

# Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

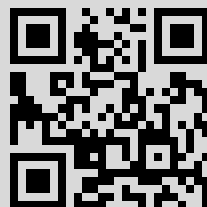
В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкредидзе, Л. С. Понтрягин, Теория оптимальных процессов. I. Принцип максимума, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, 1960, том 24, выпуск 1, 3–42

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением  
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 93.181.215.58

19 ноября 2015 г., 17:20:41



В. Г. БОЛТЯНСКИЙ, Р. В. ГАМКРЕЛИДЗЕ, Л. С. ПОНТЯГИН

### ТЕОРИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ. I ПРИНЦИП МАКСИМУМА

В работе дается подробное изложение результатов, ранее кратко изложенных авторами в ряде заметок [см. <sup>(1)</sup>—<sup>(5)</sup> и <sup>(9)</sup>].

Многие технические задачи связаны с рассмотрением так называемых *оптимальных процессов*, характеризуемых тем, что процесс управления некоторым техническим объектом должен быть в каком-то определенном смысле наилучшим («оптимальным»), например время или работа, затраченные для достижения определенного состояния, должны быть наименьшими. Мы даем в настоящей работе весьма общие необходимые условия оптимальности, кратко опубликованные ранее в заметках <sup>(1)</sup>, <sup>(2)</sup>, <sup>(3)</sup>. Эти условия изложены здесь в форме принципа максимума [см. <sup>(1)</sup>] и применимы к рассматриваемому ниже общему случаю системы вида (1). Вопрос о связи принципа максимума с классическими результатами вариационного исчисления обсуждается ниже (п. 8).

В частном случае линейных систем и оптимальности, понимаемой в смысле «быстродействия», имеются некоторые дальнейшие результаты <sup>(4)</sup>, <sup>(5)</sup>: существование оптимальных управлений, синтез оптимальных управлений и др. Эти вопросы подробно рассмотрены во второй половине статьи <sup>(6)</sup>.

1. Допустимые управления. Мы будем рассматривать поведение объекта, состояние которого в каждый момент времени характеризуется  $n$  переменными  $x^1, x^2, \dots, x^n$  (например, координатами и скоростями). Векторное пространство  $X$  векторной переменной  $x = \{x^1, x^2, \dots, x^n\}$  является фазовым пространством рассматриваемого объекта. Поведение (движение) объекта заключается (с математической точки зрения) в том, что переменные  $x^1, x^2, \dots, x^n$  меняются с течением времени. Предполагается, что движением объекта можно *управлять*, т. е. что объект снабжен некоторыми «рулями», от положения которых зависит движение объекта. Положения «рулей» характеризуются точкой  $u$  некоторой области управления  $U$ , которая может быть любым топологическим хаусдорфовым пространством. В приложениях важен случай, когда  $U$  является замкнутой областью некоторого  $r$ -мерного евклидова пространства  $E$ ; в этом случае задание точки  $u = (u^1, u^2, \dots, u^r) \in U$  равносильно заданию системы числовых параметров  $u^1, u^2, \dots, u^r$ .

Каждую функцию  $u = u(t)$ , определенную на некотором отрезке  $t_0 \leq t \leq t_1$  времени  $t$  и принимающую значения в пространстве  $U$ , мы будем называть *управлением*. В дальнейшем предполагается, что выбран

некоторый класс  $D$  управлений; управления, принадлежащие этому классу, будут называться *допустимыми*. От класса  $D$  допустимых управлений требуется только, чтобы он удовлетворял следующим трем условиям:

1) все управления  $u = u(t)$ , принадлежащие классу  $D$  (т. е. допустимые), должны быть *измеримыми* и *ограниченными*. Управление  $u = u(t)$ ,  $t_0 \leq t \leq t_1$ , называется *измеримым*, если для любого открытого множества  $O \subset U$  множество тех значений  $t$ , для которых  $u(t) \in O$ , измеримо на отрезке  $t_0 \leq t \leq t_1$ . Управление *ограничено*, если множество всех точек  $u(t)$ ,  $t_0 \leq t \leq t_1$ , имеет в пространстве  $U$  компактное замыкание. (Если, в частности,  $U$  есть замкнутое подмножество векторного пространства переменной  $u = (u^1, u^2, \dots, u^r)$ , то измеримость и ограниченность имеют обычный смысл.)

2) Если  $u(t)$ ,  $t_0 \leq t \leq t_1$ , — допустимое управление и если  $v$  — произвольная точка пространства  $U$ , а  $t', t''$  — такие числа, что  $t_0 \leq t' \leq t'' \leq t_1$ , то управление  $u_1(t)$ ,  $t_0 \leq t \leq t_1$ , определяемое формулой

$$u_1(t) = \begin{cases} v & \text{при } t' \leq t \leq t'', \\ u(t) & \text{при } t < t' \text{ или } t > t'', \end{cases}$$

также является допустимым.

3) Если отрезок  $t_0 \leq t \leq t_1$  можно разбить точками деления на конечное число частичных отрезков, на каждом из которых управление  $u(t)$  допустимо, то это управление допустимо и на всем отрезке  $t_0 \leq t \leq t_1$ . Допустимое управление, рассматриваемое на частичном отрезке, также является допустимым. Управление, получающееся из допустимого управления  $u(t)$ ,  $t_0 \leq t \leq t_1$ , сдвигом времени (т. е. управление  $u_1(t) = u(t - \alpha)$ ,  $t_0 + \alpha \leq t \leq t_1 + \alpha$ ), также является допустимым.

В качестве класса допустимых управлений можно взять, например, класс всех измеримых ограниченных управлений. Другим примером может служить множество всех кусочно-непрерывных управлений (т. е. таких управлений  $u = u(t)$ , каждое из которых непрерывно для всех рассматриваемых  $t$ , за исключением лишь конечного числа моментов времени, где функция  $u(t)$  может терпеть разрывы первого рода). Этот класс допустимых управлений, по-видимому, наиболее интересен для технических применений развиваемой здесь теории; такие управления соответствуют предположению о «безынерционности» рулей. Можно также рассматривать класс всех кусочно-постоянных управлений, класс кусочно-линейных управлений и т. п. В дальнейшем класс  $D$  допустимых управлений предполагается раз навсегда фиксированным.

2. Постановка задачи. Мы будем предполагать, что закон движения объекта (и закон воздействия «рулей» на это движение) записывается в виде системы дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx^i}{dt} = f^i(x^1, x^2, \dots, x^n; u) = f^i(x, u), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (1)$$

или, в векторной форме,

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u), \quad (2)$$

где  $f(x, u)$  — вектор с координатами  $f^1(x, u), f^2(x, u), \dots, f^n(x, u)$ . Функции  $f^i$  определены для любых значений векторной переменной  $x \in X$  и

для значений  $u$ , принадлежащих области управления  $U$ . Они предполагаются непрерывными по совокупности переменных  $x^1, x^2, \dots, x^n, u$  и непрерывно дифференцируемыми по  $x^1, x^2, \dots, x^n$ . Иначе говоря, функции

$$f^i(x^1, x^2, \dots, x^n; u) \text{ и } \frac{\partial f^i(x^1, x^2, \dots, x^n; u)}{\partial x^j}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n,$$

определены и непрерывны на прямом произведении  $X \times U$ .

Заметим, что система (4) *автономна*, т. е. правые ее части не зависят от времени  $t$ . Случай, когда правые части зависят от  $t$ , мы рассмотрим в конце работы (п. 19).

Если задан закон управления, т. е. выбрано некоторое допустимое управление  $u = u(t)$ , то уравнение (2) принимает вид

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u(t)), \quad (3)$$

откуда (при любых начальных условиях  $x(t_0) = x_0$ ) однозначно определяется закон движения объекта  $x = x(t)$ , т. е. решение уравнения (3), определенное на некотором отрезке времени. Это решение является абсолютно непрерывной вектор-функцией, почти всюду (на отрезке своего определения) удовлетворяющей соотношению (3) [см. (7)].

Мы будем говорить, что допустимое управление  $u(t)$  *переводит* точку  $x_0$  в точку  $x_1$ , если решение  $x(t)$  уравнения (3), удовлетворяющее начальному условию  $x(t_0) = x_0$ , проходит в некоторый момент  $t_1$  через точку  $x_1$ , т. е. удовлетворяет также конечному условию  $x(t_1) = x_1$ .

Предположим теперь, что задана функция  $f^0(x^1, x^2, \dots, x^n; u) = f^0(x, u)$ , определенная и непрерывная вместе со своими частными производными  $\frac{\partial f^0}{\partial x^i}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , на всем пространстве  $X \times U$ . Тогда основная задача (отыскание оптимальных управлений) может быть сформулирована следующим образом:

*В фазовом пространстве  $X$  даны две точки  $x_0$  и  $x_1$ . Среди всех допустимых управлений  $u = u(t)$ , переводящих точку  $x_0$  в точку  $x_1$  (если такие управления существуют), найти такое, для которого функционал*

$$J = \int_{t_0}^{t_1} f^0(x(t), u(t)) dt \quad (4)$$

*принимает наименьшее возможное значение; здесь  $x(t)$  — решение уравнения (3) с начальным условием  $x(t_0) = x_0$ , а  $t_1$  — момент прохождения этого решения через точку  $x_1$ .*

Отметим, что (при фиксированных  $t_0, x_0, x_1$ ) верхний предел  $t_1$  в интеграле (4) не является фиксированным числом, а зависит от выбора управления  $u(t)$ , переводящего точку  $x_0$  в точку  $x_1$  (этот верхний предел определяется из соотношения  $x(t_1) = x_1$ ). О решении задачи для случая закрепленного верхнего предела мы будем говорить в конце работы (п. 20).

Управление  $u(t)$ , дающее решение поставленной выше задачи, называется *оптимальным управлением*, соответствующим переходу из точки  $x_0$  в точку  $x_1$ , а соответствующая траектория  $x(t)$  — *оптимальной траекторией*. Таким образом, основная задача заключается в отыскании

оптимальных управлений (и соответствующих оптимальных траекторий).

Важным частным случаем поставленной выше оптимальной задачи является случай, когда  $f^0(x, u) \equiv 1$ . В этом случае функционал (4) принимает вид:

$$J = t_1 - t_0, \quad (5)$$

и оптимальность управления  $u(t)$  означает минимальность времени перхода из точки  $x_0$  в точку  $x_1$ . Задачу отыскания оптимальных управлений (и траекторий) в этом случае мы будем называть задачей об оптимальном быстродействии.

3. Эквивалентная формулировка задачи. Для формулировки и доказательства необходимого условия оптимальности нам будет удобно переформулировать поставленную выше задачу следующим образом. Добавим к фазовым координатам  $x^1, x^2, \dots, x^n$ , меняющимся по закону (1), еще одну координату  $x^0$ , закон изменения которой имеет вид:

$$\frac{dx^0}{dt} = f^0(x^1, x^2, \dots, x^n; u),$$

где  $f^0$  — функция, участвующая в определении функционала  $J$  [см. (4)]. Иначе говоря, мы будем рассматривать систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx^i}{dt} = f^i(x^1, x^2, \dots, x^n; u) = f^i(x, u), \quad i = 0, 1, 2, \dots, n, \quad (6)$$

правые части которой не зависят от переменного  $x^0$ . Введя в рассмотрение вектор

$$\mathbf{x} = \{x^0, x^1, \dots, x^n\} = \{x^0, x\}$$

$(n+1)$ -мерного векторного пространства  $\mathbf{X}$ , мы сможем систему (6) переписать в векторной форме:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, u), \quad (7)$$

где  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, u)$  — вектор пространства  $\mathbf{X}$ , имеющий координаты  $f^0(x, u), \dots, f^n(x, u)$ . Заметим, что вектор  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, u)$  не зависит от координаты  $x^0$  вектора  $\mathbf{x}$ .

Пусть теперь  $u(t)$  — некоторое допустимое управление, переводящее  $x_0$  в  $x_1$ , а  $x = x(t)$  — решение уравнения (3) с начальным условием  $x(t_0) = x_0$ . Обозначим через  $\mathbf{x}_0$  точку  $(0, x_0)$ , т. е. точку пространства  $\mathbf{X}$ , имеющую координаты  $0, x_0^1, \dots, x_0^n$ , где  $x_0^1, \dots, x_0^n$  — координаты точки  $x_0$  в пространстве  $X$ . Тогда ясно, что решение уравнения (7) с начальным условием  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$  имеет вид:

$$x^0 = \int_{t_0}^t f^0(x(t), u(t)) dt, \\ x = x(t).$$

В частности, при  $t = t_1$  мы получим

$$x^0 = \int_{t_0}^{t_1} f^0(x(t), u(t)) dt = J, \quad x = x_1.$$

т. е. решение  $\mathbf{x}(t)$  уравнения (7) с начальным условием  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$  проходит при  $t = t_1$  через точку  $\mathbf{x}_1 = (J, x_1)$ . Иначе говоря, обозначив через  $\Pi$  прямую линию, проходящую в пространстве  $X$  через точку  $\mathbf{x} = (0, x_1)$  параллельно оси  $x_0$  (эта прямая образована всеми точками  $(\xi, x_1)$ , где число  $\xi$  произвольно), мы можем сказать, что решение  $\mathbf{x}(t)$  проходит в момент  $t = t_1$  через точку, лежащую на прямой  $\Pi$  и имеющую координату  $x^0 = J$ . Обратно, если  $u(t)$  — такое допустимое управление, что решение уравнения (7) с начальным условием  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 = (0, x_0)$  проходит в некоторый момент  $t_1$  через точку  $\mathbf{x}_1 \in \Pi$  с координатой  $x^0 = J$ , то управление  $u(t)$  переводит (в пространстве  $X$ ) точку  $x_0$  в точку  $x_1$ , причем функционал (4) принимает значение  $J$ .

Таким образом, мы можем сформулировать поставленную выше оптимальную задачу в следующем эквивалентном виде:

*В  $(n+1)$ -мерном фазовом пространстве  $X$  даны точка  $\mathbf{x}_0 = (0, x_0)$  и прямая  $\Pi$ , параллельная оси  $x^0$  и проходящая через точку  $(0, x_1)$ . Среди всех допустимых управлений  $u = u(t)$ , обладающих тем свойством, что решение  $\mathbf{x}(t)$  уравнения (7) с начальным условием  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$  пересекает прямую  $\Pi$ , найти такое, для которого точка пересечения с прямой  $\Pi$  имеет наименьшую координату  $x^0$ .*

Эту задачу мы и будем решать. Термины «оптимальное управление» и «оптимальная траектория» мы сохраним и для задачи в этой новой формулировке.

4. Перенос вектора вдоль траектории. Мы переходим к решению поставленной оптимальной задачи. В этом и следующем пунктах вводится система уравнений (13), связанная с системой (6), и выясняется ее геометрический смысл. При желании читатель может временно пропустить эти два пункта, рассматривая (13) как вспомогательную систему, формально присоединяемую к системе (6), и перейти к п. 6, в котором формулируется необходимое условие оптимальности.

В приводимых ниже доказательствах часто будет встречаться положительный параметр  $\varepsilon$ , который мы будем считать величиной первого порядка малости. Величины, имеющие более высокий порядок малости (по  $\varepsilon$ ), мы будем отбрасывать и заменять многоточием.

Условимся далее, что если в некотором одночлене (как, например, в правой части написанного ниже уравнения (9)) дважды встречается один и тот же индекс, один раз в качестве верхнего, а другой раз в качестве нижнего, то по этому индексу предполагается произведенным *суммирование*, распространенное на все допустимые значения этого индекса. Например, в уравнении (9) подразумевается суммирование от  $\nu = 1$  до  $\nu = n$ . Во избежание недоразумений мы условимся обозначать индекс суммирования через  $\alpha$  или  $\beta$ , когда суммирование производится в пределах от 0 до  $n$ , и через  $\mu$  или  $\nu$ , когда суммирование производится от 1 до  $n$ .

Пусть  $u(t)$  — произвольное допустимое управление, заданное на некотором отрезке с левым концом в точке  $t = t_0$ , а

$$\mathbf{x}(t) = (x^0(t), x^1(t), \dots, x^n(t)) = (x^0(t), \mathbf{x}(t))$$

— соответствующее этому управлению решение уравнения (7) с началь-

ным условием  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ . Обозначим через  $\mathbf{y}(t)$  решение, соответствующее тому же управлению  $u(t)$  и исходящее (в тот же момент  $t_0$ ) из близкой к  $\mathbf{x}_0$  точки

$$\mathbf{y}_0 = \mathbf{x}_0 + \varepsilon \xi_0 + \dots,$$

где  $\xi_0$  — постоянный (т. е. не зависящий от  $\varepsilon$ ) вектор пространства  $X$ . Как известно, решение  $\mathbf{y}(t)$  имеет вид:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{x}(t) + \varepsilon \delta \mathbf{x}(t) + \dots, \quad (8)$$

где  $\delta \mathbf{x}(t) = \{\delta x^0(t), \delta x^1(t), \dots, \delta x^n(t)\}$  — не зависящий от  $\varepsilon$  вектор, определяемый следующими уравнениями в вариациях:

$$\frac{d(\delta x^i)}{dt} = \frac{\partial f^i(x(t), u(t))}{\partial x^v} \delta x^v, \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad (9)$$

при начальном условии

$$\delta \mathbf{x}(t_0) = \xi_0.$$

Уравнения (9) позволяют каждому вектору  $\xi_0 = \delta \mathbf{x}(t_0)$  поставить в соответствие семейство векторов  $\{\xi_t = \delta \mathbf{x}(t)\}$  (для  $t$ , больших чем  $t_0$ ). Мы условимся считать  $\xi_t = \delta \mathbf{x}(t)$  связанным вектором, исходящим из точки  $\mathbf{x}(t)$ . Таким образом, каждый вектор  $\xi_0$ , заданный в точке  $\mathbf{x}_0$ , определяет векторное поле  $\{\xi_t\}$ , заданное вдоль траектории  $\mathbf{x}(t)$ . Будем говорить, что векторы этого поля получаются из начального вектора  $\xi_0$  переносом вдоль траектории  $\mathbf{x}(t)$ .

Обозначим через  $X_t$  векторное пространство, получающееся из  $X$  переносом начала в точку  $\mathbf{x}(t)$ , т. е. пространство связанных векторов, исходящих из точки  $\mathbf{x}(t)$ . Вектор  $\xi_t = \delta \mathbf{x}(t)$  является элементом этого пространства  $X_t$ . Обозначим, далее, через  $A_{t_0, t}$  преобразование пространства  $X_{t_0}$  в пространство  $X_t$ , переводящее каждый вектор  $\xi_0$  пространства  $X_{t_0}$  в вектор  $\xi_t$ , получающийся из  $\xi_0$  переносом вдоль траектории  $\mathbf{x}(t)$ . Так как система (9) линейна и однородна, то преобразование  $A_{t_0, t}$  линейно и невырожденно. Кроме того, оно, очевидно, однородно, т. е. переводит начало координат пространства  $X_{t_0}$  в начало координат пространства  $X_t$ .

Рассмотрев вместо  $t_0$  и  $t$  любые другие моменты времени  $t'$ ,  $t''$  (взятые на отрезке, на котором определены и управление  $u(t)$  и решение  $\mathbf{x}(t)$ ), мы аналогично определим линейное невырожденное однородное преобразование  $A_{t', t''}$  пространства  $X_{t'}$  на пространство  $X_{t''}$ . Очевидно, что эти линейные преобразования обладают следующими свойствами ( $E$  — тождественное преобразование):

$$A_{t', t'} = E, \quad A_{t'', t''} \cdot A_{t', t''} = A_{t', t''}. \quad (10)$$

По определению преобразований  $A_{t', t''}$ , векторы  $A_{t_0, t}(\xi_0)$  образуют семейство векторов, получающихся из  $\xi_0$  переносом вдоль траектории  $\mathbf{x}(t)$ , и потому удовлетворяют уравнению (9):

$$\frac{d}{dt} [A_{t_0, t}(\xi_0)]^i = \frac{\partial f^i(x(t), u(t))}{\partial x^v} \cdot [A_{t_0, t}(\xi_0)]^v, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Решение (8) переписывается, очевидно, следующим образом:

$$\mathbf{y}(t) - \mathbf{x}(t) = \varepsilon A_{t_0, t}(\xi_0) + \dots = A_{t_0, t}[\mathbf{y}(t_0) - \mathbf{x}(t_0)] + \dots \quad (11)$$

5. Сопряженная система уравнений. Пусть  $L_0$  — некоторая гиперплоскость пространства  $X$ , проходящая через точку  $x_0$  (т. е.  $n$ -мерное подпространство пространства  $X_{t_0}$ ). Линейное преобразование  $A_{t_0,t}$  переводит гиперплоскость  $L_0$  в некоторую гиперплоскость  $L_t$  (проходящую через точку  $x(t)$ ). Таким образом, мы получаем семейство гиперплоскостей  $\{L_t\}$ , получающихся, как мы будем говорить, *переносом* гиперплоскости  $L_0$  вдоль траектории  $x(t)$ . Найдем дифференциальное уравнение таких семейств гиперплоскостей.

Мы можем записать уравнение гиперплоскости  $L_t$  в виде

$$\phi_\alpha(t) x^\alpha = 0, \quad (12)$$

где  $x^\alpha$ ,  $\alpha = 0, 1, \dots, n$ , — текущие координаты, взятые в пространстве  $X_t$ , а  $\phi_\alpha(t)$  — коэффициенты уравнения этой гиперплоскости (свободный член отсутствует, так как гиперплоскость  $L_t$  проходит через начало координат пространства  $X_t$ ). Мы хотим узнать, каковы должны быть функции  $\phi_\alpha(t)$ , чтобы уравнение (12) определяло при различных значениях параметра  $t$  семейство гиперплоскостей, перенесенных вдоль траектории  $x(t)$ . Оказывается, что такие функции  $\phi_\alpha(t)$  можно находить из системы дифференциальных уравнений:

$$\frac{d\phi_i(t)}{dt} = - \frac{\partial f^\alpha(x(t), u(t))}{\partial x^i} \cdot \phi_\alpha(t), \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (13)$$

В самом деле, рассмотрим скалярное произведение

$$(\phi(t), A_{t_0,t}(\xi_0)) = \phi_\alpha(t) \cdot [A_{t_0,t}(\xi_0)]^\alpha$$

векторов  $\phi(t) = \{\phi_0(t), \phi_1(t), \dots, \phi_n(t)\}$  и  $A_{t_0,t}(\xi_0)$ , где  $\phi_i(t)$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ , — некоторое (абсолютно непрерывное) решение системы (13). Мы имеем (почти всюду на рассматриваемом отрезке):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \{\phi_\alpha(t) \cdot [A_{t_0,t}(\xi_0)]^\alpha\} &= \frac{d\phi_\alpha(t)}{dt} \cdot [A_{t_0,t}(\xi_0)]^\alpha + \\ + \phi_\alpha(t) \cdot \frac{d}{dt} [A_{t_0,t}(\xi_0)]^\alpha &= - \frac{\partial f^\beta(x(t), u(t))}{\partial x^\alpha} \phi_\beta(t) \cdot [A_{t_0,t}(\xi_0)]^\alpha + \\ + \phi_\alpha(t) \cdot \frac{\partial f^\alpha(x(t), u(t))}{\partial x^\alpha} \cdot [A_{t_0,t}(\xi_0)]^\alpha &= 0 \end{aligned}$$

(заметим, что  $\frac{\partial f^\beta}{\partial x^0} = 0$ , так как функции  $f^\beta$  не зависят от  $x^0$ ); следовательно, в силу абсолютной непрерывности рассматриваемого скалярного произведения, оно постоянно. Таким образом, справедлива следующая

**ЛЕММА 1.** Если  $\phi(t) = \{\phi_0(t), \dots, \phi_n(t)\}$  — решение системы уравнений (13), рассматриваемое на некотором отрезке времени  $I$ , а  $\xi_0$  — произвольный вектор, заданный в точке  $x(t_0)$ , где  $t_0$  — начальная точка отрезка  $I$ , то на всем отрезке  $I$  выполнено соотношение:

$$(\phi(t), A_{t_0,t}(\xi_0)) = \text{const.}$$

Если функции  $\phi_i(t)$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ , удовлетворяют системе (13) и если вектор  $\xi_0$  лежит в гиперплоскости  $\phi_\alpha(t_0) x^\alpha = 0$  (т. е. скалярное произведение  $(\phi(t_0), \xi_0)$  обращается в нуль), то и при любом  $t$  скалярное произведение  $(\phi(t), A_{t_0,t}(\xi_0))$  обращается в нуль, т. е. каждый вектор  $\xi_t = A_{t_0,t}(\xi_0)$ , получающийся из  $\xi_0$  переносом вдоль траектории  $x(t)$ , лежит в соответствующей гиперплоскости (12). Так как это справедливо

для любого вектора  $\xi_0$ , лежащего в гиперплоскости  $\phi_\alpha(t_0)x^\alpha = 0$ , то мы и получаем, что если функции  $\phi_i(t)$ ,  $i=0,1,\dots,n$ , удовлетворяют системе (13), то гиперплоскости (12) получаются друг из друга переносом вдоль траектории  $x(t)$ .

6. Принцип максимума. Запишем теперь системы уравнений (6) и (13):

$$\begin{aligned}\frac{dx^i}{dt} &= f^i(x, u), \\ \frac{d\phi_i}{dt} &= -\frac{\partial f^\alpha(x, u)}{\partial x^i} \phi_\alpha \quad (i=0,1,\dots,n),\end{aligned}$$

в более удобном виде. Для этого рассмотрим следующую функцию  $H$  переменных  $x^1, \dots, x^n; \phi_0, \phi_1, \dots, \phi_n; u$ :

$$H(\phi, x, u) = (\phi, f(x, u)) = \phi_\alpha f^\alpha(x, u).$$

Непосредственно проверяется, что написанные выше уравнения могут быть с помощью этой функции  $H$  записаны в виде следующей гамильтоновой системы:

$$\frac{dx^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \phi_i}, \quad i=0,1,\dots,n, \quad (14)$$

$$\frac{d\phi_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x^i}, \quad i=0,1,\dots,n. \quad (15)$$

При фиксированных значениях  $\phi$  и  $x$  функция  $H$  становится функцией параметра  $u$ ; верхнюю грань значений этой функции обозначим через  $M(\phi, x)$ :

$$M(\phi, x) = \sup_{u \in U} H(\phi, x, u).$$

Если верхняя грань значений непрерывной функции  $H$  достигается на  $U$ , то  $M(\phi, x)$  есть максимум значений функции  $H$  при фиксированных  $\phi$  и  $x$ . Поэтому нижеследующую теорему 1 (необходимое условие оптимальности), главным содержанием которой является равенство (16), мы называем принципом максимума.

**ТЕОРЕМА 1.** Пусть  $u(t)$  — такое допустимое управление, что соответствующая ему траектория  $x(t)$  системы (6), исходящая в момент  $t_0$  из точки  $x_0$ , проходит в момент  $t_1 > t_0$  через некоторую точку прямой  $\Pi$ . Для оптимальности управления  $u(t)$  и соответствующей ему траектории  $x(t)$ ,  $t_0 \leq t \leq t_1$ , необходимо существование такого ненулевого абсолютно непрерывного вектора  $\phi(t) = \{\phi_0(t), \phi_1(t), \dots, \phi_n(t)\}$ , что:

1) величины  $x(t)$ ,  $\phi(t)$ ,  $u(t)$  удовлетворяют гамильтоновой системе (14), (15);

2) почти для всех  $t$ ,  $t_0 \leq t \leq t_1$ , функция  $H(\phi(t), x(t), u)$  переменного  $u \in U$  достигает в точке  $u = u(t)$  максимума (знак  $(=)$  обозначает равенство, справедливое почти всюду):

$$H(\phi(t), x(t), u(t)) (=) M(\phi(t), x(t)); \quad (16)$$

3) в начальный момент  $t_0$  выполнены соотношения

$$\phi_0(t_0) \leq 0, \quad M(\phi(t_0), x(t_0)) = 0. \quad (17)$$

Если величины  $\phi(t)$ ,  $x(t)$ ,  $u(t)$  удовлетворяют условиям 1) и 2), то функции  $\phi_0(t)$  и  $M(\phi(t), x(t))$  переменного  $t$  являются постоянными, так что проверку соотношений (17) можно проводить не обязательно в момент  $t_0$ , а в любой момент  $t$ ,  $t_0 \leq t \leq t_1$ .

В следующих двух пунктах мы дадим обсуждение этой теоремы, а затем, в пунктах 9 — 17, проведем ее доказательство.

Выведем из теоремы 1 аналогичное необходимое условие для оптимальности по быстрдействию. Для этого в теореме 1 следует положить  $f^0(x, u) = 1$ . Функция  $H$  принимает в этом случае вид

$$H = \phi_0 + \phi_\nu f^\nu(x, u)$$

(суммирование по  $\nu$  от 1 до  $n$ ). Вводя  $n$ -мерный вектор  $\phi = \{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n\}$  и функцию

$$H(\phi, x, u) = \phi_\nu f^\nu(x, u),$$

мы сможем записать уравнения (4) и (13) (кроме уравнения (13) для  $i = 0$  которое теперь не нужно) в виде гамильтоновой системы

$$\frac{dx^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \phi_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (18)$$

$$\frac{d\phi_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x^i}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (19)$$

При фиксированных значениях  $\phi$  и  $x$  функция  $H$  становится функцией параметра  $u$ ; верхнюю грань значений этой функции мы обозначим через  $M(\phi, x)$ :

$$M(\phi, x) = \sup_{u \in U} H(\phi, x, u).$$

В силу соотношения

$$H(\phi, x, u) = H(\phi, x, u) - \phi_0,$$

мы получаем:

$$M(\phi, x) = M(\phi, x) - \phi_0,$$

и поэтому условие (16) принимает вид:

$$H(\phi(t), x(t), u(t)) (=) M(\phi(t), x(t)) - \phi_0 \geq 0.$$

Таким образом, мы получаем следующую теорему.

**ТЕОРЕМА 2.** Пусть  $u(t)$  — допустимое управление, переводящее точку  $x_0$  в точку  $x_1$ , а  $x(t)$  — соответствующая траектория, так что  $x(t_0) = x_0$ ,  $x(t_1) = x_1$ . Для оптимальности по быстрдействию управления  $u(t)$  и траектории  $x(t)$  необходимо существование такого ненулевого абсолютно непрерывного вектора  $\phi(t) = \{\phi_1(t), \phi_2(t), \dots, \phi_n(t)\}$ , что:

1) величины  $\phi(t)$ ,  $x(t)$ ,  $u(t)$  удовлетворяют гамильтоновой системе (18), (19);

2) почти для всех  $t$ ,  $t_0 \leq t \leq t_1$ , функция  $H(\phi(t), x(t), u)$  переменного  $u \in U$  достигает в точке  $u = u(t)$  максимума:

$$H(\phi(t), x(t), u(t)) (=) M(\phi(t), x(t)); \quad (20)$$

3) в начальный момент  $t_0$  выполнено соотношение

$$M(\phi(t_0), x(t_0)) \geq 0. \quad (21)$$

Если величины  $\phi(t)$ ,  $x(t)$ , и  $u(t)$  удовлетворяют условиям 1) и 2), то функция  $M(\phi(t), x(t))$  переменного  $t$  постоянна, так что проверку соотношения (21) можно проводить не обязательно в момент  $t_0$ , а в любой момент  $t$ ,  $t_0 \leq t \leq t_1$ .

7. Обсуждение принципа максимума. Теорема 1 позволяет из всех траекторий, начинающихся в точке  $x_0$  и кончающихся в некоторой точке прямой  $\Pi$ , и соответствующих им управлений выделить лишь отдельные, вообще говоря, изолированные траектории и управления, удовлетворяющие всем сформулированным условиям. Действительно, мы имеем  $2n + 3$  соотношений (14), (15), (16) между  $2n + 3$  переменными  $x^\alpha$ ,  $\phi_\alpha$ ,  $u$ , т. е. имеем «полную систему соотношений» для определения всех этих переменных. Так как, далее, соотношение (16) конечно (не дифференциально), а число дифференциальных уравнений равно  $2n + 2$  (соотношения (14) и (15)), то решения системы уравнений (14), (15), (16) зависят, вообще говоря, от  $2n + 2$  параметров (начальных условий). Однако один из этих параметров является несущественным, так как функции  $\phi_\alpha(t)$  определены лишь с точностью до общего множителя (ибо функция  $H$  однородна относительно  $\phi_\alpha$ ). Кроме того, один из параметров связан условием, что в начальный момент величина  $M(\phi(t), x(t))$  обращается в нуль.

Итак, имеется  $2n$  параметров, от которых зависит все многообразие решений системы (14), (15), (16). Этими  $2n$  параметрами следует распорядиться так, чтобы траектория  $x(t)$  проходила при заданном  $t = t_0$  через точку  $x_0$ , а при каком-нибудь  $t_1 > t_0$  — через точку на прямой  $\Pi$ . Число  $t_1 - t_0$  также является параметром, так что всего у нас имеется  $2n + 1$  существенных параметров. Условие прохождения через точку  $x_0$  и прямую  $\Pi$  дает  $2n + 1$  соотношений. Следовательно, можно ожидать, что имеются лишь отдельные, изолированные траектории, соединяющие точку  $x_0$  с прямой  $\Pi$  и удовлетворяющие условиям, указанным в теореме 1. Лишь эти отдельные, изолированные траектории и могут оказаться оптимальными (ибо указанные в теореме 1 условия необходимы для оптимальности).

Если, в частности, условиям теоремы 1 удовлетворяет лишь одна траектория, соединяющая точку  $x_0$  с точкой прямой  $\Pi$ , а из технических соображений, приведших к постановке оптимальной задачи, ясно, что оптимальная траектория должна существовать, то можно надеяться, что найденная траектория как раз и является оптимальной. Следует, однако, отметить, что математически вопрос о существовании оптимальной траектории представляется очень важным и трудным. В частном случае оптимальности по быстродействию для линейных систем (1) он решается в статье (6).

8. Сравнение с классическими результатами. В этом пункте мы покажем прежде всего, что в случае, если  $U$  есть открытое множество векторного пространства переменной  $u = (u^1, \dots, u^r)$ , прин-

\* Напомним, что одна переменная  $u$  может распадаться на несколько отдельных переменных, например может быть точкой  $r$ -мерного векторного пространства; в этом случае условие максимума (16) также можно считать содержащим  $r$  отдельных соотношений.

цип максимума, сформулированный выше, эквивалентен классическому условию Вейерштрасса для вариационной задачи Лагранжа [см. (8), стр. 264—265, а также (9)]. Далее, мы дадим в этом пункте обсуждение соотношения между принципом максимума и условием Вейерштрасса. Из этого обсуждения выясняется, что уже в случае, если  $U$  есть *замкнутое* ограниченное множество векторного пространства, условие Вейерштрасса перестает действовать, т. е. теорема о том, что для достижения минимума функционала необходимо выполнение условия Вейерштрасса, становится неверной. В то же время доказываемый нами принцип максимума справедлив для любого топологического пространства  $U$ .

Расширение класса допустимых пространств  $U$  по сравнению с классическим случаем открытых множеств весьма существенно с точки зрения возможности технических применений теории. Можно считать, что именно случай замкнутого множества  $U$  (расположенного в некотором векторном пространстве или многообразии) наиболее интересен в прикладных задачах оптимального управления.

Переходим к обсуждению условия Вейерштрасса. Введем обозначения:

$$\begin{aligned} y_i &= x^i & (i = 1, \dots, n), \\ \frac{dy_{j+n}}{dt} &= u^j & (j = 1, \dots, r), \\ \phi_i &= -l_i & (i = 0, 1, \dots, n), \\ \Phi_i &= f^i(x, u) - \frac{dx^i}{dt} & (i = 1, \dots, n), \quad f = f^0, \end{aligned}$$

и, кроме того, будем обозначать независимое переменное через  $x$ , а не через  $t$ . Тогда оптимальная задача, сформулированная в п. 2, сведется к вариационной задаче Лагранжа в той форме, в какой она сформулирована в книге (8) (стр. 224—225). Функция  $F$  [см. (8), стр. 236] примет вид

$$\begin{aligned} F &= l_0 f + l_v \Phi_v = -\phi_0 f^0 - \phi_v \left( f^v(x, u) - \frac{dx^v}{dt} \right) = \\ &= -H(\phi, x, u) + \phi_v \cdot \frac{dx^v}{dt}. \end{aligned}$$

Далее, если  $\phi(t)$ ,  $x(t)$  и  $u(t)$  — некоторые функции, а  $\bar{u} \in U$  и  $\bar{x}'^i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) — величины, связанные между собой в некоторый момент  $t$  соотношением  $\bar{x}'^i = f^i(x(t), \bar{u})$ , то функция Вейерштрасса [см. (8), стр. 264] принимает вид:

$$\begin{aligned} E &= [-H(\phi(t), x(t), \bar{u}) + \phi_v(t) f^v(x(t), \bar{u})] - \\ &- [-H(\phi(t), x(t), u(t)) + \phi_v(t) f^v(x(t), u(t))] + \\ &+ (\bar{u}^i - u^i) \frac{\partial H(\phi(t), x(t), u(t))}{\partial u^i} - (f^v(x(t), \bar{u}) - f^v(x(t), u(t))) \phi_v(t) = \\ &= H(\phi(t), x(t), u(t)) - H(\phi(t), x(t), \bar{u}) + (\bar{u}^i - u^i) \frac{\partial H(\phi(t), x(t), u(t))}{\partial u^i}. \end{aligned} \tag{22}$$

Так как для всякой внутренней точки области  $U$  производные

$$\frac{\partial \mathbf{H}(\psi(t), \mathbf{x}(t), u(t))}{\partial u^i}$$

обращаются в нуль (это вытекает и из принципа максимума и из классических результатов [см. (8), стр. 249, теорема 76.1], то необходимое условие Вейерштрасса ( $E \geq 0$  во внутренних точках) сводится к соотношению

$$\mathbf{H}(\psi(t), \mathbf{x}(t), u(t)) \geq \mathbf{H}(\psi(t), \mathbf{x}(t), \bar{u}) \quad (\bar{u} \in U).$$

Это дает (для случая кусочно-линейных управлений, только и рассматривавшихся в (8) и (9)) соотношение (16). Остальные соотношения, указанные в теореме 1, столь же легко вытекают из условия Вейерштрасса.

Таким образом, для случая открытого множества  $U$  теорема 1 вытекает из классических теорем вариационного исчисления. Обратно, необходимое условие Вейерштрасса вытекает из нашей теоремы 1.

Полагая  $\bar{u} = u(t) + \Delta u$  и считая  $\Delta u$  бесконечно малой, мы можем, на основании формулы Тейлора, записать соотношение (22) (с точностью до бесконечно малых более высокого порядка) в виде

$$E = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial u^i \partial u^j} \Delta u^i \Delta u^j. \quad (23)$$

Это делает совершенно естественным условие Вейерштрасса  $E \geq 0$  во внутренних точках (ибо функция  $\mathbf{H}$ , по теореме 1, должна достигать максимума). Однако в граничных точках, где, вообще говоря, перестают обращаться в нуль производные  $\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial u^i}$ , т. е. в разложении функции

$\mathbf{H}(\psi(t), \mathbf{x}(t), u(t) + \Delta u)$  имеются члены первого порядка малости относительно  $\Delta u$ , неотрицательность величины  $E$  (имеющей второй порядок малости) перестает быть необходимым условием максимальности функции  $\mathbf{H}$ . Иначе говоря, условие Вейерштрасса  $E \geq 0$ , вообще говоря, перестает быть справедливым в граничных точках множества  $U$ .

Простой пример подтверждает сказанное. Рассмотрим движение точки по закону

$$\frac{dx}{dt} = u^2 \quad (|u| \leq 1),$$

где  $u$  и  $x$  — скалярные переменные. Очевидно, что движение по закону  $u \equiv 1$ ,  $x(t) = x_0 + t$  является оптимальным по быстродействию (между любыми двумя точками), так как скорость движения точки  $x$ , равная  $u^2$ , не может превосходить единицы. Здесь  $f^0 \equiv 1$ ,  $f^1 = u^2$ ; так как  $f^0$  и  $f^1$  не зависят от  $x$ , то уравнения (13) дают:  $\phi_0 = \text{const}$ ,  $\phi_1 = \text{const}$ . Функция  $\mathbf{H}$  принимает вид

$$\mathbf{H} = \phi_0 + \phi_1 u^2.$$

Вдоль рассматриваемой оптимальной траектории  $u \equiv 1$ , т. е.

$$\mathbf{H} = \phi_0 + \phi_1,$$

и потому [см. (17)]  $\phi_0 < 0$ ,  $\phi_1 > 0$ . Выражение (23) для функции Вейер-

штрасса дает нам теперь:

$$E = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 H}{\partial u^2} (\Delta u)^2 = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 (\psi_0 + \psi_1 u^2)}{\partial u^2} (\Delta u)^2 = -\psi_1 (\Delta u)^2.$$

Так как коэффициент  $-\psi_1$  отрицателен, то условие Вейерштрасса  $E \geq 0$  не выполняется. Произошло это потому, что точка  $u = 1$  является граничной точкой отрезка  $U$  (т. е. отрезка  $-1 \leq u \leq 1$ ).

9. Вариации управлений. В этом и следующих пунктах мы излагаем некоторые конструкции, необходимые для доказательства принципа максимума.

Пусть  $u(t)$  — некоторое допустимое управление, определенное на отрезке  $t_0 \leq t \leq t_1$ . Точку  $\theta$  интервала  $t_0 < t < t_1$  мы будем называть *правильной* для управления  $u(t)$ , если выполнено следующее условие: какова бы ни была непрерывная по совокупности своих аргументов функция  $g(t, u)$  и каковы бы ни были вещественные числа  $a$  и  $b$ , имеет место соотношение:

$$\int_{\theta + a\varepsilon}^{\theta + b\varepsilon} g(t, u(t)) dt = \varepsilon(b - a)g(\theta, u(\theta)) + \dots \quad (24)$$

Для кусочно-непрерывной функции правильными являются все точки ее непрерывности, для измеримой функции правильной является любая точка Лебга [см. (7)]. В любом случае множество всех правильных точек имеет на интервале  $t_0 < t < t_1$  полную меру, т. е. *почти все точки интервала  $t_0 < t < t_1$  являются правильными*.

Выберем некоторые моменты времени  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_s, \tau$ , удовлетворяющие неравенствам  $t_0 < \tau_1 \leq \tau_2 \leq \dots \leq \tau_s \leq \tau < t_1$  и являющиеся правильными точками для управления  $u(t)$ . Выберем, далее, произвольные неотрицательные числа  $\delta t_1, \dots, \delta t_s$ , произвольное (не обязательно неотрицательное) действительное число  $\delta t$  и произвольные (не обязательно различные) точки  $v_1, v_2, \dots, v_s$  области управления  $U$ . Определим теперь зависящие от  $\varepsilon$  полуинтервалы  $I_1, I_2, \dots, I_s$  следующим образом. Положим

$$l_i = \begin{cases} \delta t - (\delta t_i + \dots + \delta t_s), & \text{если } \tau_i = \tau; \\ -(\delta t_i + \dots + \delta t_s), & \text{если } \tau_i = \tau_s < \tau; \\ -(\delta t_i + \dots + \delta t_j), & \text{если } \tau_i = \tau_{i+1} = \dots = \tau_j < \tau_{j+1} \quad (j < s), \end{cases}$$

и обозначим через  $I_i$  полуинтервал

$$\tau_i + \varepsilon l_i < t \leq \tau_i + \varepsilon(l_i + \delta t_i).$$

Таким образом, если  $\tau_i = \tau_{i+1} = \dots = \tau_j$ , то полуинтервалы  $I_i, I_{i+1}, \dots, I_j$  следуют, примыкая друг к другу, слева направо; если же к полуинтервалу  $I_k$  не примыкает справа следующий полуинтервал (т. е. если  $\tau_k < \tau_{k+1}$  или  $k = s$ ), то правым концом полуинтервала  $I_k$  является точка  $\tau_k$  при  $\tau_k < \tau$  и точка  $\tau + \varepsilon \delta t$  при  $\tau_k = \tau$ . Длина полуинтервала  $I_i$  равна  $\varepsilon \delta t_i$ . В случае  $\delta t_i = 0$  соответствующий полуинтервал  $I_i$  является «пустым», т. е. отсутствует.

При достаточно малом  $\varepsilon$  полуинтервалы  $I_1, \dots, I_s$  попарно не пересекаются и располагаются все на основном отрезке  $t_0 \leq t \leq t_1$ , причем ле-

все точки  $\tau + \varepsilon \delta t$ . Считая, что  $\varepsilon$  удовлетворяет этим условиям, мы определим управление  $u^*(t)$  на отрезке  $t_0 \leq t \leq \tau + \varepsilon \delta t$ , положив:

$$u^*(t) = \begin{cases} u(t), & \text{если } t \text{ не принадлежит ни одному из множеств } I_1, I_2, \dots, I_s, \\ v_i, & \text{если } t \in I_i. \end{cases}$$

Будем говорить, что управление  $u^*(t)$  получается *варьированием* управления  $u(t)$ .

10. Вариация траектории. Обозначим через  $x(t)$  траекторию, соответствующую управлению  $u(t)$  и исходящую из точки  $x_0$ , а через  $x^*(t)$  — траекторию, соответствующую проварьированному управлению  $u^*(t)$  и исходящую из той же точки  $x_0$ . При достаточно малом  $\varepsilon$  траектория  $x^*(t)$  определена на всем отрезке  $t_0 \leq t \leq \tau + \varepsilon \delta t$ , на котором рассматривается управление  $u^*(t)$  (теорема о непрерывной зависимости решения от параметров [см. (7)]). Нашей ближайшей целью является вычисление положения точки  $x^*(\tau + \varepsilon \delta t)$ . Именно, мы покажем, что справедлива следующая формула:

$$x^*(\tau + \varepsilon \delta t) = x(\tau) + \varepsilon \Delta x + \dots, \quad (25)$$

где  $\Delta x$  — не зависящий от  $\varepsilon$  вектор, определяемый формулой:

$$\begin{aligned} \Delta x = & f(x(\tau), u(\tau)) \delta t + \\ & + \sum_{i=1}^s A_{\tau_i, \tau} [f(x(\tau_i), v_i) - f(x(\tau_i), u(\tau_i))] \delta t_i. \end{aligned} \quad (26)$$

Доказательство формул (25), (26) мы проведем индукцией по  $s$ . Прежде всего, применяя соотношение (24) к векторной функции  $g(t, u) = f(x(t), u)$  (очевидно непрерывной по совокупности своих аргументов) и полагая  $\theta = \tau$ ,  $a = 0$ ,  $b = \delta t$ , мы получим:

$$\int_{\tau}^{\tau + \varepsilon \delta t} f(x(t), u(t)) dt = \varepsilon \delta t \cdot f(x(\tau), u(\tau)) + \dots,$$

или, так как  $x(t)$  есть решение уравнения (7),

$$x(\tau + \varepsilon \delta t) = x(\tau) + \varepsilon f(x(\tau), u(\tau)) \delta t + \dots \quad (27)$$

Далее, если  $\tau_s < \tau$ , то при достаточно малом  $\varepsilon$  отрезок между точками  $\tau$  и  $\tau + \varepsilon \delta t$  расположен правее точки  $\tau_s$ , так что на этом отрезке управление  $u^*(t)$  совпадает с  $u(t)$ , и потому

$$x^*(\tau + \varepsilon \delta t) - x^*(\tau) = \int_{\tau}^{\tau + \varepsilon \delta t} f(x^*(t), u^*(t)) dt = \int_{\tau}^{\tau + \varepsilon \delta t} f(x^*(t), u(t)) dt. \quad (28)$$

Кроме того, как легко видеть (используя теорему о непрерывной зависимости от начальных значений), решение  $x^*(t)$  равномерно (на всем отрезке  $t_0 \leq t \leq \tau + \varepsilon \delta t$ ) стремится к  $x(t)$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Поэтому

$$f(x^*(t), u(t)) = f(x(t), u(t)) + \xi_1(t),$$

где  $\xi_1(t)$  равномерно стремится к нулю при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Отсюда получаем:

$$\int_{\tau}^{\tau + \varepsilon \delta t} f(x^*(t), u(t)) dt = \int_{\tau}^{\tau + \varepsilon \delta t} f(x(t), u(t)) dt + \dots = \varepsilon f(x(\tau), u(\tau)) \delta t + \dots$$

[см. (27)]. Сопоставляя это соотношение с (28), находим:

$$\mathbf{x}^*(\tau + \varepsilon \delta t) = \mathbf{x}^*(\tau) + \varepsilon \mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau), u(\tau)) \delta t + \dots \quad (29)$$

при  $\tau_s < \tau$ . Наконец, найдем приращение функции  $\mathbf{x}^*(t)$  на полуинтервале  $I_i$ . Так как на этом полуинтервале

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}^*(t), u^*(t)) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), v_i) + \xi_2(t),$$

где  $\xi_2(t)$  равномерно стремится к нулю при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , то для приращения

$$\mathbf{x}^*(\tau_i + \varepsilon(l_i + \delta t_i)) - \mathbf{x}^*(\tau_i + \varepsilon l_i) = \mathbf{x}^*|_{I_i}$$

функции  $\mathbf{x}^*(t)$  на полуинтервале  $I_i$  мы находим следующее значение.

$$\mathbf{x}^*|_{I_i} = \int_{I_i} \mathbf{f}(\mathbf{x}^*(t), u^*(t)) dt = \int_{I_i} \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), v_i) dt + \dots = \varepsilon \mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau_i), v_i) \delta t_i + \dots \quad (30)$$

(напомним, что длина полуинтервала  $I_i$  равна  $\varepsilon \delta t_i$ , причем при  $\varepsilon \rightarrow 0$  этот полуинтервал стягивается к точке  $\tau_i$ ).

Переходим к индуктивной проверке соотношений (25), (26). При  $s = 0$  мы имеем:

$$u^*(t) = u(t), \quad \mathbf{x}^*(t) = \mathbf{x}(t),$$

и формулы (25), (26) сводятся к соотношению (27), справедливость которого была установлена выше.

Предположим теперь, что формулы (25), (26) уже доказаны для случая, когда число полуинтервалов  $I_1, I_2, \dots$  меньше чем  $s$ , и докажем справедливость этих формул при наличии  $s$  полуинтервалов  $I_1, I_2, \dots, I_s$ . Обозначим через  $k$  такое целое число, что

$$\tau_{k+1} = \tau_{k+2} = \dots = \tau_s \text{ и } \tau_i < \tau_s \text{ при } i \leq k$$

(случай  $k = 0$  не исключается). Заменяя точку  $\tau$  точкой  $\tau_s$ , число  $\delta t$  — числом  $l_{k+1}$ , а число  $s$  — меньшим числом  $k$ , мы в силу индуктивного предположения получим из (25), (26):

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^*(\tau_s + \varepsilon l_{k+1}) &= \mathbf{x}(\tau_s) + \varepsilon \mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau_s), u(\tau_s)) \cdot l_{k+1} + \\ &+ \varepsilon \sum_{i=1}^k A_{\tau_i, \tau_s} [\mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau_i), v_i) - \mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau_i), u(\tau_i))] \delta t_i + \dots \end{aligned} \quad (31)$$

Это есть значение функции  $\mathbf{x}^*(t)$  в левом конце полуинтервала  $I_{k+1}$ . Далее, так как полуинтервалы  $I_{k+1}, \dots, I_s$  примыкают один к другому, то, суммируя соотношения (30) для  $i = k+1, \dots, s$ , мы получим приращение функции  $\mathbf{x}^*(t)$  от левого конца полуинтервала  $I_{k+1}$  до правого конца полуинтервала  $I_s$ , т. е. до точки  $\tau_s + \varepsilon(l_s + \delta t_s)$ :

$$\mathbf{x}^*(\tau_s + \varepsilon(l_s + \delta t_s)) - \mathbf{x}^*(\tau_s + \varepsilon l_{k+1}) = \varepsilon \sum_{i=k+1}^s \mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau_i), v_i) \delta t_i + \dots$$

Складывая это соотношение с соотношением (31), найдем:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^*(\tau_s + \varepsilon(l_s + \delta t_s)) &= \mathbf{x}(\tau_s) + \varepsilon \mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau_s), u(\tau_s)) \cdot l_{k+1} + \varepsilon \sum_{i=k+1}^s \mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau_i), v_i) \delta t_i + \\ &+ \varepsilon \sum_{i=1}^k A_{\tau_i, \tau_s} [\mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau_i), v_i) - \mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau_i), u(\tau_i))] \delta t_i + \dots = \\ &= \mathbf{x}(\tau_s) + \varepsilon \mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau_s), u(\tau_s)) (l_{k+1} + \delta t_{k+1} + \dots + \delta t_s) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \varepsilon \sum_{i=k+1}^s [f(x(\tau_i), v_i) - f(x(\tau_s), u(\tau_s))] \delta t_i + \\
& + \varepsilon \sum_{i=1}^k A_{\tau_i, \tau_s} [f(x(\tau_i), v_i) - f(x(\tau_i), u(\tau_i))] \delta t_i + \dots
\end{aligned}$$

Учитывая, что  $A_{\tau_i, \tau_s} = E$  при  $i = k+1, \dots, s$  [см. (10)], можно последнее соотношение переписать в виде:

$$\begin{aligned}
x^*(\tau_s + \varepsilon(l_s + \delta t_s)) &= x(\tau_s) + \varepsilon f(x(\tau_s), u(\tau_s))(l_{k+1} + \delta t_{k+1} + \dots + \delta t_s) + \\
& + \varepsilon \sum_{i=1}^s A_{\tau_i, \tau_s} [f(x(\tau_i), v_i) - f(x(\tau_i), u(\tau_i))] \delta t_i + \dots
\end{aligned} \quad (32)$$

Если  $\tau_{k+1} = \tau_s = \tau$ , то, в силу определения чисел  $l_i$ , мы имеем:

$$l_s + \delta t_s = \delta t, \quad l_{k+1} + \delta t_{k+1} + \dots + \delta t_s = \delta t,$$

так что соотношение (32) совпадает в этом случае с (25), (26). Если же  $\tau_s < \tau$ , то

$$l_s + \delta t_s = 0, \quad l_{k+1} + \delta t_{k+1} + \dots + \delta t_s = 0,$$

и соотношение (32) принимает вид:

$$x^*(\tau_s) = x(\tau_s) + \varepsilon \sum_{i=1}^s A_{\tau_i, \tau_s} [f(x(\tau_i), v_i) - f(x(\tau_i), u(\tau_i))] \delta t_i + \dots \quad (33)$$

Так как в этом случае на отрезке  $\tau_s < t \leq \tau$  управление  $u^*(t)$  совпадает с  $u(t)$ , то (см. п. 4) с точностью до малых более высокого порядка, чем  $\varepsilon$ , векторы  $x^*(t) - x(t)$  при  $\tau_s \leq t \leq \tau$  получаются друг из друга переносом вдоль траектории  $x(t)$  [см. (11)]:

$$x^*(t) - x(t) = A_{\tau_s, t}(x^*(\tau_s) - x(\tau_s)) + \dots \quad (t \geq \tau_s).$$

Поэтому, применяя к формуле (33) преобразование  $A_{\tau_s, \tau}$ , мы получаем [см. второе из соотношений (10)]:

$$x^*(\tau) - x(\tau) = \varepsilon \sum_{i=1}^s A_{\tau_i, \tau} [f(x(\tau_i), v_i) - f(x(\tau_i), u(\tau_i))] \delta t_i + \dots$$

Наконец, складывая последнее соотношение с соотношением (29), мы и в этом случае (т. е. при  $\tau_s < \tau$ ) получаем соотношения (25), (26), что и завершает индукцию.

**11. Линейные комбинации вариаций.** Если какое-либо из чисел  $\delta t_i$  равно нулю, то его можно отбросить при определении проварьированного управления  $u^*(t)$  вместе с соответствующими точками  $\tau_i$  и  $v_i$  — от этого управление  $u^*(t)$  не изменится. Обратно, добавление новых точек  $\tau_i, v_i$ , для которых  $\delta t_i = 0$ , не изменяет управления  $u^*(t)$ . Пользуясь этим, мы можем, если речь идет о конечном числе управлений  $u_1^*(t), \dots, u_p^*(t)$ , получающихся варьированием одного и того же управления  $u(t)$  при одном и том же  $\tau$ , считать, что все точки  $\tau_i, v_i$  одинаковы и взяты в одинаковом числе при определении управлений  $u_1^*(t), \dots, u_p^*(t)$ , а все различие между этими управлениями заключается в том, что у них не одинаковы числа  $\delta t_i$  и  $\delta t$ . Этой воз-

возможностью — считать все точки  $\tau_i, v_i$  одинаковыми (при рассмотрении конечного числа различным образом проварьированных управлений) — мы будем пользоваться в дальнейшем, не указывая этого каждый раз.

Вектор  $\Delta x$  [см. (26)] не зависит от  $\varepsilon$ , но существенно зависит, конечно, от выбора точек  $\tau_i, v_i, \tau$  и чисел  $\delta t$  и  $\delta t_i$  ( $i = 1, 2, \dots, s$ ). Обозначим совокупность величин  $\tau_i, v_i, \tau, \delta t_i, \delta t$  через  $\alpha$ :

$$\alpha = \{\tau_i, v_i, \tau, \delta t_i, \delta t\}$$

и будем вектор (26) обозначать далее через  $\Delta x_\alpha$ , подчеркивая тем самым его зависимость от этих величин.

В этом и двух следующих пунктах мы будем предполагать, что правильная точка  $\tau$  управления  $u(t)$  зафиксирована и что все рассматриваемые вариации удовлетворяют условию

$$t_0 < \tau_1 \leq \tau_2 \leq \dots \leq \tau_s \leq \tau < t_1.$$

Если имеется конечное число величин  $\alpha$ :

$$\alpha' = \{\tau_i, v_i, \tau, \delta t'_i, \delta t'\},$$

$$\alpha'' = \{\tau_i, v_i, \tau, \delta t''_i, \delta t''\},$$

$$\dots \dots \dots$$

то их линейную комбинацию  $\lambda' \alpha' + \lambda'' \alpha'' + \dots$  с неотрицательными коэффициентами  $\lambda', \lambda'', \dots$  мы определим формулой:

$$\lambda' \alpha' + \lambda'' \alpha'' + \dots = \{\tau_i, v_i, \tau, \lambda' \delta t'_i + \lambda'' \delta t''_i + \dots, \lambda' \delta t' + \lambda'' \delta t'' + \dots\}.$$

(Неотрицательность коэффициентов  $\lambda', \lambda'', \dots$  существенна потому, что в противном случае величины  $\lambda' \delta t'_i + \lambda'' \delta t''_i + \dots$  могли бы оказаться отрицательными, что недопустимо.)

12. Конусы достижимости. Будем теперь, имея некоторое управление  $u(t)$ ,  $t_0 \leq t \leq t_1$ , и соответствующую траекторию  $x(t)$ , рассматривать векторы  $\Delta x = \Delta x_\alpha$  для различных символов  $\alpha$  ( $\tau$  фиксировано). Легко видеть, что имеет место следующая

ЛЕММА 2. Если  $\alpha = \lambda' \alpha' + \lambda'' \alpha'' + \dots$  [где  $\lambda' \geq 0, \lambda'' \geq 0, \dots$ ], то соответствующие векторы  $\Delta x$  связаны такой же линейной зависимостью:

$$\Delta x_\alpha = \lambda' \Delta x_{\alpha'} + \lambda'' \Delta x_{\alpha''} + \dots$$

Это непосредственно вытекает из того, что в формулу (26) все числа  $\delta t_1, \dots, \delta t_s, \delta t$  входят линейно.

Мы будем считать  $\Delta x$  связанным вектором, исходящим из точки  $x(\tau)$ , т. е. будем считать этот вектор элементом пространства  $X_\tau$  (см. п. 4). Если мы будем брать всевозможные символы  $\alpha$ , описанные в п. 11 ( $\tau$  фиксировано), то векторы  $\Delta x = \Delta x_\alpha$  заполняют некоторое множество  $K_\tau$  в пространстве  $X_\tau$ .

Докажем, что множество  $K_\tau$  является выпуклым конусом\* векторного пространства  $X_\tau$ .

\* Множество  $M$ , лежащее в некотором векторном пространстве, называется выпуклым конусом с вершиной в точке  $o$ , если 1) оно является конусом, т. е. вместе с каждой отличной от  $o$  точкой  $a$  содержит и весь луч  $\overrightarrow{oa}$ ; 2) оно выпукло, т. е. вместе с (продолжение сноски см. на стр. 20)

В самом деле, если  $a'$  и  $a''$  — две точки пространства  $X_\tau$ , принадлежащие множеству  $K_\tau$ , т. е. если существуют такие символы  $a'$ ,  $a''$ , что

$$a' = \Delta x_{a'}, \quad a'' = \Delta x_{a''},$$

то для любых неотрицательных  $\lambda'$ ,  $\lambda''$  мы имеем в силу леммы 2:

$$\lambda' a' + \lambda'' a'' = \lambda' \Delta x_{a'} + \lambda'' \Delta x_{a''} = \Delta x_{(\lambda' a' + \lambda'' a'')},$$

т. е. точка  $\lambda' a' + \lambda'' a''$  также принадлежит множеству  $K_\tau$ . Это и означает, что  $K_\tau$  есть выпуклый конус пространства  $X_\tau$  (или, что то же самое, выпуклый конус пространства  $X$  с вершиной в точке  $x(\tau)$ ).

Мы будем называть множество  $K_\tau$  *конусом достижимости* (с точностью до малых более высокого порядка, чем  $\varepsilon$ ,  $K_\tau$  есть геометрическое место точек  $x^*(\tau + \varepsilon \delta t)$ , т. е. тех точек фазового пространства  $X$ , которые могут быть достигнуты движущейся точкой в момент времени, близкий к  $\tau$ , с помощью варьирования управления  $u(t)$ ).

13. Основные леммы. В этом пункте мы докажем две леммы, служащие основой для применения вышеизложенных конструкций к изучению оптимальных процессов.

**ЛЕММА 3.** Пусть  $\tau(t_0 < \tau < t_1)$  — правильная точка управления  $u(t)$ ,  $x(t)$  — траектория, соответствующая управлению  $u(t)$  и исходящая из точки  $x_0$ , а  $\Lambda$  — некоторая линия, исходящая из точки  $x(\tau)$  и имеющая в этой точке касательный луч  $L$ . Если луч  $L$  принадлежит внутренности конуса  $K_\tau$  (т. е. все точки луча  $L$ , кроме его конца, являются внутренними точками множества  $K_\tau$ ), то существует такое управление  $u_*(t)$ , что соответствующая ему траектория  $x_*(t)$ , исходящая из той же точки  $x_0$ , проходит через некоторую (отличную от  $x(\tau)$ ) точку линии  $\Lambda$ .

**Доказательство.** Выберем на луче  $L$  какую-либо точку  $A$  и проведем из нее  $n$  векторов  $e_1, \dots, e_n$  равной длины  $r$ , перпендикулярных к лучу  $L$  и взаимно перпендикулярных между собой. Положим, далее,  $f_i = -e_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , причем векторы  $f_i$  также будем считать исходящими из точки  $A$ . Общую длину  $r$  векторов  $e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n$  будем считать настолько малой, чтобы концы всех этих векторов принадлежали конусу  $K_\tau$  (это возможно, так как  $A$  есть внутренняя точка конуса). Наконец, через  $c$  обозначим вектор с началом в точке  $x(\tau)$  и концом в точке  $A$ . Так как векторы

$$c, c + e_1, c + e_2, \dots, c + e_n, c + f_1, c + f_2, \dots, c + f_n$$

(исходящие из точки  $x(\tau)$ ) принадлежат конусу  $K_\tau$ , то существуют та-

каждыми двумя точками содержит целиком соединяющий их отрезок. Заметим, что если выпуклый конус  $M$  не заполняет всего векторного пространства  $X$ , в котором он расположен, то в пространстве  $X$  существует такая гиперплоскость, проходящая через вершину конуса  $M$ , что весь конус  $M$  расположен целиком в каком-либо одном (замкнутом) полупространстве, определяемом этой гиперплоскостью. Если имеются два выпуклых конуса с общей вершиной, внутренность каждого из которых не пересекается с другим конусом, то существует разделяющая их гиперплоскость, т. е. такая гиперплоскость, что один конус расположен целиком в одном (замкнутом) полупространстве, определяемом этой гиперплоскостью, а другой конус — в другом полупространстве.

кие символы  $a_0, a_1, \dots, a_n, a'_1, \dots, a'_n$ , что

$$\Delta x_{a_0} = c, \Delta x_{a'_1} = c + e_1, \dots, \Delta x_{a_n} = c + e_n, \quad \Delta x_{a'_1} = c + f_1, \dots, \Delta x_{a'_n} = c + f_n.$$

Определим две (очевидно непрерывные и неотрицательные) функции  $h^+(\xi)$  и  $h^-(\xi)$  действительного переменного  $\xi$ , положив:

$$h^+(\xi) = \begin{cases} \xi & \text{при } \xi \geq 0, \\ 0 & \text{при } \xi < 0; \end{cases}$$

$$h^-(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{при } \xi \geq 0, \\ -\xi & \text{при } \xi < 0. \end{cases}$$

При  $(\xi^1)^2 + (\xi^2)^2 + \dots + (\xi^n)^2 \leq 1$  формула

$$a = a(\xi^1, \dots, \xi^n) = \left(1 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |\xi^i|\right) a_0 +$$

$$+ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h^+(\xi^i) a_i + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h^-(\xi^i) a'_i$$

определяет зависящий от  $n$  действительных чисел  $\xi^1, \dots, \xi^n$  символ  $a(\xi^1, \dots, \xi^n)$ . (Действительно, у нас имеется *конечное* число символов

$a_0, a_i, a'_i$ , причем все коэффициенты  $h^+(\xi^i), h^-(\xi^i)$  и  $1 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |\xi^i|$ , как легко видеть, неотрицательны.) Вектор  $\Delta x$ , соответствующий символу  $a = a(\xi^1, \dots, \xi^n)$ , имеет, в силу леммы 2 (и в силу соотношений  $f_i = -e_i$ ,  $h^+(\xi) + h^-(\xi) = |\xi|$ ,  $h^+(\xi) - h^-(\xi) = \xi$ ), следующий вид:

$$\Delta x_a = \left(1 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |\xi^i|\right) c + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h^+(\xi^i) (c + e_i) +$$

$$+ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h^-(\xi^i) (c + f_i) = \left[1 + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (-|\xi^i| + h^+(\xi^i) + h^-(\xi^i))\right] c +$$

$$+ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [h^+(\xi^i) - h^-(\xi^i)] e_i = c + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi^i e_i.$$

Следовательно, если точка  $(\xi^1, \dots, \xi^n)$  пробегает в  $n$ -мерном числовом пространстве единичный шар

$$(\xi^1)^2 + \dots + (\xi^n)^2 \leq 1, \quad (34)$$

то вектор  $\Delta x_a$  (точнее, конец этого вектора) также пробегает  $n$ -мерный шар в пространстве  $X_r$ , а именно, шар радиуса  $\frac{1}{n} r$  с центром в точке  $A$ , ортогональный лучу  $L$ . При тех же условиях конец вектора  $\varepsilon \Delta x_a$  (все векторы исходят из точки  $x(\tau)$ , т. е. из начала координат пространства  $X_r$ ) пробегает  $n$ -мерный шар  $E_\varepsilon$  радиуса  $\varepsilon \cdot \frac{r}{n}$ , ортогональный лучу  $L$ ; центр шара  $E_\varepsilon$  расположен в точке  $A_\varepsilon$  луча  $L$ , находящейся на расстоянии  $\varepsilon d$  от точки  $x(\tau)$ , где  $d$  — длина вектора  $c$  (рис. 1).

Так как в нашем рассуждении рассматриваются лишь такие символы  $a$ , которые являются линейными комбинациями (с некоторыми коэф-

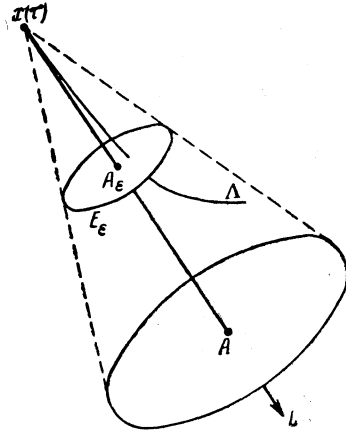


Рис. 1.

фициентами) конечного числа символов  $a_0, a_i, \dot{a}_i$ , то точки  $\tau_i, v_i$ , входящие в определение символа

$$a = a(\xi^1, \dots, \xi^n),$$

мы считаем одинаковыми для всех этих символов, т. е. не зависящими от  $\xi^1, \dots, \xi^n$ ; точка  $\tau$  также фиксирована. Числа же  $\delta t_1, \dots, \delta t_s$  и  $\delta t$  (определяющие проварьированное управление  $u^*(t)$ ) зависят от  $\xi^1, \dots, \xi^n$ . Поэтому мы будем писать  $u_a^*(t)$  и  $\delta t_a$ , чтобы подчеркнуть зависимость

величин  $u^*(t)$  и  $\delta t$  от  $\xi^1, \dots, \xi^n$ . Траекторию  $x^*(t)$ , исходящую из точки  $x_0$  и соответствующую управлению  $u_a^*(t)$ , будем обозначать через  $x_a^*(t)$ , так что соотношение (25) даст нам:

$$x_a^*(\tau + \varepsilon \delta t_a) = x(\tau) + \varepsilon \Delta x_a + \dots \quad (35)$$

Отметим, что траектория  $x_a^*(t)$  непрерывно зависит от параметров  $\xi^1, \dots, \xi^n$ ; точно так же число  $\delta t_a$  непрерывно зависит от  $\xi^1, \dots, \xi^n$ . Поэтому и точка  $x_a^*(\tau + \varepsilon \delta t_a)$  непрерывно зависит от  $\xi^1, \dots, \xi^n$ . Следовательно, когда точка  $(\xi^1, \dots, \xi^n)$  описывает шар (34), точка (35) пробегает (при любом фиксированном  $\varepsilon$ ) некоторый «диск»  $F_\varepsilon$  (т. е. непрерывный

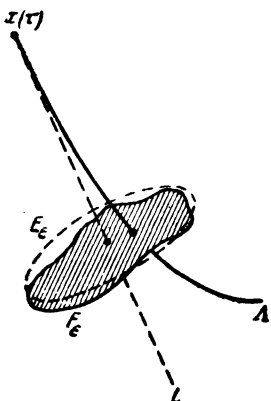


Рис. 2

образ шара (34); этот диск может иметь самопересечения и т. п.). С точностью до малых более высокого порядка, чем  $\varepsilon$ , диск  $F_\varepsilon$  «совпадает» с шаром  $E_\varepsilon$  [см. (35)]; точнее говоря, точки диска  $F_\varepsilon$  отстоят от соответствующих точек шара  $E_\varepsilon$  на величину более высокого порядка малости, чем  $\varepsilon$ . Точка же пересечения этого шара с линией  $\Lambda$  (существующая при достаточно малых  $\varepsilon$ ) отстоит от точки  $x(\tau)$  и от границы шара  $E_\varepsilon$  на величину порядка  $\varepsilon$ . Следовательно, при достаточно малом  $\varepsilon$  диск  $F_\varepsilon$  пересекает линию  $\Lambda$  в некоторой точке \* (рис. 2). Выберем такое  $\varepsilon$ . Так как весь диск  $F_\varepsilon$  (по доказанному пересекающийся с линией  $\Lambda$ ) состоит из точек вида (35), то существуют такие  $\xi^1, \dots, \xi^n$  (удовлетворяющие условию (34)), что

$$x_a^*(\tau + \varepsilon \delta t_a) \in \Lambda.$$

Иначе говоря, обозначив величины  $u_a^*(t)$ ,  $x_a^*(t)$ , соответствующие выбранным значениям  $\xi^1, \dots, \xi^n$ , через  $u_*(t)$ ,  $x_*(t)$  и полагая

$$\tau + \varepsilon \delta t_a = \tau',$$

мы получим:

$$x_*(t_0) = x_0, \quad x_*(\tau') \in \Lambda,$$

и лемма 3 доказана.

**ЛЕММА 4.** Если управление  $u(t)$  и соответствующая ему траектория  $x(t)$ ,  $t_0 \leq t \leq t_1$ , оптимальны, то для любой правильной точки  $\tau$

\* Факт существования такой точки пересечения представляется наглядно «очевидным»; строгое доказательство легко проводится элементарными средствами топологии (с помощью понятия индекса пересечения).

( $t_0 < \tau < t_1$ ) луч  $L_\tau$ , исходящий из точки  $x(\tau)$  и идущий в направлении отрицательной полуоси  $x^0$ , не принадлежит внутренности конуса  $K_\tau$  (т. е. проходит либо вне этого конуса, либо по его границе).

Доказательство. Допустим, что при некотором  $\tau$  луч  $L_\tau$  принадлежит внутренности конуса  $K_\tau$ . Применим лемму 3, принимая за линию  $\Lambda$  (и за луч  $L$ ) луч  $L_\tau$ . Тогда мы получим, что существует такое управление  $u_*(t)$ , для которого соответствующая траектория  $x_*(t)$  (исходящая из той же точки  $x_0$ ) проходит в некоторый момент  $\tau' > t_0$  через точку, лежащую на луче  $L_\tau$ . Иначе говоря,

$$x_*^i(\tau') = x^i(\tau), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad x_*^0(\tau') < x^0(\tau).$$

Определим управление  $u_{**}(t)$  на отрезке  $t_0 \leq t \leq t_1 + (\tau' - \tau)$ , положив

$$u_{**}(t) = \begin{cases} u_*(t) & \text{при } t_0 \leq t \leq \tau', \\ u(t - (\tau' - \tau)) & \text{при } \tau' < t \leq t_1 + (\tau' - \tau). \end{cases}$$

Траектория  $x_{**}(t)$ , соответствующая управлению  $u_{**}(t)$  и исходящая из точки  $x_0$ , на отрезке  $t_0 \leq t \leq \tau'$  совпадает, очевидно, с траекторией  $x_*(t)$ , так что, в частности,

$$\begin{aligned} x_{**}^i(\tau') &= x^i(\tau), \quad i = 1, 2, \dots, n, \\ x_{**}^0(\tau') &< x^0(\tau). \end{aligned} \quad (36)$$

Далее, на отрезке  $\tau' \leq t \leq t_1 + (\tau' - \tau)$  траектория  $x_{**}(t)$  имеет вид

$$x_{**}(t) = x(t - (\tau' - \tau)) + p, \quad (37)$$

где  $p$  — постоянный вектор:

$$p = \{x_{**}^0(\tau') - x^0(\tau), 0, 0, \dots, 0\}.$$

(Это получается непосредственной подстановкой решения (37) в уравнения (6) с учетом того факта, что правые части системы (6) не зависят от  $t$  и  $x^0$ ; вектор  $p$  определяется тем условием, что в точке  $\tau'$  — точке стыка двух кусков траектории  $x_{**}(t)$  — эта траектория должна быть непрерывна.) При  $t = t_1 + (\tau' - \tau)$  получаем:

$$x_{**}(t_1 + (\tau' - \tau)) = x(t_1) + p.$$

Иначе говоря, точка  $x_{**}(t_1 + (\tau' - \tau))$  лежит на прямой  $\Pi$ , определенной в п. 3 (ибо вектор  $p$  параллелен оси  $x^0$ ) и, кроме того,

$$x_{**}^0(t_1 + (\tau' - \tau)) = x^0(t_1) + x_{**}^0(\tau') - x^0(\tau) < x^0(t_1)$$

[см. (36)]. Но это противоречит оптимальности траектории  $x(t)$  и управления  $u(t)$ . Таким образом, предположение, сделанное в начале доказательства, приводит к противоречию, и лемма 4 полностью доказана.

14. Опорные гиперплоскости. В этом пункте мы будем предполагать, что  $x(t)$ ,  $t_0 \leq t \leq t_1$ , — оптимальная траектория (соединяющая точку  $x_0$  с некоторой точкой прямой  $\Pi$ , см. п. 3), а  $u(t)$  — соответствующее оптимальное управление. Пусть  $\tau$  — некоторая правильная точка управления  $u(t)$ . Согласно лемме 3, луч  $L_\tau$  не принадлежит внутренности конуса  $K_\tau$ , так что этот конус не заполняет всего пространства  $X$ . Поэтому существует опорная гиперплоскость к конусу  $K_\tau$  в его вершине, т. е. такая гиперплоскость  $\Gamma$ , что весь конус  $K_\tau$  лежит в одном из двух

замкнутых полупространств, определяемых гиперплоскостью  $\Gamma$ . (Гиперплоскость  $\Gamma$ , обладающая этим свойством, может быть не единственной последующие рассуждения этого пункта справедливы для любой такой гиперплоскости.) Уравнение гиперплоскости  $\Gamma$  (в пространстве  $X_\tau$ ) можно записать в виде  $a_\alpha x^\alpha = 0$ , где  $x^0, x^1, \dots, x^n$  — текущие координаты. Так как умножение всех коэффициентов  $a_\alpha$  на одно и то же отличное от нуля число не меняет гиперплоскости  $\Gamma$ , то мы можем считать (изменив, если нужно, знаки всех чисел  $a_\alpha$  на обратные), что конус  $K_\tau$  лежит в отрицательном полупространстве ( $a_\alpha x^\alpha \leq 0$ ). Иначе говоря, для любого вектора  $\Delta x$ , определяемого формулой (26), выполнено неравенство

$$(a, \Delta x) \leq 0 \quad (\Delta x \in K_\tau), \quad (38)$$

где через  $a$  обозначен вектор  $\{a_0, a_1, \dots, a_n\}$  (ибо совокупность векторов (26) и есть конус  $K_\tau$ ). Полагая в формуле (26)

$$\delta t_1 = \delta t_2 = \dots = \delta t_s = 0,$$

мы получим:

$$\Delta x = f(x(\tau), u(\tau)) \delta t,$$

и, в силу (38),

$$(a, f(x(\tau), u(\tau)) \delta t) \leq 0.$$

Так как это неравенство справедливо при любых  $\delta t$  (как положительных, так и отрицательных), то

$$(a, f(x(\tau), u(\tau))) = 0,$$

или, в силу определения функции  $H$ ,

$$H(a, x(\tau), u(\tau)) = 0 \quad (39)$$

(это соотношение выполняется, если вектор  $a$  удовлетворяет условию (38))

Обозначим через

$$\psi(t, a) = \{\psi_0(t, a), \psi_1(t, a), \dots, \psi_n(t, a)\}$$

решение системы уравнений (13) (для изучаемых оптимальных  $u(t)$  и  $x(t)$ ) с начальным условием

$$\psi(\tau, a) = a. \quad (40)$$

Решение  $\psi(t, a)$  определено на всем отрезке  $t_0 \leq t \leq t_1$ , так как система (13) линейна.

**ЛЕММА 5.** Если вектор  $a$  удовлетворяет условию (38), то во всякой правильной точке управления  $u(t)$ , лежащей на полуинтервале  $t_0 < t \leq \tau$ , выполнено соотношение

$$H(\psi(t, a), x(t), u(t)) = M(\psi(t, a), x(t)).$$

Пусть  $\tau_1$  — правильная точка управления  $u(t)$ , расположенная на полуинтервале  $t_0 < t \leq \tau$ , а  $v_1$  — произвольная точка пространства  $U$ . Рассмотрим символ  $\alpha$  (см. п. 11) с единственной точкой  $\tau_1$  (т. е.  $s = 1$ ) и с числами  $\delta t_1, \delta t$ , соответственно равными единице и нулю:

$$\alpha = \{\tau_1, v_1, \tau, 1, 0\}.$$

Тогда вектор  $\Delta x$  [см. (26)], соответствующий этому символу  $a$ , будет иметь значение

$$\Delta x = A_{\tau_1, \tau} [f(x(\tau_1), v_1) - f(x(\tau_1), u(\tau_1))].$$

В силу соотношений (38) и (40) отсюда получаем:

$$(\psi(\tau, a), A_{\tau_1, \tau} [f(x(\tau_1), v_1) - f(x(\tau_1), u(\tau_1))]) \leq 0,$$

и потому, согласно лемме 1 и соотношению  $A_{\tau_1, \tau_1} = E$  [см. (10)],

$$(\psi(\tau_1, a), f(x(\tau_1), v_1) - f(x(\tau_1), u(\tau_1))) \leq 0.$$

Последнее соотношение переписывается (в силу определения функции  $H$ ) в виде

$$H(\psi(\tau_1, a), x(\tau_1), v_1) - H(\psi(\tau_1, a), x(\tau_1), u(\tau_1)) \leq 0,$$

а так как это неравенство справедливо для любой точки  $v_1 \in U$ , то мы получаем:

$$H(\psi(\tau_1, a), x(\tau_1), u(\tau_1)) = \max_{v_1 \in U} H(\psi(\tau_1, a), x(\tau_1), v_1) = M(\psi(\tau_1, a), x(\tau_1)),$$

и лемма 5 доказана.

Соотношение, указанное в лемме 5, справедливо при  $t = \tau$  (ибо  $\tau$  — правильная точка):

$$H(\psi(\tau, a), x(\tau), u(\tau)) = M(\psi(\tau, a), x(\tau)).$$

Поэтому, в силу (39) и (40), мы получаем следующее утверждение.

**ЛЕММА 6.** Если вектор  $a$  удовлетворяет условию (38), то

$$M(\psi(\tau, a), x(\tau)) = 0.$$

#### 15. Постоянство функции $M$ .

**ЛЕММА 7.** Если абсолютно непрерывная функция  $\psi(t)$  почти всюду на некотором отрезке  $I$  удовлетворяет уравнениям (13) и соотношению

$$H(\psi(t), x(t), u(t)) = M(\psi(t), x(t)), \quad (41)$$

то функция  $M(\psi(t), x(t))$  постоянна на всем отрезке  $I$ .

Заметим прежде всего, что функция  $M(\psi(t), x(t))$  полунепрерывна снизу на отрезке  $I$ . Действительно, пусть  $t'$  — произвольная точка этого отрезка, а  $\varepsilon$  — положительное число. В силу определения верхней грани, существует такая точка  $u' \in U$ , что

$$H(\psi(t'), x(t'), u') \geq M(\psi(t'), x(t')) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Далее, в силу непрерывности функции  $H(\psi(t), x(t), u)$  по  $t$  при фиксированном  $u$ , существует такое  $\delta > 0$ , что при  $|t - t'| < \delta$  имеем:

$$|H(\psi(t), x(t), u') - H(\psi(t'), x(t'), u')| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Таким образом, при  $|t - t'| < \delta$  справедливо неравенство

$$\begin{aligned} M(\psi(t), x(t)) &= \sup_{u \in U} H(\psi(t), x(t), u) \geq \\ &\geq H(\psi(t), x(t), u') > M(\psi(t'), x(t')) - \varepsilon, \end{aligned}$$

показывающее, что функция  $M(\psi(t), x(t))$  полунепрерывна снизу.

Далее, так как управление  $u(t)$  допустимо, то образ отрезка  $I$  при

отображении  $u$  обладает в пространстве  $U$  компактным замыканием (см. п. 1), т. е. в пространстве  $U$  существует такое (замкнутое) компактное множество  $P$ , что  $u(t) \in P$  при  $t \in I$ . Положим

$$m(\phi, x) = \max_{u \in P} H(\phi, x, u).$$

Очевидно, имеет место неравенство

$$M(\phi, x) \geq m(\phi, x), \quad (42)$$

справедливое при любых  $x$  и  $\phi$ . Соотношение (41) означает, что почти всюду на отрезке  $I$  имеет место равенство

$$m(\phi(t), x(t)) = M(\phi(t), x(t))$$

(ибо  $u(t) \in P$ ).

Итак,  $M(\phi(t), x(t))$  есть полунепрерывная снизу функция, почти всюду на отрезке  $I$  совпадающая с функцией  $m(\phi(t), x(t))$  и связанная с ней формулой (42). Из этого следует, что если функция  $m(\phi(t), x(t))$  непрерывна, то функция  $M(\phi(t), x(t))$  всюду на отрезке  $I$  совпадает с ней (и потому также непрерывна). Мы сейчас покажем, что функция  $m(\phi(t), x(t))$ , — а значит, в силу сказанного, и  $M(\phi(t), x(t))$  — абсолютно непрерывна на отрезке  $I$ .

Так как отрезок  $I$  компактен, то в пространстве переменных  $\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_n, x^0, x^1, \dots, x^n$  существует такое выпуклое ограниченное множество  $Q$ , что точка  $(\phi(t), x(t))$  принадлежит множеству  $Q$  при  $t \in I$ . Таким образом, тройка  $(\phi(t), x(t), u(t))$  принадлежит множеству  $Q \times P$  при  $t \in I$ . Далее, так как производные функции  $H(\phi, x, u)$  по переменным  $\phi_\alpha, x^\alpha$  непрерывны по совокупности переменных  $\phi, x, u$  (см. условия, наложенные на функции  $j$  в п. 2), то на компактном множестве  $Q \times P$  все эти производные ограничены. Отсюда следует существование такой (не зависящей от  $u$ ) константы  $K > 0$ , что для любых  $(\phi, x) \in Q, (\phi', x') \in Q, u \in P$  выполнено соотношение

$$|H(\phi, x, u) - H(\phi', x', u)| \leq Kd, \quad (43)$$

где  $d$  — наибольшее из чисел  $|\phi - \phi'|, |x - x'|$ .

Пусть  $(\phi, x)$  и  $(\phi', x')$  — две точки множества  $Q$ , а  $u$  и  $u'$  — такие точки множества  $P$ , что  $m(\phi, x) = H(\phi, x, u)$ ,  $m(\phi', x') = H(\phi', x', u')$ . Тогда, очевидно, выполнены неравенства

$$H(\phi, x, u') \leq H(\phi, x, u), \quad H(\phi', x', u) \leq H(\phi', x', u'),$$

и потому (учитывая соотношение (43)) мы получаем:

$$\begin{aligned} -Kd &\leq H(\phi, x, u') - H(\phi', x', u') \leq H(\phi, x, u) - H(\phi', x', u') \leq \\ &\leq H(\phi, x, u) - H(\phi', x', u) \leq Kd. \end{aligned}$$

Иначе говоря,

$$|m(\phi, x) - m(\phi', x')| \leq Kd,$$

где  $d$  — наибольшее из чисел  $|\phi - \phi'|, |x - x'|$ . В частности, отсюда получаем:

$$|m(\phi(t), x(t)) - m(\phi(t'), x(t'))| \leq Kd, \quad t, t' \in I,$$

где  $d$  — наибольшее из чисел  $|\phi(t) - \phi(t')|, |x(t) - x(t')|$ . Из этого неравенства, в силу абсолютной непрерывности функций  $\phi(t)$  и  $x(t)$ , без труда заключаем, что функция  $m(\phi(t), x(t))$  абсолютно непрерывна.

Покажем, наконец, что функция  $\mathbf{m}(\phi(t), \mathbf{x}(t))$  почти всюду имеет производную, равную нулю. В силу абсолютной непрерывности функции  $\mathbf{m}(\phi(t), \mathbf{x}(t))$  и определения функций  $\mathbf{x}(t)$  и  $\phi(t)$ , почти всюду на отрезке  $I$  имеют место следующие обстоятельства: функция  $\mathbf{m}(\phi(t), \mathbf{x}(t))$  имеет производную, а для функций  $\mathbf{x}(t)$  и  $\phi(t)$  выполнены соотношения (6) и (13), или, что то же самое, (14) и (15). Пусть  $t$  — какая-либо точка, в которой эти обстоятельства имеют место,  $t'$  — произвольная, отличная от  $t$ , точка отрезка  $I$ , а  $u$  — такая точка множества  $P$ , для которой

$$\mathbf{m}(\phi(t), \mathbf{x}(t)) = \mathbf{H}(\phi(t), \mathbf{x}(t), u).$$

Тогда  $\mathbf{m}(\phi(t'), \mathbf{x}(t')) \geq \mathbf{H}(\phi(t'), \mathbf{x}(t'), u)$ , и потому

$$\mathbf{m}(\phi(t'), \mathbf{x}(t')) - \mathbf{m}(\phi(t), \mathbf{x}(t)) \geq \mathbf{H}(\phi(t'), \mathbf{x}(t'), u) - \mathbf{H}(\phi(t), \mathbf{x}(t), u).$$

Будем теперь считать, что  $t'$  приближается к  $t$ , оставаясь больше  $t$ , так что разность  $t' - t$  положительна. Тогда деление на  $t' - t$  не меняет направления знака неравенства в последнем соотношении:

$$\frac{\mathbf{m}(\phi(t'), \mathbf{x}(t')) - \mathbf{m}(\phi(t), \mathbf{x}(t))}{t' - t} \geq \frac{\mathbf{H}(\phi(t'), \mathbf{x}(t'), u) - \mathbf{H}(\phi(t), \mathbf{x}(t), u)}{t' - t}.$$

Переходя к пределу при  $t' \rightarrow t$  ( $t' > t$ ), получаем отсюда:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{m}(\phi(t), \mathbf{x}(t)) \geq \frac{d}{dt} \mathbf{H}(\phi(t), \mathbf{x}(t), u) = \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \phi_\alpha} \cdot \frac{d\phi_\alpha(t)}{dt} + \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial x^\alpha} \cdot \frac{dx^\alpha(t)}{dt} = 0$$

(здесь производные вычисляются в точке  $t$ , а  $u$  фиксировано). Аналогично, при  $t' \rightarrow t$ ,  $t' < t$ , получаем обратное неравенство:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{m}(\phi(t), \mathbf{x}(t)) \leq 0.$$

Итак, функции  $\mathbf{m}(\phi(t), \mathbf{x}(t))$  (а также и совпадающая с ней функция  $\mathbf{M}(\phi(t), \mathbf{x}(t))$ ) есть абсолютно непрерывная функция, имеющая почти всюду производную, равную нулю. Следовательно, эта функция постоянна на отрезке  $I$ .

16. Предельный конус. Докажем следующее важное свойство конусов  $\mathbf{K}_\tau$ :

ЛЕММА 8. Если  $\tau$  и  $\tau'$  — правильные точки управления  $u(t)$ , причем  $\tau' < \tau$ , то  $A_{\tau', \tau}(\mathbf{K}_\tau) \subset \mathbf{K}_\tau$ , где  $A_{\tau', \tau}$  — отображение пространства  $\mathbf{X}_{\tau'}$  на  $\mathbf{X}_\tau$ , определенное в п. 4.

В самом деле, конус  $\mathbf{K}_\tau$  образован векторами, каждый из которых, в силу (26), можно представить в виде суммы двух векторов:

$$\Delta_1 \mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau'), u(\tau')) \delta t,$$

$$\Delta_2 \mathbf{x} = \sum_{i=1}^s A_{\tau_i, \tau'} [\mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau_i), v_i) - \mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau_i), u(\tau_i))] \delta t_i.$$

Поэтому нам достаточно показать, что имеют место включения

$$A_{\tau', \tau}(\Delta_1 \mathbf{x}) \in \mathbf{K}_\tau, \quad A_{\tau', \tau}(\Delta_2 \mathbf{x}) \in \mathbf{K}_\tau. \quad (44)$$

Мы имеем в силу (10):

$$A_{\tau', \tau}(\Delta_2 \mathbf{x}) = \sum_{i=1}^s A_{\tau_i, \tau} [\mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau_i), v_i) - \mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau_i), u(\tau_i))] \delta t_i.$$

и потому второе из включений (44) имеет место (ибо  $\tau_1 \leq \dots \leq \tau_s \leq \tau' < \tau$ ). Докажем первое из этих включений. Допустим, что (при некотором  $\delta t$ ) вектор  $A_{\tau', \tau}(\Delta_1 x)$  не принадлежит конусу  $K_\tau$ . Тогда существует гиперплоскость, разделяющая их, т. е. существуют такие числа  $a_0, a_1, \dots, a_n$ , что конус  $K_\tau$  расположен в отрицательном полупространстве  $a_\alpha x^\alpha \leq 0$ , а вектор  $A_{\tau', \tau}(\Delta_1 x)$  — в открытом положительном полупространстве, т. е.

$$(a, A_{\tau', \tau}(\Delta_1 x)) > 0, \quad (45)$$

где  $a$  — вектор  $\{a_0, a_1, \dots, a_n\}$ .

Обозначим через  $\phi(t, a)$  решение системы (13) с начальным условием  $\phi(\tau, a) = a$ . Это решение мы будем рассматривать на отрезке  $t_0 \leq t \leq \tau$ . Так как конус  $K_\tau$  расположен в отрицательном пространстве, т. е. выполнено условие (38), то из лемм 5, 7 и 6 вытекает, что

$$M(\phi(t, a), x(t)) \equiv 0$$

при  $t_0 \leq t \leq \tau$ . Так как, далее,  $\tau'$  — правильная точка (лежащая на отрезке  $t_0 < t \leq \tau$ ), то, согласно лемме 5,

$$N(\phi(\tau', a), x(\tau'), u(\tau')) = M(\phi(\tau', a), x(\tau')) = 0,$$

т. е.

$$(\phi(\tau', a), f(x(\tau'), u(\tau'))) = 0.$$

Отсюда, согласно лемме 1, мы получаем соотношение

$$(\phi(\tau, a), A_{\tau', \tau}(f(x(\tau'), u(\tau')))) = 0,$$

противоречащее неравенству (45). Полученное противоречие и доказывает лемму 8.

Пусть теперь  $\tau$  — произвольная правильная точка управления  $u(t)$ , лежащая на интервале  $t_0 < t < t_1$ . Положим  $K_{t_1}^{(\tau)} = A_{\tau, t_1}(K_\tau)$ . Так как  $A_{\tau, t_1}$  есть линейное отображение, то  $K_{t_1}^{(\tau)}$  есть выпуклый конус пространства  $X_{t_1}$ . Конусы  $K_{t_1}^{(\tau)}$  образуют возрастающую последовательность: если  $\tau' < \tau$  — правильные точки, то в силу леммы 8 имеем [см. (10)]:

$$K_{t_1}^{(\tau')} = A_{\tau', t_1}(K_{\tau'}) = A_{\tau, t_1}(A_{\tau', \tau}(K_{\tau'})) \subset A_{\tau, t_1}(K_\tau) = K_{t_1}^{(\tau)}.$$

Поэтому объединение (по всем правильным точкам  $\tau$  интервала  $t_0 < t < t_1$ ) всех конусов  $K_{t_1}^{(\tau)}$  снова есть выпуклый конус (возможно не замкнутый) пространства  $X_{t_1}$  (с вершиной в начале). Этот конус мы обозначим через  $K_{t_1}$  и назовем *предельным конусом*.

**ЛЕММА 9.** Если управление  $u(t)$  и соответствующая траектория  $x(t)$ ,  $t_0 \leq t \leq t_1$ , оптимальны, то луч  $L_{t_1}$ , исходящий из точки  $x(t_1)$  в направлении отрицательной оси  $x^0$ , не принадлежит внутренности конуса  $K_{t_1}$ .

В самом деле, пусть луч  $L_{t_1}$  принадлежит внутренности конуса  $K_{t_1}$ . Выберем выпуклый многогранник  $M$ , целиком лежащий в  $K_{t_1}$  и содержащий какую-либо точку  $l \in L_{t_1}$  внутри себя. Каждая вершина многогранника  $M$  принадлежит конусу  $K_{t_1}$ , т. е. принадлежит некоторому конусу  $K_{t_1}^{(\tau)}$ , а так как конусы  $K_{t_1}^{(\tau)}$  образуют возрастающую последовательность, то найдется такая правильная точка  $\tau$ , что все вершины многогранника  $M$  принадлежат конусу  $K_{t_1}^{(\tau)}$ . Следовательно, конус  $K_{t_1}^{(\tau)}$

содержит весь многогранник  $M$ , так что точка  $l$  является внутренней точкой конуса  $K_{t_1}^{(\tau)}$ , или, что то же самое, луч  $L_{t_1}$  принадлежит внутренности конуса  $K_{t_1}^{(\tau)}$ . Но тогда луч  $A_{\tau, t_1}^{-1}(L_{t_1})$  принадлежит внутренности конуса

$$A_{\tau, t_1}^{-1}(K_{t_1}^{(\tau)}) = K_{\tau}$$

(ибо  $A_{\tau, t_1}^{-1}$  есть линейное невырожденное, следовательно, гомеоморфное, отображение). Луч же  $A_{\tau, t_1}^{-1}(L_{t_1})$  совпадает с лучом  $L_{\tau}$ , исходящим из точки  $x(\tau)$  в направлении отрицательной оси  $x^0$ . Это вытекает из того, что уравнения в вариациях (9) не содержат в своих правых частях переменного  $x^0$ , и потому равные между собой векторы  $\{-1, 0, 0, \dots, 0\}$ , исходящие из точек кривой  $x(t)$ , получаются друг из друга переносом вдоль траектории  $x(t)$ . Итак, луч  $L_{\tau}$  принадлежит внутренности конуса  $K_{\tau}$ , а это противоречит оптимальности управления  $u(t)$  (см. лемму 4).

17. Доказательство принципа максимума. Переходим к завершению доказательства теоремы 1. Пусть  $u(t)$ ,  $t_0 \leq t \leq t_1$ , — оптимальное управление, а  $x(t)$  — соответствующая ему оптимальная траектория. Тогда луч  $L_{t_1}$  не принадлежит внутренности предельного конуса  $K_{t_1}$  (лемма 9), и потому существует разделяющая их гиперплоскость, т. е. существуют такие числа  $c_0, c_1, \dots, c_n$ , что весь конус  $K_{t_1}$  лежит в полупространстве  $c_{\alpha} x^{\alpha} \leq 0$ , а луч  $L_{t_1}$  — в полупространстве  $c_{\alpha} x^{\alpha} \geq 0$ . Иначе говоря, вектор  $\{-1, 0, 0, \dots, 0\}$ , имеющий направление луча  $L_{t_1}$ , лежит в полупространстве  $c_{\alpha} x^{\alpha} \geq 0$ , т. е.  $c_0 \leq 0$ .

Обозначим через  $\phi(t) = \{\phi_0(t), \phi_1(t), \dots, \phi_n(t)\}$  решение системы (13) с начальным условием  $\phi(t_1) = c$ , где  $c$  — вектор  $\{c_0, c_1, \dots, c_n\}$ . Так как система (13) линейна, то решение  $\phi(t)$  определено на всем отрезке  $t_0 \leq t \leq t_1$ . Покажем, что вектор  $\phi(t)$  и является тем вектором, существование которого утверждается в теореме 1.

Прежде всего,  $x(t)$  и  $\phi(t)$  удовлетворяют уравнениям (6) и (13), или, что то же самое, (14) и (15). Докажем, что соотношение (16) имеет место во всякой правильной точке интервала  $t_0 < t < t_1$ . Пусть  $\tau$  — правильная точка, лежащая на этом интервале. Так как весь конус  $K_{t_1}$ , а следовательно, и конус  $A_{\tau, t_1}(K_{\tau})$  лежит в отрицательном полупространстве  $\phi_{\alpha}(t_1) x^{\alpha} \leq 0$ , то (совершая перенос вдоль траектории  $x(t)$  из точки  $x(t_1)$  в точку  $x(\tau)$ ) мы получаем, что весь конус

$$A_{\tau, t_1}^{-1}(A_{\tau, t_1}(K_{\tau})) = K_{\tau}$$

лежит в полупространстве  $\phi_{\alpha}(\tau) x^{\alpha} \leq 0$  (см. п. 5). Иначе говоря, вектор  $a = \phi(\tau)$  удовлетворяет условию (38). Отсюда вытекает, что для решения  $\phi(t, a)$  уравнения (13) с начальным условием  $\phi(\tau, a) = \phi(\tau)$ , — а это решение, очевидно, совпадает с  $\phi(t)$  — справедливо утверждение леммы 5. В частности (в силу того, что  $\tau$  — правильная точка),

$$H(\phi(\tau), x(\tau), u(\tau)) = M(\phi(\tau), x(\tau)) = 0$$

(см. лемму 6).

Итак, условия 1) и 2), указанные в теореме 1, выполняются. Кроме того, есть точки, в которых функция  $M(\phi(t), x(t))$  обращается в нуль (это будет во всякой правильной точке  $\tau$ ), и, далее,  $\phi_0(t_1) = c_0 \leq 0$ . Поэтому для проверки условия 3) теоремы 1 достаточно доказать послед-

нее утверждение теоремы 1 о постоянстве функций  $M(\phi(t), x(t))$  и  $\phi_0(t)$ , если выполнены условия 1) и 2). Это непосредственно вытекает из леммы 7 и того факта, что функции  $f^\alpha$  не зависят от  $x^0$ , так что первое из уравнений (13) имеет вид

$$\frac{d\phi_0}{dt} = 0.$$

Таким образом, теорема 1 (и теорема 2) полностью доказана.

**18. Условия трансверсальности.** В этом пункте мы рассматриваем оптимальные задачи с подвижными концами. Пусть  $S_0$  и  $S_1$  — гладкие непересекающиеся многообразия (произвольных размерностей  $r_1, r_2$ , каждая из которых не превосходит  $n - 1$ ), расположенные в пространстве  $X$ . Поставим задачу найти такое допустимое управление  $u(t)$ , которое некоторую (заранее не заданную) точку  $x_0 \in S_0$  переводит в некоторую точку  $x_1 \in S_1$  и при этом придает функционалу (4) минимальное значение. Эту задачу мы и будем называть оптимальной задачей с подвижными концами. Если оба многообразия  $S_0, S_1$  вырождаются в точки, то задача с подвижными концами обращается в прежнюю, уже решенную нами задачу (задачу с закрепленными концами).

Ясно, что если бы точки  $x_0, x_1$  были известны, то мы имели бы задачу с закрепленными концами. Отсюда следует, что управление  $u(t)$ , оптимальное в смысле задачи с подвижными концами, оптимально и в прежнем смысле, т. е. принцип максимума (теоремы 1, 2) остается в силе и для задачи со свободными концами. Однако в этом случае нужно иметь еще соотношения, из которых можно было бы определить положение точек  $x_0, x_1$  на многообразиях  $S_0, S_1$ . Такими соотношениями и являются выводимые в этом пункте условия трансверсальности.

Пусть  $x_0 \in S_0, x_1 \in S_1$  — некоторые точки, а  $T_0$  и  $T_1$  — касательные плоскости многообразий  $S_0$  и  $S_1$ , проведенные в этих точках. Плоскости  $T_0$  и  $T_1$  расположены в пространстве  $X$ , а следовательно, и в пространстве  $\mathbf{X}$  (мы считаем, что  $X \subset \mathbf{X}$ , отождествляя точку  $(x^1, x^2, \dots, x^n) \in X$  с точкой  $(0, x^1, x^2, \dots, x^n) \in \mathbf{X}$ ). Пусть, далее,  $u(t), x(t), t_0 \leq t \leq t_1$ , — решение оптимальной задачи с закрепленными концами  $x_0$  и  $x_1$ . Обозначим через  $T_0$  и  $T_1$  плоскости, параллельные  $T_0$  и  $T_1$  и проходящие через точки  $x(t_0)$  и  $x(t_1)$  соответственно. Наконец, пусть  $\phi(t)$  — вектор, существование которого утверждается в теореме 1. Мы будем говорить, что вектор  $\phi(t)$  удовлетворяет условию трансверсальности в правом конце траектории  $x(t)$  (т. е. в точке  $x(t_1)$ ), если плоскость  $T_1$  целиком содержится в гиперплоскости  $\phi_\alpha(t_1)x^\alpha = 0$  (напомним, что эта гиперплоскость предполагается проходящей через точку  $x(t_1)$ , через которую также проходит и плоскость  $T_1$ ). Иначе говоря, условие трансверсальности означает, что для [любого вектора  $\theta = \{0, \theta^1, \theta^2, \dots, \theta^n\}$ , принадлежащего (или параллельного) плоскости  $T_1$ , выполнено соотношение  $(\phi(t_1), \theta) = 0$ . Аналогичный] смысл имеет условие трансверсальности в левом конце траектории  $x(t)$  (нужно лишь заменить  $t_1, T_1$  и  $T_1$  на  $t_0, T_0$  и  $T_0$  соответственно).<sup>3</sup>

Пользуясь условиями трансверсальности, можно сформулировать решение задачи с подвижными концами.

**ТЕОРЕМА 3.** Пусть  $u(t), t_0 \leq t \leq t_1$ , — допустимое управление, пере-

водящее некоторую фиксированную точку  $x_0$  в точку  $x_1 \in S_1$ , а  $x(t)$  — соответствующая траектория (исходящая из точки  $x_0 = (0, x_0)$ ). Для того чтобы  $u(t)$  и  $x(t)$  давали решение оптимальной задачи с подвижным правым концом, необходимо, чтобы существовал вектор  $\psi(t)$ , удовлетворяющий условиям, указанным в теореме 1, и, кроме того, условию трансверсальности \* в точке  $x(t_1)$ .

Разумеется, если многообразие  $S_1$  вырождается в точку, то условие трансверсальности заменяется условием прохождения траектории  $x(t)$  через эту точку.

Докажем теорему 3. Проведем через каждую точку плоскости  $T_1$  луч, идущий в направлении отрицательной полуоси  $x^0$ , и обозначим множество точек, заполняемое всеми этими лучами, через  $Q_1$ . Множество  $Q_1$  представляет собой полуплоскость; ее граничными точками являются точки плоскости  $T_1$ .

**ЛЕММА 10.** Если некоторый луч  $L$ , исходящий из точки  $x(t_1)$  и принадлежащий полуплоскости  $Q_1$ , является внутренним лучом предельного конуса  $K_{t_1}$ , то управление  $u(t)$  и траектория  $x(t)$  не являются оптимальными.

В самом деле, допустим, что в полуплоскости  $Q_1$  существует луч  $L^*$ , являющийся внутренним лучом конуса  $K_{t_1}$ . Так как всякий луч, достаточно близкий к  $L^*$ , также является внутренним лучом конуса  $K_{t_1}$ , то мы можем без ограничения общности считать, что луч  $L^*$  проходит внутри полуплоскости  $Q_1$ , т. е. имеет с  $T_1$  лишь одну общую точку  $x(t_1)$ . Возьмем вектор  $l$ , имеющий направление луча  $L^*$ , и представим его в виде суммы двух векторов  $l_0$  и  $s$ , где  $l_0$  параллелен оси  $x^0$ , а  $s$  параллелен подпространству  $X \subset \mathbb{X}$ . Тогда вектор  $l_0$  идет в направлении отрицательной полуоси  $x^0$ , а вектор  $s$  параллелен плоскости  $T_1$  (и плоскости  $T_1$ ). Поэтому на многообразии  $S_1$  существует дифференцируемая кривая, исходящая из точки  $x_1$  и касающаяся вектора  $s$ . Пусть

$$\xi(\varepsilon) = (\xi^1(\varepsilon), \xi^2(\varepsilon), \dots, \xi^n(\varepsilon)), \quad 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0,$$

—параметрическая запись этой кривой. Без ограничения общности мы можем считать параметр  $\varepsilon$  выбранным на кривой так, что

$$\left. \frac{d\xi(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = s.$$

Обозначим через  $\xi(\varepsilon)$  точку с координатами  $(x^0(t_1) - \varepsilon \cdot |l_0|, \xi^1(\varepsilon), \xi^2(\varepsilon), \dots, \xi^n(\varepsilon))$ . Кривая  $\xi(\varepsilon)$ ,  $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$ , исходит из точки  $x(t_1)$ , а ее касательный вектор в точке  $x(t_1)$ , как легко видеть, равен  $l_0 + s = l$ , т. е. луч, касающийся кривой  $\xi(\varepsilon)$  в точке  $x(t_1)$ , совпадает с  $L^*$ . Далее мы можем написать:

$$\xi(\varepsilon) = x(t_1) + l\varepsilon + \dots \quad (46)$$

Так как луч  $L^*$  является внутренним для конуса  $K_{t_1}$ , то найдется такая правильная точка  $\tau$  управления  $u(t)$ , что луч  $L^*$  является внутрен-

\* Можно доказать, что если оба конца подвижны ( $x_0 \in S_0$ ,  $x_1 \in S_1$ ), то для оптимальности необходимо существование вектора  $\psi(t)$ , удовлетворяющего условию трансверсальности в обоих концах траектории  $x(t)$ .

ним для конуса  $A_{\tau, t_1}(K_\tau)$  (ср. п. 16). Выберем такую точку  $\tau$ . Обозначим через  $y(t, \varepsilon)$  решение уравнения (7) с тем же управлением  $u(t)$  и начальным условием  $y(t_1, \varepsilon) = \xi(\varepsilon)$ . Мы будем рассматривать это решение на отрезке  $\tau \leq t \leq t_1$ , где  $\tau$  — выбранная правильная точка управления  $u(t)$ . В силу теоремы о дифференцируемости решений по параметрам, функция  $y(t, \varepsilon)$  дифференцируема по  $\varepsilon$ , причем имеет место соотношение (см. п. 4 и формулу (46))

$$\left. \frac{dy(\tau, \varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = A_{\tau, t_1}^{-1}(l).$$

Иначе говоря, луч  $L_\tau^*$ , касательный к кривой  $y(\tau, \varepsilon)$ ,  $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$ , совпадает с лучом  $A_{\tau, t_1}^{-1}(L^*)$ , т. е.  $A_{\tau, t_1}(L_\tau^*) = L^*$ .

Таким образом, луч  $A_{\tau, t_1}(L_\tau^*)$  является внутренним для конуса  $A_{\tau, t_1}(K_\tau)$ , и потому луч  $L_\tau^*$  является внутренним для конуса  $K_\tau$ . Из этого (так как кривая  $y(t, \varepsilon)$ ,  $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$ , касается луча  $L_\tau^*$ ), в силу леммы 3, можно заключить, что существует такое управление  $u_*(t)$ , для которого соответствующая траектория  $x_*(t)$ , исходящая из точки  $x_0$ , проходит через некоторую (отличную от  $x(\tau)$ ) точку линии  $y(\tau, \varepsilon)$ ,  $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$ . Иначе говоря, существуют такие  $t' > t_0$  и  $\varepsilon' > 0$ , что

$$x_*(t') = y(\tau, \varepsilon'). \quad (47)$$

Определим управление  $u_{**}(t)$  на отрезке  $t_0 \leq t \leq t_1 + (t' - \tau)$ , положив

$$u_{**}(t) = \begin{cases} u_*(t) & \text{при } t_0 \leq t \leq t', \\ u(t - (t' - \tau)) & \text{при } t' < t \leq t_1 + (t' - \tau). \end{cases}$$

Траектория  $x_{**}(t)$ , соответствующая управлению  $u_{**}(t)$  и исходящая из точки  $x_0$ , имеет, очевидно, следующий вид [ср. (47)]:

$$x_{**}(t) = \begin{cases} x_*(t) & \text{при } t_0 \leq t \leq t', \\ y(t - (t' - \tau), \varepsilon') & \text{при } t' < t \leq t_1 + (t' - \tau). \end{cases}$$

В частности,

$$x_{**}(t_1 + (t' - \tau)) = y(t_1, \varepsilon') = \xi(\varepsilon').$$

Но так как точка  $\xi(\varepsilon')$  имеет координату  $x^0$ , равную  $x^0(t_1) - \varepsilon' |l_0|$ , т. е. меньшую чем  $x^0(t_1)$ , то управление  $u_{**}(t)$  переводит точку  $x_0$  в точку  $\xi(\varepsilon') \in S_1$  и для него функционал (4) принимает меньшее значение, чем для управления  $u(t)$ . Таким образом, управление  $u(t)$  и траектория  $x(t)$  не оптимальны, и лемма 10 доказана.

Теперь уже нетрудно закончить доказательство теоремы 3. Предельный конус  $K_{t_1}$  и полуплоскость  $Q_1$  являются выпуклыми конусами пространства  $X$  с общей вершиной в точке  $x(t_1)$ . В силу леммы 10, внутренность конуса  $K_{t_1}$  не пересекается с конусом  $Q_1$ ; конус же  $Q_1$  совсем не содержит внутренних точек, так как размерность многообразия  $S_1$  меньше  $n$ , и, следовательно, размерность полуплоскости  $Q_1$  меньше  $n + 1$ , т. е. меньше размерности пространства  $X$ . Итак, каждый из конусов  $K_{t_i}$ ,  $Q_1$  не пересекается с внутренностью другого, и потому существует разделяющая их гиперплоскость, т. е. существуют такие числа  $c_0, c_1, \dots, c_n$ , что весь конус  $K_{t_i}$  лежит в полупространстве  $c_\alpha x^\alpha \leq 0$  (где  $x^0$ ,

$x^1, \dots, x^n$  — координаты в пространстве  $X_{t_1}$ , а конус  $Q_1$  — в полупространстве  $c_\alpha x^\alpha \geq 0$ . В частности, луч  $L_{t_1}$  (лежащий в полупространстве  $Q_1$ ) расположен в полупространстве  $c_\alpha x^\alpha \geq 0$ . Таким образом, числа  $c_0, c_1, \dots, c_n$  обладают всеми свойствами, указанными в п. 17, и потому решение  $\phi(t) = \{\phi_0(t), \phi_1(t), \dots, \phi_n(t)\}$  системы (13) с начальным условием  $\phi(t_1) = c$  (где  $c$  — вектор  $\{c_0, c_1, \dots, c_n\}$ ) удовлетворяет условиям, указанным в теореме 1.

Далее, плоскость  $T_1$  (содержащаяся в  $Q_1$ ) расположена целиком в полупространстве  $c_\alpha x^\alpha \geq 0$ , а следовательно, в гиперплоскости  $c_\alpha x^\alpha = 0$ , или, что то же самое, в гиперплоскости  $\phi_\alpha(t_1) x^\alpha = 0$ . Таким образом, вектор  $\phi(t)$  удовлетворяет условию трансверсальности в правом конце траектории  $x(t)$ .

19. Принцип максимума для неавтономных систем. В этом и следующих пунктах мы рассмотрим некоторые оптимальные задачи, решение которых получается либо в качестве следствия из предыдущих результатов, либо при помощи незначительных видоизменений проведенных выше рассуждений.

Прежде всего рассмотрим оптимальную задачу такого же вида, как и (1), (4), но в случае, когда функции  $f^\alpha$  явно зависят от времени (пространство  $U$  предполагается не зависящим от времени). Таким образом, закон движения объекта и функционал, минимум которого ищется, принимают в рассматриваемом случае вид:

$$\frac{dx^i}{dt} = f^i(x, u, t), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (48)$$

$$J = \int_{t_0}^{t_1} f^0(x(t), u(t), t) dt. \quad (49)$$

Введя, как и прежде, новую координату

$$x^0 = \int_{t_0}^t f^0(x(t), u(t), t) dt,$$

мы сформулируем рассматриваемую задачу в следующей форме (ср. п. 3):

В  $(n+1)$ -мерном фазовом пространстве  $X$  даны точка  $x_0 = (0, x_0)$  и прямая  $\Pi$ , параллельная оси  $x^0$  и проходящая через точку  $(0, x_1)$ . Среди всех допустимых управлений  $u = u(t)$ , обладающих тем свойством, что решение  $x(t)$  системы

$$\frac{dx^i}{dt} = f^i(x, u, t), \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad (50)$$

с начальным условием  $x(t_0) = x_0$  пересекает прямую  $\Pi$ , найти такое, для которого точка пересечения с прямой  $\Pi$  имеет наименьшую координату  $x^0$ .

Для решения этой задачи введем еще одно вспомогательное неизвестное  $x^{n+1}$ , изменяющееся по закону

$$\frac{dx^{n+1}}{dt} = 1, \quad x^{n+1}(t_0) = t_0.$$

Очевидно, что  $x^{n+1} \equiv t$ . С помощью неизвестного  $x^{n+1}$  система (50) может быть записана в виде следующей автономной системы (т. е. системы

у которой правые части не зависят от  $t$ ):

$$\begin{cases} \frac{dx^i}{dt} = f^i(x, u, x^{n+1}), & i = 0, 1, \dots, n, \\ \frac{dx^{n+1}}{dt} = 1. \end{cases}$$

При этом мы должны найти оптимальную траекторию, соединяющую точку  $(x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^n, t_0)$  с некоторой точкой прямой  $S_1$ , проходящей через точку  $(x_1^1, x_1^2, \dots, x_1^n, 0)$  параллельно оси  $x^{n+1}$  (ибо конечное значение переменного  $x^{n+1}$ , т. е. момент времени, когда движущаяся точка приходит в положение  $x_1$ , не является заранее заданным). Таким образом, мы получаем обычную оптимальную задачу с закрепленным левым и подвижным правым концом.

Напишем принцип максимума и условие трансверсальности для полученной задачи. Сопряженная система уравнений имеет вид (суммирование по  $\alpha$  от 0 до  $n$ ):

$$\frac{d\psi_i}{dt} = - \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^i} \psi_\alpha, \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad (51)$$

$$\frac{d\psi_{n+1}}{dt} = - \frac{\partial f^\alpha}{\partial t} \psi_\alpha. \quad (52)$$

Согласно теоремам 1 и 3, для решения рассматриваемой задачи нужно составить функцию

$$\psi_0 f^0(x, u, x^{n+1}) + \psi_1 f^1(x, u, x^{n+1}) + \dots + \psi_n f^n(x, u, x^{n+1}) + \psi_{n+1} \cdot 1.$$

Эту функцию мы обозначим через  $H^*$  (а не через  $H$ , как в теореме 1), сохранив обозначение  $H$  для функции

$$H(\phi, x, u, t) = \psi_0 f^0(x, u, t) + \psi_1 f^1(x, u, t) + \dots + \psi_n f^n(x, u, t).$$

Точно так же максимум по  $u$  функции  $H^*$  при фиксированных  $x^i, \psi_i$  мы обозначим через  $M^*(\phi, x, x^{n+1})$  (а не через  $M$ , как в теореме 1), сохранив обозначение  $M(\phi, x, t)$  для максимума (по  $u$ ) функции  $H(\phi, x, u, t)$  при фиксированных  $\phi, x, t$ . Таким образом, учитывая соотношение  $x^{n+1} \equiv t$ , мы можем написать:

$$H^* = H + \psi_{n+1}, \quad M^* = M + \psi_{n+1},$$

и потому соотношение  $H^* (=) M^* \equiv 0$ , выполняющееся вдоль оптимальной траектории (см. теорему 1), принимает вид:

$$H(\phi(t), x(t), u(t), t) + \psi_{n+1}(t) \equiv 0. \quad (53)$$

Наконец, условие трансверсальности в правом конце траектории показывает, что прямая  $S_1$  (параллельная оси  $x^{n+1}$ ) содержится в плоскости  $\phi_p(t_1) x^p = 0$  (суммирование по  $p$  от 0 до  $n+1$ ). Иначе говоря,

$$\psi_{n+1}(t_1) = 0.$$

Вместе с соотношениями (53), (52) это дает:

$$M(\phi(t), x(t), t) = \int_{t_1}^t \frac{\partial f^\alpha(x(t), u(t), t)}{\partial t} \psi_\alpha(t) dt.$$

Итак, мы получаем следующую теорему (принцип максимума для неавтономных систем):

ТЕОРЕМА 4. Пусть  $u(t)$  — такое допустимое управление, что соответствующая ему траектория  $x(t)$  системы (50), исходящая в момент  $t_0$  из точки  $x_0$ , проходит в момент  $t_1 > t_0$  через некоторую точку прямой  $\Pi$ . Для оптимальности управления  $u(t)$  и соответствующей ему траектории  $x(t)$ ,  $t_0 \leq t \leq t_1$ , необходимо существование такого ненулевого абсолютно непрерывного вектора  $\phi(t) = \{\phi_0(t), \phi_1(t), \dots, \phi_n(t)\}$ , что:

1) величины  $x(t)$ ,  $\phi(t)$ , и  $u(t)$  удовлетворяют гамильтоновой системе

$$\frac{dx^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \psi_i}, \quad \frac{d\psi_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x^i} \quad (i = 0, 1, \dots, n),$$

или, что то же самое, системе (50), (51);

2) почти для всех  $t$ ,  $t_0 \leq t \leq t_1$ , функция  $H(\phi(t), x(t), u, t)$  переменного  $u \in U$  достигает в точке  $u = u(t)$  максимума:

$$H(\phi(t), x(t), u(t), t) (=) M(\phi(t), x(t), t);$$

3) выполнены соотношения

$$\phi_0(t) = \text{const} \leq 0, \quad M(\phi(t), x(t), t) = \int_{t_1}^t \frac{\partial f^\alpha(x(t), u(t), t)}{\partial t} \phi_\alpha(t) dt. \quad (54)$$

Если величины  $\phi(t), x(t), u(t)$  удовлетворяют условиям 1) и 2), то функция  $\phi_0(t)$  переменного  $t$  постоянна, а функция  $M(\phi(t), x(t), t)$  может лишь на константу отличаться от интеграла, указанного в соотношениях (54), так что проверку соотношений (54) достаточно произвести лишь в какой-либо один момент времени  $t$ ,  $t_0 \leq t \leq t_1$ ; например, вместо (54) достаточно проверить соотношения

$$\phi_0(t_1) \leq 0, \quad M(\phi(t_1), x(t_1), t_1) = 0. \quad (55)$$

Если теперь предположить, что точка  $x_1$ , в которую точка  $x_0$  должна переводиться с помощью управления  $u(t)$ , не неподвижна, а перемещается, т. е.  $x_1 = x_1(t)$ , то формулировка теоремы 4 несколько меняется. Имено, пусть  $u(t)$  — такое допустимое управление, которое точку  $x_0$  в некоторый момент времени  $t_1$  переводит в точку  $x_1(t_1)$ , и пусть

$$\left. \frac{dx_1}{dt} \right|_{t=t_1} = \{q^1, q^2, \dots, q^n\}$$

— касательный вектор к кривой  $x_1(t)$  в момент  $t_1$ . Тогда, после введения вспомогательного переменного  $x^{n+1} = t$ , мы получим, что многообразие  $S_1$  будет уже не прямой, параллельной оси  $x^{n+1}$ , а линией  $(x_1^1(\theta), x_1^2(\theta), \dots, x_1^n(\theta), \theta)$ , где  $\theta$  — параметр. Касательная прямая к этой линии в точке  $\theta = t_1$  определяется вектором  $\{q^1, q^2, \dots, q^n, 1\}$ , и потому условие трансверсальности принимает вид

$$\phi_v(t_1) q^v + \phi_{n+1}(t_1) \cdot 1 = 0.$$

Отсюда, учитывая соотношение (53), находим:

$$M(\phi(t_1), x(t_1), t_1) = -\phi_{n+1}(t_1) = \phi_v(t_1) q^v.$$

Так как, согласно (53) и (52), функция  $M(\phi(t), x(t), t)$  является первообразной для  $\frac{\partial f^\alpha(x(t), u(t), t)}{\partial t} \phi_\alpha(t)$ , то мы получаем:

$$M(\phi(t), x(t), t) = \phi_v(t_1) q^v + \int_{t_1}^t \frac{\partial f^\alpha(x(t), u(t), t)}{\partial t} \phi_\alpha(t) dt. \quad (56)$$

Это и есть соотношение, которым заменяется равенство (54) в формулировке теоремы 4; в связи с этим соотношение (55) принимает вид

$$\phi_0(t_1) \leq 0, \quad M(\phi(t_1), x(t_1), t_1) = \phi_v(t_1) q^v. \quad (57)$$

В остальном формулировка теоремы 4 сохраняется.

Наконец, рассмотрим неавтономную оптимальную задачу с подвижными концами. Ограничимся случаем подвижного правого конца. Пусть  $S_1(t)$  — перемещающееся многообразие, дифференцируемым образом зависящее от  $t$  и внутренних координат на этом многообразии. Задача заключается в отыскании такого допустимого управления  $u(t)$ , что точка, движущаяся по закону (48) с начальным условием  $x(t_0) = x_0$ , попадает в некоторый момент  $t_1$  на многообразие  $S(t_1)$ , причем осуществляется минимум функционала (49) при этих условиях. Обозначим через  $T_1$  касательную плоскость многообразия  $S(t_1)$  в точке  $x(t_1)$ , а через  $T_1$  — параллельную ей плоскость, проходящую через точку  $x(t_1)$ . Далее, обозначим через  $S_1^*$  множество всех точек  $(n+1)$ -мерного пространства  $(x^1, x^2, \dots, x^n, t)$ , для которых точка  $(x^1, x^2, \dots, x^n)$  принадлежит многообразию  $S(t)$ . Ясно, что  $S_1^*$  является  $(r_1+1)$ -мерным многообразием (где  $r_1$  — размерность многообразия  $S(t)$ ). Так как множество всех векторов, касательных к многообразию  $S_1^*$  в точке  $(x(t_1), t_1)$  и имеющих вид  $\{q^1, q^2, \dots, q^n, 0\}$ , имеет размерность  $r_1$ , а многообразие  $S_1^*$  имеет размерность  $> r_1$ , то существуют такие числа  $q^1, q^2, \dots, q^n$ , что вектор  $\{q^1, q^2, \dots, q^n, 1\}$  касается многообразия  $S_1^*$  (в точке  $(x(t_1), t_1)$ ). Эти числа  $q^1, q^2, \dots, q^n$  дадут нам возможность написать соотношения (56), (57), которым должен удовлетворять вектор  $\phi(t)$ . Наконец, как и в п. 18, будем говорить, что вектор  $\phi(t) = \{\phi_0(t), \phi_1(t), \dots, \phi_n(t)\}$  удовлетворяет условию трансверсальности в точке  $t_1$ , если плоскость  $T_1$  расположена целиком в гиперплоскости  $\phi_\alpha(t_1)x^\alpha = 0$ . При этих условиях имеет место следующее предложение (обобщение теоремы 3 на неавтономный случай):

*Для того чтобы  $u(t)$  и  $x(t)$  давали решение оптимальной неавтономной задачи с подвижным правым концом, необходимо, чтобы существовал вектор  $\phi(t)$ , удовлетворяющий условиям, указанным в теореме 4, с заменой соотношений (54), (55) соотношениями (56), (57) и, кроме того, условию трансверсальности в точке  $t_1$ .*

Это утверждение легко вытекает из теоремы 3 после введения новой переменной  $x^{n+1} = t$  (ср. доказательство теоремы 4).

Отметим, что если многообразие  $S_1$  неподвижно, то соотношения (56), (57) совпадают с (54), (55), так как в этом случае вектор  $\{0, 0, \dots, 0, 1\}$  касается многообразия  $S_1^*$ .

20. Задача с закрепленным временем. Предположим теперь, что рассматривается такая же оптимальная задача, что и в п. 2 (или в п. 19, т. е. с зависимостью функций  $f^a$  от времени), но с условием, что время  $t_0$  начала движения точки (из положения  $x_0$ ) и время  $t_1$  ее попадания в точку  $x_1$  заданы заранее, так что время  $t_1 - t_0$  зафиксировано. Решение этой задачи мы легко получим из предыдущих рассмотрений. Именно, мы условимся рассматривать лишь такие символы

$$a = \{\tau, v_i, \tau, \delta t_i, \delta t\},$$

для которых  $\delta t = 0$ . Тогда все рассуждения предыдущих пунктов, приведшие нас к доказательству принципа максимума, сохраняются и даже несколько упрощаются. Например, доказательство соотношения  $A_{\tau', \tau}(\Delta_1 x) \in K_{\tau}$  (см. (44)) становится просто излишним, так как в рассматриваемом случае  $\Delta_1 x = f(x(\tau'), u(\tau')) \delta t = 0$ . Единственной формулой, которая перестает быть справедливой, является формула (39), при доказательстве которой существенно предполагалось, что  $\delta t$  может принимать как положительные, так и отрицательные значения. В соответствии с этим мы уже не можем утверждать, что  $M(\phi(t), x(t)) \equiv 0$ , хотя по-прежнему  $M(\phi(t), x(t)) = \text{const}$ . Все же остальные положения теоремы 1 полностью сохраняются, так что мы получаем следующее предложение.

Пусть  $u(t), t_0 \leq t \leq t_1$ , — допустимое управление, для которого соответствующая траектория  $x(t)$ , исходящая в момент времени  $t_0$  из точки  $x_0$ , удовлетворяет условию  $x(t_1) = x_1$ . Для того чтобы  $u(t)$  давало решение поставленной оптимальной задачи с закрепленным временем, необходимо, чтобы существовал такой абсолютно непрерывный вектор  $\phi(t) = \{\phi_0(t), \phi_1(t), \dots, \phi_n(t)\}$ , что:

1) величины  $x(t), \phi(t), u(t)$  удовлетворяют гамильтоновой системе

$$\frac{dx^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \phi_i}, \quad \frac{d\phi_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x^i} \quad (i = 0, 1, \dots, n),$$

или, что то же самое, системе

$$\frac{dx^i}{dt} = f^i(x, u, t), \quad \frac{d\phi_i}{dt} = -\frac{\partial f^\alpha}{\partial x^i} \phi_\alpha \quad (i = 0, 1, \dots, n);$$

2) почти для всех  $t, t_0 \leq t \leq t_1$ , функция  $H(\phi(t), x(t), u)$  переменного  $u \in U$  достигает в точке  $u = u(t)$  максимума:

$$H(\phi(t), x(t), u(t)) (=) M(\phi(t), x(t));$$

3) функция  $\phi_0(t)$  неположительна (что достаточно проверить лишь в какой-либо одной точке отрезка  $t_0 \leq t \leq t_1$ , так как, на основании условия 1),  $\phi_0 = \text{const}$ ).

Отметим, что эта теорема в такой же степени решает задачу с закрепленным временем, в какой теорема 1 решает задачу с незакрепленным временем. Уменьшение числа условий на одно (а именно, отсутствие, по сравнению с теоремой 1, условия  $M(\phi(t_1), x(t_1)) = 0$ ) компенсируется здесь тем, что и число неизвестных уменьшается на единицу, так как время  $t_1$  прохождения траектории через точку  $x_1$  теперь задано.

21. Случай функционала, заданного несобственным интегралом. Рассмотрим теперь следующий вариант оптимальной задачи, сводящийся к рассмотрению бесконечного интервала интегрирования в функционале (4):

В фазовом пространстве  $X$  дана точка  $x_0$ . Среди всех допустимых \* управлений  $u = u(t), t_0 \leq t < +\infty$ , для которых соответствующая траек-

\* Ограниченность управления  $u(t)$ , входящая в требование допустимости (см. стр. 4), следует понимать в том смысле, что множество всех точек  $u(t)$ , где  $t$  пробегает любой конечный отрезок, лежащий в промежутке  $t_0 \leq t < +\infty$ , имеет компактное замыкание.

тория  $x(t)$  системы (1), исходящая из точки  $x_0$ , удовлетворяет при  $t \rightarrow \infty$  некоторым (заданным заранее) предельным условиям, найти такое, для которого интеграл

$$J = \int_{t_0}^{\infty} f^0(x(t), u(t)) dt \quad (58)$$

сходится и принимает наименьшее возможное значение.

Покажем, что решение этой оптимальной задачи дается той же теоремой 1 (с очевидной заменой отрезка  $t_0 \leq t \leq t_1$  бесконечным промежутком  $t_0 \leq t < +\infty$  и с заменой условия прохождения траектории через некоторую точку прямой  $\Pi$  предельными условиями на бесконечности). В самом деле, пусть  $u(t)$  — допустимое управление, для которого траектория  $x(t)$ , исходящая из точки  $x_0$ , удовлетворяет наложенным предельным условиям на бесконечности, и интеграл (58) сходится. Как и прежде, будем рассматривать систему уравнений (6). Тогда все рассуждения пп. 4, 5, 9—15 и лемма 8 (см. п. 16) остаются в силе (с отмеченными выше очевидными изменениями). Однако построение предельного конуса уже не проходит, так как точки  $t_1$  (правого конца отрезка времени) уже не существует. Тем не менее, легко видоизменить конструкцию предельного конуса таким образом, чтобы ее можно было применить и в рассматриваемом случае. В самом деле, обозначим через  $K_{t_0}^{(\tau)}$  выпуклый конус  $A_{t_0, \tau}^{-1}(K_{\tau})$ . Эти конусы образуют возрастающую последовательность:

$$K_{t_0}^{(\tau')} \subset K_{t_0}^{(\tau)} \text{ при } \tau' < \tau.$$

Поэтому объединение (по всем правильным точкам  $\tau$ ) всех конусов  $K_{t_0}^{(\tau)}$  снова есть выпуклый конус (возможно незамкнутый) пространства  $X_{t_0}$ . Назовем его *начальным конусом* и обозначим через  $K_{t_0}$ . Легко видеть, что (для ранее рассматривавшейся оптимальной задачи (4)) имеет место соотношение

$$A_{t_0, t_1}(K_{t_0}) = K_{t_1}.$$

Поэтому начальный конус совершенно эквивалентен предельному, и можно было бы завершение доказательства принципа максимума (пп. 16—17) провести с помощью начального конуса  $K_{t_0}$ . При этом лемма 9, как и ее доказательство, остается в силе (с очевидной заменой луча  $L_{t_1}$  и конуса  $K_{t_1}$  соответственно на  $L_{t_0}$  и  $K_{t_0}$ ). После этого без труда проводятся и рассуждения п. 17, чем доказательство теоремы 1, проводимое с помощью начального конуса (вместо предельного), и завершается. Но такое доказательство дословно (с заменой отрезка  $t_0 \leq t \leq t_1$  промежутком  $t_0 \leq t < +\infty$ ) переносится и на случай рассматриваемой оптимальной задачи (58). Тем самым наше утверждение доказано.

Заметим в заключение, что конусы  $K_{\tau}$  можно было «сносить» не в точку  $x(t_1)$  или в точку  $x(t_0)$ , а в любую точку  $x(t)$  рассматриваемой траектории. Поэтому изложенное доказательство применимо и к случаю, когда промежутком интегрирования является вся прямая  $-\infty < t < +\infty$ .

22. Оптимальные процессы с параметрами. Рассмотрим следующую оптимальную задачу. Функции  $f^0, f^1, \dots, f^n$  зависят от трех переменных  $x \in X, u \in U, w \in W$ , где  $X$  и  $U$  имеют прежний смысл, а  $W$  — векторное пространство размерности  $s$ . Функции  $f^0, f^1, \dots, f^n$  и их част-

ные производные по переменным  $x^1, x^2, \dots, x^n, w^1, \dots, w^s$  предполагаются определенными и непрерывными на всем пространстве  $X \times U \times W$ . Закон движения объекта задается уравнениями

$$\frac{dx^i}{dt} = f^i(x, u, w), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

В пространстве  $X$  заданы две точки  $x_0$  и  $x_1$ . Требуется выбрать такую постоянную точку  $w_0 \in W$  (т. е. до начала движения подобрать значение параметра  $w$ , остающееся постоянным в течение всего движения) и такое допустимое управление  $u(t)$ , чтобы соответствующая траектория  $x(t)$ , исходящая в момент  $t_0$  из точки  $x_0$ , проходила в некоторый момент  $t_1$  через точку  $x_1$  и чтобы при этом интеграл

$$J = \int_{t_0}^{t_1} f^0(x(t), u(t), w_0) dt$$

принимал наименьшее возможное значение.

При решении этой задачи мы будем предполагать, что все допустимые функции кусочно-непрерывны, т. е. что класс  $D$  допустимых управлений либо совпадает с множеством всех кусочно-непрерывных функций (заданных на  $U$ ), либо является его подмножеством, удовлетворяющим условиям 1), 2), 3) п. 1. В этих условиях имеет место следующая теорема [см. (10)], аналогичная теореме 1 (функция  $H$  определяется, как и прежде:  $H = \phi_\alpha f^\alpha$ ).

**ТЕОРЕМА 5.** Пусть  $u(t)$ ,  $t_0 \leq t \leq t_1$ , — такое допустимое управление, а  $w_0 = (w^1, \dots, w^s)$  — такое значение параметра  $w$ , что соответствующая траектория

$$x(t) = (x^0(t), x^1(t), \dots, x^n(t)) = (x^0(t), x(t))$$

удовлетворяет условиям:  $x(t_0) = x_0$ ,  $x^0(t_0) = 0$ ,  $x(t_1) = x_1$ . Для того чтобы величины  $u(t)$ ,  $w_0$ ,  $x(t)$  давали решение поставленной оптимальной задачи, необходимо существование такого ненулевого непрерывного кусочно-дифференцируемого вектора  $\phi(t) = \{\phi_0(t), \phi_1(t), \dots, \phi_n(t)\}$ , что:

1) величины  $x(t)$ ,  $\phi(t)$ ,  $u(t)$ ,  $w_0$  удовлетворяют гамильтоновой системе

$$\begin{aligned} \frac{dx^i}{dt} &= \frac{\partial H(\phi(t), x(t), u(t), w_0)}{\partial \phi_i}, \\ \frac{d\phi_i}{dt} &= - \frac{\partial H(\phi(t), x(t), u(t), w_0)}{\partial x^i} \end{aligned} \quad (i = 0, 1, \dots, n);$$

2) всюду, кроме, может быть, точек разрыва\* функции  $u(t)$ , функция  $H(\phi(t), x(t), u, w_0)$  переменного  $u \in U$  достигает в точке  $u(t)$  максимума;

3) в начальной точке  $t_0$  выполнены соотношения

$$\phi_0(t_0) \leq 0, \quad M(\phi(t_0), x(t_0), w_0) = 0;$$

\* Так как изменение значений функции  $u(t)$  в конечном числе точек не влияет на оптимальность управления  $u(t)$ , то, полагая [в каждой точке разрыва  $u(t) = u(t-0)$  или  $u(t) = u(t+0)$ ], мы добьемся того, что функция  $H$  будет всюду на отрезке  $t_0 \leq t \leq t_1$  достигать максимума:

$$H(\phi(t), x(t), u(t), w_0) \equiv M(\phi(t), x(t), w_0), \quad t_0 \leq t \leq t_1.$$

4) имеют место равенства

$$\varphi_\alpha(t_1) \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial f^\alpha(x(t), u(t), w_0)}{\partial w^\rho} dt = 0, \quad \rho = 1, 2, \dots, s.$$

Если величины  $\phi(t)$ ,  $x(t)$ ,  $w_0$  и  $u(t)$  удовлетворяют условиям 1) и 2), то функции  $\phi_0(t)$  и  $M(\phi(t), x(t), w_0)$  переменного  $t$  являются постоянными, так что проверку условия 3) можно проводить не обязательно в момент  $t_0$ , а в любой момент  $t$ ,  $t_0 \leq t \leq t_1$ .

Эта теорема отличается от теоремы 1 наличием условия 4), которое дает  $s$  дополнительных соотношений, что и определяет возможность решения задачи, так как в эту задачу введены дополнительно  $s$  неизвестных  $w^1, w^2, \dots, w^s$  (координаты точки  $w_0$  в пространстве  $W$ ). Отметим некоторую специфику рассматриваемой задачи, заставляющую ограничиваться лишь кусочно-непрерывными (а не произвольными измеримыми) управлениями. В то время как в оптимальной задаче, сформулированной в п. 2, каждый кусок оптимальной траектории снова является оптимальной траекторией (ибо «улучшение» куска траектории ведет к «улучшению» всей траектории, ср. доказательство леммы 4), здесь, в рассматриваемой задаче с параметрами, это будет уже не так. Ведь если мы знаем значение параметра  $w_0$ , то мы имеем рассматривавшуюся ранее оптимальную задачу, решаемую теоремой 1. Поэтому если  $u(t)$ ,  $w_0$  дают решение поставленной в этом пункте оптимальной задачи, причем управление  $u(t)$  определено на отрезке  $t_0 \leq t \leq t_1$ , то на меньшем отрезке за счет изменения параметра  $w_0$  возможно удастся «улучшить» управление  $u(t)$ . Из сказанного следует, что рассуждения, проведенные при доказательстве леммы 4, не применимы к рассматриваемой оптимальной задаче. Рассуждения, доказывающие теорему 1, можно, однако, применить и здесь, считая в лемме 3 точку  $\tau$  совпадающей с концевой точкой  $t_1$  (что делает излишним лемму 4). Но для этого приходится считать точку  $t_1$  правильной точкой управления  $u(t)$ , т. е. в качестве класса допустимых управлений приходится брать управления, правильные в правом конце отрезка. При этих условиях наиболее естественным классом допустимых управлений является класс кусочно-непрерывных управлений (или какой-либо его подкласс).

Укажем, какие изменения нужно произвести в доказательстве теоремы 1, чтобы получить доказательство теоремы 5. Конструкции пп. 4 и 5 сохраняются полностью; надо только помнить, что они проводятся не только при фиксированном управлении  $u(t)$ , но и при фиксированном значении параметра  $w_0$  (меняются только начальные условия, определяющие решения (8)). Обратимся, далее, к п. 9. Правильными точками управления  $u(t)$  являются все его точки непрерывности, т. е. все точки отрезка  $t_0 \leq t \leq t_1$ , за исключением конечного числа точек разрыва. Мы продолжим управление  $u(t)$  несколько дальше, за правый конец отрезка  $t_0 \leq t \leq t_1$ , полагая  $u(t) = u(t_1 - 0)$  при  $t > t_1$ . Продолженное таким образом управление  $u(t)$  непрерывно в точке  $t_1$ , так что  $t_1$  является правильной точкой. Далее, точку  $\tau$ , входящую в определение прсварьированного управления (стр. 15), мы теперь будем считать совпадающей с  $t_1$ , т. е. положим  $t_0 < \tau_1 \leq \tau_2 \leq \dots \leq \tau_s \leq \tau = t_1$ .

Основные изменения произойдут в п. 10. Помимо варьирования управления  $u(t)$  мы будем также варьировать параметр  $w_0$ . Именно, мы выберем некоторый вектор  $\delta w$  пространства  $W$  и через  $x^*(t)$  будем обозначать (при достаточно малом  $\varepsilon$ ) решение системы

$$\frac{dx^i}{dt} = f^i(x, u^*(t), w_0 + \varepsilon \delta w), \quad i = 0, 1, \dots, n,$$

т. е. траекторию, соответствующую проварьированному управлению  $u^*(t)$  и смещенному значению  $w = w_0 + \varepsilon \delta w$  параметра  $w$ . Мы имеем, очевидно (по  $\rho$  предполагается суммирование от 1 до  $s$ ):

$$\begin{aligned} x^*(t_1 + \varepsilon \delta t) &= x_0 + \int_{t_0}^{t_1 + \varepsilon \delta t} f(x^*(t), u^*(t), w_0 + \varepsilon \delta w) dt = \\ &= x_0 + \int_{t_0}^{t_1 + \varepsilon \delta t} \left[ f(x^*(t), u^*(t), w_0) + \varepsilon \frac{\partial f(x^*(t), u^*(t), w_0)}{\partial w^\rho} \delta w^\rho + \dots \right] dt = \\ &= x_0 + \int_{t_0}^{t_1 + \varepsilon \delta t} f(x^*(t), u^*(t), w_0) dt + \varepsilon \int_{t_0}^{t_1 + \varepsilon \delta t} \frac{\partial f(x^*(t), u^*(t), w_0)}{\partial w^\rho} \delta w^\rho dt + \dots = \\ &= x_0 + \int_{t_0}^{t_1 + \varepsilon \delta t} f(x^*(t), u^*(t), w_0) dt + \varepsilon \left[ \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial f(x(t), u(t), w_0)}{\partial w^\rho} dt \right] \delta w^\rho + \dots \end{aligned}$$

Но так как

$$x_0 + \int_{t_0}^{t_1 + \varepsilon \delta t} f(x^*(t), u^*(t), w_0) dt$$

есть точка на траектории, соответствующей измененному управлению  $u^*(t)$ , но не измененному значению параметра  $w_0$ , то к ней применимы формулы (25), (26), так что мы в нашем случае получаем:

$$x^*(t_1 + \varepsilon \delta t) = x(t_1) + \varepsilon \Delta x + \dots,$$

где

$$\begin{aligned} \Delta x &= f(x(t_1), u(t_1), w_0) \delta t + \sum_{i=1}^s A_{\tau_i, t_1} [f(x(\tau_i), v_i, w_0) - f(x(\tau_i), u(\tau_i), w_0)] \delta t_i + \\ &+ \delta w^\rho \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial f(x(t), u(t), w_0)}{\partial w^\rho} dt. \end{aligned} \quad (59)$$

Такой вид принимают формулы (25), (26) в рассматриваемом случае.

Обратимся теперь к п. 11. Мы включим вектор  $\delta w$  в символ  $\alpha$ , т. е. будем теперь полагать:

$$\alpha = \{\tau_i, v_i, \delta t_i, \delta t, \delta w\}$$

(мы опустили обозначение точки  $\tau$ , так как теперь  $\tau = t_1$  есть фиксированная точка). Линейная комбинация символов  $\alpha$  определяется так же, как и раньше, только с учетом последнего аргумента:

$$\lambda' \{ \dots, \delta w' \} + \lambda'' \{ \dots, \delta w'' \} + \dots = \{ \dots, \lambda' \delta w' + \lambda'' \delta w'' + \dots \}.$$

После этого рассуждения п. 12 и доказательство леммы 3 (при  $\tau = t_1$ ) проходят без изменения, а лемма 4 становится просто ненужной (ибо

$\tau = t_1$ ). В результате мы получаем конус достижимости  $K_{t_1}$ , для которого справедлива лемма 3. Рассуждения пп. 14, 15 также сохраняются (с заменой  $\tau$  на  $t_1$ ), а предельный конус (п. 16) становится ненужным, так как у нас имеется лишь один конус  $K_{t_1}$ , построенный как раз в конце  $x(t_1)$  траектории  $x(t)$  (в силу этого лемма 9 не нужна — она просто сводится к лемме 3). Наконец, рассуждения п. 17 доказывают выполнение условий 1), 2), 3) и заключительную часть теоремы 5. Остается показать, что для выбранного таким образом вектора  $\phi(t)$  выполняется условие 4). Положим в формуле (59)

$$\delta t = \delta t_1 = \delta t_2 = \dots = \delta t_s = 0.$$

Мы получим:

$$\Delta x = \delta w^\rho \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial f(x(t), u(t), w_0)}{\partial w^\rho} dt.$$

Согласно сказанному выше [ср. (38), (40)], имеем:

$$\phi_\alpha(t_1) \Delta x^\alpha \leq 0$$

для любого вектора (59), и потому

$$\phi_\alpha(t_1) \delta w^\rho \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial f^\alpha(x(t), u(t), w_0)}{\partial w^\rho} dt \leq 0.$$

Так как эти соотношения справедливы при любых действительных значениях параметров  $\delta w^\rho$ , то

$$\phi_\alpha(t_1) \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial f^\alpha(x(t), u(t), w_0)}{\partial w^\rho} dt = 0, \quad \rho = 1, 2, \dots, s,$$

и теорема 5 полностью доказана.

Поступило  
14. V. 1959

#### ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> Болтянский В. Г., Гамкредидзе Р. В., Понтрягин Л. С., К теории оптимальных процессов, Доклады Ака. наук СССР, 110, № 1 (1956), 7—10.
- <sup>2</sup> Болтянский В. Г., Принцип максимума в теории оптимальных процессов, Доклады Ака. наук СССР, 119, № 6 (1958), 1070—1073.
- <sup>3</sup> Гамкредидзе Р. В., К общей теории оптимальных процессов, Доклады Ака. наук СССР, 123, № 2 (1958), 223—226.
- <sup>4</sup> Гамкредидзе Р. В., К теории оптимальных процессов в линейных системах, Доклады Ака. наук СССР, 116, № 1 (1957), 9—11.
- <sup>5</sup> Гамкредидзе Р. В., Теория оптимальных по быстродействию процессов в линейных системах, Известия Ака. наук СССР, серия матем., 22 (1958), 449—474.
- <sup>6</sup> Понтрягин Л. С., Оптимальные процессы регулирования, Успехи мат. наук, т. 14, вып. 1 (1959), 3—20.
- <sup>7</sup> Carathéodory C., Vorlesungen über reelle Funktionen, Leipzig, 1927.
- <sup>8</sup> Блисс Г. А., Лекции по вариационному исчислению, ИЛ, М., 1950.
- <sup>9</sup> McShane, On Multipliers for Lagrange Problems, Amer. J. Math., 61 (1939), 809—819.
- <sup>10</sup> Болтянский В. Г., Оптимальные процессы с  $s$  параметрами, Доклады Ака. наук Узб. ССР, 10 (1959), 9—13.