

Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

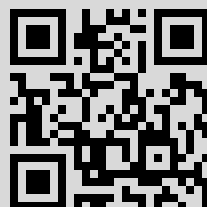
Р. В. Гамквелидзе, Оптимальные процессы управления при ограниченных фазовых координатах, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, 1960, том 24, выпуск 3, 315–356

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 93.181.215.58

19 ноября 2015 г., 17:24:33



Р. В. ГАМКРЕЛИДЗЕ

ОПТИМАЛЬНЫЕ ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ ПРИ ОГРАНИЧЕННЫХ ФАЗОВЫХ КООРДИНАТАХ

(Представлено академиком Л. С. Понтрягиным)

В работе изучаются оптимальные процессы управления при ограниченных фазовых координатах и выводятся уравнения экстремалей для соответствующей вариационной задачи.

Введение

Принцип максимума в теории оптимальных процессов [см. ⁽¹⁾—⁽⁶⁾] позволяет находить экстремали следующей вариационной задачи.

Пусть векторная функция

$$\bar{f}(\bar{x}, u) = (f^1(\bar{x}, u), \dots, f^n(\bar{x}, u))$$

от переменных $\bar{x}$, u определена и непрерывна на прямом произведении

$$(\bar{x}, u) \in X^n \cdot \Omega, \quad \bar{x} \in X^n, \quad u \in \Omega,$$

где X^n — n -мерное фазовое пространство задачи, Ω — произвольное хаусдорфово топологическое пространство — пространство возможных значений управляющего параметра u . Функции $f^i(\bar{x}, u)$ предполагаются непрерывно дифференцируемыми по всем координатам вектора $\bar{x}$.

Пусть уравнение движения фазовой точки имеет вид

$$\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x}, u) \tag{0.1}$$

и в X^n заданы две точки $\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2$. Требуется в классе допустимых управлений (например в классе измеримых ограниченных или в классе кусочно-непрерывных управлений со значениями из Ω) выбрать такую функцию $u(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$, для которой соответствующая траектория $\bar{x}(t)$ уравнения (0.1) соединяет точки $\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2$:

$$\bar{x}(t_1) = \bar{\xi}_1, \quad \bar{x}(t_2) = \bar{\xi}_2,$$

и интеграл

$$\int_{t_1}^{t_2} L(\bar{x}(t), u(t)) dt \tag{0.2}$$

обращается в минимум. (Скалярная функция $L(\bar{x}, u)$ удовлетворяет тем же условиям, что и функции $f^i(\bar{x}, u)$.)

Формулировка принципа максимума приведена в п. 1 § 3.

Пространство возможных значений Ω управляющего параметра может, в частности, быть замкнутой областью r -мерного пространства $\mathcal{E}^r$. Мно-

жество же возможных значений фазовой точки $\bar{x}$ должно совпадать со всем пространством X^n , ибо в противном случае принцип максимума перестает быть верным.

Однако случай, когда множество возможных значений фазовой точки $\bar{x}$ есть замкнутая область в X^n с кусочно-гладкой границей, имеет важное значение для приложений.

Например, к этой задаче сводится случай, когда класс допустимых управлений $u(t) \in \Omega \subset \mathcal{E}^r$ состоит из непрерывных кусочно-гладких управлений с ограниченной по модулю производной. В самом деле, рассматривая в этом случае u как фазовую переменную и принимая за управляющий параметр производную от u , мы вместо уравнения (0.1) приходим к системе

$$\begin{aligned}\dot{\bar{x}} &= \bar{f}(\bar{x}, u), \\ \dot{u} &= v,\end{aligned}$$

где v — кусочно-непрерывная функция, а часть фазовых координат, образующих вектор u , не выходит из области Ω .

В настоящей работе изложены результаты, полученные мною в этой области в семинаре Л. С. Понтрягина по теории колебаний и автоматического регулирования.

Ранее, в работе (7), эти результаты были сформулированы для частного случая оптимальности по быстродействию, т. е. когда подынтегральная функция (0.2) $L(\bar{x}, u) \equiv 1$.

Основной результат работы сформулирован в § 4 в виде общего принципа для нахождения оптимальных управлений и оптимальных траекторий.

Из ранее опубликованных работ, посвященных изучаемому здесь вопросу, следует отметить работы А. Я. Лернера (8) и Е. А. Розенмана (9).

§ 1. Постановка задачи

1. Основные определения. Пусть Ω — произвольное множество r -мерного линейного пространства

$$\mathcal{E}^r = \{u = (u^1, \dots, u^r)\}.$$

Классом допустимых управлений назовем множество всех кусочно-непрерывных, кусочно-гладких векторных функций

$$u(t) = (u^1(t), \dots, u^r(t))$$

с разрывами первого рода, определенных на произвольном отрезке $t_1 \leq t \leq t_2$ временной оси и в каждый момент времени принимающих значения из множества Ω ; функции этого множества будем называть *допустимыми управлениями*.

Если отрезки определения двух допустимых управлений не совпадают, то мы будем считать такие управления различными даже в том случае, если один из отрезков содержится во втором и на меньшем отрезке управления совпадают.

В дальнейшем будем всегда считать, что значение управления $u(t)$ в точке разрыва τ равно пределу слева:

$$u(\tau) = u(\tau - 0).$$

Пусть в n -мерном фазовом пространстве $X^n = \{\bar{x} = (x^1, \dots, x^n)\}$ сформулированной ниже оптимальной задачи дана замкнутая область B с гладкой границей, определяемая вблизи границы неравенством

$$g(\bar{x}) = g(x^1, \dots, x^n) \leq 0,$$

где скалярная функция $g(\bar{x})$ имеет непрерывные вторые частные производные в окрестности границы $g(\bar{x}) = 0$, и вектор

$$\frac{\partial g(\bar{x})}{\partial \bar{x}} = \text{grad } g(\bar{x}) = \left(\frac{\partial g}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial g}{\partial x^n} \right)$$

нигде на границе в нуль не обращается.

Таким образом, граница области B есть регулярная гиперповерхность пространства X^n с непрерывно меняющейся кривизной. К этому случаю автоматически сводится важный для приложений случай области с кусочно-гладкой границей (см. § 3, замечание 3 к теореме 2).

2. Постановка задачи. Пусть действительные скалярные функции $L(\bar{x}, u)$, $f^i(\bar{x}, u)$, $i = 1, \dots, n$, непрерывны и непрерывно дифференцируемы по всем координатам векторов $\bar{x}$, u на прямом произведении $B^* \Omega^* \supset B \Omega$, где B^* , Ω^* — открытые множества из X^n , $\mathcal{E}^r$, содержащие, соответственно, B , Ω .

Пусть уравнение движения изображающей точки $\bar{x} = (x^1, \dots, x^n)$ имеет нормальный вид

$$\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x}, u), \quad (1.1)$$

где

$$\bar{f}(\bar{x}, u) = (f^1(\bar{x}, u), \dots, f^n(\bar{x}, u)). \quad (1.2)$$

Если в правую часть уравнения (1.1) вместо аргумента u подставить некоторое допустимое управление $u(t)$, то (1.1) превращается в n -мерное векторное дифференциальное уравнение, и, задав начальное значение $\bar{x}(t_1)$, мы получим однозначно определенную траекторию $\bar{x}(t)$ уравнения, соответствующую выбранному управлению $u(t)$ и определенную на некотором отрезке времени.

Основной результат настоящей работы сформулирован в теореме 3 (§ 4) и заключается в нахождении полной системы необходимых условий, которым удовлетворяет всякая регулярная траектория уравнения (1.1) и соответствующее управление, дающие решение сформулированной ниже оптимальной задачи; понятие регулярной траектории определено в §§ 2, 3. Эти необходимые условия выражены в виде системы уравнений, поэтому их естественно называть уравнениями экстремалей рассматриваемой оптимальной задачи.

Формулировка оптимальной задачи. В фазовом пространстве X^n заданы две точки $\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2$, принадлежащие замкнутой области B . Обозначим через $U(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2)$ множество всех допустимых управлений $u(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$, обладающих свойством: соответствующая управлению $u(t) \in U(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2)$, $t_1 \leq t \leq t_2$, траектория $\bar{x}(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$, уравнения (1.1) соединяет точки $\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2$: $\bar{x}(t_1) = \bar{\xi}_1$, $\bar{x}(t_2) = \bar{\xi}_2$, и целиком лежит в замкну-

той области B . Требуется из множества $U(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2)$ выбрать управление $u(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$, обращающее в минимум интеграл

$$\int_{t_1}^{t_2} L(\bar{x}(t), u(t)) dt, \quad (1.3)$$

где $\bar{x}(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$, — соответствующая управлению $u(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$, траектория уравнения (1.1).

Таким образом, для любого другого управления $v(t)$, $t_3 \leq t \leq t_4$, из $U(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2)$ и соответствующей траектории $\bar{y}(t)$, $t_3 \leq t \leq t_4$, имеем:

$$\int_{t_1}^{t_2} L(\bar{x}(t), u(t)) dt \leq \int_{t_3}^{t_4} L(\bar{y}(t), v(t)) dt.$$

Всякое управление, удовлетворяющее условию сформулированной задачи, назовем *оптимальным управлением*, а соответствующую траекторию — *оптимальной траекторией*.

Замечание 1. Так как допустимое управление может иметь разрывы, то очевидно, что если управление $u(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$, оптимально и ему соответствует оптимальная траектория $\bar{x}(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$, то всякий участок траектории $\bar{x}(t)$ при $t_3 \leq t \leq t_4$, где $t_1 \leq t_3 < t_4 \leq t_2$, также оптимален и соответствует оптимальному управлению $u(t)$, $t_3 \leq t \leq t_4$. ■

Замечание 2. Так как правая часть уравнения (1.1) не содержит времени явно, то вместе с управлением $u(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$, множеству $U(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2)$ принадлежит и управление $v(t) = u(t + \tau)$, $t_1 - \tau \leq t \leq t_2 - \tau$, каково бы ни было τ .

Если $L(\bar{x}, u) \equiv 1$, то интеграл (1.3) равен разности $t_2 - t_1$, т. е. минимизируется время перехода из положения $\bar{\xi}_1$ в положение $\bar{\xi}_2$, и мы получаем оптимальную по быстродействию задачу [см. (7)].

В дальнейшем допустимое управление и соответствующая ему траектория будут всегда предполагаться определенными на одном и том же отрезке временной оси. Поэтому этот отрезок будет указываться только для управления или только для траектории. Все решения дифференциальных уравнений будут предполагаться непрерывными. В важнейших формулировках эта непрерывность будет иногда оговариваться особо.†

3. Вторая (эквивалентная) формулировка основной задачи. Дадим другую (эквивалентную) формулировку нашей оптимальной задачи, более удобную для приводимых ниже формулировок и доказательств.

Введем $(n+1)$ -мерное фазовое пространство X^{n+1} , точки которого, в отличие от точек из X^n , будем обозначать буквами полужирного шрифта без черты:

$$\mathbf{x} = (x^0, x^1, \dots, x^n) = (x^0, \bar{x}) \in X^{n+1},$$

где

$$\bar{x} = (x^1, \dots, x^n) \in X^n.$$

Фазовое пространство X^n в дальнейшем всегда будет отождествляться с подпространством $x^0 = 0$ пространства X^{n+1} , так что $\mathbf{x} = (0, \bar{x}) = \bar{x}$. Всякую функцию $F(\bar{x})$, зависящую от аргумента $\bar{x} \in X^n$, можно считать функ-

цией от $\mathbf{x} = (x^0, \bar{x})$, определенной формулой

$$F(\mathbf{x}) = F(x^0, \bar{x}) = F(\bar{x}).$$

Для симметрии последующих формул введем обозначения:

$$L(\bar{x}, u) = f^0(\bar{x}, u) = f^0(\mathbf{x}, u),$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, u) = \mathbf{f}(\bar{x}, u) = (f^0(\bar{x}, u), f^1(\bar{x}, u), \dots, f^n(\bar{x}, u)) = (f^0(\bar{x}, u) \bar{f}(\bar{x}, u)), \quad (1.4)$$

где вектор $\bar{f}(\bar{x}, u) = (f^1(\bar{x}, u), \dots, f^n(\bar{x}, u))$ определен формулой (1.2). Обратим внимание на то обстоятельство, что функция $\mathbf{f}(\mathbf{x}, u)$ не зависит от координаты x^0 , и ее значения лежат в X^{n+1} .

Через G обозначим прямое произведение замкнутой области $B \subset X^n$ на ось x^0 . Область G , так же как и B , задается в окрестности своей границы неравенством

$$g(\mathbf{x}) = g(\bar{x}) \leq 0,$$

а ее граница — равенством

$$g(\mathbf{x}) = 0.$$

Область G имеет регулярную n -мерную границу с непрерывно меняющейся кривизной, и вектор

$$\begin{aligned} \frac{\partial g(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} &= \text{grad } g(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial g}{\partial x^0}, \frac{\partial g}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial g}{\partial x^n} \right) = \\ &= \left(0, \frac{\partial g}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial g}{\partial x^n} \right) = (0, \text{grad } g(\bar{x})) \end{aligned}$$

на границе нигде в нуль не обращается.

Пусть уравнение движения фазовой точки $\mathbf{x} = (x^0, \bar{x})$ имеет вид

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, u). \quad (1.5)$$

Это уравнение, очевидно, объединяет уравнение (1.1) и соотношение

$$\dot{x}^0 = \frac{d}{dt} \int_{t_1}^t f^0(\bar{x}(\theta), u(\theta)) d\theta.$$

Каждому управлению $u(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$, из множества $U(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2)$ поставим в соответствие траекторию

$$\mathbf{x}(t) = (x^0(t), \bar{x}(t)), \quad t_1 \leq t \leq t_2,$$

уравнения (1.5) с начальным значением

$$\mathbf{x}(t_1) = (0, \bar{\xi}_1), \quad (1.6)$$

где $\bar{x}(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$, — соответствующая управлению $u(t)$ траектория уравнения (1.1) с краевыми значениями

$$\bar{x}(t_1) = \bar{\xi}_1, \quad \bar{x}(t_2) = \bar{\xi}_2.$$

Следовательно, траектория $\mathbf{x}(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$, целиком лежит в замкнутой цилиндрической области G и

$$\mathbf{x}(t_2) = (x^0(t_2), \bar{\xi}_2),$$

где

$$x^0(t_2) = \int_{t_1}^{t_2} f^0(\bar{x}(t), u(t)) dt.$$

Таким образом, конец $\mathbf{x}(t_2)$ траектории $\mathbf{x}(t)$ лежит на прямой π из X^{n+1} , проходящей через точку $(0, \bar{\xi}_2)$ и параллельной оси x^0 .

Наоборот, если $u(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$, — произвольное допустимое управление, которому соответствует траектория $\mathbf{x}(t)$ уравнения (1.5) с начальным значением (1.6) и концом $\mathbf{x}(t_2)$, лежащим на прямой π , то $u(t) \in U(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2)$.

Ввиду сказанного, нашу задачу можно сформулировать следующим образом.

Вторая (эквивалентная) формулировка оптимальной задачи. *Требуется выбрать допустимое управление $u(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$, таким образом, чтобы конец $\mathbf{x}(t_2)$ соответствующей траектории $\mathbf{x}(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$, уравнения (1.5) с начальным значением (1.6) лежал на прямой π и координата $x^0(t_2)$ обращалась в минимум, а сама траектория $\mathbf{x}(t)$ целиком лежала в замкнутой области G .*

Такую траекторию также будем называть оптимальной.

§ 2. Оптимальные траектории, лежащие на границе области

В этом параграфе доказана теорема 1, дающая полную систему необходимых условий, которым удовлетворяет всякая регулярная оптимальная траектория, целиком лежащая на границе $g(\mathbf{x}) = 0$ области G . Понятие регулярной траектории, лежащей на границе области G , определено в п. 1.

1. Основные определения. Пусть $\psi = (\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_n)$ — ковариантный вектор пространства X^{n+1} . Основную роль в дальнейшем играет скалярная функция $H(\psi, \mathbf{x}, u)$ трех векторных аргументов $\psi, \mathbf{x}, u$, определенная как скалярное произведение

$$H(\psi, \mathbf{x}, u) = \psi \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}, u) = \sum_{\alpha=0}^n \psi_\alpha f^\alpha(\mathbf{x}, u), \quad (2.1)$$

где вектор $\mathbf{f}(\mathbf{x}, u)$ задан формулой (1.4). (Точкой в дальнейшем мы постоянно обозначаем операцию скалярного произведения.)

Если зафиксировать аргументы $\psi, \mathbf{x}$ и менять u на множестве Ω , то H превращается в функцию одного аргумента u . Точную верхнюю грань этой функции (на множестве Ω) обозначим через $M(\psi, \mathbf{x})$:

$$M(\psi, \mathbf{x}) = \sup_{u \in \Omega} H(\psi, \mathbf{x}, u). \quad (2.2)$$

Введем обозначения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial \psi} &= \left(\frac{\partial H}{\partial \psi_0}, \frac{\partial H}{\partial \psi_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial \psi_n} \right) = (f^0(\mathbf{x}, u), \dots, f^n(\mathbf{x}, u)) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, u), \\ \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} &= \left(\frac{\partial H}{\partial x^0}, \frac{\partial H}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial x^n} \right) = \left(0, \frac{\partial H}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial x^n} \right), \\ \frac{\partial H}{\partial u} &= \left(\frac{\partial H}{\partial u^1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial u^r} \right). \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

Уравнение (1.5) можно теперь записать в виде

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial H(\psi, \mathbf{x}, u)}{\partial \psi}. \quad (2.4)$$

Рассмотрим линейное однородное уравнение относительно $\dot{\psi}$:

$$\dot{\psi} = - \frac{\partial H(\psi, x, u)}{\partial x}. \quad (2.5)$$

Уравнения (2.4) — (2.5) образуют в совокупности гамильтонову систему с гамильтоновой функцией (2.1). Если $\psi(t)$, $x(t)$, $u(t)$ — произвольное решение уравнения (2.5), где $\psi(t) = (\psi_0(t), \dots, \psi_n(t))$, то $\psi_0 = \text{const}$, так как H не зависит от x^0 [см. (2.3)].

По аналогии с (2.3) введем обозначения:

$$\left. \begin{aligned} p(x, u) &= \sum_{\alpha=0}^n \frac{\partial g(x)}{\partial x^\alpha} f^\alpha(x, u) = \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial g(x)}{\partial x^\alpha} f^\alpha(x, u) = \\ &= \frac{\partial g(x)}{\partial x} \cdot \dot{f}(x, u), \\ \frac{\partial p(x, u)}{\partial x} &= \left(\frac{\partial p}{\partial x^0}, \frac{\partial p}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial p}{\partial x^n} \right) = \left(0, \frac{\partial p}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial p}{\partial x^n} \right), \\ \frac{\partial p(x, u)}{\partial u} &= \left(\frac{\partial p}{\partial u^1}, \dots, \frac{\partial p}{\partial u^r} \right), \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

где $g(x) = 0$ — уравнение границы области G (см. § 1, п. 3).

Для того чтобы траектория $x(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$, уравнения (1.5), соответствующая управлению $u(t)$, целиком лежала на границе $g(x) = 0$, необходимо и достаточно, чтобы

$$p(x(t), u(t)) = 0, \quad t_1 \leq t \leq t_2, \quad g(x(t_1)) = 0.$$

Точку $x_1 \in X^{n+1}$ назовем *регулярной относительно точки* $u_1 \in \Omega$, если выполняются следующие условия:

1. $p(x_1, u_1) = 0$;
2. $\frac{\partial p(x_1, u_1)}{\partial u} \neq 0$;

3. если u_1 — граничная точка множества Ω , то найдутся такие непрерывно дифференцируемые скалярные функции

$$q_i(u), \quad i = 1, \dots, s, \quad (2.7)$$

что множество Ω в окрестности точки u_1 задается системой неравенств

$$q_1(u) \leq 0, \dots, q_s(u) \leq 0,$$

а в самой точке u_1

$$q_1(u_1) = \dots = q_s(u_1) = 0 \quad (2.8)$$

и векторы

$$\frac{\partial p(x_1, u_1)}{\partial u}, \quad \frac{\partial q_1(u_1)}{\partial u} = \text{grad } q_1(u_1), \dots, \frac{\partial q_s(u_1)}{\partial u} = \text{grad } q_s(u_1) \quad (2.9)$$

независимы.

Условие 2 можно считать частным случаем условия 3, если в последнем полагать $s = 0$, когда u_1 есть внутренняя точка множества Ω . В дальнейшем мы так и будем поступать.

Геометрический смысл условия 3 заключается в том, что в окрестности точки u_1 множество Ω является замкнутой областью с кусочно-гладкой границей, причем $(r-1)$ -мерные грани области суть гладкие ги-

перповерхности пространства $\mathcal{E}^r$, находящиеся в общем положении в точке пересечения u_1 ; сама точка u_1 лежит на $(r-s)$ -мерном гладком «ребре» границы, определяемом как множество решений системы

$$q_1(u) = \dots = q_s(u) = 0, \quad (2.10)$$

лежащих вблизи точки u_1 . Это «ребро» находится в общем положении в точке u_1 с гладкой $(r-1)$ -мерной гиперповерхностью, заданной в окрестности точки u_1 уравнением $p(x_1, u) = 0$.

Хотя функции (2.7) и не определяются однозначно, из условия 3 следует, что $(r-s)$ -мерное «ребро» (2.10) и число s однозначно определены точкой u_1 .

З а м е ч а н и е. Пользуясь понятием регулярности, мы опишем сейчас одну простую конструкцию, которая нам понадобится в п. 4.

Пусть $R(x, u, \mu)$ — непрерывно дифференцируемая скалярная функция векторных аргументов x, u и скалярного параметра μ , и пусть $R(x, u, 0) = p(x, u)$.

Если точка x_1 регулярна относительно $u_1 \in \Omega$, то система

$$R(x, u, \mu) = q_1(u) = \dots = q_s(u) = 0$$

разрешима относительно некоторых $s+1$ координат вектора u вблизи точки $(x_1, u_1, \mu = 0)$, например относительно первых $s+1$ координат:

$$u^i = u^i(x, u^{s+2}, \dots, u^r, \mu), \quad i = 1, \dots, s+1, \quad 1 \leq s+1 \leq r,$$

где функции $u^i, i = 1, \dots, s+1$, непрерывно дифференцируемы по всем аргументам. Подставив эти функции в (1.5) вместо параметров $u^1, \dots, u^{s+1}$, получим:

$$\dot{x} = f(x, u^1(x, u^{s+2}, \dots, u^r, \mu), \dots, u^r) = f_1(x, u^{s+2}, \dots, u^r, \mu). \quad (2.11)$$

Пусть $u^{s+2}(t), \dots, u^r(t), \tau_1 \leq t \leq \tau_2$, — кусочно-непрерывные, кусочно-гладкие функции со значениями, лежащими вблизи соответствующих координат $u_1^{s+2}, \dots, u_1^r$ вектора u_1 . Подставим их в (2.11) и обозначим через $x(t) = x(t, \mu)$ решение полученного уравнения с начальным значением

$$x(t_1, \mu) = x_1.$$

Очевидно, решение $x(t)$ определено на всем отрезке $\tau_1 \leq t \leq \tau_2$ при достаточно малой длине отрезка $\tau_2 - \tau_1$, является траекторией уравнения (1.5), соответствующей допустимому управлению

$$u(t) = (u^1(x(t), u^{s+2}(t), \dots, u^r(t), \mu), \dots, u^r(t)), \quad \tau_1 \leq t \leq \tau_2,$$

и, кроме того, удовлетворяет уравнению

$$R(x(t), u(t), \mu) = 0, \quad \tau_1 \leq t \leq \tau_2.$$

Значения $u(t)$ лежат вблизи u_1 , значения $x(t)$ — вблизи x_1 .

Если точка x_1 лежит на границе $g(x) = 0$, то и траектория $x(t, 0)$, $\tau_1 \leq t \leq \tau_2$, лежит на границе, так как

$$p(x(t, 0)) = R(x(t, 0), u(t), 0) = 0.$$

Обозначим через $\omega(x)$ множество тех $u \in \Omega$, относительно которых точка x регулярна. Множество $\omega(x)$ может оказаться пустым.

Траекторию $x(t), t_1 \leq t \leq t_2$, уравнения (1.5), соответствующую управлению $u(t)$ и целиком лежащую на границе области G , назо-

вом *регулярной*, если $u(t) \in \omega(x(t))$ в каждой точке непрерывности t управления $u(t)$; если же t — точка разрыва управления, то требуется, чтобы

$$u(t \pm 0) \in \omega(x(t)).$$

Всякую оптимальную траекторию, лежащую на границе $g(x) = 0$ и являющуюся одновременно регулярной, будем называть *регулярной оптимальной траекторией*.

Для точек x , лежащих на границе $g(x) = 0$ области G , для которых $\omega(x)$ не пусто, определим величину $m(\psi, x)$ равенством

$$m(\psi, x) = \sup_{u \in \omega(x)} H(\psi, x, u). \quad (2.12)$$

Если x — регулярная точка границы $g(x) = 0$ относительно точки $u \in \Omega$ и в точке (ψ, x, u) , где вектор ψ произволен,

$$H(\psi, x, u) = m(\psi, x),$$

то, по правилу множителей Лагранжа, существуют такие действительные числа $\lambda, \nu_1, \dots, \nu_s$, что

$$\frac{\partial H(\psi, x, u)}{\partial u} = \lambda \frac{\partial p(x, u)}{\partial u} + \sum_{\alpha=1}^s \nu_{\alpha} \frac{\partial q_{\alpha}(u)}{\partial u}, \quad (2.13)$$

где $q_i(u)$, $i=1, \dots, s$, — функции (2.7), участвующие в определении понятия регулярности. Вообще говоря, одновременно все ν_i не обращаются в нуль, если u — граничная точка множества Ω ($s > 0$). Если u — внутренняя точка множества Ω ($s = 0$), то из (2.13) следует, что вектор $\frac{\partial H(\psi, x, u)}{\partial u}$ коллинеарен вектору $\frac{\partial p(x, u)}{\partial u}$.

2. ТЕОРЕМА 1. Пусть $x(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$, — регулярная оптимальная траектория уравнения (1.5), соответствующая оптимальному управлению $u(t)$ и целиком лежащая на границе области G . Тогда найдутся такая непрерывная ненулевая ковариантная векторная функция $\dot{\psi}(t) = (\dot{\psi}_0(t), \dots, \dot{\psi}_n(t))$, $t_1 \leq t \leq t_2$, и кусочно-непрерывная, кусочно-гладкая скалярная функция $\lambda(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$, что на отрезке $t_1 \leq t \leq t_2$ будут выполняться уравнения

$$\dot{x} = \frac{\partial H(\psi, x, u)}{\partial \psi} = f(x, u), \quad (2.14)$$

$$\dot{\psi} = -\frac{\partial H(\psi, x, u)}{\partial x} + \lambda(t) \frac{\partial p(x, u)}{\partial x}, \quad (2.15)$$

$$H(\psi(t), x(t), u(t)) = m(\psi(t), x(t)) = 0 \quad (2.16)$$

и условия:

- а) координата $\psi_0(t) = \text{const} \leq 0$;
- б) вектор $\dot{\psi}(t_1)$ не коллинеарен вектору нормали $\text{grad } g(x(t_1))$ к границе $g(x) = 0$ в точке $x(t_1)$;
- с) во всех точках дифференцируемости функции $\lambda(t)$ вектор

$$\frac{d\lambda(t)}{dt} \text{grad } g(x(t))$$

направлен внутрь области G или обращается в нуль; функция $\lambda(t)$ опре-

делается из условия максимума (2.16) как множитель Лагранжа при векторе $\frac{\partial p(\mathbf{x}, u)}{\partial u}$ в формуле (2.13).

Сделаем несколько принципиальных замечаний к сформулированной теореме.

З а м е ч а н и е 1. Равенство $\phi_0(t) = \text{const}$ является следствием независимости правой части уравнения (2.15) от x^0 .

Уравнения (2.14) — (2.16) и условие а) аналогичны принципу максимума. Условия б), с) специфичны для рассматриваемого случая и обсуждаются в замечаниях 4, 5.

З а м е ч а н и е 2. Остановимся подробнее на способе определения функции $\lambda(t)$ как множителя Лагранжа в формуле (2.13).

В теореме 1 утверждается возможность такого разбиения отрезка $t_1 \leq t \leq t_2$ на частичные отрезки, что для каждого частичного отрезка можно будет найти $s \geq 0$ дифференцируемых функций $q_i(u)$, $i = 1, \dots, s$, и s кусочно-непрерывных, кусочно-гладких функций $v_i(t)$, $i = 1, \dots, s$, определенных на рассматриваемом частичном отрезке и удовлетворяющих на этом отрезке равенству

$$\frac{\partial H(\Phi(t), \mathbf{x}(t), u(t))}{\partial u} = \lambda(t) \frac{\partial p(\mathbf{x}(t), u(t))}{\partial u} + \sum_{\alpha=1}^s v_{\alpha}(t) \frac{\partial q_{\alpha}(u(t))}{\partial u}.$$

Хотя разбиение отрезка $t_1 \leq t \leq t_2$ и функции q_i, v_i можно выбирать неоднозначно, функция $\lambda(t)$ определяется однозначно и $(r-s)$ -мерное «ребро» (2.10) определяется также однозначно.

З а м е ч а н и е 3. Если $\phi(t) \equiv 0$, $t_1 \leq t \leq t_2$, то соотношение (2.16) обращается в тождество и становится бессодержательным.

Мы покажем, что если $\phi(t_1) \neq 0$, то $\phi(t) \neq 0$ для любого t и, наоборот, из $\phi(t_1) = 0$ следует $\phi(t) \equiv 0$, $t_1 \leq t \leq t_2$.

Вдоль решения $u(t), \mathbf{x}(t), \phi(t)$ системы (2.14) — (2.16) уравнение (2.13) эквивалентно системе r линейных уравнений относительно $s+1 \leq r$ неизвестных $\lambda(t), v_1(t), \dots, v_s(t)$ с кусочно-непрерывными, кусочно-гладкими коэффициентами, матрица которой имеет ранг $s+1$. Следовательно, функцию $\lambda(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$, можно представить в виде

$$\lambda(t) = \sum_{\alpha=0}^n \phi_{\alpha}(t) a^{\alpha}(t) = \phi(t) \cdot \mathbf{a}(t),$$

где $\mathbf{a}(t) = (a^0(t), \dots, a^n(t))$ — кусочно-непрерывная, кусочно-гладкая контравариантная вектор-функция. Подставив это выражение для $\lambda(t)$ в (2.15), мы получим однородное линейное уравнение относительно $\phi(t)$, для которого справедлива теорема единственности, откуда и следует наше утверждение.

З а м е ч а н и е 4. Для выяснения смысла условия б) заметим, что система (2.14) — (2.16) имеет следующее тривиальное решение:

$$u(t), \mathbf{x}(t), \phi(t) = \mu \operatorname{grad} g(\mathbf{x}(t)), \quad \lambda(t) = \mu, \quad t_1 \leq t \leq t_2,$$

где μ — произвольное число. В этом легко убедиться непосредственной подстановкой.

Легко проверяется также, что если

$$u(t), x(t), \psi(t), \lambda(t)$$

— некоторое решение системы (2.14) — (2.16), то решением является и

$$u(t), x(t), \psi(t) + \mu \operatorname{grad} g(x(t)), \lambda(t) + \mu,$$

где μ — произвольное число.

Учитывая замечание 3, можно утверждать, что если

$$\psi(t_1) = \mu \operatorname{grad} g(x(t_1)),$$

то

$$\psi(t) \equiv \mu \operatorname{grad} g(x(t)), \quad t_1 \leq t \leq t_2,$$

т. е. $\psi(t)$ — тривиальное решение.

Замечание 5. Условие с) возникает вследствие того, что при выводе необходимых условий лежащая на границе $g(x) = 0$ оптимальная траектория сравнивается не только с соседними траекториями, также лежащими на границе, но и со всеми близкими траекториями, лежащими в замкнутой области G .

Для доказательства теоремы 1 нам понадобятся некоторые построения, описанию которых посвящены нижеследующие два пункта.

3. Некоторые основные построения. По аналогии с (2.3) и (2.6) введем обозначение

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \left\| \frac{\partial f^i}{\partial u^j} \right\|, \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, r,$$

и будем рассматривать эту матрицу как оператор из пространства контравариантных векторов $u = (u^1, \dots, u^r) \in \mathcal{E}^r$ в пространство контравариантных векторов $x = (x^0, x^1, \dots, x^n) \in X^{n+1}$, и одновременно как оператор из пространства ковариантных векторов $\psi = (\psi_0, \dots, \psi_n)$ пространства X^{n+1} в пространство ковариантных векторов пространства $\mathcal{E}^r$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial u} u &= \sum_{\alpha=1}^r \frac{\partial f}{\partial u^\alpha} u^\alpha = \left(\sum_{\alpha=1}^r \frac{\partial f^0}{\partial u^\alpha} u^\alpha, \dots, \sum_{\alpha=1}^r \frac{\partial f^n}{\partial u^\alpha} u^\alpha \right), \\ \frac{\partial f(x, u)}{\partial u} \psi &= \left(\sum_{\alpha=0}^n \frac{\partial f^\alpha}{\partial u^1} \psi_\alpha, \dots, \sum_{\alpha=0}^n \frac{\partial f^\alpha}{\partial u^r} \psi_\alpha \right) = \frac{\partial H(\psi, x, u)}{\partial u}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Пусть $\Lambda = (\lambda^0, \lambda^1, \dots, \lambda^n)$ — контравариантный вектор из X^{n+1} . Матрицы

$$\begin{aligned} \Lambda \frac{\partial p(x, u)}{\partial x} &= \left\| \lambda^i \frac{\partial p(x, u)}{\partial x^j} \right\|, \quad i, j = 0, \dots, n, \\ \Lambda \frac{\partial p(x, u)}{\partial u} &= \left\| \lambda^i \frac{\partial p(x, u)}{\partial u^j} \right\|, \quad i = 0, \dots, n, \quad j = 1, \dots, r, \end{aligned}$$

также будем рассматривать как операторы, действующие на векторы ψ, x, u по формулам:

$$\left. \begin{aligned} \left(\Lambda \frac{\partial p}{\partial x} \right) \psi &= \frac{\partial p}{\partial x} (\Lambda \cdot \psi) = \frac{\partial p}{\partial x} \sum_{\alpha=0}^n \psi_\alpha \lambda^\alpha, \\ \left(\Lambda \frac{\partial p}{\partial x} \right) x &= \Lambda \left(\frac{\partial p}{\partial x} \cdot x \right) = \Lambda \sum_{\alpha=0}^n \frac{\partial p}{\partial x^\alpha} x^\alpha, \\ \left(\Lambda \frac{\partial p}{\partial u} \right) u &= \Lambda \left(\frac{\partial p}{\partial u} \cdot u \right) = \Lambda \sum_{\alpha=1}^r \frac{\partial p}{\partial u^\alpha} u^\alpha. \end{aligned} \right\} \quad (2.18)$$

В этом и в следующем пунктах $\mathbf{x}(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$, — произвольная регулярная траектория уравнения (1.5), соответствующая управлению $u(t)$ и лежащая на границе $g(\mathbf{x}) = 0$ области G . В п.5 мы будем предполагать, что $u(t)$, $\mathbf{x}(t)$ оптимальны.

Приступаем к построению скалярной функции $R(\mathbf{x}, u, \mu)$ (формула (2.21)), играющей основную роль при доказательстве теоремы 1.

А) Построение функции $R(\mathbf{x}, u, \mu)$. Зафиксируем $s \geq 0$ точек ζ_i , $i = 1, \dots, s$, на траектории $\mathbf{x}(t)$, ни одна из которых не совпадает с концом траектории $\mathbf{x}(t_2)$; равенства $\zeta_i = \mathbf{x}(t_1)$ и $\zeta_i = \zeta_j$ при $i \neq j$ возможны. Через $\mathbf{N}_i$ обозначим вектор, не касательный к границе $g(\mathbf{x}) = 0$ в точке ζ_i и направленный наружу от G ; в остальном вектор $\mathbf{N}_i$ произволен. Так как область G задается неравенством $g(\mathbf{x}) \leq 0$, то

$$\text{grad } g(\zeta_i) \cdot \mathbf{N}_i > 0.$$

Пусть O_{ζ_i} — произвольная достаточно малая окрестность точки ζ_i в X^{n+1} , замыкание которой не содержит конца $\mathbf{x}(t_2)$; единственное дополнительное требование, накладываемое на O_{ζ_i} , заключается в том, что при $\zeta_i \neq \mathbf{x}(t_1)$ замыкание окрестности O_{ζ_i} не содержит также точки $\mathbf{x}(t_1)$ «Достаточная малость» окрестности характеризуется тем, что

$$\frac{\partial g(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{N}_i \geq c > 0 \text{ при } \mathbf{x} \in O_{\zeta_i}, \quad i = 1, \dots, s.$$

Через $a_i(\mathbf{x})$, $i = 1, \dots, s$, обозначим дифференцируемую скалярную функцию, удовлетворяющую условиям: $a_i(\mathbf{x}) = 1$ в некоторой окрестности точки ζ_i , содержащейся в O_{ζ_i} , $a_i(\mathbf{x}) > 0$ при $\mathbf{x} \in O_{\zeta_i}$, $a_i(\mathbf{x}) = 0$ вне O_{ζ_i} .

Введем скалярную функцию

$$h(\mathbf{x}, \mu) = g\left(\mathbf{x} + \mu \sum_{i=1}^s a_i(\mathbf{x}) \mathbf{N}_i\right), \quad (2.19)$$

где μ — скалярный параметр.

Функция $h(\mathbf{x}, \mu)$ зависит от элементов $a_i(\mathbf{x})$, $\mathbf{N}_i$, участвующих в ее построении, поэтому мы будем говорить о функциях вида (2.19).

Очевидно, если $\mu \geq 0$ достаточно мало и точка $\mathbf{x}$, лежащая вблизи границы области G , удовлетворяет уравнению

$$h(\mathbf{x}, \mu) = 0,$$

то $\mathbf{x} \in G$. Если, кроме того, $\mathbf{x}$ не принадлежит объединению окрестностей O_{ζ_i} или $\mu = 0$, то $\mathbf{x}$ лежит на границе $g(\mathbf{x}) = 0$.

Пусть $h_1(\mathbf{x}, \mu)$, $h_2(\mathbf{x}, \mu)$ — функции вида (2.19), $a_i(\mathbf{x})$, $\mathbf{N}_i$, $i = 1, \dots, r$, — элементы, участвующие в построении функции $h_1(\mathbf{x}, \mu)$, $a_j(\mathbf{x})$, $\mathbf{N}_j$, $j = r + 1, \dots, r + s$, — элементы, участвующие в построении функции $h_2(\mathbf{x}, \mu)$. Через

$$h_1(\mathbf{x}, \mu) \oplus h_2(\mathbf{x}, \mu)$$

обозначим функцию вида (2.19), определенную равенством

$$h_1(\mathbf{x}, \mu) \oplus h_2(\mathbf{x}, \mu) = g\left(\mathbf{x} + \mu \sum_{i=1}^{r+s} a_i(\mathbf{x}) \mathbf{N}_i\right). \quad (2.20)$$

Функцию $R(x, u, \mu)$ определим равенством

$$R(x, u, \mu) = \sum_{\alpha=0}^n \frac{\partial h(x, \mu)}{\partial x^\alpha} f^\alpha(x, u) = \frac{\partial h(x, \mu)}{\partial x} \cdot f(x, u). \quad (2.21)$$

При $\mu = 0$ из (2.6) следует:

$$R(x, u, 0) = \frac{\partial g(x)}{\partial x} \cdot f(x, u) = p(x, u). \quad (2.22)$$

В соответствии с (2.20) определяем

$$R_1(x, u, \mu) \oplus R_2(x, u, \mu) = \frac{\partial}{\partial x} [h_1(x, u, \mu) \oplus h_2(x, u, \mu)] \cdot f(x, u). \quad (2.23)$$

В дальнейшем параметр μ будет принимать близкие к нулю значения. Поэтому вместо μ будем писать $\varepsilon\delta\mu$, где ε — всюду в дальнейшем положительная бесконечно малая величина. Случаи, когда ε может равняться нулю, будут оговариваться особо. Через $o(\varepsilon)$ будем обозначать величину более высокого порядка, чем ε :

$$\frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon} \rightarrow 0 \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Пусть функции $v(t)$, $y(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$, где $v(t)$ — допустимое управление, $y(t)$ — непрерывная функция, удовлетворяют системе

$$\begin{aligned} \dot{y} &= f(y, v), \\ R(y, v, \varepsilon\delta\mu) &= 0. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Если $\varepsilon\delta\mu \geq 0$, $y(t)$ лежит достаточно близко от $x(t)$ и $h(y(t_1), \varepsilon\delta\mu) = 0$, то $y(t) \in G$ при любом t , так как

$$\frac{dh(y(t), \varepsilon\delta\mu)}{dt} = R(y(t), v(t), \varepsilon\delta\mu) = 0.$$

Управление $u(t)$ и траектория $x(t)$ удовлетворяют системе (2.24) при $\delta\mu = 0$.

При доказательстве теоремы 1 следует варьировать траекторию $x(t)$ таким образом, чтобы проварьированная траектория не выходила из области G . Для этой цели мы введем сейчас понятие уравнения в вариациях для системы (2.24).

Заметим, что формулой (2.24) определяется не одна система, а целое семейство систем, зависящих от выбора функции R вида (2.21).

В) Уравнение в вариациях для системы (2.24).

ЛЕММА 1. Существует такая кусочно-непрерывная, кусочно-гладкая контравариантная векторная функция

$$\Lambda(t) = (\lambda^0(t), \dots, \lambda^n(t)), \quad t_1 \leq t \leq t_2,$$

зависящая только от функций $u(t)$, $x(t)$ (u , следовательно, не зависящая от вида функции R), что для любого вектора $\delta x_1 \in X^{n+1}$ и любого значения параметра $\delta\mu$ можно построить решение $v(t)$, $y(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$, системы (2.24), удовлетворяющее начальному значению

$$y(t_1) = x(t_1) + \varepsilon\delta x_1 + o(\varepsilon) \quad (2.25)$$

и представимое на отрезке $t_1 \leq t \leq t_2$ в виде

$$v(t) = u(t) + \varepsilon\delta u(t) + o(\varepsilon), \quad (2.26)$$

$$y(t) = x(t) + \varepsilon\delta x(t) + o(\varepsilon). \quad (2.27)$$

где кусочно-непрерывная, кусочно-гладкая функция $\delta u(t)$ и непрерывная функция $\delta x(t)$ не зависят от ε и, кроме того, функция $\delta u(t)$ удовлетворяет на отрезке $t_1 \leq t \leq t_2$ уравнению

$$\left(\frac{\partial f(x(t), u(t))}{\partial u} + \Lambda(t) \frac{\partial p(x(t), u(t))}{\partial u} \right) \delta u(t) = 0. \quad (2.28)$$

Доказательство. Отрезок $t_1 \leq t \leq t_2$ подразделим точками

$$t_1 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_k < \tau_{k+1} = t_2$$

на частичные отрезки $\tau_i \leq t \leq \tau_{i+1}$, $i = 0, 1, \dots, k$, достаточно малой длины. Выберем точки τ_i так, чтобы среди них содержались все точки разрыва управления $u(t)$ и ее производной на отрезке $t_1 \leq t \leq t_2$. «Достаточная малость» длин частичных отрезков характеризуется требованием выполнимости всех описанных ниже построений. Из регулярности траектории $x(t)$ непосредственно следует, что при заданных δx_1 , $\delta \mu$ и достаточно малом ε такой выбор точек деления (естественно, неоднозначный) всегда возможен.

Допустим, что решение $v(t)$, $y(t)$ системы (2.24), представимое в виде (2.26) — (2.27) и удовлетворяющее начальному условию (2.25), уже построено на отрезке $t_1 \leq t \leq \tau_i$, $i \geq 0$. Продолжим это решение на отрезок $\tau_i \leq t \leq \tau_{i+1}$, сохранив непрерывность траектории $y(t)$ и свойства, выраженные в равенствах (2.26), (2.27).

Точка $x(\tau_i)$ регулярна относительно точки $u(\tau_i + 0)$. Соответствующие функции (2.7), участвующие в определении регулярности, обозначим через

$$q_i(u), \quad i = 1, \dots, s \quad (s \geq 0).$$

В силу (2.22) и малости отрезка $\tau_i \leq t \leq \tau_{i+1}$, векторы

$$\frac{\partial R(x(t), u(t), \varepsilon \delta \mu)}{\partial u}, \quad \frac{\partial q_1(u(t))}{\partial u}, \dots, \frac{\partial q_s(u(t))}{\partial u}, \quad \tau_i \leq t \leq \tau_{i+1},$$

независимы (при достаточно малом ε). Пусть, например,

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial R}{\partial u^1}, & \frac{\partial q_1}{\partial u^1}, & \dots, & \frac{\partial q_s}{\partial u^1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial R}{\partial u^{s+1}}, & \frac{\partial q_1}{\partial u^{s+1}}, & \dots, & \frac{\partial q_s}{\partial u^{s+1}} \end{vmatrix} \neq 0. \quad (2.29)$$

Тогда в окрестности точки $(\tau_i, u(\tau_i), x(\tau_i), \varepsilon \delta \mu = 0)$ система

$$R(y, v, \varepsilon \delta \mu) = \sigma_1(v, t) = \dots = \sigma_s(v, t) = 0, \quad (2.30)$$

где

$$\sigma_\alpha(v, t) = q_\alpha(v) - q_\alpha(u(t)), \quad \alpha = 1, \dots, s.$$

однозначно разрешима относительно $s+1$ переменных $v^1, \dots, v^{s+1}$:

$$v^\alpha = v^\alpha(y, v^{s+2}, \dots, v^r, \varepsilon \delta \mu, t), \quad \alpha = 1, \dots, s+1, \quad (2.31)$$

причем v^α — непрерывно дифференцируемые функции.

Подставив в функции (2.31) вместо $v^{s+2}, \dots, v^r$ соответственно

$u^{s+2}(t), \dots, u^r(t)$, получим $s+1$ функций $[v^\alpha(y, \varepsilon\delta\mu, t), \alpha = 1, \dots, s+1]$. Определим векторную функцию $v(y, \varepsilon\delta\mu, t)$ равенством

$$v(y, \varepsilon\delta\mu, t) = (v^1(y, \varepsilon\delta\mu, t), \dots, v^{s+1}(y, \varepsilon\delta\mu, t), u^{s+2}(t), \dots, u^r(t)) \quad (2.32)$$

и подставим в уравнение

$$\dot{y} = f(y, v)$$

вместо v функцию (2.32). Взяв решение полученного дифференциального уравнения на отрезке $\tau_i \leq t \leq \tau_{i+1}$ с уже имеющимся начальным значением $y(\tau_i)$, мы получим требуемое продолжение решения $y(t)$.

Продолжением функции $v(t)$ на полуинтервал $\tau_i < t \leq \tau_{i+1}$ служит функция

$$v(t) = v(y(t), \varepsilon\delta\mu, t), \quad \tau_i < t \leq \tau_{i+1}, \quad (2.33)$$

которая получается подстановкой в (2.32) вместо y продолжения $y(t)$, $\tau_i < t \leq \tau_{i+1}$.

Свойства, выраженные в равенствах (2.26) — (2.27), проверяются для функций $v(t)$, $y(t)$, $\tau_i \leq t \leq \tau_{i+1}$, непосредственно. Допустимость управления $v(t)$ следует из равенств (2.30); в самом деле, для любого $\alpha = 1, \dots, s$ имеем:

$$\sigma_\alpha(v(t), t) = q_\alpha(v(t)) - q_\alpha(u(t)) = 0,$$

т. е.

$$q_\alpha(v(t)) = q_\alpha(u(t)) \leq 0 \quad \text{при } \tau_i < t \leq \tau_{i+1}.$$

Из нашего построения вытекает дополнительно следующий факт. Независимо от начального значения (2.25) и величины $\delta\mu$, продолжение (2.33) на полуинтервале $\tau_i < t \leq \tau_{i+1}$ имеет вид

$$v(t) = u(t) + \varepsilon\delta u(t) + o(\varepsilon),$$

где

$$\delta u(t) = (\delta u^1(t), \dots, \delta u^{s+1}(t), 0, \dots, 0). \quad (2.34)$$

Остается определить функцию $\Lambda(t)$ и доказать равенство (2.28). Мы предположим функцию $\Lambda(t)$ определенной на отрезке $t_1 \leq t \leq \tau_i$ и определим ее на полуинтервале $\tau_i < t \leq \tau_{i+1}$.

Для каждого j , $j = 0, \dots, n$, определим на полуинтервале $\tau_i < t \leq \tau_{i+1}$ $s+1$ непрерывных гладких функций $\lambda^j(t)$, $l_\beta^j(t)$, $\beta = 1, \dots, s$, как решение линейной системы

$$\frac{\partial f^j(x(t), u(t))}{\partial u^\alpha} + \lambda^j(t) \frac{\partial p(x(t), u(t))}{\partial u^\alpha} + \sum_{\beta=1}^s l_\beta^j(t) \frac{\partial q_\beta(u(t))}{\partial u^\alpha} = 0 \quad (\alpha = 1, \dots, s+1), \quad (2.35)$$

которая разрешима, так как ее определитель совпадает с определителем (2.29) при $\varepsilon\delta\mu = 0$. Свертывая эти равенства по α с координатами $\delta u^\alpha(t)$ вектора (2.34), получим:

$$\begin{aligned} & \sum_{\alpha=1}^r \left(\frac{\partial f^j}{\partial u^\alpha} + \lambda^j(t) \frac{\partial p}{\partial u^\alpha} + \sum_{\beta=1}^s l_\beta^j(t) \frac{\partial q_\beta}{\partial u^\alpha} \right) \delta u^\alpha(t) = \\ & = \left(\frac{\partial f^j}{\partial u} + \lambda^j(t) \frac{\partial p}{\partial u} + \sum_{\beta=1}^s l_\beta^j(t) \frac{\partial q_\beta}{\partial u} \right) \delta u(t) = 0, \quad j = 0, \dots, n. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Если определить контравариантные векторные функции $\Lambda(t)$, $L_\beta(t)$ на полуинтервале $\tau_i < t \leq \tau_{i+1}$ равенствами

$$\Lambda(t) = (\lambda^0(t), \dots, \lambda^n(t)),$$

$$L_\beta(t) = (l_\beta^0(t), \dots, l_\beta^n(t)),$$

то соотношение (2.36) можно переписать в виде (см. формулы (2.18)):

$$\left(\frac{\partial f}{\partial u} + \Lambda(t) \frac{\partial p}{\partial u} + \sum_{\alpha=1}^s L_\alpha(t) \frac{\partial q_\alpha}{\partial u} \right) \delta u(t) = 0. \quad (2.37)$$

В силу (2.30) функция $v(t) = u(t) + \varepsilon \delta u(t) + o(\varepsilon)$ удовлетворяет равенствам

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha(v(t), t) &= \sigma_\alpha(u(t) + \varepsilon \delta u(t) + o(\varepsilon), t) = \\ &= \sigma_\alpha(u(t), t) + \varepsilon \frac{\partial \sigma_\alpha(u(t), t)}{\partial v} \delta u(t) + o(\varepsilon) = 0, \quad \alpha = 1, \dots, s. \end{aligned}$$

Но

$$\sigma_\alpha(u(t), t) = q_\alpha(u(t)) - q_\alpha(u(t)) = 0,$$

$$\frac{\partial \sigma_\alpha(u(t), t)}{\partial v} = \frac{\partial q_\alpha(u(t))}{\partial u},$$

следовательно,

$$\frac{\partial q_\alpha(u(t))}{\partial u} \delta u(t) = 0, \quad \alpha = 1, \dots, s,$$

и, значит, равенство (2.37) эквивалентно равенству

$$\left(\frac{\partial f}{\partial u} + \Lambda(t) \frac{\partial p}{\partial u} \right) \delta u(t) = 0,$$

которое совпадает с (2.28).

Таким образом, лемма 1 полностью доказана.

Подставив выражения (2.26), (2.27) в систему (2.24) и приравняв члены при ε , получим:

$$\delta \dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial f(\mathbf{x}(t), u(t))}{\partial \mathbf{x}} \delta \mathbf{x} + \frac{\partial f(\mathbf{x}(t), u(t))}{\partial u} \delta u,$$

$$\frac{\partial p(\mathbf{x}(t), u(t))}{\partial \mathbf{x}} \delta \mathbf{x} + \frac{\partial p(\mathbf{x}(t), u(t))}{\partial u} \delta u + \frac{\partial R(\mathbf{x}(t), u(t), 0)}{\partial \mu} \delta \mu = 0.$$

Умножая второе уравнение на $\Lambda(t)$, складывая с первым и учитывая равенство (2.28), найдем:

$$\delta \dot{\mathbf{x}} = \left(\frac{\partial f(\mathbf{x}(t), u(t))}{\partial \mathbf{x}} + \Lambda(t) \frac{\partial p(\mathbf{x}(t), u(t))}{\partial \mathbf{x}} \right) \delta \mathbf{x} + \Lambda(t) \frac{\partial R(\mathbf{x}(t), u(t), 0)}{\partial \mu} \delta \mu. \quad (2.38)$$

Полученное линейное неоднородное уравнение относительно $\delta \mathbf{x}$ назовем *уравнением в вариациях для системы* (2.24). Оно не зависит от $\delta u(t)$ (что очень важно для дальнейшего!), и ему удовлетворяет главная часть приращения варьированной траектории, построенной указанным выше стандартным способом (по заданному вектору $\delta \mathbf{x}_1$ и заданному значению $\delta \mu$).

Функция $\delta \mathbf{x}(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$, однозначно определяется уравнением в вариациях (2.38) и начальным значением $\delta \mathbf{x}_1 = \delta \mathbf{x}(t_1)$. Поэтому будем

говорить, что $\delta \mathbf{x}(t)$ является *перенесением вектора* $\delta \mathbf{x}_1 = \delta \mathbf{x}(t_1)$, заданного в точке $\mathbf{x}(t_1)$, вдоль траектории $\mathbf{x}(t)$, и введем для операции перенесения, зависящей от параметра $\delta \mu$, обозначение

$$\delta \mathbf{x}(t) = P_{t t_1}(\delta \mu) \delta \mathbf{x}_1 = P_{t \tau}(\delta \mu) \delta \mathbf{x}(\tau), \quad \tau \leq t.$$

Следующие формулы очевидны:

$$\begin{aligned} P_{t t_1}(\gamma \delta \mu) \delta \mathbf{x} &= \gamma P_{t t_1}(\delta \mu) \delta \mathbf{x}, \quad P_{t t_1}(\delta \mu) \delta \mathbf{x} = P_{t \tau}(\delta \mu) P_{\tau t_1}(\delta \mu) \delta \mathbf{x}, \\ P_{t t_1}(\delta \mu_1 + \delta \mu_2)(\delta \mathbf{x}_1 + \delta \mathbf{x}_2) &= P_{t t_1}(\delta \mu_1) \delta \mathbf{x}_1 + P_{t t_1}(\delta \mu_2) \delta \mathbf{x}_2. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Обозначим через $T(\mathbf{x}(t))$ касательную плоскость к границе $g(\mathbf{x}) = 0$ в точке $\mathbf{x}(t)$. Если $\mathbf{x}(t)$ не принадлежит объединению окрестностей O_{ζ_i} , участвующих в определении функций R [см. п. 3, А)], то, очевидно,

$$\delta \mathbf{x}(t) = P_{t t_1}(\delta \mu) \delta \mathbf{x}_1 \in T(\mathbf{x}(t)).$$

В частности, всегда

$$\delta \mathbf{x}(t_2) \in T(\mathbf{x}(t_2)).$$

При $\delta \mu = 0$ уравнение (2.38) превращается в однородное уравнение

$$\dot{\delta \mathbf{x}} = \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} + \Lambda \frac{\partial p}{\partial \mathbf{x}} \right) \delta \mathbf{x}. \quad (2.40)$$

Наряду с однородным уравнением (2.40) рассмотрим сопряженное с ним уравнение

$$\dot{\psi} = - \left(\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), u(t))}{\partial \mathbf{x}} + \Lambda(t) \frac{\partial p(\mathbf{x}(t), u(t))}{\partial \mathbf{x}} \right) \psi. \quad (2.41)$$

Если $\delta \mathbf{x}(t)$, $\psi(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$, — произвольные непрерывные решения соответственно уравнений (2.40), (2.41), то

$$\psi(t) \cdot \delta \mathbf{x}(t) = \text{const}, \quad (2.42)$$

так как

$$\frac{d}{dt} (\psi \delta \mathbf{x}) = - \left[\left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} + \Lambda \frac{\partial p}{\partial \mathbf{x}} \right) \psi \right] \cdot \delta \mathbf{x} + \psi \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} + \Lambda \frac{\partial p}{\partial \mathbf{x}} \right) \delta \mathbf{x} = 0$$

[см. формулы (2.18)].

Обозначим фундаментальную систему решений уравнения (2.40) через

$$\varphi_0(t), \dots, \varphi_n(t),$$

а сопряженную с ней систему решений уравнения (2.41) — через

$$\psi^0(t), \dots, \psi^n(t).$$

Мы имеем:

$$\psi^i(t) \cdot \varphi_j(t) = \delta_j^i.$$

Решение $\delta \mathbf{x}(t)$ неоднородного уравнения (2.38), удовлетворяющее начальному условию

$$\delta \mathbf{x}(t_1) = \sum_{\alpha=0}^n \varphi_{\alpha}(t_1) \delta x^{\alpha}(t_1),$$

запишется в виде

$$\delta \mathbf{x}(t) = P_{t t_1}(\delta \mu) \delta \mathbf{x}(t_1) = \sum_{\alpha=0}^n \varphi_{\alpha}(t) \left(\delta x^{\alpha}(t_1) + \int_{t_1}^t \psi^{\alpha}(\theta) \Lambda(\theta) \frac{\partial R}{\partial \mu} \delta \mu d\theta \right). \quad (2.43)$$

С) Вычисление производной $\frac{\partial R(\mathbf{x}(t), u(t), 0)}{\partial \mu}$. Мы имеем:

$$\begin{aligned} h(\mathbf{x}, \mu) &= g\left(\mathbf{x} + \mu \sum_{i=1}^s a_i(\mathbf{x}) \mathbf{N}_i\right) = \\ &= g\left(x^0 + \mu \sum_{i=1}^s a_i(\mathbf{x}) N_i^0, \dots, x^n + \mu \sum_{i=1}^s a_i(\mathbf{x}) N_i^n\right), \end{aligned}$$

где $\mathbf{N} = (N^0, \dots, N^n)$. Введем обозначение

$$\eta^\alpha = x^\alpha + \mu \sum_{i=1}^s a_i(\mathbf{x}) N_i^\alpha, \quad \boldsymbol{\eta} = (\eta^0, \dots, \eta^n).$$

Тогда

$$\begin{aligned} R(\mathbf{x}, u, \mu) &= \sum_{\alpha, \beta=0}^n \frac{\partial g(\boldsymbol{\eta})}{\partial \eta^\alpha} \frac{\partial \eta^\alpha}{\partial x^\beta} f^\beta(\mathbf{x}, u) = \sum_{\alpha=0}^n \frac{\partial g(\boldsymbol{\eta})}{\partial \eta^\alpha} \cdot f^\alpha(\mathbf{x}, u) + \\ &+ \mu \sum_{\alpha, \beta=0}^n \sum_{i=1}^s \frac{\partial g(\boldsymbol{\eta})}{\partial \eta^\alpha} \frac{\partial a_i(\mathbf{x})}{\partial x^\beta} N_i^\alpha f^\beta(\mathbf{x}, u) = \frac{\partial g(\boldsymbol{\eta})}{\partial \boldsymbol{\eta}} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}, u) + \\ &+ \mu \sum_{i=1}^s \left(\frac{\partial g(\boldsymbol{\eta})}{\partial \boldsymbol{\eta}} \cdot \mathbf{N}_i \right) \left(\frac{\partial a_i(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}, u) \right). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{\partial R(\mathbf{x}, u, 0)}{\partial \mu} &= \left(\sum_{\alpha, \beta=0}^n \frac{\partial^2 g(\boldsymbol{\eta})}{\partial \eta^\alpha \partial \eta^\beta} f^\alpha(\mathbf{x}, u) \sum_{i=1}^s a_i(\mathbf{x}) N_i^\beta \right)_{\mu=0} + \\ &+ \sum_{i=1}^s \left(\frac{\partial g(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{N}_i \right) \left(\frac{\partial a_i(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}, u) \right) = \\ &= \sum_{i=1}^s \sum_{\alpha, \beta=0}^n a_i(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 g(\mathbf{x})}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} f^\alpha(\mathbf{x}, u) N_i^\beta + \sum_{i=1}^s \left(\frac{\partial g(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{N}_i \right) \left(\frac{\partial a_i(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}, u) \right) = \\ &= \sum_{i=1}^s \frac{d}{dt} \left[a_i(\mathbf{x}(t)) \left(\frac{\partial g(\mathbf{x}(t))}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{N}_i \right) \right]. \end{aligned}$$

Итак,

$$\frac{\partial R(\mathbf{x}(t), u(t), 0)}{\partial \mu} = \sum_{i=1}^s \frac{d}{dt} \left[a_i(\mathbf{x}(t)) \left(\frac{\partial g(\mathbf{x}(t))}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{N}_i \right) \right]. \quad (2.44)$$

Из формул (2.23), (2.20) вытекает, что

$$\frac{\partial}{\partial \mu} (R_1(\mathbf{x}, u, \mu) \oplus R_2(\mathbf{x}, u, \mu))_{\mu=0} = \frac{\partial R_1(\mathbf{x}, u, 0)}{\partial \mu} + \frac{\partial R_2(\mathbf{x}, u, 0)}{\partial \mu}, \quad (2.45)$$

где $+$ в правой части обозначает обычное сложение.

4. Определение варьированных управлений и траекторий. Построение конусов $K, \mathbf{k}$. Конец $\mathbf{x}(t_2)$ траектории $\mathbf{x}(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$, по условию, регулярен относительно точки $u(t_2) = u(t_2 - 0)$. Поэтому управление $u(t)$ можно непрерывно и гладко продолжить несколько дальше за точку t_2 таким образом, чтобы соответствующее

непрерывное и регулярное продолжение траектории $\mathbf{x}(t)$ не сходило с границы $g(\mathbf{x}) = 0$ (см. замечание к определению регулярности, п. 1) Будем считать, что управление $u(t)$ и траектория $\mathbf{x}(t)$ определены на отрезке $t_1 \leq t \leq t_2 + \varepsilon\rho$, где ρ — любое действительное число, что они удовлетворяют системе (2.24) при $\delta\mu = 0$ и что управление $u(t)$ непрерывно в точке t_2 .

Мы построим семейство Φ допустимых управлений $v(t)$, определенных на отрезке $t_1 \leq t \leq t_2 + \varepsilon\rho$, которые будем называть *вариациями управления* $u(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2 + \varepsilon\rho$, и определим две операции: операцию умножения неотрицательного числа $\gamma \geq 0$ на элемент $v(t) \in \Phi$, $t_1 \leq t \leq t_2 + \varepsilon\rho$, переводящую v в элемент

$$\gamma \otimes v \in \Phi, \quad t_1 \leq t \leq t_2 + \varepsilon\gamma\rho,$$

и операцию суммы двух элементов $v_i(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2 + \varepsilon\rho_i$, $i = 1, 2$.

$$v_1 \oplus v_2 = v(t) \in \Phi, \quad t_1 \leq t \leq t_2 + \varepsilon(\rho_1 + \rho_2).$$

Обозначения $\otimes$, $\oplus$ подчеркивают, что определяемые операции не совпадают с операциями умножения на число и сложения в векторном пространстве $\mathcal{G}^r$.

Семейство Φ обладает следующими свойствами. Пусть заданы управление $v(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2 + \varepsilon\rho$, неотрицательный параметр $\delta\mu \geq 0$, функция вида (2.21)

$$R(\mathbf{y}, v, \varepsilon\delta\mu) = \frac{\partial h(\mathbf{y}, \varepsilon\delta\mu)}{\partial \mathbf{y}} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{y}, v) = \frac{\partial g(\mathbf{y} + \varepsilon\delta\mu \sum_{i=1}^s a_i(\mathbf{y}) \mathbf{N}_i)}{\partial \mathbf{y}} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{y}, v)$$

и начальное значение

$$\mathbf{y}(t_1) = \mathbf{x}(t_1) + \varepsilon\delta\mathbf{x}_1, \quad (2.46)$$

где

$$\delta\mathbf{x}_1 = -\delta\mu \sum_{i=1}^s a_i(\mathbf{y}(t_1)) \mathbf{N}_i. \quad (2.47)$$

Тогда

$$h(\mathbf{y}(t_1)) = g(\mathbf{x}(t_1) + \varepsilon\delta\mathbf{x}_1 + \varepsilon\delta\mu \sum_{i=1}^s a_i(\mathbf{y}(t_1)) \mathbf{N}_i) = g(\mathbf{x}(t_1)) = 0. \quad (2.48)$$

Равенство (2.47) эквивалентно (для малых ε) равенству

$$\delta\mathbf{x}_1 = -\delta\mu \sum_{i=1}^s a_i(\mathbf{x}(t_1)) \mathbf{N}_i, \quad (2.49)$$

так как, по условию [см. п. 3, А)],

$$a_i(\mathbf{y}(t_1)) = a_i(\mathbf{x}(t_1)) = 0$$

при $\zeta_i \neq \mathbf{x}(t_1)$ и

$$a_i(\mathbf{y}(t_1)) = a_i(\mathbf{x}(t_1)) = 1$$

при $\zeta_i = \mathbf{x}(t_1)$.

По перечисленным параметрам

$$v, R, \delta\mathbf{x}_1, \rho, \delta\mu \quad (2.50)$$

и по числу $\varepsilon > 0$ однозначно определяется *варьируемая траектория*

$$y(t) = y(t; v, R, \delta x_1, \rho, \delta \mu, \varepsilon), \quad t_1 \leq t \leq t_2 + \varepsilon \rho, \quad (2.51)$$

удовлетворяющая начальному условию (2.46); пара $v(t)$, $y(t)$ есть решение системы (2.24) и потому траектория $y(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2 + \varepsilon \rho$, целиком лежит в замкнутой области G [см. п. 3, А)].

Для конечной точки $y(t_2 + \varepsilon \rho)$ имеет место представление

$$y(t_2 + \varepsilon \rho) = x(t_2) + \varepsilon \delta(v, R, \delta x_1, \rho, \delta \mu) + o(\varepsilon), \quad (2.52)$$

где вектор δ , конструкция которого описана ниже, не зависит от ε и лежит в $T(x(t_2))$ — касательной плоскости к границе $g(x) = 0$ в точке $x(t_2)$:

$$\delta(v, R, \delta x_1, \rho, \delta \mu) \in T(x(t_2)). \quad (2.53)$$

Далее оказывается, что вектор δ линеен относительно своих аргументов в следующем смысле. Если

$$y_i(t) = y_i(t; v_i, R_i, \delta x_i, \rho_i, \delta \mu_i, \varepsilon), \quad t_1 \leq t \leq t_2 + \varepsilon \rho_i, \quad i = 1, 2,$$

— две варьируемые траектории, а γ_1 , γ_2 — неотрицательные числа, то управлению

$$v(t) = (\gamma_1 \otimes v_1) \oplus (\gamma_2 \otimes v_2), \quad t_1 \leq t \leq t_2 + \varepsilon(\gamma_1 \rho_1 + \gamma_2 \rho_2) = t_2 + \varepsilon \rho,$$

и выписанному значению параметров

$$R = R_1 \oplus R_2, \quad \delta x = \gamma_1 \delta x_1 + \gamma_2 \delta x_2, \quad \rho = \gamma_1 \rho_1 + \gamma_2 \rho_2, \quad \delta \mu = \gamma_1 \delta \mu_1 + \gamma_2 \delta \mu_2$$

соответствует варьируемая траектория

$$y(t) = y(t; v, R, \delta x, \rho, \delta \mu, \varepsilon), \quad t_1 \leq t \leq t_2 + \varepsilon \rho,$$

с конечным значением (2.52), где

$$\delta(v, R, \delta x, \rho, \delta \mu) = \sum_{\alpha=1}^2 \gamma_\alpha \delta(v_\alpha, R_\alpha, \delta x_\alpha, \rho_\alpha, \delta \mu_\alpha). \quad (2.54)$$

Из формул (2.53), (2.54) следует, что множество всевозможных векторов вида

$$x(t_2) + \delta(v, R, \delta x, \rho, \delta \mu)$$

есть выпуклый конус K пространства X^{n+1} с вершиной в точке $x(t_2)$, лежащий в $T(x(t_2))$:

$$K = \{x(t_2) + \delta(v, R, \delta x, \rho, \delta \mu)\} \subset T(x(t_2)). \quad (2.55)$$

На свойствах этого конуса основаны доказательства теорем 1 и 2 настоящей работы.

В настоящем параграфе нам понадобится только подконус $k \subset K$, который определяется тем условием, что начальное смещение варьируемой траектории равно нулю: $y(t_1) = x(t_1)$, т. е. $\delta x(t_1) = 0$:

$$k = \{x(t_2) + \delta(v, R, 0, \rho, \delta \mu)\}. \quad (2.56)$$

Из формулы (2.52) следует, что соответствующие концы $y(t_2 + \varepsilon \rho)$ варьируемых траекторий образуют те же конусы с точностью до $o(\varepsilon)$. Так как $k \subset K \subset T(x(t_2))$, то конусы k , K не более чем n -мерны. Поэтому внутренностью этих конусов будем называть их открытые ядра

по отношению к плоскости $T(\mathbf{x}(t_2))$, их внутренними лучами — лучи, содержащие внутренние точки.

Так как некоторые конструкции, приводимые ниже, аналогичны конструкциям работы (6), то детально мы их описывать не будем.

Пусть τ — внутренняя точка отрезка $t_1 \leq t \leq t_2$, и пусть задано множество из s отрезков длиной $\varepsilon\sigma_1, \dots, \varepsilon\sigma_s$, где σ_s — неотрицательные числа, которые можно занумеровать таким образом, чтобы правый конец i -го отрезка совпадал с левым концом $(i+1)$ -го, $i = 1, \dots, s-1$, а правый конец s -го отрезка совпадал с τ . В таком случае будем говорить, что заданное множество из s отрезков *пристроено* к точке τ .

Произвольное варьированное управление $v(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2 + \varepsilon\rho$, строится одновременно с соответствующей ему варьированной траекторией

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}(t; v, R, \delta\mathbf{x}, \rho, \delta\mu), \quad t_1 \leq t \leq t_2 + \varepsilon\rho,$$

системы (2.24), коль скоро заданы параметры (2.50) траектории и параметры строящегося управления $v(t)$; эти последние мы назовем *определяющими точками, определяющими отрезками и определяющими значениями* управления $v(t)$. Перейдем к их определению.

Пусть $\tau_1 < \dots < \tau_k$ — произвольные точки интервала $t_1 < t < t_2$, отличные от точек разрыва управления $u(t)$.

Назовем их определяющими точками строящегося управления. Пусть к точке τ_i , $i = 1, \dots, k$, пристроена система из s_i отрезков $I_{i\alpha_i}$, длины которых равны $\varepsilon\sigma_{i\alpha_i}$, $\alpha_i = 1, \dots, s_i$; назовем эти отрезки определяющими отрезками строящегося управления, пристроенными к точке τ_i . Наконец, пусть $v_{i\alpha_i}$ — такие точки области Ω , что точка $\mathbf{x}(\tau_i)$ неварьированной траектории регулярна относительно $v_{i\alpha_i}$; будем называть $v_{i\alpha_i}$ определяющим значением строящегося управления, соответствующим определяющему отрезку $I_{i\alpha_i}$.

Через $\tau_{i\alpha_i}$, $\alpha_i = 1, \dots, s_i$, обозначим левый конец отрезка $I_{i\alpha_i}$ и допустим для определенности, что

$$\tau_{11} \leq \tau_{12} \leq \dots \leq \tau_{1s_1} \leq \tau_1 < \tau_{21} \leq \dots \leq \tau_2 \leq \dots \leq \tau_k;$$

для симметрии формул введем еще обозначения

$$\tau_{1s_i+1} = \tau_i, \quad i = 1, \dots, k.$$

Приступим к построению функций $v(t)$, $\mathbf{y}(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2 + \varepsilon\rho$, по заданным параметрам управления $v(t)$ и параметрам (2.50) траектории $\mathbf{y}(t)$.

При помощи конструкции, использованной при доказательстве леммы 1 (п. 3), по заданному начальному значению (2.46) строим на отрезке $t_1 \leq t \leq \tau_{11}$ решение системы (2.24):

$$\begin{aligned} v(t) &= u(t) + \varepsilon \delta u(t) + o(\varepsilon), \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{x}(t) + \varepsilon \delta \mathbf{x}(t) + o(\varepsilon). \end{aligned} \quad (2.57)$$

Таким образом, $\delta\mathbf{x}(t)$, $t_1 \leq t \leq \tau_{11}$, является решением уравнения в вариациях (2.38):

$$\delta\mathbf{x}(t) = P_{t t_1}(\delta\mu) \delta\mathbf{x}(t_1).$$

Точка $\mathbf{y}(\tau_{11})$ регулярна относительно точки v_{11} , ибо при $\varepsilon \rightarrow 0$ $\mathbf{y}(\tau_{11}) \rightarrow \mathbf{x}(\tau_1)$. Следовательно, на отрезке $\tau_{11} \leq t \leq \tau_{12}$ (длиной $\varepsilon\sigma_{11}$) можно построить решение $v_{11}(t)$, $\mathbf{y}_{11}(t)$ системы (2.24), удовлетворяющее условиям:

а) $v_{11}(t)$ — непрерывная дифференцируемая функция, равномерно стремящаяся к точке v_{11} при $\varepsilon \rightarrow 0$;

б) $y_{11}(\tau_{11}) = y(\tau_{11})$, где функция $y(t)$, $t_1 \leq t \leq \tau_{11}$, задана формулой (2.57) (см. замечание к определению регулярности, п. 1).

Продолжим решение (2.57) на полуинтервал $\tau_{11} < t \leq \tau_{12}$ при помощи равенств

$$v(t) = v_{11}(t), \quad y(t) = y_{11}(t).$$

Повторяя аналогичное построение на отрезках $I_{12}, \dots, I_{1s_1}$, мы определим функции $v(t)$, $y(t)$ на отрезке $t_1 \leq t \leq \tau_1$. На отрезок $\tau_1 \leq t \leq \tau_{12}$ функции $v(t)$, $y(t)$ вновь продолжаются при помощи конструкции леммы 1 с уже имеющимся начальным значением $y(\tau_1)$ для $y(t)$ и т. д. вплоть до точки $t_2 + \varepsilon\rho$.

Вблизи точки t_2 варьированная траектория $y(t)$ представляется в виде

$$y(t) = x(t) + \varepsilon \delta x(t) + o(\varepsilon)$$

и лежит на границе области G , так как, по условию, объединение замыканий окрестностей O_{ε_i} не содержит точки $x(t_2)$ и потому вблизи точки t_2

$$h(y(t), \varepsilon \delta \mu) = g(y(t)) = 0. \quad (2.58)$$

Совершенно так же, как это сделано в работе (6), доказывается формула

$$y(t_2 + \varepsilon\rho; v, R, \delta x_1, \rho, \delta \mu, \varepsilon) = x(t_2) + \varepsilon \delta(v, R, \delta x_1, \rho, \delta \mu) + o(\varepsilon), \quad (2.59)$$

где вектор δ не зависит от ε и

$$\begin{aligned} \delta = \delta(v, R, \delta x_1, \rho, \delta \mu) &= P_{t_2 t_1}(\delta \mu) \delta x_1 + \rho f(x(t_2), u(t_2)) + \\ &+ \sum_{\beta=1}^k P_{t_2 \tau_\beta}(\delta \mu) \sum_{\alpha=1}^{s_\beta} \sigma_{\beta\alpha} [f(x(\tau_\beta), v_{\beta\alpha}) - f(x(\tau_\beta), u(\tau_\beta))]. \end{aligned} \quad (2.60)$$

Кроме того, из (2.58) следует, что

$$\delta(v, R, \delta x_1, \rho, \delta \mu) \in T(x(t_2)), \quad (2.61)$$

где $T(x(t_2))$ — касательная плоскость к границе $g(x) = 0$ в точке $x(t_2)$

Если $\gamma \geq 0$, то произведение $\gamma \otimes v$ числа γ на управление $v(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2 + \varepsilon\rho$, строится одновременно с варьированной траекторией

$$y(t; \gamma \otimes v, R, \gamma \delta x_1, \gamma \rho, \gamma \delta \mu, \varepsilon)$$

на отрезке $t_1 \leq t \leq t_2 + \varepsilon\gamma\rho$ указанным выше способом, где определяющие точки управления $\gamma \otimes v$ совпадают с определяющими точками τ_i управления v , количество определяющих отрезков $J_{i\alpha_i}$ управления $\gamma \otimes v$, пристроенных к τ_i , сохраняется прежним, но длина каждого из них умножается на γ :

$$\text{длина } J_{i\alpha_i} = \varepsilon \gamma \sigma_{i\alpha_i}, \quad \alpha_i = 1, \dots, s_i,$$

соответствующие определяющие значения не изменяются — отрезку $J_{i\alpha}$ соответствует значение $v_{i\alpha_i}$. Равенство (2.47) для новых параметров остается справедливым:

$$\gamma \delta x_1 = -\gamma \delta \mu \sum_{i=1}^s a_i(x(t_1) + \varepsilon \gamma \delta x_1) N_i = -\gamma \delta \mu \sum_{i=1}^s a_i(x(t_1)) N_i.$$

Из формулы (2.60) непосредственно следует:

$$\delta(\gamma \otimes v, R, \gamma \delta x_1, \gamma \rho, \gamma \delta \mu) = \gamma \delta(v, R, \delta x_1, \rho, \delta \mu). \quad (2.62)$$

Сумма $v = v_1 \oplus v_2$ двух варьированных управлений

$$v_i(t), \quad t_1 \leq t \leq t_2 + \varepsilon \rho_i, \quad i = 1, 2,$$

которым соответствуют варьированные траектории

$$y_i(t; v_i, R_i, \delta x_i, \rho_i, \delta \mu_i), \quad t_1 \leq t \leq t_2 + \varepsilon \rho_i, \quad i = 1, 2,$$

строится на отрезке $t_1 \leq t \leq t_2 + \varepsilon(\rho_1 + \rho_2)$ одновременно с соответствующей варьированной траекторией

$$y(t; v_1 \oplus v_2, R_1 \oplus R_2, \delta x_1 + \delta x_2, \rho_1 + \rho_2, \delta \mu_1 + \delta \mu_2, \varepsilon)$$

указанным выше стандартным способом, где определяющие точки управления $v_1 \oplus v_2$ получаются объединением всех определяющих точек слагаемых управлений; к каждой полученной таким образом определяющей точке τ управления $v_1 \oplus v_2$ пристраиваются без изменения длин все определяющие отрезки, пристроенные к τ в слагаемых управлениях, и, наконец, каждому определяющему отрезку суммарного управления, взятому из слагаемого управления v_i , приписывается то же определяющее значение, что и в слагаемом v_i .

Равенство (2.47) для новых параметров выполняется (см. определение функций $h_1 \oplus h_2$, $R_1 \oplus R_2$ и формулы (2.20), (2.23)).

Принимая во внимание (2.60) и (2.39), легко получим формулу

$$\begin{aligned} \delta(v_1 \oplus v_2, R_1 \oplus R_2, \delta x_1 + \delta x_2, \rho_1 + \rho_2, \delta \mu_1 + \delta \mu_2) = \\ = \sum_{\alpha=1}^2 \delta(v_\alpha, R_\alpha, \delta x_\alpha, \rho_\alpha, \delta \mu_\alpha), \end{aligned}$$

которая, вместе с формулой (2.62), дает (2.54). Таким образом, конусы K, k построены.

Включение

$$K \subset T(x(t_2))$$

следует из (2.61).

Отметим, что определенные перечисленными условиями управления $\gamma \otimes v$, $v_1 \oplus v_2$ заданы с точностью до порядка, в котором определяющие отрезки пристроены к определяющей точке. Однако этот порядок, как легко видеть, не влияет на величину вектора (2.60), и, следовательно, конусы K, k определены однозначно.

5. Доказательство теоремы 1. Предположим, что управление $u(t)$ и регулярная траектория $x(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$, оптимальны.

Обозначим через S луч, выходящий из точки $x(t_2)$ и направленный вдоль отрицательной оси x^0 ; очевидно, $S \subset T(x(t_2))$.

ЛЕММА 2. Луч S не является внутренним лучом конуса k .

Доказательство. Допустим, что S — внутренний луч для k . Тогда, очевидно, можно выбрать n варьированных траекторий

$$y_i(t), \quad t_1 \leq t \leq t_2 + \varepsilon \rho_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

имеющих нулевые начальные отклонения $y_i(t_1) = x(t_1)$, таким образом, чтобы соответствующие векторы δ_i , $i = 1, \dots, n$, определенные формулой (2.52), порождали n -мерный конус с вершиной в точке $x(t_2)$, содержащий луч S внутри себя — конус

$$\{x(t_2) + \gamma_1 \delta_1 + \dots + \gamma_n \delta_n\}, \quad (2.63)$$

где $\gamma_i \geq 0$.

Из построений п. 4 следует существование такого $(n+1)$ -параметрического семейства варьированных траекторий

$$y(t; \gamma_1, \dots, \gamma_n, \varepsilon), \quad t_1 \leq t \leq t_2 + \varepsilon \rho(\gamma_1, \dots, \gamma_n),$$

непрерывно зависящих от параметров $\varepsilon, \gamma_1, \dots, \gamma_n$ и определенных при

$$0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_1, \quad 0 \leq \gamma_i \leq \gamma^*, \quad i = 1, \dots, n,$$

что траектории семейства удовлетворяют начальным условиям

$$y(t_1; \gamma_1, \dots, \gamma_n, \varepsilon) = x(t_1) \text{ для любых } \varepsilon, \gamma_i$$

и конечным условиям

$$y(t_2 + \varepsilon \rho; \gamma_1, \dots, \gamma_n, \varepsilon) = x(t_2) + \varepsilon \sum_{\alpha=1}^n \gamma_\alpha \delta_\alpha + o(\varepsilon). \quad (2.64)$$

По построению, параллелепипед

$$\Pi = \left\{ x(t_2) + \sum_{\alpha=1}^n \gamma_\alpha \delta_\alpha \right\}, \quad 0 \leq \gamma_i \leq \gamma^*, \quad i = 1, \dots, n,$$

содержит внутри себя часть луча S .

Пусть θ — некоторая проекция окрестности точки $x(t_2)$ (относительно X^{n+1}) на плоскость $T(x(t_2))$. Мы можем предполагать, что эта окрестность содержит все точки (2.64), так как числа ε_1, γ^* можно выбрать сколь угодно малыми.

Очевидно,

$$\begin{aligned} \theta y(t_2 + \varepsilon \rho; \gamma_1, \dots, \gamma_n, \varepsilon) &= \theta \left(x(t_2) + \varepsilon \sum_{\alpha=1}^n \gamma_\alpha \delta_\alpha + o(\varepsilon) \right) = \\ &= \theta \left(x(t_2) + \varepsilon \sum_{\alpha=1}^n \gamma_\alpha \delta_\alpha \right) + o(\varepsilon) = x(t_2) + \varepsilon \sum_{\alpha=1}^n \gamma_\alpha \delta_\alpha + o(\varepsilon), \end{aligned}$$

так как для любой точки $y \in T(x(t_2))$

$$\theta y = y.$$

Непрерывное отображение $\Gamma(\gamma, \varepsilon) = \Gamma(\gamma_1, \dots, \gamma_n, \varepsilon)$ определим равенствами:

$$\begin{aligned} \Gamma(\gamma_1, \dots, \gamma_n, \varepsilon) &= x(t_2) + \frac{\theta y(t_2 + \varepsilon \rho; \gamma, \varepsilon) - x(t_2)}{\varepsilon} = \\ &= x(t_2) + \sum_{\alpha=1}^n \gamma_\alpha \delta_\alpha + \frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon} \quad \text{при } \varepsilon > 0, \\ \Gamma(\gamma_1, \dots, \gamma_n, 0) &= x(t_2) + \sum_{\alpha=1}^n \gamma_\alpha \delta_\alpha. \end{aligned}$$

Пусть $(-\eta, 0, \dots, 0)$, $\eta > 0$, — произвольная внутренняя точка луча S , содержащаяся внутри Π ; она покрывается образом куба $0 \leq \gamma_i \leq \gamma^*$, $i = 1, \dots, n$, при отображении $\Gamma(\gamma, 0)$ с индексом 1. Следовательно, уравнение относительно γ_i , $0 \leq \gamma_i \leq \gamma^*$, $i = 1, \dots, n$,

$$\Gamma(\gamma_1, \dots, \gamma_n, \varepsilon) - \mathbf{x}(t_2) = (-\eta, 0, \dots, 0)$$

при достаточно малых ε имеет хотя бы одно решение. При $\varepsilon > 0$ последнее равенство эквивалентно равенству

$$\theta \mathbf{y}(t_2 + \varepsilon; \gamma, \varepsilon) = \mathbf{x}(t_2) + \varepsilon(-\eta, 0, \dots, 0).$$

Точка, стоящая в правой части равенства, принадлежит одновременно и границе $g(\mathbf{x}) = 0$, и касательной плоскости $T(\mathbf{x}(t_2))$, следовательно, имеет место равенство

$$\theta \mathbf{y}(t_2 + \varepsilon; \gamma, \varepsilon) = \mathbf{y}(t_2 + \varepsilon; \gamma, \varepsilon) = \mathbf{x}(t_2) + \varepsilon(-\eta, 0, \dots, 0),$$

которое противоречит допущению об оптимальности траектории $\mathbf{x}(t_2)$.

ЛЕММА 3. Существует непрерывное решение

$$\psi(t) = (\psi_0(t), \dots, \psi_n(t)), \quad t_1 \leq t \leq t_2,$$

уравнения

$$\dot{\psi} = - \left(\frac{\partial f(\mathbf{x}(t), u(t))}{\partial \mathbf{x}} + \Lambda(t) \frac{\partial p(\mathbf{x}(t), u(t))}{\partial \mathbf{x}} \right) \psi \quad (2.65)$$

такое, что в каждой точке непрерывности управления $u(t)$ выполняется условие максимума

$$H(\psi(t), \mathbf{x}(t), u(t)) = m(\psi(t), \mathbf{x}(t)), \quad (2.66)$$

причем

$$m(\psi(t_2), \mathbf{x}(t_2)) = 0, \quad (2.67)$$

и, кроме того, удовлетворяются следующие условия:

а) $\psi_0(t) = \text{const} \leq 0$,

б) вектор $\psi(t_1)$ не коллинеарен вектору $\text{grad } g(\mathbf{x}(t_1))$,

с) в точках дифференцируемости кусочно-гладкой скалярной функции, $\lambda(t) = -\psi(t) \cdot \Lambda(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$, вектор

$$\frac{d\lambda(t)}{dt} \text{grad } g(\mathbf{x}(t))$$

направлен внутрь области G или обращается в нуль.

Доказательство. На основании леммы 2, через вершину $\mathbf{x}(t_2)$ конуса $\mathbf{k} \subset T(\mathbf{x}(t_2))$ можно провести опорную $(n-1)$ -мерную плоскость $\mathbf{k}$ лежащую в $T(\mathbf{x}(t_2))$ и отделяющую конус $\mathbf{k}$ от луча S . Вектор, ортогональный к этой плоскости, лежащий в $T(\mathbf{x}(t_2))$ и направленный в сторону луча S , обозначим через $\chi = (\chi_0, \dots, \chi_n)$. Мы имеем:

$$\chi(-1, 0, \dots, 0) = -\chi_0 \geq 0,$$

т. е. $\chi_0 \leq 0$. Так как χ лежит в $T(\mathbf{x}(t_2))$, то векторы

$$\chi, \quad \text{grad } g(\mathbf{x}(t_2)) \quad (2.68)$$

независимы.

Вектор δ , соответствующий по формуле (2.52) произвольной варьированной траектории $\mathbf{y}(t)$ с начальным условием $\mathbf{y}(t_1) = \mathbf{x}(t_1)$, удовлетво-

ряет неравенству

$$\chi \cdot \delta \leq 0. \quad (2.69)$$

Искомая функция $\psi(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$, определяется как решение уравнения (2.65), удовлетворяющее краевому условию

$$\psi(t_2) = \chi. \quad (2.70)$$

В самом деле, пусть в некоторой точке непрерывности τ управления $u(t)$

$$H(\psi(\tau), x(\tau), u(\tau)) < m(\psi(\tau), x(\tau)),$$

другими словами, существует такая точка $v_1 \in \Omega$, относительно которой точка $x(\tau)$ регулярна и

$$H(\psi(\tau), x(\tau), v_1) > H(\psi(\tau), x(\tau), u(\tau)). \quad (2.71)$$

Построим решение $v(t)$, $y(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$, системы (2.24), задав в качестве параметров управления v единственный определяющий отрезок длиной ε , пристроенный к единственной определяющей точке τ , и определяющее значение v_1 ; параметры траектории $y(t)$ задаются строкой

$$R = p(x, u), \quad \delta x = 0, \quad \rho = \delta \mu = 0.$$

Из (2.60) следует, что вектор δ для этой траектории имеет вид:

$$\delta = P_{t_2\tau}(0) [f(x(\tau), v_1) - f(x(\tau), u(\tau))].$$

Следовательно, из (2.42) получаем:

$$\begin{aligned} \chi \cdot \delta &= \psi(t_2) \cdot P_{t_2\tau}(0) [f(x(\tau), v_1) - f(x(\tau), u(\tau))] = \\ &= \psi(\tau) \cdot [f(x(\tau), v_1) - f(x(\tau), u(\tau))] \leq 0, \end{aligned}$$

что противоречит неравенству (2.71).

Для доказательства формулы (2.67) построим варьированную траекторию

$$y(t), \quad t_1 \leq t \leq t_2 + \varepsilon\rho,$$

с параметрами $R = p(x, u)$, $\delta x = 0$, $\delta \mu = 0$, ρ , соответствующую варьированному управлению

$$v(t) \equiv u(t), \quad t_1 \leq t \leq t_2 + \varepsilon\rho.$$

Вектор δ для этой траектории имеет вид

$$\delta = \rho f(x(t_2), u(t_2)).$$

Из неравенства

$$\chi \cdot \rho f(x(t_2), u(t_2)) \leq 0$$

и равенств (2.66), (2.70) следует (2.67).

Условие а) леммы 3 следует из неравенства $\chi_0 \leq 0$ и из независимости правой части уравнения (2.65) от x^0 .

Условие б) следует из независимости векторов (2.68).

Докажем условие с). Пусть $v(t)$, $y(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$, — решение системы (2.24), полученное конструкцией п. 3 (лемма 1) и удовлетворяющее начальному значению

$$y(t_1) = x(t_1).$$

Тогда $v(t)$ есть варьированное управление (в смысле п.4) без определяющих точек, а $y(t) = y(t; v, R, 0, 0, \delta\mu, \varepsilon)$ — соответствующая варьированная траектория, отвечающая параметрам $R, \delta x = 0, \rho = 0, \delta\mu$. Из формул (2.60), (2.43) следует, что

$$\mathfrak{z}(v, R, 0, 0, \delta\mu) = \mathfrak{z} = P_{t_2 t_1}(\delta\mu) 0 = \delta\mu \sum_{\alpha=0}^n \varphi_{\alpha}(t_2) \int_{t_1}^{t_2} \psi^{\alpha}(t) \cdot \Lambda(t) \frac{\partial R}{\partial \mu} dt.$$

Формулы (2.70), (2.69) дают:

$$\begin{aligned} \chi \cdot \mathfrak{z} &= \delta\mu \sum_{\alpha=0}^n \psi(t_2) \cdot \varphi_{\alpha}(t_2) \int_{t_1}^{t_2} \psi^{\alpha}(t) \cdot \Lambda(t) \frac{\partial R}{\partial \mu} dt = \\ &= \delta\mu \int_{t_1}^{t_2} \psi(t) \cdot \Lambda(t) \frac{\partial R}{\partial \mu} dt = - \delta\mu \int_{t_1}^{t_2} \lambda(t) \frac{\partial R}{\partial \mu} dt \leq 0. \end{aligned}$$

Подставив сюда выражение для $\frac{\partial R}{\partial \mu}$ из (2.44), получим ($\delta\mu \geq 0$):

$$\int_{t_1}^{t_2} \lambda(t) \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^s \left[a_i \mathbf{x}(t) \left(\frac{\partial g(\mathbf{x}(t))}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{N}_i \right) \right] dt \geq 0.$$

Интегрируя по частям и принимая во внимание равенства

$$a_i(\mathbf{x}(t_1)) = a_i(\mathbf{x}(t_2)) = 0$$

(ибо в случае $\delta x_1 = 0$ ни одна из окрестностей O_{ζ_i} , участвующих в определении функции R , не содержит точек $\mathbf{x}(t_1), \mathbf{x}(t_2)$), получим:

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{d\lambda}{dt} \sum_{i=1}^s a_i \mathbf{x}(t) \left(\frac{\partial g(\mathbf{x}(t))}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{N}_i \right) dt \leq 0.$$

Так как точки ζ_i можно выбирать на траектории $\mathbf{x}(t)$ произвольно, лишь бы они не совпадали с ее концами, и так как окрестности O_{ζ_i} сколь угодно малы и функции $a_i \mathbf{x}(t)$ неотрицательны, то из последнего неравенства следует неравенство

$$\frac{d\lambda(t)}{dt} \leq 0,$$

которое в рассматриваемом случае равносильно условию с), ибо вектор $\text{grad } g(\mathbf{x}(t))$ служит внешней нормалью для области G .

Для завершения доказательства теоремы 1 надо, во-первых, установить, что функция $\lambda(t) = -\psi(t) \cdot \Lambda(t)$ удовлетворяет соотношению (2.13):

$$\frac{\partial H(\psi(t), \mathbf{x}(t), u(t))}{\partial u} = \lambda(t) \frac{\partial p(\mathbf{x}(t), u(t))}{\partial u} + \sum_{\alpha=1}^s v_{\alpha}(t) \frac{\partial q_{\alpha}(u(t))}{\partial u}, \quad (2.72)$$

во-вторых, доказать равенство

$$H(\psi(t), \mathbf{x}(t), u(t-0)) = m(\psi(t), \mathbf{x}(t))$$

в точках разрыва управления и, наконец, установить постоянство функции $H(t) = H(\psi(t), \mathbf{x}(t), u(t))$ на отрезке $t_1 \leq t \leq t_2$:

$$H(t) = H(\psi(t), \mathbf{x}(t), u(t)) = m(\psi(t), \mathbf{x}(t)) = \text{const}, \quad t_1 \leq t \leq t_2,$$

где в точках разрыва управления, согласно принятому условию,

$$H(t) = H(t - 0).$$

Для доказательства равенства (2.72) заметим, что координаты вектора $\Lambda(t) = (\lambda^0(t), \dots, \lambda^n(t))$ удовлетворяют уравнениям (2.35):

$$\frac{\partial f^j(\mathbf{x}(t), u(t))}{\partial u^\alpha} + \lambda^j(t) \frac{\partial p(\mathbf{x}(t), u(t))}{\partial u^\alpha} + \sum_{\beta=1}^s l_\beta^j(t) \frac{\partial q_\beta(u(t))}{\partial u^\alpha} = 0$$

$$(j = 0, \dots, n, \quad \alpha = 1, \dots, s + 1).$$

Свертывая эти уравнения с $\phi_j(t)$, $j = 0, \dots, n$, по индексу j , получим $s + 1$ равенств

$$\frac{\partial H(\phi(t), \mathbf{x}(t), u(t))}{\partial u^\alpha} = \lambda(t) \frac{\partial p(\mathbf{x}(t), u(t))}{\partial u^\alpha} + \sum_{\beta=1}^s v_\beta(t) \frac{\partial q_\beta(u(t))}{\partial u^\alpha},$$

из которых функция $\lambda(t)$ определяется однозначно (одновременно с функциями $v_\beta(t)$, $\beta = 1, \dots, s$).

С другой стороны,

$$H(\phi(t), \mathbf{x}(t), u(t)) = m(\phi(t), \mathbf{x}(t)),$$

и, по правилу множителей Лагранжа,

$$\frac{\partial H(\phi(t), \mathbf{x}(t), u(t))}{\partial u} = \lambda^*(t) \frac{\partial p(\mathbf{x}(t), u(t))}{\partial u} + \sum_{\alpha=1}^s v_\alpha^* \frac{\partial q_\alpha(u(t))}{\partial u},$$

следовательно,

$$\lambda(t) = \lambda^*(t), \quad v_\alpha(t) = v_\alpha^*(t), \quad \alpha = 1, \dots, s.$$

Докажем теперь равенство

$$H(\phi(t), \mathbf{x}(t), u(t - 0)) = m(\phi(t), \mathbf{x}(t))$$

в точках разрыва управления $u(t)$.

Функция $H(\phi(t), \mathbf{x}(t), u)$ непрерывна по t при фиксированном u . Пусть τ — точка разрыва управления $u(t)$. По условию, $u(\tau) = u(\tau - 0)$ и точка $\mathbf{x}(\tau)$ регулярна относительно точек $u(\tau \pm 0)$. Значит, если

$$H(\phi(\tau), \mathbf{x}(\tau), u(\tau)) < m(\phi(\tau), \mathbf{x}(\tau)),$$

то найдется такая точка $u_1 \in \omega(\mathbf{x}(\tau))$, что

$$H(\phi(\tau), \mathbf{x}(\tau), u(\tau)) < H(\phi(\tau), \mathbf{x}(\tau), u_1).$$

Функция $u(t)$ непрерывна в точке τ слева, следовательно, для любой достаточно близкой к τ точки $t < \tau$ мы имеем:

$$H(\phi(t), \mathbf{x}(t), u(t)) < H(\phi(t), \mathbf{x}(t), u_1).$$

Так как точка t близка к τ и $u_1 \in \omega(\mathbf{x}(\tau))$, то $u_1 \in \omega(\mathbf{x}(t))$, и потому последнее неравенство дает:

$$H(\phi(t), \mathbf{x}(t), u(t)) < H(\phi(t), \mathbf{x}(t), u_1) \leq m(\phi(t), \mathbf{x}(t)),$$

что противоречит лемме 3.

Для доказательства постоянства функции $H(t) = m(\phi(t), \mathbf{x}(t))$ установим сначала ее непрерывность. Для этого достаточно показать, что в каждой точке разрыва управления τ

$$H(\phi(\tau), \mathbf{x}(\tau), u(\tau - 0)) = H(\phi(\tau), \mathbf{x}(\tau), u(\tau + 0)).$$

Пусть $t > \tau$ — близкая к τ точка; тогда

$$H(\psi(t), x(t), u(\tau - 0)) \leq H(\psi(t), x(t), u(t)) = m(\psi(t), x(t)),$$

так как точка $x(t)$ регулярна относительно точки $u(\tau - 0)$. Следовательно,

$$H(\psi(\tau), x(\tau), u(\tau - 0)) \leq H(\psi(\tau), x(\tau), u(\tau + 0)).$$

Аналогично доказывается противоположное неравенство.

Покажем, что функция $H(t)$ постоянна на каждом интервале одновременной дифференцируемости функций $\psi(t)$, $x(t)$, $u(t)$. В самом деле,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} H(t) &= \dot{\psi} \cdot \frac{\partial H}{\partial \psi} + \frac{\partial H}{\partial x} \cdot \dot{x} + \frac{\partial H}{\partial u} \cdot \dot{u} = \left(-\frac{\partial f}{\partial x} \psi + \lambda \frac{\partial p}{\partial x} \right) \cdot \dot{f} + \\ &+ \left(\frac{\partial f}{\partial x} \psi \right) \cdot \dot{f} + \left(\lambda \frac{\partial p}{\partial u} + \sum_{\alpha=1}^s \nu_{\alpha} \frac{\partial q_{\alpha}}{\partial u} \right) \cdot \dot{u} = \lambda \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \dot{f} + \lambda \frac{\partial p}{\partial u} \cdot \dot{u} + \\ &+ \sum_{\alpha=1}^s \nu_{\alpha} \frac{\partial q_{\alpha}}{\partial u} \cdot \dot{u} = \lambda \frac{d}{dt} p(x(t), u(t)) + \sum_{\alpha=1}^s \nu_{\alpha} \frac{dq_{\alpha}(u(t))}{dt} = 0. \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

6. Обобщения. В этом пункте мы приведем несколько очевидных обобщений теоремы 1. Мы ограничимся формулировкой результатов, так как их доказательства лишь незначительно отличаются от доказательства теоремы 1.

При доказательстве теоремы 1 решающую роль играла зависимость между x , u , заданная уравнением

$$p(x, u) = 0.$$

Вид функции

$$p(x, u) = \frac{\partial g(x)}{\partial x} \cdot f(x, u)$$

был использован лишь при доказательстве условий б) — с) теоремы 1. Беглый анализ доказательства убеждает нас в справедливости нижеследующей теоремы 1, а.

Пусть заданы m непрерывно дифференцируемых функций $p_i(x, u)$, $i = 1, \dots, m$, не зависящих от координаты x^0 . Регулярная относительно точки $u_0 \in \Omega$ точка x , удовлетворяющая системе

$$p_1(x, u_0) = \dots = p_m(x, u_0) = 0,$$

определяется так же, как и прежде, только в данном случае вместо независимости векторов (2.9) надо потребовать независимость векторов

$$\frac{\partial p_1(x, u_0)}{\partial u}, \dots, \frac{\partial p_m(x, u_0)}{\partial u}, \quad \frac{\partial q_1(u_0)}{\partial u}, \dots, \frac{\partial q_s(u_0)}{\partial u}.$$

ТЕОРЕМА 1, а. Пусть $u(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$, — оптимальное управление, а $x(t)$ — соответствующая регулярная оптимальная траектория уравнения (1.5), удовлетворяющая на отрезке $t_1 \leq t \leq t_2$ системе уравнений:

$$p_1(x(t), u(t)) = \dots = p_m(x(t), u(t)) = 0. \quad (2.73)$$

Тогда существует такая ненулевая непрерывная ковариантная вектор-функция $\psi(t) = (\psi_0(t), \dots, \psi_n(t))$, $t_1 \leq t \leq t_2$, что на отрезке $t_1 \leq t \leq t_2$

удовлетворяется система уравнений

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, u) = \frac{\partial H(\psi, \mathbf{x}, u)}{\partial \psi}, \\ \dot{\psi} &= -\frac{\partial H(\psi, \mathbf{x}, u)}{\partial \mathbf{x}} + \sum_{\alpha=1}^m \lambda_{\alpha} \frac{\partial p_{\alpha}(\mathbf{x}, u)}{\partial \mathbf{x}}\end{aligned}$$

и выполняется условие максимума

$$H(\psi(t), \mathbf{x}(t), u(t)) = m(\psi(t), \mathbf{x}(t)),$$

причем

$$m(\psi(t), \mathbf{x}(t)) \equiv 0;$$

кусочно-гладкие функции $\lambda_i(t)$, $i = 1, \dots, m$, $t_1 \leq t \leq t_2$, определяются из условия максимума как множители Лагранжа в формуле

$$\frac{\partial H(\psi, \mathbf{x}, u)}{\partial u} = \sum_{\alpha=1}^m \lambda_{\alpha} \frac{\partial p_{\alpha}(\mathbf{x}, u)}{\partial u} + \sum_{\alpha=1}^s \nu_{\alpha} \frac{\partial q_{\alpha}(u)}{\partial u},$$

а координата

$$\psi_0(t) = \text{const} \leq 0.$$

К сформулированной теореме легко сводится решение оптимальной задачи, в которой вместо равенств (2.73) фигурируют неравенства

$$p_1(\mathbf{x}, u) \leq 0, \dots, p_m(\mathbf{x}, u) \leq 0. \quad (2.74)$$

В самом деле, введя m дополнительных скалярных управляющих параметров v_i , $i = 1, \dots, m$, удовлетворяющих неравенствам $v_i \geq 0$, и рассматривая вместо неравенств (2.74) равенства

$$p_1(\mathbf{x}, u) + v_1 = \dots = p_m(\mathbf{x}, u) + v_m = 0,$$

мы приходим к условиям теоремы 1, а.

Наконец, отметим, что теорема 1 непосредственно обобщается на тот случай, когда область G задана вблизи границы несколькими, например двумя, неравенствами

$$g_1(\mathbf{x}) \leq 0, \quad g_2(\mathbf{x}) \leq 0,$$

а регулярная оптимальная траектория лежит на $(n-2)$ -мерном «ребре», заданном уравнениями

$$g_1(\mathbf{x}) = g_2(\mathbf{x}) = 0;$$

при этом, естественно, предполагается, что гиперповерхности

$$g_1(\mathbf{x}) = 0, \quad g_2(\mathbf{x}) = 0$$

находятся в общем положении вдоль траектории, т. е. что векторы $\frac{\partial g_1(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}$, $\frac{\partial g_2(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}$ независимы.

§ 3. Условие скачка

Оптимальная траектория, лежащая в замкнутой области G , частично может лежать в открытом ядре области G , частично — на границе области. Для того чтобы однозначно проследить такую траекторию, недостаточно принципа максимума и теоремы 1. В самом деле, принцип максимума дает полную систему необходимых условий, которым удовлетворяет всякий участок оптимальной траектории, целиком лежащий в открытом ядре

области G , а теорема 1 дает необходимые условия, которым удовлетворяют участки, целиком лежащие на границе области G . Недостаёт ещё условия сопряжения, которому удовлетворяет всякая пара примыкающих друг к другу участков оптимальной траектории, один из которых лежит в открытом ядре области G , а другой — на ее границе. Это условие мы называем условием скачка для ковариантной векторной функции $\psi(t)$, которая в момент перехода с одного участка на другой может терпеть разрыв (см. формулировку теоремы 2).

В п.1 для удобства ссылок сформулирован принцип максимума и доказана одна вспомогательная лемма. В п. 2 приведены основные определения, в п. 3 сформулирована и доказана теорема 2 — условие скачка.

1. Принцип максимума. Пусть $x(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$, — оптимальная траектория уравнения (1.5), целиком лежащая в открытом ядре области G , а $u(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$, — соответствующее оптимальное управление. Тогда найдётся такая непрерывная ненулевая функция $\psi(t) = (\psi_0(t), \dots, \psi_n(t))$, $t_1 \leq t \leq t_2$, что на отрезке $t_1 \leq t \leq t_2$ будут выполняться неравенство

$$\psi_0(t) = \text{const} \leq 0$$

и система уравнений

$$\dot{x} = f(x, u) = \frac{\partial H(\psi, x, u)}{\partial \psi}, \quad (3.1)$$

$$\dot{\psi} = -\frac{\partial f(x, u)}{\partial x} \psi = -\frac{\partial H(\psi, x, u)}{\partial x}, \quad (3.2)$$

$$H(\psi(t), x(t), u(t)) = M(\psi(t), x(t)) = 0, \quad (3.3)$$

где величина $M(\psi, x)$ определена формулой (2.2).

Принцип максимума справедлив и в том случае, когда один из концов $x(t_1)$, $x(t_2)$ траектории или оба конца лежат на границе $g(x) = 0$. Пусть, например, границе принадлежит только начало траектории $x(t_1)$. Тогда участок траектории $x(t)$ при $t_1 + \theta \leq t \leq t_2$, $\theta \geq 0$, лежит в открытом ядре области G и, следовательно, существует функция $\psi_0(t)$, $t_1 + \theta \leq t \leq t_2$, удовлетворяющая на отрезке $t_1 + \theta \leq t \leq t_2$ требованиям принципа максимума. Для семейства функций $\psi_0(t)$ при $\theta \rightarrow 0$ существует предельная функция $\psi(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$, которая и будет искомой.

Подробное доказательство принципа максимума изложено в работе (6). Основную роль в этом доказательстве играет конструкция переноса вдоль оптимальной траектории $x(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$, при помощи уравнения в вариациях

$$\delta \dot{x} = \frac{\partial f(x(t), u(t))}{\partial x} \delta x \quad (3.4)$$

для уравнения (3.1) и построение варьированных управлений $v^*(t)$ и варьированных траекторий $y^*(t)$, мало отличающихся от оптимального управления $u(t)$ и оптимальной траектории $x(t)$.

Если фундаментальную систему решений уравнения (3.4) обозначить через

$$\varphi_0^*(t), \dots, \varphi_n^*(t), \quad t_1 \leq t \leq t_2,$$

то вектор

$$\delta^* \mathbf{x}(t_1) = \sum_{\alpha=0}^n \varphi_{\alpha}^*(t_1) \delta^* x^{\alpha}(t_1),$$

заданный в точке $\mathbf{x}(t_1)$, после перенесения вдоль траектории в точку $\mathbf{x}(t)$ при помощи уравнения (3.4) перейдет в вектор

$$P_{tt_1}^* \delta^* \mathbf{x}(t_1) = \sum_{\alpha=0}^n \varphi_{\alpha}^*(t) \delta^* x^{\alpha}(t_1).$$

Конструкции § 2 являются усложнением аналогичных конструкций для рассматриваемого случая, так как в § 2, кроме выполнения уравнения (1.5), нам еще требовалось выполнение уравнения

$$R(\mathbf{y}, v, \varepsilon \delta \mu) = 0.$$

Если отбросить это последнее уравнение, то система (2.24) превращается в одно уравнение (3.1), а уравнение в вариациях (2.38) для системы (2.24) заменяется уравнением в вариациях (3.4).

В соответствии с этим вместо конусов (2.55), (2.56) мы получим конусы (3.5), (3.6) с вершиной в точке $\mathbf{x}(t_2)$:

$$K^* = \{\mathbf{x}(t_2) + \delta^*(v^*, \delta^* \mathbf{x}, \rho^*)\}, \quad (3.5)$$

$$\mathbf{k}^* = \{\mathbf{x}(t_2) + \delta^*(v^*, 0, \rho^*)\}, \quad (3.6)$$

где вектор δ^* определяется формулой (3.7), аналогичной формуле (2.60):

$$\begin{aligned} \delta^* = & \sum_{i=1}^k P_{t_2 \tau_i}^* \left[\sum_{\alpha_i=1}^{s_i} \sigma_{i\alpha_i} (\mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau_i), v_{i\alpha_i}^*) - \mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau_i), u(\tau_i))) \right] + \\ & + \sum_{\alpha=0}^n \varphi_{\alpha}^*(t_2) \delta^* x^{\alpha}(t_1) + \rho^* \mathbf{f}(\mathbf{x}(t_2), u(t_2)). \end{aligned} \quad (3.7)$$

В доказательстве принципа максимума участвует лишь конус $\mathbf{k}^*$, соответствующий нулевым начальным отклонениям. Конус K^* понадобится в п. 3.

В заключение этого пункта докажем одну простую лемму, которая нам понадобится в п. 3.

ЛЕММА. Пусть $\mathbf{x}(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$, — траектория уравнения (1.5), лежащая в замкнутой области G и соответствующая некоторому допустимому управлению, и пусть $\mathbf{x}(t_1)$ — единственная точка траектории, лежащая на границе $g(\mathbf{x}) = 0$ области G . Если вектор $\delta \mathbf{x}(t_1)$ не касается границы $g(\mathbf{x}) = 0$ в точке $\mathbf{x}(t_1)$ и направлен внутрь области G , то варьированная траектория $\mathbf{y}(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$, с начальным значением $\mathbf{y}(t_1) = \mathbf{x}(t_1) + \varepsilon \delta \mathbf{x}(t_1)$ целиком лежит в открытом ядре области G .

Доказательство. Мы имеем:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{x}(t) + \varepsilon \delta \mathbf{x}(t) + o(\varepsilon), \quad \frac{\partial g(\mathbf{x}(t_1))}{\partial \mathbf{x}} \cdot \delta \mathbf{x}(t_1) = a < 0.$$

Следовательно, при достаточно малых $\varepsilon > 0$ величина

$$g(\mathbf{y}(t)) = g(\mathbf{x}(t)) + \varepsilon \frac{\partial g(\mathbf{x}(t))}{\partial \mathbf{x}} \cdot \delta \mathbf{x}(t) + o(\varepsilon), \quad t_1 \leq t \leq t_2,$$

отрицательна. В самом деле, для значений t , близких к t_1 , это следует из неравенств

$$g(\mathbf{x}(t)) < 0, \quad a < 0.$$

Для значений t , удаленных от t_1 , величина $|g(\mathbf{x}(t))|$ много больше величины

$$\left| \varepsilon \frac{\partial g(\mathbf{x}(t))}{\partial \mathbf{x}} \cdot \delta \mathbf{x}(t) + o(\varepsilon) \right|,$$

в то время как

$$g(\mathbf{x}(t)) < 0.$$

2. Основные определения. Пусть $u(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$, — допустимое управление, а $\mathbf{x}(t)$ — соответствующая траектория (не обязательно оптимальная) уравнения (1.5), целиком лежащая в замкнутой области G . Некоторые участки траектории могут лежать на границе области G , некоторые — внутри области, т. е. в открытом ядре области G .

Точку $\mathbf{x}(\tau)$ траектории, лежащую на границе области G , назовем *точкой стыка*, если $t_1 < \tau < t_2$ и существует такое $\sigma > 0$, что хотя бы один из участков траектории $\mathbf{x}(t)$ при $\tau - \sigma < t < \tau$ или при $\tau < t < \tau + \sigma$ лежит в открытом ядре области G . В дальнейшем, для определенности, будем всегда считать, что внутри области G лежит участок траектории при $\tau - \sigma < t < \tau$. Время τ назовем *моментом стыка*.

Мы будем рассматривать траектории с конечным числом точек стыка, не оговаривая этого особо.

Траекторию $\mathbf{x}(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$, целиком лежащую в замкнутой области G , назовем *регулярной*, если регулярен всякий ее участок, лежащий на границе $g(\mathbf{x}) = 0$ области G (см. § 2, п. 1).

Предположим, что $u(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$, — оптимальное управление, а $\mathbf{x}(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$, — соответствующая оптимальная регулярная траектория уравнения (1.5), лежащая целиком в области G .

Пусть $\mathbf{x}(\tau)$ — точка стыка траектории $\mathbf{x}(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$. Обозначим через $\tau_1 < \tau < \tau_2$, максимальный интервал отрезка $t_1 \leq t \leq t_2$, содержащий единственный момент стыка τ .

Таким образом, участок траектории $\mathbf{x}(t)$ при $\tau_1 < t < \tau$ лежит в открытом ядре области G ; что же касается участка при $\tau < t < \tau_2$, то он либо целиком лежит на границе $g(\mathbf{x}) = 0$, либо также принадлежит открытому ядру области G , и тогда $\mathbf{x}(\tau)$ — единственная точка участка $\mathbf{x}(t)$, $\tau_1 < \tau < \tau_2$, лежащая на границе области G .

Следовательно, участок $\mathbf{x}(t)$, $\tau_1 \leq t \leq \tau$, удовлетворяет принципу максимума. Соответствующая этому участку ненулевая функция

$$\psi^-(t) = (\psi_0^-(t), \dots, \psi_n^-(t)), \quad \tau_1 \leq t \leq \tau, \quad (3.8)$$

непрерывна и удовлетворяет системе (3.1) — (3.3). Участок $\mathbf{x}(t)$, $\tau \leq t \leq \tau_2$, удовлетворяет либо требованиям теоремы 1 (если он лежит на границе $g(\mathbf{x}) = 0$), либо принципу максимума (если он лежит внутри области G). Соответствующая непрерывная ненулевая функция

$$\psi^+(t) = (\psi_0^+(t), \dots, \psi_n^+(t)), \quad \tau \leq t \leq \tau_2, \quad (3.9)$$

удовлетворяет либо системе (2.14) — (2.16) и условиям а) — с) теоремы 1, либо системе (3.1) — (3.3).

Мы будем говорить, что в точке стыка $\mathbf{x}(\tau)$ оптимальной регулярной траектории $\mathbf{x}(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$, целиком лежащей в замкнутой области G , выполняется *условие скачка*, если существует такой участок $\mathbf{x}(t)$, $\tau_1 \leq t \leq \tau_2$, траектории, что $\tau_1 < t < \tau_2$ является максимальным интервалом отрезка $t_1 \leq t \leq t_2$, содержащим единственный момент стыка τ , и если для участков $\mathbf{x}(t)$, $\tau_1 \leq t \leq \tau$, $\mathbf{x}(t)$, $\tau \leq t \leq \tau_2$, определенные выше функции (3.8), (3.9) можно подобрать таким образом, чтобы выполнялось одно из следующих двух (не совместных между собой) условий:

$$\psi^+(\tau) = \psi^-(\tau) + \mu \operatorname{grad} g(\mathbf{x}(\tau)), \quad (3.10)$$

$$\psi^-(\tau) + \mu \operatorname{grad} g(\mathbf{x}(\tau)) = 0, \quad \mu \neq 0, \quad (3.11)$$

где μ — действительное число. Если участок $\mathbf{x}(t)$, $\tau \leq t \leq \tau_2$, лежит на границе $g(\mathbf{x}) = 0$, то условие (3.10) эквивалентно условию

$$\psi^+(\tau) = \psi^-(\tau),$$

так как начальное значение $\psi^+(\tau)$ функции $\psi^+(t)$, $\tau \leq t \leq \tau_2$, можно изменять на произвольный вектор вида $\mu \operatorname{grad} g(\mathbf{x}(\tau))$ (см. замечание 4 к теореме 1).

3. ТЕОРЕМА 2 (условие скачка). Пусть регулярная оптимальная траектория уравнения (1.5), лежащая в замкнутой области G , содержит конечное число точек стыка. Тогда в каждой точке стыка выполняется условие скачка.

Доказательство. Пусть $u(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$, — оптимальное управление, $\mathbf{x}(t)$ — соответствующая оптимальная траектория, $\mathbf{x}(\tau)$ — точка стыка, $\tau_1 < t < \tau_2$ — максимальный интервал, содержащий единственный момент стыка τ . Для определенности считаем, что участок $\mathbf{x}(t)$, $\tau_1 < t < \tau$, принадлежит открытому ядру области G , а участок $\mathbf{x}(t)$, $\tau \leq t \leq \tau_2$, лежит на границе $g(\mathbf{x}) = 0$. Точка $\mathbf{x}(\tau_1)$ может лежать как внутри области G , так и на ее границе. Мы предположим сначала, что $\mathbf{x}(\tau_1)$ лежит внутри G ; в этом случае, очевидно, $\tau_1 = t_1$.

Введем уравнение

$$\dot{\mathbf{x}}^* = -\mathbf{f}(\mathbf{x}^*, u^*) \quad (3.12)$$

и будем рассматривать его решения на отрезке $0 \leq t \leq \tau - \tau_1 + \varepsilon \rho^*$, где ρ^* — любое действительное число, ε — положительная бесконечно малая величина. Очевидно, решением уравнения (3.12) являются функции

$$u^*(t) = u(\tau - t), \quad \mathbf{x}^*(t) = \mathbf{x}(\tau - t), \quad 0 \leq t \leq \tau - \tau_1 + \varepsilon \rho^*. \quad (3.13)$$

Обозначим через K^* конус (3.5) с вершиной в точке $\mathbf{x}(\tau_1) = \mathbf{x}^*(\tau - \tau_1)$, построенный при помощи траектории (3.13) уравнения (3.12). Через K обозначим конус (2.55) с вершиной в точке $\mathbf{x}(\tau_2)$, построенный при помощи регулярного участка оптимальной траектории $\mathbf{x}(t)$, $\tau \leq t \leq \tau_2$. Конус K лежит в касательной плоскости $T(\mathbf{x}(\tau_2))$ к границе $g(\mathbf{x}) = 0$ в точке $\mathbf{x}(\tau_2)$.

Конус K^* образован векторами

$$\mathbf{x}(\tau_1) + \delta^*(v^*, \delta^* \mathbf{x}(0), \rho^*), \quad (3.14)$$

где δ^* определяется формулой (3.7). Конус K образован векторами

$$\mathbf{x}(\tau_2) + \delta(v, R, \delta \mathbf{x}(\tau), \rho, \delta \mu), \quad (3.15)$$

где δ определяется формулой (2.60). Векторы $\delta^*x(0)$, $\delta x(\tau)$ удовлетворяют условиям:

$$\text{либо } \delta^*x(0) = 0, \quad \text{либо } \text{grad } g(x(\tau)) \cdot \delta^*x(0) < 0, \quad (3.16)$$

$$\text{либо } \delta x(\tau) = 0, \quad \text{либо } \text{grad } g(x(\tau)) \cdot \delta x(\tau) < 0.$$

Другими словами, начальные смещения $\varepsilon \delta^*x(0)$, $\varepsilon \delta x(\tau)$ либо равны нулю, либо не касаются границы $g(x) = 0$ и направлены внутрь области G .

В нижеследующей конструкции векторы $\delta^*x(0)$, $\delta x(\tau)$, входящие в выражения (3.14), (3.15), равны между собой:

$$\delta^*x(0) = \delta x(\tau). \quad (3.17)$$

Каждому набору параметров

$$v^*, \delta^*x(0), \rho^*, v, R, \delta x(\tau), \rho, \delta \mu \quad (3.18)$$

соответствует пара точек — концов соответствующих варьированных траекторий

$$y^*(\tau - \tau_1 + \varepsilon \rho^*) = x(\tau_1) + \delta^* + o(\varepsilon), \quad (3.19)$$

$$y(\tau_2 + \varepsilon \rho) = x(\tau_2) + \delta + o(\varepsilon).$$

Легко видеть (см. аналогичное рассуждение в § 2), что при всех допустимых изменениях параметров (3.18) и соблюдении условия (3.17) пары

$$(x(\tau_1) + \delta^*, x(\tau_2) + \delta)$$

образуют выпуклый конус L , лежащий в прямом произведении $X^{n+1} \cdot X^{n+1}$, с вершиной в точке $(x(\tau_1), x(\tau_2))$:

$$L = \{(x(\tau_1), x(\tau_2)) + (\delta^*, \delta)\}, \quad (\delta^*x(0) = \delta x(\tau)). \quad (3.20)$$

Пары соответствующих концов (3.19) образуют тот же конус L с точностью до $o(\varepsilon)$.

Далее, ясно, что L есть подконус конуса $K^* \cdot K$ — прямого произведения конусов K^* , K . Так как $K \subset T(x(\tau_2))$, то

$$L \subset K^* \cdot T(x(\tau_2)). \quad (3.21)$$

Наконец, очевидны и следующие включения:

$$L \supset k^* \cdot x(\tau_2), \quad L \supset x(\tau_1) \cdot k, \quad (3.22)$$

где подконусы $k^* \subset K^*$, $k \subset K$ определены в п. 1 и в § 2, п. 4.

Обозначим через S луч, выходящий из $x(\tau_2)$ и направленный вдоль отрицательной оси x^0 . Покажем, что луч $x(\tau_1) \cdot S$, лежащий в прямом произведении $K^* \cdot T(x(\tau_2))$, не является внутренним лучом конуса L .

Допустим обратное. Тогда совершенно так же, как в § 2, для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ можно доказать существование такого допустимого набора параметров [(3.18), удовлетворяющих условию (3.17), для которого пара концов (3.19) соответствующих варьированных траекторий

$$y^*(t), \quad 0 \leq t \leq \tau - \tau_1 + \varepsilon \rho^*, \quad y(t), \quad \tau \leq t \leq \tau_2 + \varepsilon \rho, \quad (3.23)$$

лежит на луче $x(\tau_1) \cdot S$ и не совпадает с его началом $(x(\tau_1), x(\tau_2))$:

$$y^*(\tau - \tau_1 + \varepsilon \rho^*) = x(\tau_1), \quad y(\tau_2 + \varepsilon \rho) = x(\tau_2) + \eta(-1, 0, \dots, 0), \quad \eta > 0. \quad (3.24)$$

Из условий (3.16), леммы п. 1 и сделанного предположения о том, что точка $\mathbf{x}(\tau_1)$ — внутренняя для G , следует, что при достаточно малом $\varepsilon > 0$ траектория $\mathbf{y}^*(t)$, $0 \leq t \leq \tau - \tau_1 + \varepsilon\rho^*$, целиком лежит в G ; траектория же $\mathbf{y}(t)$, $\tau \leq t \leq \tau_2 + \varepsilon\rho$, лежит в G по построению (см. § 2).

Определим допустимое управление $\tilde{u}(t)$, $\tau_1 - \varepsilon\rho^* \leq t \leq \tau_2 + \varepsilon\rho$, и соответствующую траекторию $\tilde{\mathbf{x}}(t)$, $\tau_1 - \varepsilon\rho^* \leq t \leq \tau_2 + \varepsilon\rho$, уравнения (1.5) формулами:

$$\begin{aligned}\tilde{u}(t) &= v^*(\tau - t), & \tilde{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{y}^*(\tau - t) & \text{при } \tau_1 - \varepsilon\rho^* \leq t \leq \tau, \\ \tilde{u}(t) &= v(t), & \tilde{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{y}(t) & \text{при } \tau \leq t \leq \tau_2 + \varepsilon\rho,\end{aligned}$$

где $\mathbf{y}^*(t)$, $\mathbf{y}(t)$ — варьированные траектории (3.23), $v^*(t)$, $v(t)$ — соответствующие им управления. Очевидно, функции $\tilde{u}(t)$, $\tilde{\mathbf{x}}(t)$, $\tau_1 - \varepsilon\rho^* \leq t \leq \tau_2 + \varepsilon\rho$, удовлетворяют уравнению (1.5), и, в силу условия (3.17), траектория $\tilde{\mathbf{x}}(t)$, $\tau_1 - \varepsilon\rho^* \leq t \leq \tau_2 + \varepsilon\rho$, непрерывна в точке τ и, следовательно, на всем отрезке $\tau_1 - \varepsilon\rho^* \leq t \leq \tau_2 + \varepsilon\rho$. Кроме того, согласно (3.24), имеем:

$$\tilde{\mathbf{x}}(\tau_1 - \varepsilon\rho^*) = \mathbf{x}(\tau_1), \quad \tilde{\mathbf{x}}(\tau_2 + \varepsilon\rho) = (x^0(\tau_2) - \eta, x^1(\tau_2), \dots, x^n(\tau_2)), \quad \eta > 0.$$

Но эти неравенства противоречат тому факту, что участок $\mathbf{x}(t)$, $\tau_1 \leq t \leq \tau_2$, оптимальной траектории $\mathbf{x}(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$, также оптимален.

Итак, луч $\mathbf{x}(\tau_1) \cdot S$ не является внутренним лучом для конуса L . Из включения (3.21) следует, что

$$\dim L \leq 2n + 1.$$

Следовательно, существует опорная $2n$ -мерная плоскость к L в вершине $(\mathbf{x}(\tau_1), \mathbf{x}(\tau_2))$, лежащая в $X^{n+1} \cdot T(\mathbf{x}(\tau_2))$ и отделяющая конус L от луча $\mathbf{x}(\tau_1) \cdot S$. Обозначим вектор, ортогональный к этой плоскости, лежащий в $X^{n+1} \cdot T(\mathbf{x}(\tau_2))$ и направленный в сторону луча $\mathbf{x}(\tau_1) \cdot S$, через (χ^*, χ) . Мы имеем:

$$\mathbf{x}(\tau_2) + \chi = \mathbf{x}(\tau_2) + (\chi_0, \dots, \chi_n) \in T(\mathbf{x}(\tau_2)), \quad (3.25)$$

$$(\chi^*, \chi) \cdot (\delta^*, \delta) = \chi^* \cdot \delta^* + \chi \cdot \delta \leq 0, \quad \chi_0 \leq 0, \quad (3.26)$$

где δ^* , δ определяются из формул (3.14), (3.15) при условии (3.17). Вектор

$$(\chi^*, \chi) \neq 0, \quad (3.27)$$

и потому векторы χ^* , χ одновременно в нуль не обращаются.

Обозначим через

$$\psi^*(t), \quad 0 \leq t \leq \tau - \tau_1, \quad (3.28)$$

решение уравнения

$$\dot{\psi}^* = \frac{\partial f(\mathbf{x}^*(t), u^*(t))}{\partial \mathbf{x}} \psi^*,$$

удовлетворяющее краевому условию

$$\psi^*(\tau - \tau_1) = \chi^*,$$

где функции $u^*(t)$, $x^*(t)$ определены формулой (3.13). Через

$$\psi^+(t), \quad \tau \leq t \leq \tau_2, \quad (3.29)$$

обозначим решение уравнения

$$\dot{\psi} = - \frac{\partial f(x(t), u(t))}{\partial x} \psi$$

с краевым условием

$$\psi(\tau_2) = \chi.$$

Используя включения (3.22), так же как в п. 1 и в § 2 получаем:

$$\begin{aligned} -\psi^*(t) \cdot f(x^*(t), u^*(t)) &= H(-\psi^*(t), x^*(t), u^*(t)) = \\ &= M(-\psi^*(t), x^*(t)) = 0, \quad 0 \leq t \leq \tau - \tau_1, \\ H(\psi^+(t), x(t), u(t)) &= m(\psi^+(t), x(t)) = 0, \quad \tau \leq t \leq \tau_2. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Кроме последнего равенства, функция $\psi^+(t)$, $\tau \leq t \leq \tau_2$, удовлетворяет всем условиям теоремы 1, за исключением, быть может, условия б), так как равенство $\chi = 0$ и, следовательно, равенство $\psi^+(t) \equiv 0$, не исключены.

Пусть

$$\psi^-(t) = -\psi^*(\tau - t), \quad \tau_1 \leq t \leq \tau. \quad (3.31)$$

Очевидно,

$$\begin{aligned} \dot{\psi}^-(t) &= - \frac{\partial f(x(t), u(t))}{\partial x} \psi^-(t), \quad \psi^-(\tau_1) = -\chi^*, \quad \tau_1 \leq t \leq \tau, \\ H(\psi^-(t), x(t), u(t)) &= M(\psi^-(t), x(t)) = 0. \end{aligned}$$

Из неравенства (3.27) следует, что хотя бы одна из функций $\psi^-(t)$, $\psi^+(t)$ отлична от нуля. Ниже доказано, что всегда $\psi^-(t) \neq 0$ и, следовательно, $\psi^-(t)$ удовлетворяет всем условиям принципа максимума.

Докажем теперь, что либо

$$\psi^+(\tau) = \psi^-(\tau) + \mu \operatorname{grad} g(x(\tau)), \quad \psi^-(t) \neq 0,$$

либо

$$\psi^-(\tau) + \mu \operatorname{grad} g(x(\tau)) = 0, \quad \mu \neq 0.$$

Тем самым условия скачка будут доказаны, так как функцию $\psi^-(t)$, $\tau_1 \leq t \leq \tau$, можно принять за функцию (3.8), а функцию $\psi^+(t)$, $\tau \leq t \leq \tau_2$, — за функцию (3.9), если $\psi^+(t) \neq 0$.

Варьированные траектории, концы которых заданы формулой (3.19), выберем следующим образом.

Положим

$$\rho^* = \rho = 0, \quad \delta\mu = 1, \quad v^*(t) = u^*(t),$$

$$\delta^*x(0) = \delta x(\tau) = -N,$$

где N — произвольный вектор, не касательный к границе $g(x) = 0$ в точке $x(\tau)$ и направленный наружу относительно области G ; произвольность в выборе N достигается за счет соответствующего выбора функции R (см. § 2, п. 4). Наконец, управление v выберем без определяющих

точек, так что траектория $y(t)$ будет строиться по выбранным параметрам $\rho = 0$, $\delta\mu = 1$, $\delta x(\tau) = -N$, R при помощи конструкции, примененной при доказательстве леммы 1 § 2. Для векторов δ^* , δ , определенных по формулам (3.19), получим выражения [см. (3.7), (2.43)]:

$$\delta^* = - \sum_{\alpha=0}^n \varphi_{\alpha}^*(\tau - \tau_1) N_{\alpha}^*, \quad (3.32)$$

$$\delta = \sum_{\alpha=0}^n \varphi_{\alpha}(\tau_2) \left(-N^{\alpha} + \int_{\tau}^{\tau_2} \psi^{\alpha}(t) \cdot \Lambda(t) \frac{\partial R}{\partial \mu} dt \right),$$

где

$$\sum_{\alpha=0}^n \varphi_{\alpha}^*(0) N_{\alpha}^* = \sum_{\alpha=0}^n \varphi_{\alpha}(\tau) N^{\alpha} = N.$$

Здесь через $\varphi_0^*(t), \dots, \varphi_n^*(t)$, $0 \leq t \leq \tau - \tau_1$, обозначена фундаментальная система решений уравнения в вариациях для уравнения (3.12).

Через $\psi_0^*(t), \dots, \psi_n^*(t)$ обозначим систему функций, сопряженную с $\varphi_0^*(t), \dots, \varphi_n^*(t)$. Мы имеем:

$$\begin{aligned} -\chi^* \cdot \delta^* &= \sum_{\alpha=0}^n \chi^* \cdot \varphi_{\alpha}^*(\tau - \tau_1) N_{\alpha}^* = \\ &= \sum_{\alpha, \beta=0}^n (\chi_{\beta}^* \psi_{\alpha}^{\beta}(\tau - \tau_1)) \cdot (\varphi_{\alpha}^*(\tau - \tau_1) N_{\alpha}^*) = \sum_{\alpha=0}^n \chi_{\alpha}^* N_{\alpha}^* = \psi^*(0) \cdot N, \end{aligned}$$

где $\psi^*(0)$ — начальное значение функции (3.28). Из равенства (3.31) следует:

$$\chi^* \cdot \delta^* = \psi^-(\tau) \cdot N. \quad (3.33)$$

Аналогично, второе из равенств (3.32) дает:

$$\chi \cdot \delta = -\psi^+(\tau) \cdot N + \int_{\tau}^{\tau_2} \psi^+(t) \cdot \Lambda(t) \frac{\partial R}{\partial \mu} dt = -\psi^+(\tau) \cdot N - \int_{\tau}^{\tau_2} \lambda(t) \frac{\partial R}{\partial \mu} dt,$$

где $\lambda(t) = -\psi^+(t) \cdot \Lambda(t)$. Используя выражение (2.44) для $\frac{\partial R}{\partial \mu}$ и интегрируя по частям, получим:

$$\begin{aligned} \chi \cdot \delta &= -\psi^+(\tau) \cdot N - \left[\lambda(t) \sum_{i=1}^s a_i(x(t)) \frac{\partial g(x(t))}{\partial x} \cdot N_i \right]_{\tau}^{\tau_2} + \\ &+ \int_{\tau}^{\tau_2} \lambda'(t) \sum_{i=1}^s a_i(x(t)) \frac{\partial g(x(t))}{\partial x} \cdot N_i dt = \\ &= -\psi^+(\tau) \cdot N + \lambda(\tau) \frac{\partial g(x(\tau))}{\partial x} \cdot N + \int_{\tau}^{\tau_2} \lambda'(t) \sum_{i=1}^s a_i(x(t)) \frac{\partial g(x(t))}{\partial x} \cdot N_i dt. \end{aligned}$$

Складывая это равенство с (3.33) и учитывая неравенство (3.26),

находим:

$$\begin{aligned} \chi^* \cdot \delta^* + \chi \cdot \delta = & (\psi^-(\tau) - \psi^+(\tau) + \lambda(\tau) \frac{\partial g(\mathbf{x}(\tau))}{\partial \mathbf{x}}) \cdot \mathbf{N} + \\ & + \int_{\tau}^{\tau_2} \lambda' \sum_{i=1}^s a_i(\mathbf{x}(t)) \frac{\partial g(\mathbf{x}(t))}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{N}_i dt \leq 0. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Величина

$$\int_{\tau}^{\tau_2} \lambda' \sum_{i=1}^s a_i(\mathbf{x}(t)) \frac{\partial g(\mathbf{x}(t))}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{N}_i dt$$

может быть сделана сколь угодно малой при заданном $\mathbf{N}$ за счет выбора малых окрестностей Q_{ε_i} , входящих в определение функции R , в то время как первое слагаемое равенства (3.34) от этих окрестностей не зависит. Следовательно, для произвольного вектора $\mathbf{N}$, не касательного к границе $g(\mathbf{x}) = 0$ в точке $\mathbf{x}(\tau)$ и направленного наружу относительно области G , справедливо неравенство

$$[\psi^-(\tau) - \psi^+(\tau) + \lambda(\tau) \text{grad } g(\mathbf{x}(\tau))] \cdot \mathbf{N} \leq 0,$$

которое, в силу произвольности вектора $\mathbf{N}$, эквивалентно равенству

$$\psi^+(\tau) = \psi^-(\tau) + \mu \text{grad } g(\mathbf{x}(\tau)). \quad (3.35)$$

Вектор $\psi^-(\tau) \neq 0$, так как из равенства $\psi^-(\tau) = 0$ и неравенства (3.27) следует неравенство $\psi^+(\tau) \neq 0$; с другой стороны, из (3.35) получаем соотношение

$$\psi^+(\tau) = \mu \text{grad } g(\mathbf{x}(\tau)) \neq 0,$$

которое противоречит включению (3.25).

При $\psi^+(\tau) = 0$ получаем:

$$\psi^-(\tau) = \mu \text{grad } g(\mathbf{x}(\tau)) = 0, \quad \mu \neq 0.$$

Таким образом, теорема 2 доказана в том случае, когда $\mathbf{x}(\tau_1)$ — внутренняя точка области G .

Пусть теперь $\mathbf{x}(\tau_1)$ лежит на границе $g(\mathbf{x}) = 0$. Этот случай легко сводится к рассмотренному: достаточно определить функцию $\psi_0^-(t)$ на отрезке $\theta \leq t \leq \tau$, где $\tau_1 < \theta$, и затем устремить точку θ к τ_1 ; мы получим семейство функций $\psi_0^-(t)$, $\theta \leq t \leq \tau$, для которых существует искомая предельная функция $\psi^-(t)$, $\tau_1 \leq t \leq \tau$.

Замечание 1. Если участок $\{\mathbf{x}(t), \tau < t < \tau_2\}$ также принадлежит открытому ядру области G , то неравенство (3.34) заменится неравенством

$$(\psi^-(\tau) - \psi^+(\tau)) \cdot \mathbf{N} \leq 0,$$

из которого следует равенство

$$\psi^+(\tau) = \psi^-(\tau) + \mu \text{grad } g(\mathbf{x}(\tau)), \quad \mu \geq 0.$$

Замечание 2. Если участок $\mathbf{x}(t)$, $\tau \leq t \leq \tau_2$, лежит на границе $g(\mathbf{x}) = 0$, то векторы $\text{grad } g(\mathbf{x}(\tau))$ и $\mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau), u(\tau+0))$ ортогональны и ус-

ловие скачка дает;

$$\begin{aligned}\psi^-(\tau) \cdot f(x(\tau), u(\tau-0)) &= (\psi^-(\tau) + \mu \operatorname{grad} g(x(\tau))) \cdot f(x(\tau), u(\tau+0)) = \\ &= \psi^-(\tau) \cdot f(x(\tau), u(\tau+0)) = M(\psi^-(\tau), x(\tau)) = 0.\end{aligned}$$

Отсюда вытекает, что если система уравнений относительно u :

$$\psi^-(\tau) \cdot f(x(\tau), u) = M(\psi^-(\tau), x(\tau)) = 0$$

имеет единственное решение

$$u(\tau-0) = u(\tau+0),$$

то вектор

$$f(x(\tau), u(\tau-0)) = f(x(\tau), u(\tau+0))$$

касается границы $g(x) = 0$ в точке $x(\tau)$; другими словами, оптимальная траектория в точке стыка $x(\tau)$ остается гладкой.

Замечание 3. Если оптимальная траектория лежит на кусочно-гладкой границе области G (до сих пор мы рассматривали область G с гладкой границей), то уравнения движения всякого участка траектории, целиком лежащего на гладком куске границы, уже найдены в § 2. При переходе траектории с одного гладкого куска границы на другой выполняются условия скачка, вполне аналогичные условиям (3.10), (3.11).

Замечание 4. Условия скачка справедливы и для следующей оптимальной задачи.

Пусть фазовое пространство X^{n+1} разбито на две части X_1, X_2 гиперповерхностью $g(x) = 0$. Пусть в части X_1 уравнение движения фазовой точки имеет вид

$$\dot{x} = f_1(x, u),$$

а в части X_2 — вид

$$\dot{x} = f_2(x, u).$$

Требуется выбрать такое допустимое управление, чтобы фазовая точка из начального положения $\xi \in X_1$ попала на прямую $\pi \subset X_2$, параллельную оси x^0 , и координата x^0 конца траектории обратилась в минимум.

Траектория движения в каждой из частей X_1, X_2 будет удовлетворять принципу максимума, а в момент перехода через границу раздела $g(x) = 0$ будет выполняться условие скачка.

При выводе условия скачка в рассматриваемом случае начальное смещение варьированной траектории должно лежать строго на границе раздела $g(x) = 0$. Поэтому лемму п. 1 невозможно использовать и доказательство § 3 проходит лишь в том случае, если ни один из векторов $f(x(\tau), u(\tau-0)), f(x(\tau), u(\tau+0))$ в точке стыка $x(\tau)$ не касается гиперповерхности $g(x) = 0$. Мне неизвестно, справедливо ли условие скачка и в том случае, когда хотя бы один из этих векторов касается границы раздела $g(x) = 0$.

Если изучается обычная вариационная задача, то из условия скачка непосредственно следуют известные условия преломления экстремалей. В качестве примера мы выведем здесь эти условия для простейшей вариационной задачи.

Пусть плоскость x, y делится линией $g(x, y) = 0$ на две части X_1, X_2 , и пусть заданы две точки $(x_1, y_1) \in X_1, (x_2, y_2) \in X_2$. Требуется сое-

динить эти точки непрерывной кусочно-гладкой линией $y = y(x)$ таким образом, чтобы интеграл

$$\int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') dx,$$

где

$$F(x, y, y') = f_1(x, y, y') \text{ при } (x, y) \in X_1,$$

$$F(x, y, y') = f_2(x, y, y') \text{ при } (x, y) \in X_2$$

и f_1, f_2 — гладкие функции своих аргументов, обращался в минимум.

Введем обозначения:

$$x^0 = \int_{x^1}^x F(x, y, y') dx, \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad u = y'.$$

Область Ω допустимых значений управления — открытое множество числовой прямой. Принцип максимума записывается следующим образом (легко доказать, что $\phi_0 \neq 0$ и, следовательно, можно положить $\phi_0 = -1$):

$$\dot{x}^0 = F(x, y, y'), \quad \dot{\phi}_0 = 0,$$

$$\dot{x}^1 = 1, \quad \dot{\phi}_1 = \frac{\partial F}{\partial x},$$

$$\dot{x}^2 = u = y', \quad \dot{\phi}_2 = \frac{\partial F}{\partial y},$$

$$H = -F(x, y, y') + \phi_1 + \phi_2 y' = \max = 0.$$

Условия $H = \max$ и $H = 0$ соответственно дают:

$$\phi_2 = \frac{\partial F}{\partial y'}, \quad \phi_1 = F - \frac{\partial F}{\partial y'} y'.$$

Из условия скачка $\phi^+ = \phi^- + \mu \operatorname{grad} g(x, y)$ следует:

$$\phi_1^+ = f_2 - \frac{\partial f_2}{\partial y'} (y^+)' = f_1 - \frac{\partial f_1}{\partial y'} (y^-)' + \mu N^1,$$

$$\phi_2^+ = \frac{\partial f_2}{\partial y'} = \frac{\partial f_1}{\partial y'} + \mu N^2,$$

где (N^1, N^2) — вектор нормали к линии $g(x, y) = 0$ в точке перелома траектории. Обозначим через Y' тангенс угла наклона касательной к кривой $g = 0$ в точке перелома. Имеем:

$$\frac{\frac{\partial f_2}{\partial y'} - \frac{\partial f_1}{\partial y'}}{f_2 - f_1 + \frac{\partial f_1}{\partial y'} (y^-)' - \frac{\partial f_2}{\partial y'} (y^+)' } = -\frac{1}{Y'},$$

откуда получаем известную формулу [см. (10)]:

$$f_1 + \frac{\partial f_1}{\partial y'} (Y' - (y^-)') = f_2 + \frac{\partial f_2}{\partial y'} (Y' - (y^+)').$$

§ 4. Общий принцип для определения оптимальных траекторий

Объединяя теоремы 1, 2 и принцип максимума, мы приходим к следующей теореме, дающей полную систему необходимых условий, которым удовлетворяет всякая регулярная оптимальная траектория, являющаяся решением оптимальной задачи § 1.

ТЕОРЕМА 3. Пусть оптимальная траектория уравнения (1.5) целиком лежит в замкнутой области G , содержит конечное число точек стыка, и пусть всякий ее участок, лежащий на границе области G , регулярен. Тогда всякий участок траектории, лежащий в открытом ядре области G (за исключением, быть может, концов траектории), удовлетворяет принципу максимума; всякий ее участок, лежащий на границе области G , удовлетворяет теореме 1; в каждой точке стыка выполняется условие скачка (теорема 2).

Математический институт
им. В. А. Стеклова АН СССР

Поступило
7.VII.1959

ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Болтянский В. Г., Гамкредидзе Р. В., Понтрягин Л. С., К теории оптимальных процессов, Доклады Ак. наук СССР, 110, № 1 (1957), 7—10.
- ² Гамкредидзе Р. В., К теории оптимальных процессов в линейных системах, Доклады Ак. наук СССР, 116, № 1 (1957), 9—12.
- ³ Гамкредидзе Р. В., Теория оптимальных по быстродействию процессов в линейных системах, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 22 (1958), 449—474.
- ⁴ Болтянский В. Г., Принцип максимума в теории оптимальных процессов, Доклады Ак. наук СССР, 119, № 6 (1958), 1070—1073.
- ⁵ Гамкредидзе Р. В., К общей теории оптимальных процессов, Доклады Ак. наук СССР, 123, № 2 (1958), 223—226.
- ⁶ Болтянский В. Г., Гамкредидзе Р. В., Понтрягин Л. С., Теория оптимальных процессов, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 24 (1960), 3—42.
- ⁷ Гамкредидзе Р. В., Оптимальные по быстродействию процессы при ограниченных фазовых координатах, Доклады Ак. наук СССР, 125, № 3 (1959), 475—478.
- ⁸ Пернер А. Я., О предельном быстродействии систем автоматического регулирования, Автоматика и телемеханика, XV, № 6 (1954), 461—477.
- ⁹ Розенман Е. А., О предельном быстродействии следящих систем, Автоматика и телемеханика, XIX, № 7 (1958), 633—653.
- ¹⁰ Гюнтер Н. М., Курс вариационного исчисления, М.—Л., 1941.