}{dt} = \tilde{f}(x, t) + \delta f(x, t) \tag{7.7}$$

имеет решение на отрезке $[t_1 - \eta, t_2 + \eta] \subset J$

$$x(t) = x(t;\ \tau,\ x_\tau,\ \delta f), \quad t_1 - \eta \leqslant t \leqslant t_2 + \eta, \tag{7.8}$$

удовлетворяющее начальному условию

$$x(\tau) = x_\tau. \tag{7.9}$$

При этом если $x(t;\ \tau_1,\ x_{\tau_1}\ \delta f_1)$, $t_1 - \eta \leqslant t \leqslant t_2 + \eta$, $x(t;\ \tau_2,\ x_{\tau_2},\ \delta f_2)$, $t_1 - - \eta \leqslant t \leqslant t_2 + \eta$,— *два таких решения*:

$$|\tau_i - \tilde{\tau}| \leqslant \eta, \quad |x_{\tau_i} - \tilde{x}_\tau| \leqslant \eta, \quad \delta f_i \in M \cap V_{K,\delta}, \quad i = 1,\ 2,$$

то

$$|x(t;\ \tau_1,\ x_{\tau_1},\ \delta f_1) - x(t;\ \tau_2,\ x_{\tau_2},\ \delta f_2)| \leqslant \varepsilon, \quad t \in [t_1 - \eta,\ t_2 + \eta]. \tag{7.10}$$

Другими словами, если начальные данные решения исходного уравнения (7.4) изменить достаточно мало в обычной конечномерной топологии, а правую часть уравнения (7.3) изменить «достаточно мало» в топологии T (условия (7.6)), оставаясь при этом на заранее заданном ограниченном множестве $\tilde{f} + M$, то у возмущенного уравнения (7.7) будет существовать решение (7.8) на некотором отрезке, содержащем строго внутри отрезок существования решения (7.4), и будут удовлетворены возмущенные начальные условия (7.9); отрезок существования возмущенных решений единый, и два таких решения сколь угодно мало отличаются на всем отрезке существования в норме равномерной сходимости (неравенство (7.10)).

Очевидно, чем слабее вводимая в E_f топология, тем «сильнее» утверждение теоремы, ибо тем «грубее» оценивается «малость» возмущения правой части. Обычно вводимые топологии в E_f для исследования непрерывной зависимости решений от правых частей сильнее топологии T.

В определении решения (7.4) мы не исключаем тривиального случая $t_1 = t_2$. Поэтому если в качестве M взять произвольное ограниченное множество из E_f, содержащее нуль, из сформулированной теоремы будет следовать существование решения уравнения (7.3) на некотором достаточно малом отрезке $[t_1 - \eta,\ t_2 + \eta]$, удовлетворяющего начальному условию $x(t_1) = x_\tau \in G$.

Доказательству теоремы предпошлем лемму 7.1 — «облегченный вариант» теоремы 7.1.

ЛЕММА 7.1. *Пусть* (7.4) — *решение уравнения* **(7.3)**; ***для любого*** *элемента* $\delta f \in E_f$ *и любого* $\varepsilon > 0$ *можно найти такое* $\eta > 0$, *что для произвольных* $\tau \in J$, $x_\tau \in G$ *и числового параметра* λ, *удовлетворяющих условиям*

$$|\tau - \tilde{\tau}| \leqslant \eta, \quad |x_\tau - \tilde{x}_\tau| \leqslant \eta, \quad |\lambda| \leqslant \eta, \tag{7.11}$$

уравнение

$$\frac{dx}{dt} = \tilde{f}(x, t) + \lambda \delta f(x, t) \tag{7.12}$$

имеет решение, определенное на отрезке $[t_1 - \eta, t_2 + \eta] \subset J$,

$$x(t) = x(t;\ \tau,\ x_\tau,\ \lambda), \quad t_1 - \eta \leqslant t \leqslant t_2 + \eta, \tag{7.13}$$

удовлетворяющее начальному условию

$$x(\tau) = x_\tau. \tag{7.14}$$

При этом если $x(t;\ \tau_i,\ x_{\tau_i},\ \lambda_i)$, $t_1 - \eta \leqslant t \leqslant t_2 + \eta$, $i = 1,\ 2,$ — *два таких решения:*

$$|\tau_i - \tilde{\tau}| \leqslant \eta, \quad |x_{\tau_i} - \tilde{x}_\tau| \leqslant \eta, \quad |\lambda_i| \leqslant \eta, \quad i = 1, 2, \tag{7.15}$$

то на всем отрезке $t_1 - \eta \leqslant t \leqslant t_2 + \eta$

$$|x(t;\ \tau_1,\ x_{\tau_1},\ \lambda_1) - x(t;\ \tau_2,\ x_{\tau_2},\ \lambda_2)| \leqslant \varepsilon. \tag{7.16}$$

Доказательство. Пусть $\eta > 0$ настолько мало, что $[t_1 - \eta,\ t_2 + \eta] \subset J$; дальнейшие ограничения на η будут вводиться по мере надобности.

Определим функцию $y(t)$, $t_1 - \eta \leqslant t \leqslant t_2 + \eta$, условиями:

$$y(t) = \tilde{x}(t), \quad t_1 \leqslant t \leqslant t_2,$$
$$y(t) = \tilde{x}(t_1), \quad t_1 - \eta \leqslant t \leqslant t_1,$$
$$y(t) = \tilde{x}(t_2), \quad t_2 \leqslant t \leqslant t_2 + \eta$$

где $\tilde{x}(t)$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, — решение (7.4).

Искомое решение (7.13) представим в виде

$$x(t) = y(t) + \Delta x(t), \quad t_1 - \eta \leqslant t \leqslant t_2 + \eta, \tag{7.17}$$

и будем вместо уравнения (7.12) решать следующее уравнение относительно $\Delta x(t)$, $t_1 - \eta \leqslant t \leqslant t_2 + \eta$:

$$\frac{d\Delta x(t)}{dt} = \tilde{f}(y(t) + \Delta x(t), t) - \rho(t)\tilde{f}(y(t), t) + $$
$$+ \lambda\delta f(y(t) + \Delta x(t), t), \tag{7.18}$$

где

$$\rho(t) = \begin{cases} 0 \text{ при } t_1 - \eta \leqslant t \leqslant t_1, \quad t_2 \leqslant t \leqslant t_2 + \eta, \\ 1 \text{ при } t_1 \leqslant t \leqslant t_2. \end{cases}$$

Начальное условие для $\Delta x(t)$ запишем в виде

$$\Delta x(\tau) = x_\tau - y(\tau). \tag{7.19}$$

Перепишем (7.18) в виде

$$\frac{d\Delta x(t)}{dt} = \tilde{f}_x(y(t), t)\Delta x(t) + [\tilde{f}(y(t) + \Delta x(t), t) -$$
$$- \rho(t)\tilde{f}(y(t), t) - \tilde{f}_x(y(t), t)\Delta x(t)] + \lambda\delta f(y(t) + \Delta x(t), t). \tag{7.20}$$

Через $\Gamma(t)$, $t_1 - \eta \leqslant t \leqslant t_2 + \eta$ обозначим фундаментальную матрицу линейного уравнения

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \tilde{f}_x(y(t), t)\Gamma, \quad t_1 - \eta \leqslant t \leqslant t_2 + \eta^*.$$

* Существование фундаментальной матрицы доказывается обычным методом последовательных приближений.

Тогда уравнение (7.20), рассматриваемое как линейное уравнение относительно $\Delta x(t)$ с неоднородным членом в виде суммы второго и третьего слагаемых в правой части, вместе с начальным условием (7.19), эквивалентно, очевидно, следующему уравнению относительно $\Delta x(t)$, $t_1-\eta \leqslant t \leqslant t_2+\eta$:

$$\Delta x(t)=\Gamma(t)\Big\{\Gamma^{-1}(\tau)\left(x_\tau-y(\tau)\right)+$$
$$+\int_\tau^t \Gamma^{-1}(s)[\bar f(y(s)+\Delta x(s),s)-\rho(s)\bar f(y(s),s)-$$
$$-\bar f_x(y(s),s)\Delta x(s)]\,ds+\lambda\int_\tau^t \Gamma^{-1}(s)\,\delta f(y(s)+\Delta x(s),s)\,ds\Big\}. \qquad (7.21)$$

Через $C_{[\tau_1,\tau_2]}$ обозначим нормированное пространство непрерывных на $\tau_1\leqslant t\leqslant \tau_2$ n-мерных функций $x(t)$ с нормой равномерной сходимости

$$\|x(t)\|=\max_{\tau_1\leqslant t\leqslant\tau_2}|x(t)|.$$

Аналогичное обозначение используем для нормы матричной функции, например,

$$\|\Gamma(t)\|=\max_{t\in[t_1-\eta,\,t_2+\eta]}|\Gamma(t)|.$$

Правую часть уравнения (7.21) можно рассматривать как оператор $Q(\tau, x_\tau, \lambda)$, зависящий от τ, x_τ, λ и действующий из множества

$$D_{y(t)}=\{\delta x(t)\in C_{[t_1-\eta,\,t_2+\eta]}\colon\ y(t)+\delta x(t)\in G,\ \ t\in[t_1-\eta, t_2+\eta]\}$$

в пространство $C_{[t_1-\eta,\,t_2+\eta]}$:

$$Q(\tau,x_\tau,\lambda)\,\delta x(t)=\Gamma(t)\Big\{\Gamma^{-1}(\tau)\left(x_\tau-y(\tau)\right)+$$
$$+\int_\tau^t \Gamma^{-1}(s)[\bar f(y(s)+\delta x(s),s)-\rho(s)\bar f(y(s),s)-$$
$$-\bar f_x(y(s),s)\,\delta x(s)]\,ds+\lambda\int_\tau^t \Gamma^{-1}(s)\,\delta f(y(s)+\delta x(s),s)\,ds\Big\}. \qquad (7.22)$$

Уравнение (7.21) имеет решение в том и только в том случае, если оператор (7.22) имеет неподвижную точку $\Delta x(t)\in D_{y(t)}$:

$$\Delta x(t)=Q(\tau,\ x_\tau,\ \lambda)\,\Delta x(t).$$

Покажем, что для любого $\varepsilon>0$ можно найти такое $\eta>0$, что если

$$|\tau-\tilde\tau|\leqslant\eta,\qquad |x_\tau-\tilde x_\tau|\leqslant\eta,\qquad |\lambda|\leqslant\eta, \qquad (7.23)$$

то отображение (7.22) имеет неподвижную точку $\Delta x(t)$, не превосходящую по норме $\varepsilon/2$: $\|\Delta x(t)\|\leqslant\varepsilon/2$. Тем самым лемма будет доказана, ибо согласно (7.17) будем иметь для двух таких решений $\Delta x'(t)=x'(t)-y(t)$, $\Delta x''(t)=x''(t)-y(t)$:

$$\|x'(t)-x''(t)\|=\|\Delta x'(t)-\Delta x''(t)\|\leqslant\|\Delta x'(t)\|+\|\Delta x''(t)\|\leqslant\varepsilon.$$

Отображение (7.22), очевидно, компактно, т. е. если в $D_{y(t)}$ взять произвольное множество вида $\{\delta x(t) : \|\delta x(t)\| \leqslant \mathrm{const}\}$, то его образ при отображении (7.22) имеет компактное замыкание в $C_{[t_1-\eta,\ t_2+\eta]}$. Кроме того, оно непрерывно.

Обозначим через Σ_ε замкнутое подмножество в $C_{[t_1-\eta,\ t_2+\eta]}$, определенное условием

$$\Sigma_\varepsilon = \left\{\delta x(t) : \|\delta x(t)\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\right\},$$

и будем предполагать $\varepsilon > 0$ настолько малым, чтобы существовал компакт $K \subset G$, содержащий ε-окрестность кривой $y(t)$, $t_1 - \eta \leqslant t \leqslant t_2 + \eta$; в этом случае $\Sigma_\varepsilon \subset D_{y(t)}$.

Оценим норму функции $\delta y(t) = Q(\tau, x_\tau, \lambda)\delta x(t)$, $t_1 - \eta \leqslant t \leqslant t_2 + \eta$, если $\delta x(t) \in \Sigma_\varepsilon$. Пусть при $x \in K$

$$|\tilde{f}(x, t)| + |\tilde{f}_x(x, t)| \leqslant m(t), \quad t \in J,$$

$$|\delta f(x, t)| \leqslant m(t), \quad t \in J.$$

Тогда при $\delta x(t) \in \Sigma_\varepsilon$

$$\int_\tau^t |\delta f(y(s) + \delta x(s), s)|\, ds \leqslant \int_{t_1-\eta}^{t_2+\eta} m(t)\, dt \leqslant \int_J m(t)\, dt,$$

$$|\tilde{f}(y(t) + \delta x(t), t) - \tilde{f}(y(t), t) - \tilde{f}_x(y(t), t)\delta x(t)| =$$

$$= \left| \int_0^1 \tilde{f}_x(y(t) + s\delta x(t), t)\delta x(t)\, ds - \int_0^1 \tilde{f}_x(y(t), t)\delta x(t)\, ds \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^1 |\tilde{f}_x(y(t) + s\delta x(t), t) - \tilde{f}_x(y(t), t)|\, ds\, |\delta x(t)|,$$

причем

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\int_0^1 |\tilde{f}_x(y(t) + s\delta x(t), t) - \tilde{f}_x(y(t), t)|\, ds \right) dt \to 0$$

при $\|\delta x(t)\| \to 0$, так как для каждого фиксированного t элемент $\tilde{f}_x(x, t) \in$ $\in E_f$ непрерывен по x. Поэтому имеем (см. (7.22)):

$$|\delta y(t)| \leqslant \|\Gamma(t)\| \|\Gamma^{-1}(t)\| (|x_\tau - y(\tau)| +$$

$$+ \int_{t_1-\eta}^{t_1} |\tilde{f}(y(t) + \delta x(t), t) - \tilde{f}_x(y(t), t)\delta x(t)|\, dt +$$

$$+ \int_{t_2}^{t_2+\eta} |\tilde{f}(y(t) + \delta x(t), t) - \tilde{f}_x(y(t), t)\delta x(t)|\, dt +$$

$$+ \int_{t_1}^{t_2} |\tilde{f}(y(t) + \delta x(t), t) - \tilde{f}(y(t), t) - \tilde{f}_x(y(t), t)\delta x(t)|\, dt +$$

$$+|\lambda| \int_{t_1-\eta}^{t_2+\eta} |\delta f(y(t)+\delta x(t), t)|\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \|\Gamma(t)\| \|\Gamma^{-1}(t)\| \Big(|x_\tau - y(\tau)| + \Big(1+\frac{\varepsilon}{2}\Big) \int_{t_1-\eta}^{t_1} m(t)\, dt +$$

$$+\Big(1+\frac{\varepsilon}{2}\Big) \int_{t_2}^{t_2+\eta} m(t)\, dt + \frac{\varepsilon}{2} \int_{t_1}^{t_2} \Big(\int_0^1 |\tilde{f}_x(y(t)+s\delta x(t), t) -$$

$$- \tilde{f}_x(y(t), t)|\, ds \Big) dt + |\lambda| \int_J m(t)\, dt \Big),$$

причем если $\eta > 0$ в (7.23) и $\varepsilon > 0$ достаточно малы, то

$$\|\Gamma(t)\| \|\Gamma^{-1}(t)\| \Big(|x_\tau - y(\tau)| + \Big(1+\frac{\varepsilon}{2}\Big) \times$$

$$\times \Big(\int_{t_1-\eta}^{t_1} m(t)\, dt + \int_{t_2}^{t_2+\eta} m(t)\, dt \Big) + |\lambda| \int_J m(t)\, dt \Big) \leqslant \frac{\varepsilon}{4},$$

$$\|\Gamma(t)\| \, \|\Gamma^{-1}(t)\| \int_{t_1}^{t_2} \Big(\int_{\vartheta}^{1} |\tilde{f}_x(y(t)+s\delta x(t), t) + \tilde{f}_x(y(t), t)|\, ds \Big) dt \leqslant \frac{1}{2}.$$

Следовательно,

$$\|\delta y(t)\| \leqslant \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2},$$

т. е. при таком выборе $\varepsilon > 0$ и $\eta > 0$ компактный непрерывный оператор (7.22) переводит замкнутое множество $\Sigma_\varepsilon \subset C_{[t_1-\eta,\, t_2+\eta]}$ в себя и потому существует хотя бы одна неподвижная точка $\Delta x(t)$, по норме не превосходящая $\varepsilon/2$:

$$\Delta x(t) = Q(\tau, x_\tau, \lambda)\, \Delta x(t), \qquad \|\Delta x(t)\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2},$$

$$|\tau - \tilde{\tau}| \leqslant \eta, \qquad |x_\tau - \tilde{x}_\tau| \leqslant \eta, \qquad |\lambda| \leqslant \eta,$$

что и доказывает лемму.

Полагая в лемме $\delta f = 0$ и воспользовавшись единственностью решения при заданном начальном условии, получаем, что при достаточно малых $\eta > 0$ решение (7.4) однозначно продолжаемо на отрезке $t_1 - \eta \leqslant t \leqslant \leqslant t_2 + \eta$; найденное таким образом решение уравнения (7.3) будем также обозначать через

$$\tilde{x}(t), \quad t_1 - \eta \leqslant t \leqslant t_2 + \eta,$$

$$\tilde{x}(\tilde{\tau}) = \tilde{x}_\tau. \tag{7.24}$$

Доказательство теоремы 7.1. Будем рассматривать точки $(\tau, x_\tau, \eta, \varepsilon, \delta f)$ вида $|\tau - \tilde{\tau}| \leqslant \eta$, $|x_\tau - \tilde{x}_\tau| \leqslant \eta$, $\eta > 0$, $\varepsilon > 0$, $\delta f \in E_f$ и предположим, что $S(\tau, x_\tau, \eta, \varepsilon, \delta f)$ — множество всех λ, удовлетворяющих условию: уравнение

$$\frac{dx}{dt} = \tilde{f}(x, t) + \lambda\delta f(x, t)$$

имеет решение $x(t) = x(t;\ \tau,\ x_\tau,\ \lambda)$, которое определено на отрезке $t_1 - \eta \leqslant t \leqslant t_2 + \eta$, удовлетворяет начальному условию $x(\tau) = x_\tau$, и отличается от решения (7.4) на всем отрезке $t_1 - \eta \leqslant t \leqslant t_2 + \eta$ строго меньше, чем на ε:

$$|x(t) - \tilde{x}(t)| < \varepsilon, \quad t_1 - \eta \leqslant t \leqslant t_2 + \eta.$$

Из леммы (7.1) непосредственно следует, что при достаточно малых $\eta > 0$, $S(\tau, x_\tau, \eta, \varepsilon, \delta f)$ — открытое в E^1_λ множество, содержащее точку $\lambda = 0$. Обозначим через $\Lambda(\tau, x_\tau, \eta, \varepsilon, \delta f)$ максимальный интервал, содержащийся в $S(\tau, x_\tau, \eta, \varepsilon, \delta f)$ и содержащий ноль, и будем предполагать $\varepsilon > 0$ настолько малым, чтобы существовал компакт $K \subset G$, содержащий ε-окрестность кривой (7.24).

Покажем, что если $\bar{\lambda}$ — граничная точка интервала $\Lambda(\tau, x_\tau, \eta, \varepsilon, \delta f)$, то уравнение

$$\frac{dx}{dt} = \tilde{f}(x, t) + \bar{\lambda}\delta f$$

имеет решение

$$x(t) = x(t;\ \tau,\ x_\tau,\ \bar{\lambda}), \quad t_1 - \eta \leqslant t \leqslant t_2 + \eta,$$

$$x(\tau) = x_\tau,$$

причем

$$\|x(t; \tau, x_\tau, \bar{\lambda}) - \tilde{x}(t)\| = \max_{t \in [t_1 - \eta,\ t_2 + \eta]} |x(t; \tau, x_\tau, \bar{\lambda}) - \tilde{x}(t)| = \varepsilon. \quad (7.25)$$

Пусть последовательность точек из $\Lambda(\tau, x_\tau, \eta, \varepsilon, \delta f)$ λ_i, $i = 1, 2, \ldots$, стремится к $\bar{\lambda}$. Покажем, что последовательность решений

$$x_i(t) = x_\tau + \int_\tau^t [\tilde{f}(x_i(s), s) + \lambda_i \delta f(x_i(s), s)]\, ds, \qquad t_1 - \eta \leqslant t \leqslant t_2 + \eta \quad (7.26)$$

равномерно сходится к решению

$$x(t) = x_\tau + \int_\tau^t [\tilde{f}(x(s), s) + \bar{\lambda}\delta f(x(s), s)]\, ds, \qquad t_1 - \eta \leqslant t \leqslant t_2 + \eta. \quad (7.27)$$

Имеем:

$$|x_i(t) - x_j(t)| \leqslant |\lambda_i - \lambda_j| \int_\tau^t |\delta f(x_i(s), s)|\, ds + \int_\tau^t |\tilde{f}(x_i(s), s) - \tilde{f}(x_j(s), s)|\, ds + |\lambda_j| \int_\tau^t |\delta f(x_i(s), s) - \delta f(x_j(s), s)|\, ds =$$

$$= \sigma_{ij} + \int\limits_{\tau}^{t} |\tilde{f}(x_i(s), s) - \tilde{f}(x_j(s), s)| ds +$$
$$+ |\lambda_j| \int\limits_{\tau}^{t} |\delta f(x_i(s), s) - \delta f(x_j(s), s)| ds,$$

где $\sigma_{ij} \to 0$ при $i, j \to \infty$.

Далее,

$$|\tilde{f}(x_i(t), t) - \tilde{f}(x_j(t), t)| \leqslant \left(\int\limits_0^1 |\tilde{f}_x(x_j(t) + s(x_i(t) - \right.$$
$$\left. - x_j(t)), t)| ds\right) |x_i(t) - x_j(t)| = H_{ij}(t) |x_i(t) - x_j(t)|,$$
$$|\lambda_j| |\delta f(x_i(t), t) - \delta f(x_j(t), t)| \leqslant$$
$$\leqslant |\lambda_j| \left(\int\limits_0^1 |\delta f_x(x_j(t) + s(x_j(t) - x_i(t)), t)| ds\right) |x_i(t) - x_j(t)| =$$
$$= |\lambda_j| \delta H_{ij}(t) |x_i(t) - x_j(t)|. \tag{7.28}$$

Следовательно,

$$|x_i(t) - x_j(t)| \leqslant \sigma_{ij} + \int\limits_{\tau}^{t} (H_{ij}(s) + |\lambda_j| \delta H_{ij}(s)) |x_i(s) - x_j(s)| ds.$$

Воспользовавшись леммой Гронуолла, получаем оценку

$$|x_i(t) - x_j(t)| \leqslant \sigma_{ij} \exp \int\limits_{\tau}^{t} (H_{ij}(s) + |\lambda_j| \delta H_{ij}(s)) ds,$$

откуда заключаем, что последовательность кривых (7.26) равномерно сходится на $t_1 - \eta \leqslant t \leqslant t_2 + \eta$ в некоторой кривой $x(t)$, $t_1 - \eta \leqslant t \leqslant t_2 + \eta$, которая и будет удовлетворять уравнению (7.27); очевидно, $\|x(t) - \tilde{x}(t)\| \leqslant \varepsilon$. Если бы выполнялось строгое неравенство $\|x(t) - \tilde{x}(t)\| < \varepsilon$, то из леммы 7.1 следовало бы, что $\Lambda(\tau, x_\tau, \eta, \varepsilon, \delta f)$ — не максимальный интервал, вопреки предположению.

Допустим теперь, что M — ограниченное множество из E_f, следовательно, если $\delta f \in M$, то существует такая интегрируемая функция $m_{\delta f}(t)$ (зависящая от выбора δf), что при $x \in K$, $t \in J$

$$|\delta f_x(x, t)| \leqslant m_{\delta f}(t), \tag{7.29}$$
$$\int\limits_J m_{\delta f}(t) dt \leqslant \text{const},$$

где const не зависит от выбора $\delta f \in M$.

Через $\Lambda(\eta, \varepsilon, \delta)$ обозначим пересечение множеств $\Lambda(\tau, x_\tau, \eta, \varepsilon, \delta f)$ для всевозможных τ, x_τ, δf, удовлетворяющих условиям:

$$|\tau - \tilde{\tau}| \leqslant \eta, \qquad |x_\tau - \tilde{x}_\tau| \leqslant \eta, \qquad \delta f \in M \cap V_{K, \delta}.$$

Покажем, что при достаточно малых $\eta > 0$, $\delta > 0$ множество $\Lambda(\eta, \varepsilon, \delta)$ содержит отрезок $|\lambda| \leqslant 1$; это и завершит доказательство теоремы 7.1.

Предположим, что это не так. Тогда существуют такие последовательности $\tau_i \to \tilde{\tau}$, $x_{\tau_i} \to \tilde{x}_\tau$, $\delta f_i \in M \cap V_{K, \delta_i}$, $\delta_i \to 0$, $i = 1, 2, \ldots$, что последовательность $\bar{\lambda}_i$ соответствующих концов интервалов $\Lambda(\tau_i, x_{\tau_i}, \eta, \varepsilon, \delta f_i)$, начиная с некоторого i, по модулю меньше 1.

Уравнение

$$\frac{dx}{dt} = \tilde{f}(x, t) + \bar{\lambda}_i \delta f_i(x, t)$$

имеет решение

$$x_i(t) = x_{\tau_i} + \int_{\tau_i}^{t} [\tilde{f}(x_i(s), s) + \bar{\lambda}_i \delta f_i(x_i(s), s)]\, ds, \qquad t_1 - \eta \leqslant t \leqslant t_2 + \eta,$$

причем (см. (7.25))

$$\|x_i(t) - \tilde{x}(t)\| = \max_{t \in [t_1 - \eta,\, t_2 + \eta]} |x_i(t) - \tilde{x}(t)| = \varepsilon. \tag{7.30}$$

Так как

$$\tilde{x}(t) = \tilde{x}_\tau + \int_{\tau}^{t} \tilde{f}(\tilde{x}(s), s)\, ds, \qquad t_1 - \eta \leqslant t \leqslant t_2 + \eta,$$

то (см. (7.28))

$$|x_i(t) - \tilde{x}(t)| \leqslant |x_{\tau_i} - \tilde{x}_\tau| + \int_{\tau_i}^{\tau} |\tilde{f}(x_i(s), s)|\, ds +$$

$$+ \int_{\tilde{\tau}}^{t} |\tilde{f}(x_i(s), s) - \tilde{f}(\tilde{x}(s), s)|\, ds + |\bar{\lambda}_i| \left| \int_{\tau_i}^{t} \delta f_i(x_i(s), s)\, ds \right| \leqslant$$

$$\leqslant |x_\tau - \tilde{x}_\tau| + \int_{\tau_i}^{\tilde{\tau}} |\tilde{f}(x_i(s), s)|\, ds + |\bar{\lambda}_i| \left| \int_{\tau_i}^{t} \delta f_i(\tilde{x}(s), s)\, ds \right| +$$

$$+ \int_{\tilde{\tau}}^{t} |\tilde{f}(x_i(s), s) - \tilde{f}(\tilde{x}(s), s)|\, ds + |\bar{\lambda}_i| \int_{\tau_i}^{t} |\delta f_i(x_i(s), s) -$$

$$- \delta f_i(\tilde{x}(s), s)|\, ds \leqslant$$

$$\leqslant |x_{\tau_i} - \tilde{x}_\tau| + \int_{\tau_i}^{\tilde{\tau}} |\tilde{f}(x_i(s), s)|\, ds + |\bar{\lambda}_i| \left| \int_{t_1 - \eta}^{t_2 + \eta} \delta f_i(\tilde{x}(s), s)\, ds \right| +$$

$$+ \int_{\tilde{\tau}}^{t} H_i(s)\, |x_i(s) - \tilde{x}(s)|\, ds + \int_{\tilde{\tau}}^{t} |\bar{\lambda}_i|\, \delta H_i(s)\, |x_i(s) - \tilde{x}(s)|\, ds =$$

$$= \Sigma_i + \int_{\tilde{\tau}} (H_i(s) + |\bar{\lambda}_i|\, \delta H_i(s))\, |x_i(s) - \tilde{x}(s)|\, ds,$$

где

$$\Sigma_i = |x_{\tau_i} - \tilde{x}_\tau| + \int_{\tau_i}^{\tilde{\tau}} |\tilde{f}(x_i(s), s)|\,ds + $$
$$+ |\bar{\lambda}_i| \left| \int_{t_1-\eta}^{t_2+\eta} \delta f_i(\tilde{x}(s), s)\,ds \right|.$$

Воспользовавшись леммой Гронуолла, получим:

$$\begin{gathered} |x_i(t) - \tilde{x}(t)| \leqslant \Sigma_i \exp \int_{t_1-\eta}^{t_2+\eta} (H_i(s) + |\bar{\lambda}_i| \delta H_i(s))\,ds, \\ t_1 - \eta \leqslant t \leqslant t_2 + \eta, \end{gathered} \tag{7.31}$$

причем из (7.29) и ограниченности $|\bar{\lambda}_i|$ следует, что последовательность

$$\exp \int_{t_1-\eta}^{t_2+\eta} (H_i(s) + |\bar{\lambda}_i| \delta H_i(s))\,ds$$

ограничена. Из формул (7.2), (7.29) следует оценка

$$\left| \int_{t_1-\eta}^{t_2+\eta} \delta f_i(\tilde{x}(s), s)\,ds \right| \leqslant \sigma\left(\frac{t_2 - t_1 + 2\eta}{p} \right) \mathrm{const} + p\delta_i,$$

где σ — модуль непрерывности функции $\tilde{x}(t)$, $t_1 - \eta \leqslant t \leqslant t_2 + \eta$, p — произвольное целое число; поэтому

$$\left| \int_{t_1-\eta}^{t_2+\eta} \delta f_i(\tilde{x}(s), s)\,ds \right| \to 0$$

при $i \to \infty$ и, следовательно, при $i \to \infty$ $\Sigma_i \to 0$. Наконец, в силу оценки (7.31) имеем: $\|x_i(t) - \tilde{x}(t)\| \to 0$ при $i \to \infty$, что противоречит равенству (7.30).

2. Дифференцируемость решений. В пространстве

$$E_z = E_\tau^{\boldsymbol{\cdot}} \times E_{x_\tau}^{n} \times E_f$$

точек $z = (\tau, x_\tau, f)$ рассмотрим множество

$$\begin{aligned} M = \Big\{ \delta z = (\delta\tau, \delta x_\tau, \delta f) : |\delta\tau| \leqslant \eta,\ |\delta x_\tau| \leqslant \eta,\ \delta f = \\ = \sum_{i=1} \lambda_i \delta f_i,\ |\lambda_1| \leqslant \eta,\ i = 1; \ldots, r \Big\}, \end{aligned} \tag{7.32}$$

где $\eta > 0$, целое число r и элементы $\delta f_1, \ldots, \delta f_r$ из E_f заданы. Далее, предположим, что уравнение

$$\frac{dx}{dt} = \tilde{f}(x, t)$$

имеет решение

$$\tilde{x}(t), \qquad \tilde{t}_1 \leqslant t \leqslant \tilde{t}_2,$$

$$\tilde{x}(\tilde{\tau}) = \tilde{x}_\tau, \qquad \tilde{\tau} \in [\tilde{t}_1, \tilde{t}_2],$$

причем функция $\tilde{f}(x, t)$ непрерывна при $x = \tilde{x}_\tau$, $t = \tilde{\tau}$ (т. е. в классе эквивалентности $\tilde{f}(x, t)$ существует такая функция). Кроме того, обозначим $\tilde{z} = (\tilde{\tau}, \tilde{x}_\tau, \tilde{f})$.

Из теоремы 7.1 непосредственно следует, что при достаточно малом $\eta > 0$ существует отображение

$$Q: \tilde{z} + M \to C_{[\tilde{t}_1-\eta,\ \tilde{t}_2+\eta]},$$

где

$$Q(\tilde{z} + \delta z) = x(t), \qquad \tilde{t}_1 - \eta \leqslant t \leqslant \tilde{t}_2 + \eta,$$

— решение уравнения

$$\frac{dx}{dt} = \tilde{f}(x, t) + \delta f(x, t)$$

с начальным условием

$$x(\tilde{\tau} + \delta\tau) = \tilde{x}_\tau + \delta x_\tau.$$

Из той же теоремы следует, что это отображение непрерывно в топологии, индуцированной на $\tilde{z} + M$ из пространства

$$E_z^T = E_\tau^1 \times E_{x_\tau}^n \times E_f^T.$$

Итак, предположим, что $\eta > 0$ достаточно мало и что решение $\tilde{x}(t)$ продолжено на $\tilde{t}_1 - \eta \leqslant t \leqslant \tilde{t}_2 + \eta$. Вычислим выражение

$$\begin{gathered} x(t, \varepsilon\delta z) = Q(\tilde{z} + \varepsilon\delta z) = \tilde{x}(t) + \Delta x(t, \varepsilon\delta z), \\ \tilde{t}_1 - \eta \leqslant t \leqslant \tilde{t}_2 + \eta, \qquad \delta z \in M, \end{gathered} \tag{7.33}$$

с точностью до $o(\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$. Согласно определению,

$$x(\tilde{\tau} + \varepsilon\delta\tau, \varepsilon\delta z) = \tilde{x}_\tau + \varepsilon\delta x_\tau,$$

или, пользуясь непрерывностью $\tilde{f}$ при $x = \tilde{x}_\tau$, $\tau = \tilde{\tau}$,

$$\begin{aligned} \Delta x(\tilde{\tau} + \varepsilon\delta\tau, \varepsilon\delta z) &= \tilde{x}_\tau + \varepsilon\delta x_\tau - \tilde{x}(\tilde{\tau} + \varepsilon\delta x_\tau) = \\ &= \varepsilon\delta x_\tau - \int_{\tilde{\tau}}^{\tilde{\tau}+\varepsilon\delta\tau} \tilde{f}(\tilde{x}(t), t)\,dt = \varepsilon\delta x_\tau - \varepsilon\tilde{f}(\tilde{x}(\tilde{\tau}), \tilde{\tau})\,d\tau + o_1(\varepsilon\delta\tau), \end{aligned} \tag{7.34}$$

где $\dfrac{1}{\varepsilon}\, o_1(\varepsilon\delta\tau) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ равномерно относительно $\delta\tau$, $|\delta\tau| \leqslant \eta$.

Функция $\Delta x(t, \varepsilon\delta z)$, $\tilde{t}_1 - \eta \leqslant t \leqslant \tilde{t}_2 + \eta$ удовлетворяет начальному условию (7.34) и уравнению

$$\frac{d\Delta x}{dt} = \tilde{f}(\tilde{x}(t) + \Delta x, t) - \tilde{f}(\tilde{x}(t), t) + \varepsilon\delta f(\tilde{x}(t) + \Delta x, t),$$

которое перепишем в виде

$$\frac{d\Delta x}{dt} = \tilde{f}_x(\tilde{x}(t), t)\Delta x + \varepsilon\delta f(\tilde{x}(t), t) + [\tilde{f}(\tilde{x}(t) + \Delta x, t) -$$

$$- \tilde{f}(\tilde{x}(t), t) - \tilde{f}_x(\tilde{x}(t)t)\,\Delta x] + \varepsilon[\delta f(\tilde{x}(t) + \Delta x, t) - \delta f(\tilde{x}(t), t)].$$

Следовательно,

$$\Delta x(t, \varepsilon\delta z) = \varepsilon\{\Gamma(t)\Gamma^{-1}(\tilde{\tau})(\delta x_\tau - \tilde{f}(\tilde{x}_\tau, \tilde{\tau})\delta\tau) +$$

$$+ \Gamma(t)\int_{\tilde{\tau}} \Gamma^{-1}(s)\delta f(\tilde{x}(s), s)\,ds\} + h(t, \varepsilon\delta z) = \varepsilon\delta x(t, \delta z) + h(t, \varepsilon\delta z), \tag{7.35}$$

где

$$\delta x(t, \delta z) = \Gamma(t)\Gamma^{-1}(\tilde{\tau})(\delta x_\tau - \tilde{f}(\tilde{x}_\tau, \tilde{\tau})\delta\tau) +$$

$$+ \Gamma(t)\int_{\tilde{\tau}}^{t} \Gamma^{-1}(s)\delta f(\tilde{x}(s), s)\,ds, \tag{7.36}$$

$$h(t, \varepsilon, \delta z) = \Gamma(t)\{\Gamma^{-1}(\tilde{\tau})o_1(\varepsilon\delta z) +$$

$$+ (\Gamma^{-1}(\tilde{\tau} + \varepsilon\delta\tau) - \Gamma^{-1}(\tilde{\tau}))\Delta x(\tilde{\tau} + \varepsilon\delta\tau, \varepsilon\delta z) +$$

$$+ \int_{\tau + \varepsilon\delta\tau}^{t} \Gamma^{-1}(s)[\tilde{f}(\tilde{x} + \Delta x, s) - \tilde{f}(\tilde{x}, s) - \tilde{f}_x(\tilde{x}, s)\,\Delta x]\,ds +$$

$$+ \varepsilon\int_{\tilde{\tau} + \varepsilon\delta\tau}^{t} \Gamma^{-1}(s)[\delta f(\tilde{x} + \Delta x, s) - \delta f(\tilde{x}, s)]\,ds +$$

$$+ \varepsilon\int_{\tilde{\tau}}^{\tilde{\tau} + \varepsilon\delta\tau} \Gamma^{-1}(s)\delta f(\tilde{x}, s)\,ds\}. \tag{7.37}$$

Функция $\delta x(t, \delta z)$, $\tilde{t}_1 - \eta \leqslant t \leqslant \tilde{t}_2 + \eta$, удовлетворяет линейному уравнению «в вариациях»

$$\frac{d\delta x(t)}{dt} = \tilde{f}_x(\tilde{x}(t), t)\,\delta x(t, \delta z) + \delta f(\tilde{x}(t), t)$$

и начальному условию

$$\delta x(\tilde{\tau}, \delta z) = \delta x_\tau - \tilde{f}(\tilde{x}_\tau, \tilde{\tau})\delta\tau.$$

Мы покажем сейчас, что при $\varepsilon \to 0$ величина

$$\frac{1}{\varepsilon}\|h(t, \varepsilon\delta z)\| = \frac{1}{\varepsilon}\max_{t \in [\tilde{t}_1 - \eta,\, \tilde{t}_2 + \eta]} |h(t, \varepsilon\delta z)| \to 0, \tag{7.38}$$

причем это стремление равномерно относительно $\delta z \in M$ (см. (7.32)). Следовательно, мы можем написать (см. (7.33)):

$$x(t, \varepsilon\delta z) = \tilde{x}(t) + \varepsilon\delta x(t, \delta z) + o(t, \varepsilon\delta z), \qquad \tilde{t}_1 - \eta \leqslant t \leqslant \tilde{t}_2 + \eta,$$

или, воспользовавшись (7.36) и предполагая матрицу $\Gamma(t)$ нормированной при $t = \tilde{\tau}$,

$$x(t, \varepsilon\delta z) = \tilde{x}(t) + \varepsilon\Gamma(t)[\delta x_1 - \tilde{f}_1\delta t_1 +$$

$$+ \int_{\tilde{t}_1}^{t} \Gamma^{-1}(s)\delta f(\tilde{x}(s), s)\,ds] + o(t, \varepsilon\delta z). \tag{7.39}$$

Таким образом, с помощью полученной формулы выделяется главная линейная часть $\varepsilon\delta x(t, \delta z)$ относительно ε приращения $\Delta x(t, \varepsilon\delta z) = x(t, \varepsilon\delta z) - \tilde{x}(t)$.

Докажем теперь (7.38). Имеем (см. (7.37), (7.39)):

$$\|h(t, \varepsilon\delta z)\| \leqslant \operatorname{const}\Big\{o_2(\varepsilon\delta z) + \varepsilon\eta\,|\Gamma^{-1}(\tilde{\tau} + \varepsilon\delta\tau) -$$

$$- \Gamma^{-1}(\tilde{\tau})| + \int\limits_{\tilde{t}_1-\eta}^{\tilde{t}_2+\eta} |\tilde{f}(\tilde{x}(t) + \Delta x, t) - \tilde{f}(\tilde{x}(t), t) - \tilde{f}_x(\tilde{x}(t), t)\Delta x|\,dt +$$

$$+ \varepsilon \int\limits_{\tilde{t}_1-\eta}^{\tilde{t}_2+\eta} |\delta f(\tilde{x}(t) + \Delta x, t) - \delta f(\tilde{x}(t), t)|\,dt +$$

$$+ \varepsilon\eta \sum_{i=1}^{r} \int\limits_{\tilde{\tau}}^{\tilde{\tau}+\varepsilon\delta\tau} |\delta f_i(\tilde{x}(t), t)|\,dt\Big\}. \tag{7.40}$$

Далее, находим:

$$|\tilde{f}(\tilde{x}(t) + \Delta x(t, \varepsilon\delta z), t) - \tilde{f}(\tilde{x}(t), t) - \tilde{f}_x(\tilde{x}(t), t)\Delta x(t, \varepsilon\delta z)| =$$

$$= \Big|\int\limits_0^1 (\tilde{f}_x(t) + s\Delta x, t) - \tilde{f}_x(\tilde{x}(t), t))\Delta x(t, \varepsilon\delta z)\,ds\Big| \leqslant X(t, \varepsilon\delta z)\,\|\Delta x(t, \varepsilon\delta z)\|,$$

где

$$X(t, \varepsilon\delta z) = \int\limits_0^1 |\tilde{f}_x(\tilde{x}(t) + s\Delta x(t, \varepsilon\delta z), t) - \tilde{f}_x(\tilde{x}(t), t)|\,ds \to 0$$

при $\varepsilon \to 0$ равномерно относительно $\delta z \in M$ для каждого фиксированного t, ибо при этих условиях $\Delta x(t, \varepsilon\delta z) \to 0$ равномерно относительно $\delta z \in M$. Поэтому

$$\int\limits_{\tilde{t}_1-\eta}^{\tilde{t}_2+\eta} |\tilde{f}(\tilde{x}(t) + \Delta x, t) - \tilde{f}(\tilde{x}(t), t) -$$

$$- \tilde{f}_x(\tilde{x}(t), t)\Delta x|\,dt \leqslant \sigma(\varepsilon\delta z)\,\|\Delta x(t, \varepsilon\delta z)\|, \tag{7.41}$$

где

$$\sigma(\varepsilon\delta z) = \int\limits_{\tilde{t}_1-\eta}^{\tilde{t}_2+\eta} X(t, \varepsilon\delta z)\,dt \to 0 \tag{7.42}$$

при $\varepsilon \to 0$, $\delta z \in M$.

Из аналогичных соображений получаем:

$$\rho(\varepsilon\delta z) = \int\limits_{\tilde{t}_1-\eta}^{\tilde{t}_2+\eta} |\delta f(\tilde{x}(t) + \Delta x(t, \varepsilon\delta z), t) - \delta f(\tilde{x}(t), t)|\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \eta \sum_{i=1}^{r} \int\limits_{\tilde{t}_1-\eta}^{\tilde{t}_2+\eta} |\delta f_i(\tilde{x}(t) + \Delta x, t) - \delta f_i(\tilde{x}(t), t)|\,dt \to 0. \tag{7.43}$$

Формулы (7.40), (7.41), (7.43) дают:

$$h(t, \varepsilon\delta z)\| \leqslant \operatorname{const}(o_2(\varepsilon\delta z) + \varepsilon\eta O_1(\varepsilon\delta z) +$$

$$+ \sigma(\varepsilon\delta z)\,\|\Delta x(t, \varepsilon\delta z)\| + \varepsilon\rho(\varepsilon\delta z) + \varepsilon\eta O_2(\varepsilon\delta\tau)). \tag{7.44}$$

Отсюда, на основании (7.35), находим:

$$\|\Delta x(t, \ \varepsilon\delta z)\| \leqslant \varepsilon\|\delta x(t, \ \delta z)\| + \mathrm{const}(o_2(\varepsilon\delta z) +$$
$$+ \varepsilon\eta Q_1(\varepsilon\delta\tau) + \sigma(\varepsilon\delta z)\|\Delta x(t, \ \varepsilon\delta z)\| + \varepsilon\rho(\varepsilon\delta z) + \varepsilon\eta O_2(\varepsilon\delta\tau)),$$

или

$$\|\Delta x(t, \varepsilon\delta z)\| \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon \frac{\|\delta x(t, \delta z)\|\mathrm{const}\left(\dfrac{1}{\varepsilon} o_2(\varepsilon\delta z) + \eta O_1(\varepsilon\delta\tau) + \rho(\varepsilon\delta z) + \eta O_2(\varepsilon\delta\tau)\right)}{1 + \mathrm{const}\,\sigma(\varepsilon\delta z)} =$$
$$= \varepsilon\alpha(\varepsilon\delta z),$$

где величина $\alpha(\varepsilon\delta z)$ ограничена при $\varepsilon \to 0$, $\delta z \in M$.

Полученная оценка для $\|\Delta x(t, \ \varepsilon\delta z)\|$ и оценки (7.44), (7.41), (7.42), (7.43) дают окончательную оценку

$$\frac{1}{\varepsilon}\|h(t, \varepsilon\delta z)\| \leqslant \mathrm{const}\left\{\frac{o_2(\varepsilon\delta z)}{\varepsilon} + \eta O_2(\varepsilon\delta z) + \sigma(\varepsilon\delta z)\alpha(\varepsilon\delta z) + \right.$$
$$\left. + \rho(\varepsilon\delta z) + \eta O_2(\varepsilon\delta z)\right\},$$

откуда следует доказываемое соотношение (7.38).

Матем. институт АН СССР
Тбилисский гос. университет

Поступило
16.XII.1968

ЛИТЕРАТУРА

[1] Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф., Математическая теория оптимальных процессов, М., Изд-во физ.-мат. лит-ры, 1961.

[2] Гамкрелидзе Р. В., О скользящих оптимальных режимах, Докл. АН СССР, 143, № 6 (1962), 1243—1245.

[3] Gamkrelidze R. V., On some extremal problems in the theory of differential equations with applications to the theory of optimal control, J. SIAM on Control, 3 (1965), 106—128.

[4] Дубовицкий А. Я., Милютин А. А., Задача на экстремум при наличии ограничений, Ж. Вычисл. матем. и математ. физики, т. 5, № 3 (1965), 395—453.

[5] Neustadt L. W., An abstract variational theory with applications to a broad class of optimization problems I. General theory, J. SIAM on control, 4 (1966), 505—527.

[6] Neustadt L. W., An abstract variational theory with applications to a broad class of optimization problems II, Applications, J. SIAM on control, 5 (1967), 90—137.

[7] Halkin-Hubert and Neustadt Luoien W., General necessary conditions for optimization problems, Reprinted from the proceedings of the National Academy of sciences, v. 56, № 4 (1966), 1066—1071.

[8] Гамкрелидзе Р. В., Харатишвили Г., Теория первой вариации в экстремальных задачах, Сообщения АН Грузинской ССР, XLVI, № 1 (1967),

[9] Gamkrelidze R. V. and Kharatishvili G. L., Extremal Problems in Linear Topological Spaces. I, Mathematical Systems Theory, v. 1, № 3, Published by Springer Verlag New York Inc., 1967.