

Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

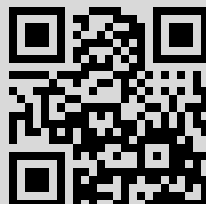
Р. В. Гамкредидзе, Теория оптимальных по быстродействию процессов в линейных системах, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, 1958, том 22, выпуск 4, 449–474

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 93.181.215.58

19 ноября 2015 г., 17:15:11



Р. В. ГАМКРЕЛИДЗЕ

ТЕОРИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ ПРОЦЕССОВ В ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ

(Представлено академиком А. А. Дородницким)

В работе изучены оптимальные процессы в линейных системах. Доказано существование оптимальных процессов в таких системах и найдены уравнения для оптимальных управлений и оптимальных траекторий. Рассмотрена также задача синтеза таких систем с одним управляющим параметром.

Введение

В теории автоматического регулирования большое значение придается максимальному повышению быстродействия различного рода регуляторов и следящих систем, другими словами, наиболее быстрому или, как принято говорить, оптимальному осуществлению процесса регулирования и слежения. Ряд других технических задач также приводит к задачам, в которых экстремизируется время.

Довольно обширный круг технических проблем этого рода укладывается в следующую математическую задачу, изученную в работе (1).

Изображающая точка (вектор) $x = (x^1, \dots, x^n)$ n -мерного фазового пространства X движется согласно уравнениям

$$\dot{x}^i = f^i(x^1, \dots, x^n; u^1, \dots, u^r) = f^i(x, u), \quad i = 1, \dots, n. \quad (1)$$

Здесь $(u^1, \dots, u^r) = u$ — управляющие параметры. Если задан закон управления, т. е. заданы r функций $u^1(t), \dots, u^r(t)$ из некоторого класса функций, то система (1) при заданных начальных условиях $x^i(t_0) = x_i^0$ однозначно определит движение точки x в фазовом пространстве. Класс функций, в котором выбираются управляющие функции $u^1(t), \dots, u^r(t)$, зависит от конкретной технической задачи. Совершенно естественным условием является требование, чтобы вектор $u(t) = (u^1(t), \dots, u^r(t))$ r -мерного пространства принадлежал некоторой фиксированной замкнутой области этого пространства, например r -мерному единичному кубу $|u^i(t)| \leq 1, i = 1, \dots, r$. Физический смысл этого условия ясен: некоторые из управляющих параметров, или даже все, не могут принимать сколь угодно больших значений; например, управляющим параметром может являться количество подаваемого в двигатель топлива и т. д. Но в общей математической постановке задачи область изменения вектора $u(t)$ не обязана быть всегда ограниченной. В частности, она может совпадать со всем r -мерным пространством.

Далее, управляющие функции $u^1(t), \dots, u^r(t)$ могут выбираться в классе кусочно-непрерывных функций с конечным числом точек разрыва. Это соответствует «безынерционному» управлению — управляющие параметры в данном случае могут мгновенно перескакивать с одного значения на другое. Однако в ряде технических задач приходится учитывать «инерцию» некоторых управляющих параметров и поэтому некоторые из функций $u^i(t)$ в этом случае нужно считать непрерывными и кусочно-гладкими с ограниченной производной.

Класс векторных функций $\mathbf{u}(t)$, в котором выбираются управления для данной задачи, назовем классом допустимых управлений. Этот класс будет точно определен ниже для изучаемой нами задачи.

После того, как класс допустимых управлений определен, основная задача, которая здесь ставится, формулируется следующим образом.

В фазовом пространстве X заданы две точки ξ_0, ξ_1 ; требуется выбрать допустимое управление $\mathbf{u}(t) = (u^1(t), \dots, u^r(t))$ так, чтобы фазовая точка прошла по траектории системы (1) из положения ξ_0 в положение ξ_1 за минимальное время.

Искомое управление $\mathbf{u}(t)$, если оно существует, назовем оптимальным управлением, соответствующую траекторию — оптимальной траекторией.

Задача, которой интересуются в теории автоматического регулирования, носит несколько более конкретный характер и может быть сформулирована следующим образом.

Из любой наперед заданной точки фазового пространства X нужно попасть в начало координат за минимальное время, двигаясь по траектории системы (1) при помощи допустимого управления.

Вообще говоря, из любой точки фазового пространства X невозможно попасть в начало координат допустимым управлением. Обозначим через M множество тех точек пространства X , из которых можно попасть в начало координат оптимальным управлением. Тогда существует определенная на множестве M векторная функция

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = (u^1(\mathbf{x}), \dots, u^r(\mathbf{x})), \quad \mathbf{x} \in M, \quad (2)$$

значения которой лежат в области допустимых значений управления $\mathbf{u}$ и которая удовлетворяет условию: если двигаться по траекториям системы

$$\dot{x}^i = f^i(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x})), \quad \mathbf{x}(0) = \xi \in M,$$

то фазовая точка $\mathbf{x}$ из любого данного начального положения $\xi \in M$ попадает в начало координат в минимальное время.

Нахождение функции $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ носит название синтеза оптимальной системы. При помощи этой функции строится оптимальное вычислительное устройство для заданного регулирующего устройства. Назначение вычислительного устройства в системе автоматического регулирования можно описать схематически следующим образом [см. (2)].

Пусть задана часть системы автоматического регулирования, состоящая из регулируемого объекта и регулирующего органа. Эта часть имеет r входов и n выходов. Входные величины — это управляющие функции $u^1(t), \dots, u^r(t)$, выходные величины — регулируемые фазовые

координаты $x^1(t), \dots, x^n(t)$; связь между величинами u^i и x^j задается системой (1). Нужный режим состоит в том, чтобы все фазовые координаты x^i в течение всего процесса работы объекта равнялись нулю.

Выходные величины $(x^1, \dots, x^n) = \mathbf{x}$ подаются на вход вычислительного устройства, выход которого соединен со входом регулирующего органа. Получается замкнутая система автоматического регулирования. Если в результате внешних воздействий фазовая точка смещается из начала координат в положение $\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^n)$, то на вход регулирующего органа через вычислительное устройство подаются величины $(u^1(\mathbf{x}), \dots, u^r(\mathbf{x})) = \mathbf{u}(\mathbf{x})$, определенные формулой (2) и возвращающие фазовую точку в начало координат в минимальное время.

В настоящей работе изучен случай линейного регулирующего органа, т. е. изучена система

$$\begin{aligned} \dot{x}^i &= \sum_{\alpha=1}^n a_{\alpha}^i x^{\alpha} + b_1^i u^1 + \dots + b_r^i u^r = \\ &= a_{\alpha}^i x^{\alpha} + b_1^i u^1 + \dots + b_r^i u^r, \quad i = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

которую мы будем записывать в векторном виде:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{b}_1 u^1 + \dots + \mathbf{b}_r u^r. \quad (3)$$

Здесь $\mathbf{x}$ — вектор n -мерного фазового пространства X , $\mathbf{A}$ — фиксированное линейное преобразование этого пространства, $\mathbf{b}_j$ — постоянные векторы этого пространства. Классом допустимых управлений является класс кусочно-непрерывных функций, по модулю не превосходящих 1: $|u^j| \leq 1$. Без последнего ограничения на управляющие функции задача для уравнения (3), вообще говоря, не имеет решения: из любой точки ξ_0 фазового пространства X можно попасть в любую другую точку ξ_1 за сколь угодно малое время, однако при стремлении времени перехода к нулю соответствующие управления становятся по модулю сколь угодно большими.

Теорема существования, которая доказана в § 3, заключается в следующем.

Если из точки ξ_0 можно попасть в точку ξ_1 некоторым допустимым управлением, то из ξ_0 можно попасть в ξ_1 и оптимальным управлением.

Это управление оказывается релейным, т. е. управляющие функции $u^j(t)$ принимают значения ± 1 и имеют конечное число скачков.

В § 1 получены уравнения для оптимальных управлений и траекторий.

В § 2, на основе результатов § 1 и § 3 (теоремы существования), изучена задача о синтезе оптимальной системы (3) при $r = 1$.

Теорема существования, доказанная в § 3, имеет не только математический интерес. Будет доказано, что оптимальное управление u^j , $j = 1, \dots, r$, для уравнения (3) можно всегда искать в классе релейных управлений. Поэтому не исключен случай, когда существует последовательность релейных управлений u_k^j , $k = 1, 2, \dots$, переводящих фазовую точку по траекториям уравнения (3) из положения ξ_0 в положение ξ_1

* В дальнейшем мы постоянно будем придерживаться тензорных обозначений.

соответственно за промежутки времени t_k , где $t_1 > t_2 > \dots > t_k > \dots > T$, $t_k \rightarrow T$, и не существует допустимого управления u^j , $j = 1, \dots, r$, переводящего фазовую точку из положения ξ_0 в ξ_1 за время T . В этом случае из «минимизирующей» последовательности управлений u_k^j нельзя выделить подпоследовательности, сходящейся к некоторому допустимому управлению u^j , так как это управление переводило бы фазовую точку из положения ξ_0 в положение ξ_1 за время T . Следовательно, число точек скачков управления u_k^j неограниченно возрастает вместе с номером k и релейное управление u_k^j на некоторых участках времени перехода из ξ_0 в ξ_1 или даже в течение всего времени перехода, начинает «дрожать» с высокой частотой.

Таким образом, оптимального перехода из положения ξ_0 в положение ξ_1 достичь нельзя, но траектория будет тем ближе к оптимальной, чем чаще будет «дрожь» управления u_k^j на соответствующих участках времени перехода. В теории автоматического регулирования такие режимы работы хорошо известны и называются скользящими режимами.

Поэтому теорема существования оптимальных процессов для системы (3) эквивалентна следующему утверждению:

В линейных системах оптимальный режим ни на каком участке времени не может быть скользящим.

Можно рассмотреть более общую задачу и считать, что некоторая часть управляющих функций $u^i(t)$ выбирается в классе непрерывных кусочно-гладких функций с ограниченной по модулю производной, т. е. считать, что соответствующие u^i обладают «инерцией», а другая, «безынерционная» часть управлений подчинена прежним условиям. В некоторых случаях одна из этих частей может вовсе отсутствовать. Результаты, относящиеся к этому общему случаю, будут опубликованы отдельно.

Методы настоящей работы являются естественным развитием методов, опубликованных в работе (1). Настоящая работа выполнена в семинаре Л. С. Понтрягина по математическим проблемам теории колебаний и автоматического регулирования.

Я приношу глубокую благодарность Л. С. Понтрягину за внимание и большую помощь, которую он оказывал мне при выполнении настоящей работы.

§ 1. Уравнения для оптимальных управлений и оптимальных траекторий в случае одного управляющего параметра

1°. Постановка задачи. Обозначения. Задано линейное дифференциальное векторное уравнение с одним управляющим (скалярным) параметром u :

$$\dot{x} = Ax + bu. \quad (4)$$

Здесь x — изображающая точка (вектор) в n -мерном фазовом пространстве X , b — фиксированный вектор этого пространства, A — линейное преобразование пространства X , не зависящее от времени. Управляющая функция u выбирается в классе кусочно-непрерывных функций (с конечным числом точек разрыва на каждом ограниченном интервале времени), по модулю не превосходящих 1: $|u| \leq 1$; будем называть такие управления допустимыми управлениями.

Формулировка общей задачи. В фазовом пространстве заданы две точки ξ_0, ξ_1 ; требуется выбрать такое допустимое управление $u = u(t)$, чтобы изображающая точка $x(t)$, двигаясь по траектории уравнения (4), перешла из положения ξ_0 в положение ξ_1 за минимальное время.

Такое управление, если оно существует, назовем оптимальным управлением, соответствующую траекторию — оптимальной траекторией. Будем также говорить, что фазовая точка совершает оптимальный переход из положения ξ_0 в положение ξ_1 по траектории уравнения (4) за оптимальное время.

Введем ряд обозначений, необходимых для дальнейшего изложения.

Векторы из фазового пространства X назовем контравариантными; векторы из сопряженного с X пространства назовем ковариантными.

Обозначим через $\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$ контравариантные векторные функции, образующие фундаментальную систему решений уравнения $\dot{x} = Ax$. Через $\psi^1(t), \dots, \psi^n(t)$ обозначим ковариантные векторные функции, двойственные, соответственно, функциям $\varphi_i(t)$:

$$\varphi_i(t) \psi^j(t) = \delta_i^j.$$

Имеем:

$$\dot{\varphi}_i = -A \varphi_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (5)$$

$$\dot{\psi}^j = -A' \psi^j, \quad j = 1, \dots, n, \quad (6)$$

где A' — линейное преобразование, сопряженное с A .

Чтобы доказать формулу (6), т. е. то, что вектор-функции $\psi^i(t)$ удовлетворяют сопряженному к (5) уравнению (6), продифференцируем соотношение $\varphi_\alpha(t) \cdot \psi^i(t) = \delta_\alpha^i$. Мы получим:

$$\begin{aligned} (\varphi_\alpha(t) \cdot \psi^i(t))' &= \dot{\varphi}_\alpha(t) \cdot \psi^i(t) + \varphi_\alpha(t) \cdot \dot{\psi}^i(t) = \\ &= A \varphi_\alpha(t) \cdot \psi^i(t) + \varphi_\alpha(t) \cdot \dot{\psi}^i(t) = \varphi_\alpha(t) \cdot A' \psi^i(t) + \varphi_\alpha(t) \cdot \dot{\psi}^i(t) = \\ &= \varphi_\alpha(t) \cdot (A' \psi^i(t) + \dot{\psi}^i(t)) \equiv 0. \end{aligned}$$

Так как это равенство справедливо для любого $\alpha = 1, \dots, n$, то справедливы тождества:

$$A' \psi^i(t) + \dot{\psi}^i(t) \equiv 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Обозначим скалярное произведение вектор-функции $\psi^i(t)$ с вектором b через

$$h^i(t) = \psi^i(t) \cdot b, \quad i = 1, \dots, n.$$

Решение уравнения (4) с начальным условием $x(0) = \xi = \varphi_x(0) \xi^x$ запишется тогда в виде:

$$x(t) = \varphi_x(t) (\xi^x + \int_0^t h^\alpha(\tau) u(\tau) d\tau) = \varphi_x(t) (\xi^x + \int_0^t \psi^\alpha(\tau) \cdot b u(\tau) d\tau). \quad (7)$$

Как известно, каждая из функций $h^i(t)$, $i = 1, \dots, n$, является решением уравнения n -го порядка:

$$|A' + pE| h(t) = 0, \quad (8)$$

где p — оператор дифференцирования, E — тождественное преобразование, $|A' + pE|$ — характеристический многочлен преобразования — A' .

2°. Условие невырожденности. Уравнение (4) назовем невырожденным, если вектор $\mathbf{b}$ не лежит ни в каком инвариантном подпространстве размерности $\leq n-1$ преобразования A . В противном случае уравнение (4) назовем вырожденным.

Мы покажем сейчас, что если уравнение (4) вырожденное, то либо время перехода из ξ_0 в ξ_1 не зависит от выбора управляющей функции $u(t)$, либо задача сводится к аналогичной задаче для уравнения меньшего порядка.

Допустим, что $\mathbf{b} \in Y$, где Y — инвариантное подпространство размерности $\leq n-1$ преобразования A . Представим фазовое пространство X в виде прямой суммы $X = Y + Z$ и каждый вектор $\mathbf{x} \in X$ — в виде суммы $\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{z}$, где $\mathbf{y} \in Y$, $\mathbf{z} \in Z$. Уравнение (4) перепишется так:

$$\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{y}} + \dot{\mathbf{z}} = A\mathbf{y} + \mathbf{b}u + A\mathbf{z},$$

где $A\mathbf{y} \in Y$, $\mathbf{b}u \in Y$. Оператор проектирования на подпространство Y параллельно подпространству Z обозначим через Pr_1 , на подпространство Z параллельно подпространству Y — через Pr_2 . Имеем:

$$Pr_1 \dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{y}} = A\mathbf{y} + \mathbf{b}u + Pr_1 A\mathbf{z}, \quad Pr_2 \dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{z}} = Pr_2 A\mathbf{z} = B\mathbf{z},$$

где B — некоторое линейное преобразование, действующее в подпространстве Z .

Пусть требуется из точки $\xi_0 = (\mathbf{y}_0, \mathbf{z}_0)$ попасть допустимым (не обязательно оптимальным) управлением в точку $\xi_1 = (\mathbf{y}_1, \mathbf{z}_1)$. Соответствующую траекторию уравнения (4) обозначим через $\mathbf{x}(t) = (\mathbf{y}(t), \mathbf{z}(t))$, где

$$(\mathbf{y}(0), \mathbf{z}(0)) = (\mathbf{y}_0, \mathbf{z}_0), (\mathbf{y}(t_1), \mathbf{z}(t_1)) = (\mathbf{y}_1, \mathbf{z}_1).$$

Векторная функция $\mathbf{z}(t)$ является решением уравнения $\dot{\mathbf{z}} = B\mathbf{z}$, не зависящего от выбора управляющей функции $u(t)$.

Если $B\mathbf{z}_0 = 0$, то для разрешимости задачи необходимо, чтобы выполнялось равенство $\mathbf{z}_0 = \mathbf{z}_1$, так как независимо от выбора управления мы будем иметь тождество $\mathbf{z}(t) \equiv \mathbf{z}_0$. В этом случае задача об оптимальном переходе из точки $(\mathbf{y}_0, \mathbf{z}_0)$ фазового пространства X в точку $(\mathbf{y}_1, \mathbf{z}_1)$ по траектории уравнения (4) сводится к задаче об оптимальном переходе из точки $\mathbf{y}_0$ фазового пространства Y в точку $\mathbf{y}_1$ по траектории уравнения

$$\dot{\mathbf{y}} = A\mathbf{y} + \mathbf{b}u + Pr_1 A\mathbf{z}_0 = A\mathbf{y} + \mathbf{b}u + \mathbf{a},$$

где $Pr_1 A\mathbf{z}_0 = \mathbf{a}$ — некоторый постоянный вектор пространства Y . Это уравнение можно исследовать буквально так же, как и уравнение вида (4), не содержащее вектора $\mathbf{a}$. Впрочем, если преобразование A , рассматриваемое в инвариантном подпространстве Y , не вырождено в нем, то $\mathbf{a} = A\mathbf{a}_1$, и мы имеем:

$$\dot{\mathbf{y}} = (\mathbf{y} + \mathbf{a}_1)' = A(\mathbf{y} + \mathbf{a}_1) + \mathbf{b}u.$$

Если $B\mathbf{z}_0 \neq 0$ и существует траектория $\mathbf{z}(t)$ уравнения $\dot{\mathbf{z}} = B\mathbf{z}$, соединяющая точки $\mathbf{z}_0$ и $\mathbf{z}_1$, то время перехода из $\mathbf{z}_0$ в $\mathbf{z}_1$ и, следовательно, время перехода фазовой точки $\mathbf{x}$ из $(\mathbf{z}_0, \mathbf{y}_0)$ в $(\mathbf{z}_1, \mathbf{y}_1)$ не зависит от

выбора управляющей функции $u(t)$, если, конечно, этот последний переход вообще возможен, так как нужно еще попасть из y_0 в y_1 .

В дальнейшем изложении будем считать, что уравнение (4) невырожденное. Из невырожденности уравнения (4) непосредственно следует линейная независимость векторов $b = A^0 b, A b, A^2 b, \dots, A^{n-1} b$. Отсюда легко вывести, что функции $h^i(t) = \psi^i(t) \cdot b$, $i = 1, \dots, n$ (см. $n^\circ, 1$), линейно независимы. В самом деле, пусть

$$c_\alpha h^\alpha(t) = c_\alpha \psi^\alpha(t) \cdot b \equiv 0,$$

где c_α , $\alpha = 1, \dots, n$ — постоянные; тогда

$$c_\alpha \psi^\alpha b \equiv \dots = c_\alpha \overset{(n-1)}{\psi^\alpha} b \equiv 0.$$

Из этих равенств и формулы (6) следует:

$$c_\alpha \psi^\alpha \cdot b \equiv c_\alpha \psi^\alpha \cdot A b \equiv \dots \equiv c_\alpha \psi^\alpha \cdot A^{n-1} b \equiv 0.$$

Так как векторы $b, A b, \dots, A^{n-1} b$ независимы, то мы имеем: $c_\alpha \psi^\alpha(t) \equiv 0$, а так как векторы $\psi^\alpha(t)$, $\alpha = 1, \dots, n$, образуют фундаментальную систему решений уравнения (6), то $c_1 = \dots = c_n = 0$.

Из линейной независимости функций $h^1(t), \dots, h^n(t)$ следует, что они образуют фундаментальную систему решений уравнения n -го порядка (8).

3°. Необходимое условие оптимальности. Пусть ξ_0 — некоторая фиксированная точка фазового пространства X . Обозначим через $\Omega(t)$, $t \geq 0$, множество точек пространства X , до которых можно прийти в точности за время t , если двигаться по траектории уравнения (4) при помощи произвольного допустимого управления с начальным условием $x(0) = \xi_0$.

Множество $\Omega(t)$ выпукло при любом $t \geq 0$. В самом деле, пусть u_1, u_2 — два допустимых управления и пусть соответствующие им траектории $x_1(t), x_2(t)$ уравнения (4) удовлетворяют начальным условиям

$$x_1(0) = x_2(0) = \xi_0;$$

тогда $x_1(t) \in \Omega(t)$, $x_2(t) \in \Omega(t)$ при любом $t \geq 0$. Произвольную точку отрезка, соединяющего точки $x_1(t), x_2(t)$, можно представить в виде

$$\lambda x_1(t) + \mu x_2(t),$$

где $\lambda + \mu = 1$, $\lambda \geq 0$, $\mu \geq 0$. В эту точку можно попасть из точки ξ_0 за время t , двигаясь по траектории уравнения (4), при помощи управления $\lambda u_1 + \mu u_2$, так как соответствующая траектория имеет вид [см. формулу (7)]:

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha(t) \left(\xi_0^\alpha + \int_0^t h^\alpha(\lambda u_1 + \mu u_2) d\tau \right) &= \lambda \varphi_\alpha(t) \left(\xi_0^\alpha + \int_0^t h^\alpha u_1 d\tau \right) + \\ &+ \mu \varphi_\alpha(t) \left(\xi_0^\alpha + \int_0^t h^\alpha u_2 d\tau \right) = \lambda x_1(t) + \mu x_2(t), \end{aligned}$$

где $\varphi_\alpha(0) \xi_0^\alpha = \xi_0$ — начальная точка траектории; управление $\lambda u_1 + \mu u_2$ допустимо, так как $|\lambda u_1 + \mu u_2| \leq \lambda |u_1| + \mu |u_2| \leq \lambda + \mu = 1$.

Пусть теперь $u(t)$ — оптимальное управление, $x(t)$ — соответствующая оптимальная траектория уравнения (4), соединяющая заданную точку ξ_0 с некоторой точкой ξ_1 пространства X ; кроме того, пусть

$$x(0) = \xi_0, \quad x(T) = \xi_1.$$

Управление $u(t)$ и траектория $x(t)$ являются оптимальными на любом отрезке $0 \leq t \leq T_1$, где $T_1 \leq T$. В самом деле, если в точку $x(T_1)$ можно попасть из точки ξ_0 за время $T_1 - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, при помощи допустимого управления $v(t)$, $0 \leq t \leq T_1 - \varepsilon$, то в точку $x(T)$ можно будет попасть за время $T - \varepsilon$ при помощи допустимого управления $w(t)$, $0 \leq t \leq T - \varepsilon$, где $w(t) = v(t)$ при $0 \leq t \leq T_1 - \varepsilon$ и $w(t) = u(t + \varepsilon)$ при $T_1 - \varepsilon \leq t \leq T - \varepsilon$, что противоречит допущению об оптимальности траектории $x(t)$ на отрезке $0 \leq t \leq T$.

Мы докажем сейчас, что через точку $\xi_1 = x(T)$ можно провести опорную гиперплоскость P к выпуклому множеству $\Omega(T)$, т. е. что ξ_1 лежит на границе множества $\Omega(T)$.

Легко видеть, что при любом $t < T$ точка $x(t)$ является граничной точкой множества $\Omega(t)$ и потому через нее можно провести опорную к $\Omega(t)$ гиперплоскость. Если это не так хотя бы для одной точки $x(t)$, $t < T$, то окружим $x(t)$ шаром, целиком лежащим в множестве $\Omega(t)$, и отметим в шаре какую-нибудь точку $x(t + \varepsilon)$ траектории, где $\varepsilon > 0$ (такой шар найдется, так как точка $x(t)$ является, по предположению, внутренней точкой множества $\Omega(t)$). Так как шар целиком лежит в множестве $\Omega(t)$, то из точки ξ_0 до точки $x(t + \varepsilon)$ можно дойти допустимым управлением за время $t < t + \varepsilon$, что противоречит оптимальности траектории $x(t)$.

Итак, можно выбрать последовательность времен $t_k \rightarrow T$ и последовательность гиперплоскостей P_k , проходящих соответственно через $x(t_k)$ и опорных к $\Omega(t_k)$; кроме того, можно считать, что последовательность гиперплоскостей P_k сходится к некоторой гиперплоскости P , проходящей через точку $\xi_1 = x(T)$. Гиперплоскость P и является опорной для множества $\Omega(T)$.

В самом деле, обозначим через χ_k ковариантный вектор, ортогональный к гиперплоскости P_k и направленный в противоположную от множества $\Omega(t_k)$ сторону, т. е. если $y \in \Omega(t_k)$, то $(y - x(t_k)) \chi_k \leq 0$. Можно считать, что $\chi_k \rightarrow \chi$, где χ ортогонален к P . Обозначим, далее, произвольное допустимое управление через $u(t) + \delta u(t)$, где $u(t)$ — рассматриваемое оптимальное управление, $\delta u(t)$ — произвольное допустимое «возмущение» управления $u(t)$; через $x(t) + \delta x(t)$ обозначим соответствующую возмущенную траекторию с начальным условием $\delta x(0) = 0$.

При любом $t < T$ точка $x(t_k) + \delta x(t_k) \in \Omega(t_k)$ и $x(t_k) \in P_k$, следовательно, $\delta x(t_k) \cdot \chi_k \leq 0$. Переходя к пределу при $k \rightarrow \infty$, мы для любого допустимого возмущения δx получим, что $\delta x(T) \cdot \chi \leq 0$, т. е. что гиперплоскость P , проходящая через точку $x(T)$, является опорной для $\Omega(T)$, и, следовательно, сама точка $x(T)$ лежит на границе множества $\Omega(T)$.

Покажем, что опорную гиперплоскость P в точке $x(T)$ и ортогональный к ней вектор χ всегда можно выбрать таким образом, чтобы кроме

неравенства $\delta \mathbf{x}(T) \cdot \boldsymbol{\chi} \leq 0$ выполнялось еще неравенство

$$\dot{\mathbf{x}}(T) \cdot \boldsymbol{\chi} = (A \mathbf{x}(T) + \mathbf{b} u(T)) \cdot \boldsymbol{\chi} \geq 0.$$

Для этого докажем, что луч, содержащий фазовую скорость $\dot{\mathbf{x}}(t)$ и выходящий из точки $\mathbf{x}(t)$ при $0 \leq t \leq T$, пересекается с множеством $\Omega(t)$ только по граничным точкам последнего.

Это утверждение легко доказать для $t < T$, а затем, путем предельного перехода, вывести его для $t = T$.

Допустим, что луч q_t , содержащий вектор $\dot{\mathbf{x}}(t)$, где $t < T$, и выходящий из точки $\mathbf{x}(t)$, содержит внутреннюю точку $\mathbf{y}$ множества $\Omega(t)$. Так как $\Omega(t)$ выпукло, то весь интервал луча q_t между точками $\mathbf{y}$ и $\mathbf{x}(t)$ сплошь состоит из внутренних точек множества $\Omega(t)$. Далее, вектор фазовой скорости $\dot{\mathbf{x}}(t)$ отличен от нуля. Следовательно, найдется такой момент времени t' , $t < t' < T$, что $\mathbf{x}(t') \in \Omega(t)$, а это невозможно, так как $t < t'$ и траектория оптимальная.

Итак, луч q_t не содержит внутренних точек множества $\Omega(t)$. Теперь возможны два случая: либо прямая Q_t , содержащая луч q_t , пересекается с $\Omega(t)$ по внутренним точкам последнего, либо нет. В первом случае очевидно, что ковариантный вектор $\boldsymbol{\chi}_t$, ортогональный к произвольно выбранной опорной гиперплоскости P_t множества $\Omega(t)$ в точке $\mathbf{x}(t)$ и направленный в противоположную от $\Omega(t)$ сторону, удовлетворяет неравенству

$$\dot{\mathbf{x}}(t) \cdot \boldsymbol{\chi}_t \geq 0.$$

Во втором случае опорную гиперплоскость P_t можно выбрать так, чтобы она содержала прямую Q_t . Следовательно, в обоих случаях неравенство

$$\dot{\mathbf{x}}(t) \cdot \boldsymbol{\chi}_t \geq 0$$

можно считать выполненным.

Взяв последовательность $t_k \rightarrow T$ и выполнив аналогичную конструкцию для каждой точки $\mathbf{x}(t_k)$, получим в пределе неравенство

$$\dot{\mathbf{x}}(T) \cdot \boldsymbol{\chi} \geq 0.$$

Сформулируем теперь доказанное необходимое условие полностью.

Пусть $u(t)$ — оптимальное управление, $\mathbf{x}(t)$ — соответствующая оптимальная траектория уравнения (4), соединяющая точку ξ_0 с точкой ξ_1 фазового пространства X :

$$\mathbf{x}(0) = \xi_0, \quad \mathbf{x}(T) = \xi_1, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Тогда через точку $\xi_1 = \mathbf{x}(T)$ можно провести опорную к $\Omega(T)$ гиперплоскость P таким образом, что если обозначить через $\boldsymbol{\chi}$ ковариантный вектор, ортогональный к P и направленный в противоположную от множества $\Omega(T)$ сторону, то будут выполняться неравенства:

$$\delta \mathbf{x}(T) \cdot \boldsymbol{\chi} \leq 0, \quad \dot{\mathbf{x}}(T) \cdot \boldsymbol{\chi} = (A \mathbf{x}(T) + \mathbf{b} u(T)) \cdot \boldsymbol{\chi} \geq 0$$

при любом допустимом возмущении $\delta \mathbf{x}(t)$ оптимальной траектории $\mathbf{x}(t)$.

4°. Уравнения оптимальных управлений и оптимальных траекторий. При помощи сформулированного необходимого

условия легко получить уравнения для оптимального управления $u(t)$ и оптимальной траектории $\mathbf{x}(t)$, соединяющей точку $\xi_0 = \mathbf{x}(0)$ с точкой $\xi_1 = \mathbf{x}(T)$, $0 \leq t \leq T$. Для этого воспользуемся неравенством $\delta \mathbf{x}(T) \cdot \chi \leq 0$. Очевидно, возмущение $\delta \mathbf{x}(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\dot{\delta \mathbf{x}} = A \delta \mathbf{x} + \mathbf{b} \delta u$$

и начальному условию $\delta \mathbf{x}(0) = 0$. Поэтому, на основании формулы (7), имеем:

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{x}(T) \cdot \chi &= \chi \cdot \varphi_\alpha(T) \int_0^T \psi^\alpha \cdot \mathbf{b} \delta u d\tau = \\ &= \int_0^T c_\alpha \psi^\alpha \cdot \mathbf{b} \delta u d\tau = \int_0^T c_\alpha h^\alpha \delta u d\tau \leq 0, \end{aligned}$$

где $c_\alpha = \chi \cdot \varphi_\alpha(T)$, $\alpha = 1, \dots, n$, одновременно в нуль не обращаются и

$$h^\alpha(t) = \psi^\alpha(t) \cdot \mathbf{b}$$

(см. $n^\circ 1$). Функция $c_\alpha h^\alpha(t)$ тождественно в нуль не обращается, так как c_α не все равны нулю, а функции $h^\alpha(t)$ образуют, в силу невырожденности уравнения (4), фундаментальную систему решений уравнения n -го порядка (8) (см. $n^\circ 1-2$). Неравенство

$$\int_0^T c_\alpha h^\alpha \delta u d\tau \leq 0$$

справедливо при любом допустимом возмущении $\delta u(t)$ оптимального управления $u(t)$. Отсюда следует, что при положительных значениях функции $c_\alpha h^\alpha(t)$ возмущение $\delta u(t)$ может принимать только значения, не превосходящие нуля, а при отрицательных значениях функции $c_\alpha h^\alpha(t)$ — значения неотрицательные. Так как условием допустимости возмущенного управления $u(t) + \delta u(t)$ является неравенство $|u(t) + \delta u(t)| \leq 1$, то мы получаем следующее уравнение для оптимального управления $u(t)$:

$$u(t) = \text{sign } c_\alpha h^\alpha(t) = \text{sign } c_\alpha \psi^\alpha(t) \cdot \mathbf{b} = \text{sign } \psi(t) \cdot \mathbf{b}, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (9)$$

Функцию, принимающую только два значения ± 1 , будем называть в дальнейшем релейной.

Ковариантная вектор-функция $c_\alpha \psi^\alpha(t) = \psi(t)$ есть решение уравнения (6):

$$\dot{\psi} = -A' \psi \quad (10)$$

и имеет простой геометрический смысл: вектор $\psi(t)$ в каждый момент времени t , $0 \leq t \leq T$, однозначно определяет ортогональную к нему гиперплоскость P_t , проходящую через точку $x(t)$ и опорную к $\Omega(t)$, и направлен в противоположную от множества $\Omega(t)$ сторону. В самом деле, при любом допустимом возмущении $\delta u(t)$ имеем:

$$\delta \mathbf{x}(t) \cdot \psi(t) = \psi(t) \cdot \varphi_\alpha(t) \int_0^t \psi^\alpha \cdot \mathbf{b} \delta u d\tau = c_\beta \psi^\beta(t) \cdot \varphi_\alpha(t) \int_0^t \psi^\alpha \cdot \mathbf{b} \delta u d\tau;$$

в силу взаимности систем $\{\dot{\psi}^\alpha(t)\}$ и $\{\varphi_\alpha(t)\}$, $\alpha = 1, \dots, n$, (см. $n^\circ 1$) имеем

$$\dot{\psi}^\beta(t) \cdot \varphi_\alpha(t) = \delta_{\alpha\beta}^0,$$

т. е.

$$\delta \mathbf{x}(t) \cdot \dot{\psi}(t) = \int_0^t c_\alpha \dot{\psi}^\alpha \cdot \mathbf{b} \, \delta u \, d\tau = \int_0^t \dot{\psi} \cdot \mathbf{b} \, \delta u \, d\tau.$$

С другой стороны, из уравнения (9) и неравенства $|u(t) + \delta u(t)| \leq 1$ следует, что $\text{sign } \delta u(t) = -\text{sign } \dot{\psi}(t) \cdot \mathbf{b}$ и, следовательно, $\delta \mathbf{x}(t) \cdot \dot{\psi}(t) \leq 0$. В частности, $P_T = P$ и $\dot{\psi}(T) = \chi$, так как

$$\dot{\psi}(T) = c_\alpha \dot{\psi}^\alpha(T) = (\chi \cdot \varphi_\alpha(T)) \dot{\psi}^\alpha(T) = \chi$$

(в силу взаимности систем $\{\varphi_\alpha(T)\}$ и $\{\dot{\psi}^\alpha(T)\}$, $\alpha = 1, \dots, n$).

В конечной точке $\xi_1 = \mathbf{x}(T)$ выполняется неравенство $\dot{\psi}(T) \cdot \dot{\mathbf{x}}(T) \geq 0$ (см. $n^\circ 3$).

Мы докажем сейчас, что вдоль всей оптимальной траектории $\mathbf{x}(t)$ скалярное произведение $\dot{\psi}(t) \cdot \dot{\mathbf{x}}(t)$ постоянно и, следовательно,

$$\dot{\psi}(t) \cdot \dot{\mathbf{x}}(t) = \text{const} \geq 0. \quad (11)$$

Скалярное произведение

$$\dot{\psi}(t) \cdot \dot{\mathbf{x}}(t) = \dot{\psi}(t) \cdot (A \mathbf{x}(t) + \mathbf{b} u(t))$$

непрерывно, так как, в силу (9), $u(t)$ может делать скачок лишь в тот момент, когда $\dot{\psi}(t) \cdot \mathbf{b} = 0$. Поэтому постоянство скалярного произведения будет следовать из обращения в нуль его производной по времени. В силу уравнений (4), (9) и (10), имеем:

$$\begin{aligned} (\dot{\psi}(t) \cdot (A \mathbf{x}(t) + \mathbf{b} u(t)))' &= \dot{\dot{\psi}}(t) \cdot A \mathbf{x}(t) + \dot{\psi}(t) \cdot A \dot{\mathbf{x}}(t) + \\ &+ \dot{\dot{\psi}}(t) \cdot \mathbf{b} u(t) = -A' \dot{\psi}(t) \cdot A \mathbf{x}(t) + \dot{\psi}(t) \cdot A (A \mathbf{x}(t) + \mathbf{b} u(t)) + \\ &+ (-A' \dot{\psi}(t) \cdot \mathbf{b} u(t)) = -\dot{\psi}(t) \cdot A^2 \mathbf{x}(t) + \dot{\psi}(t) \cdot A^2 \mathbf{x}(t) + \\ &+ \dot{\psi}(t) \cdot A \mathbf{b} u(t) - \dot{\psi}(t) \cdot A \mathbf{b} u(t) \equiv 0. \end{aligned}$$

Объединяя условия, выраженные в уравнениях (4), (9), (10), (11), мы приходим к следующему предложению для определения оптимальных управлений и оптимальных траекторий, выходящих из заданной точки ξ_0 фазового пространства X .

Все оптимальные управления $u(t)$ и соответствующие им оптимальные траектории $\mathbf{x}(t)$, выходящие при $t = 0$ из точки ξ_0 , содержатся в множестве управлений и соответствующих им траекторий, получаемых при решении следующей системы уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= A \mathbf{x} + \mathbf{b} u, \quad \mathbf{x}(0) = \xi_0, \\ \dot{\dot{\psi}} &= -A' \dot{\psi}, \\ u(t) &= \text{sign } \dot{\psi}(t) \cdot \mathbf{b}, \\ \dot{\psi}(0) \cdot \dot{\mathbf{x}}(0) &= \dot{\psi}(0) \cdot (A \mathbf{x}(0) + \mathbf{b} u(0)) \geq 0. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Поскольку нас интересует не сама вектор-функция $\psi(t)$, а только управляющая функция $u(t) = \text{sign } \psi(t) \cdot \mathbf{b}$, мы всегда будем вектор $\psi(0) = c_\alpha \psi^\alpha(0)$ предполагать нормированным, т. е. предполагать выполненным равенство

$$\sum_{\alpha=1}^n c_\alpha^2 = \|\psi(0)\| = 1.$$

Меняя всевозможными способами начальное значение $\psi(0)$ (но так, чтобы сохранялось неравенство $\psi(0) \cdot \dot{\mathbf{x}}(0) \geq 0$), мы получим некоторое множество управлений и траекторий, выходящих из точки ξ_0 , которые назовем экстремальными управлениями и экстремальными траекториями; среди них будут и все оптимальные управления и оптимальные траектории, выходящие из точки ξ_0 .

Если известно, что из точки ξ_0 можно попасть в некоторую точку ξ_1 фазового пространства X оптимальным управлением и что существует только одна экстремальная траектория, по которой фазовая точка может попасть из ξ_0 в ξ_1 , то эта последняя и будет оптимальной траекторией, а соответствующее экстремальное управление — оптимальным управлением. Этот случай имеет место при синтезе оптимальной системы, который изучен в следующем параграфе.

Система уравнений (12) в точности выражает принцип максимума, сформулированный в работе (1). Он заключается в следующем. Первые два уравнения системы (12) можно записать в виде гамильтоновой системы с гамильтоновой функцией $H(\mathbf{x}, \psi, u) = \psi \cdot (A\mathbf{x} + \mathbf{b}u) = \dot{\psi} \cdot \mathbf{x}$. В самом деле, имеем:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \frac{\partial H}{\partial \psi} = \frac{\partial}{\partial \psi} (\psi \cdot (A\mathbf{x} + \mathbf{b}u)) = A\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \\ \dot{\psi} &= -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} (\psi \cdot (A\mathbf{x} + \mathbf{b}u)) = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} A' \psi \mathbf{x} = -A' \psi. \end{aligned}$$

Уравнение $u(t) = \text{sign } \psi(t) \cdot \mathbf{b}$ эквивалентно следующему условию: в каждый момент времени t управление $u(t)$ принимает допустимое значение, при котором функция $H = \psi \cdot (A\mathbf{x} + \mathbf{b}u)$, рассматриваемая как функция аргумента u при фиксированных значениях $\mathbf{x}, \psi$, принимает максимальное значение. Это условие и является принципом максимума.

Наконец, из формулы (11) следует, что вдоль всей экстремальной траектории гамильтонова функция $H(\mathbf{x}(t), \psi(t), u(t)) = \text{const} \geq 0$.

§ 2. Синтез линейной оптимальной системы с одним управляющим параметром

1°. Постановка задачи. В теории автоматического регулирования интересуются оптимальным переходом по траектории уравнения (4) из произвольного начального положения в начало координат (см. введение).

В этом параграфе теорему существования оптимальных процессов для уравнения (4) мы будем предполагать доказанной (см. § 3, н° 2).

В н° 2 этого параграфа показано, что из любой точки фазового пространства в начало координат может вести только одна экстремальная

траектория уравнения (4), которая, следовательно, будет и оптимальной (см. § 1, n° 4, § 3, n° 2). Поэтому можно не делать различия между экстремальными траекториями, ведущими в начало, и соответствующими экстремальными управлениями и оптимальными траекториями и управлениями.

В n° 3 будет изучено множество тех точек фазового пространства, из которых можно попасть в начало координат допустимым и, следовательно, оптимальным управлением. Обозначим это множество через M . Оказывается, что M является выпуклой областью фазового пространства X . Если собственные значения преобразования A устойчивы, то множество M совпадает со всем пространством X .

На основании теоремы единственности экстремальной траектории, ведущей в начало координат, мы можем заключить, что вдоль такой экстремали соответствующее экстремальное управление $u(t)$ определяется однозначно как функция точки траектории, за исключением лишь тех точек траектории, которые соответствуют моментам скачка управления. Таких моментов конечное число (на конечном отрезке времени), так как

$$u(t) = \text{sign } \dot{\psi}(t) \cdot \mathbf{b}$$

[см. (12)], а функция $\dot{\psi}(t) \cdot \mathbf{b}$ тождественно в нуль не обращается и является решением линейного уравнения n -го порядка (8) с постоянными коэффициентами. Безразлично, какие значения мы будем приписывать управлению $u(t)$ в момент скачка; для определенности будем считать, что в этот момент $u = 0$.

Следовательно, множество M однозначно разбивается на три непересекающиеся части: $M = M_+ \cup M_- \cup M_0$ по следующему признаку: если точка экстремальной траектории $\mathbf{x}(t) \in M_+$, то $u(t) = 1$, если $\mathbf{x}(t) \in M_-$, то $u(t) = -1$, наконец, если $\mathbf{x}(t) \in M_0$, то в этот момент $u(t)$ делает скачок.

Размерность множества M_0 , очевидно, не превосходит $n - 1$.

Таким образом, мы получаем однозначную функцию $u(\mathbf{x})$, определенную на множестве M условиями:

$$u(\mathbf{x}) = 1 \text{ при } \mathbf{x} \in M_+, \quad u(\mathbf{x}) = -1 \text{ при } \mathbf{x} \in M_-, \quad u(\mathbf{x}) = 0 \text{ при } \mathbf{x} \in M_0$$

и обладающую тем свойством, что если двигаться по траектории уравнения

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{b}u(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(0) \in M, \quad (13)$$

то мы попадем из $\mathbf{x}(0)$ в начало координат по оптимальной траектории уравнения (4) в оптимальное время.

Нахождение функции $u(\mathbf{x})$ называется синтезом оптимальной системы, описываемой уравнением (4) (см. введение).

Если задана функция $v(\mathbf{x})$, удовлетворяющая условиям:

$$v(\mathbf{x}) > 0 \text{ при } \mathbf{x} \in M_+, \quad v(\mathbf{x}) < 0 \text{ при } \mathbf{x} \in M_-, \quad v(\mathbf{x}) = 0 \text{ при } \mathbf{x} \in M_0,$$

то $u(\mathbf{x}) = \text{sign } v(\mathbf{x})$.

Для нахождения функции $v(\mathbf{x})$ очень удобно изучить структуру «множества точек переключения» функции $u(\mathbf{x}) = \text{sign } v(\mathbf{x})$, т. е. множества M_0 . Это изучение, так же как и приближенное вычисление множества M_0 , можно провести при помощи системы (12).

Если преобразование A имеет действительные собственные значения, то множество M_0 точек переключения является $(n-1)$ -мерной гиперповерхностью, которая разбивает множество M на две связные области M_+ и M_- . Эта гиперповерхность, а также способ ее построения были впервые обнаружены А. А. Фельдбаумом [см. (2)]. Мы дадим ее параметрическое представление в $n^\circ 5$.

Система второго порядка

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -x + ay + u\end{aligned}\quad (14)$$

была изучена Bushaw [см. (3)]. В зависимости от собственных значений матрицы $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & a \end{vmatrix}$ он нашел множество M и множество точек переключения M_0 , которое в этом случае является линией на фазовой плоскости x, y .

Полное изучение системы (14) при помощи уравнений (12) представляет собой совершенно элементарную задачу.

В общем случае множество M_0 является псевдомногообразием и его можно вычислять приближенно при помощи формул (12).

2°. Теоремы единственности. Докажем две теоремы единственности.

Пусть u_1, u_2 — два экстремальных управления, переводящих фазовую точку по траектории уравнения (4) из данного начального положения ξ в начало координат за промежутки времени t_1, t_2 соответственно. Соответствующие траектории имеют вид [см. формулу (7)]:

$$\begin{aligned}x_1(t) &= \varphi_x(t) \left(\xi^x + \int_0^t \psi^x \cdot b u_1 d\tau \right), \quad x(t_1) = 0, \\ x_2(t) &= \varphi_x(t) \left(\xi^x + \int_0^t \psi^x \cdot b u_2 d\tau \right), \quad x(t_2) = 0,\end{aligned}$$

где $\varphi_x(0)\xi^x = \xi$. Тогда оказывается, что $t_1 = t_2$, $u_1(t) \equiv u_2(t)$, $x_1(t) \equiv x_2(t)$ при $0 \leq t \leq t_1 = t_2$.

Пусть $t_1 \leq t_2$. Имеем:

$$x_1(t_1) = x_2(t_2) = \varphi_x(t_1) \left(\xi^x + \int_0^{t_1} \psi^x \cdot b u_1 d\tau \right) = \varphi_x(t_2) \left(\xi^x + \int_0^{t_2} \psi^x \cdot b u_2 d\tau \right) = 0.$$

Векторы $\varphi_x(t)$, $\alpha = 1, \dots, n$, линейно независимы при любом t , следовательно, мы получаем n равенств:

$$\xi^x + \int_0^{t_1} \psi^x \cdot b u_1 d\tau = \xi^x + \int_0^{t_2} \psi^x \cdot b u_2 d\tau = 0, \quad \alpha = 1, \dots, n,$$

откуда

$$\int_0^{t_1} \psi^x \cdot b u_1 d\tau = \int_0^{t_2} \psi^x \cdot b u_2 d\tau, \quad \alpha = 1, \dots, n.$$

Управление $u_2(t)$ экстремально, поэтому найдется такое решение

$$\psi(t) = c_\alpha \psi^\alpha(t)$$

второго из уравнений (12), что $u_2(t) = \text{sign } \psi(t) \cdot \mathbf{b} = \text{sign } c_\alpha \psi^\alpha(t) \cdot \mathbf{b}$.

Свернув вторую систему равенств с c_α , получим:

$$\begin{aligned} c_\alpha \int_0^{t_1} \psi^\alpha \cdot \mathbf{b} u_1 d\tau &= c_\alpha \int_0^{t_2} \psi^\alpha \cdot \mathbf{b} u_2 d\tau = \int_0^{t_1} \psi \cdot \mathbf{b} u_1 d\tau = \\ &= \int_0^{t_2} \psi \cdot \mathbf{b} u_2 d\tau = \int_0^{t_2} \psi \cdot \mathbf{b} \text{sign } \psi \cdot \mathbf{b} = \int_0^{t_2} |\psi \cdot \mathbf{b}| d\tau. \end{aligned}$$

Но равенство

$$\int_0^{t_1} \psi \cdot \mathbf{b} u_1 d\tau = \int_0^{t_2} |\psi \cdot \mathbf{b}| d\tau$$

совместимо с неравенством $t_1 \leq t_2$ лишь при условии $t_1 = t_2$ и $u_1(t) \equiv u_2(t) \equiv \text{sign } \psi(t) \cdot \mathbf{b}$, что и доказывает наше утверждение.

На основании сказанного в § 1, $n^\circ 4$, мы можем поэтому отождествлять экстремали, ведущие в начало координат, с оптимальными траекториями.

Вторая теорема единственности формулируется следующим образом.

Пусть u_1, u_2 — два оптимальных управления, переводящих фазовую точку по оптимальным траекториям уравнения (4) из данного начального положения ξ_0 в положение ξ_1 за оптимальное время T . Соответствующие оптимальные траектории обозначим через

$$\mathbf{x}_1(t) = \varphi_\alpha(t) \left(\xi_0^\alpha + \int_0^t \psi^\alpha \cdot \mathbf{b} u_1 d\tau \right), \quad \mathbf{x}_2(t) = \varphi_\alpha(t) \left(\xi_0^\alpha + \int_0^t \psi^\alpha \cdot \mathbf{b} u_2 d\tau \right),$$

где $\varphi_\alpha(0) \xi_0^\alpha = \xi_0$. Тогда оказывается, что $u_1(t) \equiv u_2(t)$, $\mathbf{x}_1(t) \equiv \mathbf{x}_2(t)$, $0 \leq t \leq T$.

Имеем:

$$\mathbf{x}_1(T) = \mathbf{x}_2(T) = \varphi_\alpha(T) \left(\xi_0^\alpha + \int_0^T \psi^\alpha \cdot \mathbf{b} u_1 d\tau \right) = \varphi_\alpha(T) \left(\xi_0^\alpha + \int_0^T \psi^\alpha \cdot \mathbf{b} u_2 d\tau \right).$$

Векторы $\varphi_\alpha(T)$, $\alpha = 1, \dots, n$, линейно независимы, следовательно, мы получаем систему из n равенств:

$$\int_0^T \psi^\alpha \cdot \mathbf{b} u_1 d\tau = \int_0^T \psi^\alpha \cdot \mathbf{b} u_2 d\tau, \quad \alpha = 1, \dots, n.$$

Конец доказательства полностью совпадает с доказательством предыдущей теоремы.

3°. Изучение множества M . Через $M(T)$, $T \geq 0$, обозначим множество точек фазового пространства X , из которых можно попасть в начало координат по траектории уравнения (4) при помощи допустимого (не обязательно оптимального) управления за время $\leq T$. Множество M совпадает с объединением всех $M(T)$ для $T \geq 0$.

Докажем, что множество $M(T)$ выпукло и замкнуто для всякого $T > 0$. ($M(0)$ совпадает с началом координат.)

Пусть из точек ξ_1, ξ_2 фазового пространства X можно попасть в начало координат по траекториям уравнения (4) при помощи допустимых управлений u_1, u_2 за промежутки времени t_1, t_2 , соответственно. Можно считать, что $t_1 = t_2$, так как в случае неравенства $t_1 < t_2$ можно взять допустимое управление u_3 , определенное на отрезке времени $0 \leq t \leq t_2$ при помощи равенств $u_3(t) = u_1(t)$ при $0 \leq t \leq t_1$, $u_3(t) \equiv 0$ при $t_1 < t < t_2$, и переводящее фазовую точку из ξ_1 в начало координат за время t_2 . Но тогда из любой точки отрезка

$$\lambda \xi_1 + \mu \xi_2, \quad \lambda + \mu = 1, \quad \lambda \geq 0, \quad \mu \geq 0,$$

можно попасть за то же время $t_1 = t_2$ в начало координат при помощи допустимого управления $\lambda u_1 + \mu u_2$ (см. аналогичное рассуждение в § 1, $n^\circ 3$).

Замкнутость множества $M(T)$ следует из теоремы существования (см. § 3, $n^\circ 2$). В самом деле, пусть $\xi_1, \dots, \xi_k, \dots$ — последовательность точек, сходящихся к точке ξ фазового пространства, и пусть каждая точка $\xi_k \in M(T)$. Покажем, что и точка $\xi \in M(T)$.

Через u_k обозначим допустимое управление, переводящее фазовую точку из положения ξ_k в начало координат за время $t_k \leq T$. На основании теоремы существования, управление u_k можно считать оптимальным, так как при замене допустимого управления оптимальным управлением время перехода из точки ξ_k в начало может только уменьшиться. Далее, можно считать, что $t_k \rightarrow s \leq T$. Согласно формулам (12),

$$u_k(t) = \text{sign } \psi_k(t) \cdot \mathbf{b},$$

где функция $\psi_k(t) \cdot \mathbf{b}$ отлична от тождественного нуля и является решением линейного уравнения n -го порядка (8) с постоянными коэффициентами.

Как и прежде, обозначим через $h^\alpha(t) = \psi^\alpha(t) \cdot \mathbf{b}$, $\alpha = 1, \dots, n$, фундаментальную систему решений уравнения (8). Имеем:

$$\psi_k(t) \cdot \mathbf{b} = c_{\alpha k} h^\alpha(t).$$

Коэффициенты $c_{\alpha k}$, $\alpha = 1, \dots, n$, при каждом $k = 1, 2, \dots$ можно считать нормированными:

$$\sum_{\alpha=1}^n c_{\alpha k}^2 = 1,$$

так как мы интересуемся только функциями $u_k(t) = \text{sign } c_{\alpha k} h^\alpha(t)$. Поэтому можно предполагать, что при $k \rightarrow \infty$ коэффициенты $c_{\alpha k} \rightarrow c_\alpha$, $\alpha = 1, \dots, n$.

При $k \rightarrow \infty$ получим:

$$\psi_k(t) \cdot \mathbf{b} = c_{\alpha k} h^\alpha(t) \rightarrow c_\alpha h^\alpha(t) = c_\alpha \psi^\alpha(t) \cdot \mathbf{b} = \psi(t) \cdot \mathbf{b}, \quad \sum_{\alpha=1}^n c_\alpha^2 = 1.$$

Для последовательности оптимальных управлений $u_k(t) = \text{sign } \psi_k(t) \cdot \mathbf{b}$ имеем при $k \rightarrow \infty$:

$$u_k(t) = \text{sign } c_{\alpha k} h^\alpha(t) \rightarrow \text{sign } c_\alpha h^\alpha(t) = \text{sign } \psi(t) \cdot \mathbf{b} = u(t),$$

где $\psi(t) = c_\alpha \psi^\alpha(t)$ — некоторое решение второго из уравнений (12). Тра-

ектория, соответствующая управлению $u_k(t)$, имеет вид [см. формулу (7)]:

$$x_k(t) = \varphi_x(t) \left(\xi_k^\alpha + \int_0^t \psi^\alpha \cdot b u_k d\tau \right),$$

где $\varphi_x(0) \xi_k^\alpha = \xi_k$. Траектория, соответствующая управлению $u(t)$ с начальным условием $x(0) = \xi$, имеет вид:

$$x(t) = \varphi_x(t) \left(\xi^\alpha + \int_0^t \psi^\alpha \cdot b u d\tau \right),$$

где $\varphi_x(0) \xi^\alpha = \xi$. Следовательно, управление $u(t)$ переводит фазовую точку из положения ξ в начало координат за время $s \leq T$, так как имеем:

$$\begin{aligned} x(s) &= x(s) - x_k(t_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} (x(s) - x_k(s)) = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\varphi_x(s) (\xi^\alpha - \xi_k^\alpha) + \varphi_x(s) \int_0^s \psi^\alpha \cdot b (u - u_k) d\tau \right) = 0. \end{aligned}$$

Из формулы $u(t) = \text{sign } \psi(t) \cdot b$ и из теоремы единственности для экстремальных управлений, доказанной в $n^\circ 2$, следует, что управление $u(t)$ оптимально.

Можно доказать, что множество $M(T)$ при любом $T > 0$ содержит внутренние точки. Отсюда и из выпуклости и замкнутости множества $M(T)$, $T > 0$, следует, что $M(T)$ гомеоморфно n -мерному шару, а его граница $S(T)$ гомеоморфна $(n-1)$ -мерной сфере.

Покажем, что топологическую сферу $S(T)$ можно характеризовать следующим образом: точка фазового пространства принадлежит множеству $S(T)$ тогда и только тогда, если из нее можно перевести фазовую точку в начало координат при помощи оптимального управления за оптимальное время T по траектории уравнения (4).

Если из некоторой точки ξ можно попасть в начало координат допустимым управлением, то ξ можно окружить такой окрестностью D , что из любой точки окрестности D также можно попасть в начало координат некоторым допустимым управлением. Докажем это. Обозначим управление, переводящее фазовую точку из положения ξ в начало, через $u(t)$, время перехода — через T . То же самое управление за то же время T переведет фазовую точку из произвольного начального положения $\xi_1 \in D$ в точку ξ_2 , лежащую в любой наперед заданной окрестности начала координат, если только окрестность D достаточно мала. Но начало координат является внутренней точкой множества $M(T)$ при любом $T > 0$. Следовательно, из ξ_2 можно попасть в начало допустимым управлением и, значит, в начало можно попасть допустимым управлением из произвольной точки $\xi_1 \in D$.

Пусть точка $\xi \in S(T)$. Окружим ее окрестностью D указанного свойства и выберем в D последовательность точек $\xi_k \rightarrow \xi$ при $k \rightarrow \infty$ и таких, что ни одна точка ξ_k не принадлежит множеству $M(T)$. Через u_k обозначим оптимальное управление, переводящее фазовую точку из

положения ξ_k в начало координат за время t_k ; очевидно $t_k > T$. Рассуждения, аналогичные проведенным выше, позволяют сделать допущение, что $u_k(t) \rightarrow u(t)$ и $t_k \rightarrow s \geq T$ при $k \rightarrow \infty$ и что управление $u(t)$ является оптимальным управлением, переводящим фазовую точку из положения ξ в начало координат за оптимальное время $s \geq T$. Но из точки ξ можно попасть в начало координат некоторым допустимым управлением за время T , следовательно, $s = T$, и в одну сторону наше утверждение доказано.

Пусть теперь из точки ξ можно попасть в начало координат при помощи оптимального управления $u(t) = \text{sign } \psi(t) \cdot \mathbf{b}$ за оптимальное время T ; покажем, что $\xi \in S(T)$. Соответствующая оптимальная траектория имеет вид:

$$\mathbf{x}(t) = \varphi_{\alpha}(t) \left(\xi^{\alpha} + \int_0^t \varphi^{\alpha} \cdot \mathbf{b} u d\tau \right).$$

Функция $\psi(t) \cdot \mathbf{b}$, как решение уравнения (8), определена на всей оси $-\infty < t < +\infty$ и потому релейную функцию $u(t) = \text{sign } \psi(t) \cdot \mathbf{b}$ можно рассматривать на всей оси.

Пусть T_1 — любое положительное число; очевидно, из точки $\mathbf{x}(-T_1)$ фазового пространства можно попасть в начало координат за оптимальное время $T_1 + T$ при помощи оптимального управления

$$u(t) = \text{sign } \psi(t) \cdot \mathbf{b}, \quad -T_1 \leq t \leq T,$$

причем оптимальная траектория будет иметь тот же вид:

$$\mathbf{x}(t) = \varphi_{\alpha}(t) \left(\xi^{\alpha} + \int_0^t \psi^{\alpha} \cdot \mathbf{b} u d\tau \right),$$

однако теперь ее нужно рассматривать на более широком отрезке времени $-T_1 \leq t \leq T$.

Допустим, что точка ξ является внутренней для множества $M(T)$; тогда при достаточно малом $T_1 > 0$ точка

$$\mathbf{x}(-T_1) = \varphi_{\alpha}(-T_1) \left(\xi^{\alpha} + \int_0^{-T_1} \psi^{\alpha} \cdot \mathbf{b} u d\tau \right) \in M(T).$$

Поэтому из $\mathbf{x}(-T_1)$ можно попасть в начало координат за время T , а с другой стороны, на основании вышесказанного, оптимальное время перехода из $\mathbf{x}(-T_1)$ в начало координат равно $T_1 + T > T$, что противоречит определению оптимального времени.

Полученная характеристика множества $S(T)$ позволяет нам сделать следующее важное заключение: при $T_1 < T_2$ сфера $S(T_1)$ лежит строго внутри сферы $S(T_2)$.

Множество M получается объединением всех $M(T)$ по всем $T \geq 0$. Следовательно, M — выпуклая область, так как каждое множество $M(T)$ выпукло, и если $\xi \in M(T_1)$, то ξ является внутренней точкой для $M(T_2)$ при $T_2 > T_1$.

Если собственные значения преобразования A устойчивы, т. е. имеют отрицательные действительные части, то M совпадает со всем фазовым

пространством X . Это следует из того, что при $T \rightarrow \infty$ расстояние от начала координат до множества $S(T)$ также $\rightarrow \infty$. Докажем это последнее утверждение.

Если решать систему (12) с начальным условием $\mathbf{x}(0) = 0$, то в качестве начального значения $\psi(0) = c_\alpha \psi^\alpha(0)$ можно взять любой отличный от нуля ковариантный вектор, так как в этом случае

$$\psi(0) \cdot (A\mathbf{x}(0) + \mathbf{b}u(0)) = \psi(0) \cdot \mathbf{b}u(0) = \psi(0) \cdot \mathbf{b} \operatorname{sign} \psi(0) \cdot \mathbf{b} \geq 0.$$

Как было сказано в § 1, $n^\circ 4$, вектор $\psi(0)$ можно предполагать нормированным, т. е. считать выполненным равенство

$$\sum_{\alpha=1}^n c_\alpha^2 = \|\psi(0)\| = 1.$$

Соответствующая экстремальная траектория имеет вид:

$$\mathbf{x}(t) = \varphi_\alpha(t) \int_0^t \psi^\alpha \cdot \mathbf{b} \operatorname{sign} \psi \cdot \mathbf{b} d\tau. \quad (15)$$

Мы будем рассматривать $\mathbf{x}(t)$ также при отрицательных значениях t .

На основании теоремы единственности $n^\circ 2$ и теоремы существования § 3, $n^\circ 2$, при любом $T \geq 0$ выражение (15), рассматриваемое на отрезке $-T \leq t \leq 0$, дает нам оптимальную траекторию уравнения (4), ведущую из точки $\mathbf{x}(-T)$ в начало координат; соответствующее оптимальное управление будет $u(t) = \operatorname{sign} \psi(t) \cdot \mathbf{b}$, $-T \leq t \leq 0$, а оптимальное время перехода равно T . Следовательно, все множество $S(T)$ можно получить, если в формуле (15) подставить вместо t время $-T$ и всевозможными способами менять начальное значение $\psi(0)$. Так как $\psi(0)$ мы предполагаем нормированными, то вектор $\psi(0)$ должен описать $(n-1)$ -мерную сферу в сопряженном к X пространстве. (Нужно, однако, иметь в виду, что получаемое отображение этой сферы на топологическую сферу $S(T)$ не является гомеоморфизмом.)

Итак, мы получаем следующее представление точек множества $S(T)$:

$$\mathbf{x}(-T) = \varphi_\alpha(-T) \int_0^{-T} \psi^\alpha \cdot \mathbf{b} \operatorname{sign} \psi \cdot \mathbf{b} d\tau = \varphi_\alpha(-T) \int_0^{-T} \psi^\alpha \cdot \mathbf{b} \operatorname{sign} (c_\beta \psi^\beta \cdot \mathbf{b}) d\tau,$$

где $\psi(0) = c_\alpha \psi^\alpha(0)$ пробегает $(n-1)$ -мерную сферу.

Если преобразование A имеет устойчивые собственные значения, то собственные значения преобразования $-A'$ неустойчивы. Поэтому при $t \rightarrow -\infty$ функция $\psi(t) \rightarrow 0$ экспоненциально, равномерно относительно начальных значений $\psi(0)$, заполняющих $(n-1)$ -мерную сферу. Имеем:

$$\begin{aligned} \psi(-T) \cdot \mathbf{x}(-T) &= c_\beta \psi^\beta(-T) \cdot \varphi_\alpha(-T) \int_0^{-T} \psi^\alpha \cdot \mathbf{b} \operatorname{sign} \psi \cdot \mathbf{b} d\tau = \\ &= \int_0^{-T} c_\alpha \psi^\alpha \cdot \mathbf{b} \operatorname{sign} (c_\beta \psi^\beta \cdot \mathbf{b}) d\tau = \int_0^{-T} |\psi \cdot \mathbf{b}| d\tau < 0. \end{aligned}$$

Следовательно, при $T \rightarrow \infty$ выражение $\psi(-T) \cdot \mathbf{x}(-T) \rightarrow a$ равномерно относительно выбора начальных значений $\psi(0)$, где $-\infty \leq a < 0$. Другими словами, при $T \rightarrow \infty$ расстояние от любой точки $\mathbf{x}(-T)$ мно-

жества $S(T)$ до начала координат стремится к ∞ равномерно относительно выбора этой точки в множестве $S(T)$.

4°. Вычисление функции $u(x)$. Из сказанного в конце n° 3 получается следующий способ приближенного вычисления множества M_0 и функции $u(x)$.

Мы должны решать систему (12) на отрицательной полуоси $-\infty < t \leq 0$ с начальным условием $x(0) = 0$; начальное значение $\psi(0)$ должно пробегать всю $(n-1)$ -мерную сферу начальных значений в сопряженном к X пространстве. При каждом выборе начального значения $\psi(0)$, т. е. при выборе решения $\psi(t)$ второго из уравнений (12), мы получаем последовательность времен $0 > t_1 > t_2 > \dots$, которая может быть и бесконечной и которая состоит из всех нечетнократных нулей функции $\psi(t) \cdot b$ на всей отрицательной полуоси времени; другими словами, числа t_i дают все моменты скачков оптимального управления

$$u(t) = \text{sign } \psi(t) \cdot b$$

на отрицательной полуоси времени. Очевидно, значения $x(t_i) \in M_0$, $i = 1, 2, \dots$.

Для значений t , лежащих между t_i и t_{i+1} , точки $x(t)$ принадлежат, в зависимости от знака функции $\psi(t) \cdot b$, либо множеству M_+ , либо множеству M_- .

Если это вычисление проделать для начальных значений $\psi(0)$, достаточно густо расположенных на сфере начальных значений, то мы можем получить довольно точное представление о функции $u(x)$ и о множестве M_0 .

Следовательно, предлагаемый метод исследования функции $u(x)$ и множества M_0 основывается на изучении распределения действительных нулей функций

$$\psi(t) \cdot b = c_\alpha \psi^\alpha(t) \cdot b = c_\alpha h^\alpha(t), \quad \sum_{\alpha=1}^n c_\alpha^2 = 1,$$

в зависимости от коэффициентов c_α , $\alpha = 1, \dots, n$, другими словами, на изучении распределения действительных нулей решений линейного уравнения n -го порядка (8) с постоянными коэффициентами.

Если рассматривать самый общий случай произвольных комплексных собственных значений преобразования A в n -мерном пространстве, то можно доказать, что множество M_0 является $(n-1)$ -мерным псевдомногообразием и что M_+ и M_- — связанные множества. То, что в этом общем случае не получается более ясной картины структуры множеств M_+ , M_- , M_0 , объясняется чрезвычайно сложной зависимостью действительных нулей функции $c_\alpha h^\alpha(t)$ от коэффициентов c_α , $\alpha = 1, \dots, n$. Функция $c_\alpha h^\alpha(t)$ в этом случае есть, очевидно, квазимногочлен с комплексными показателями.

Однако приближенное вычисление при помощи системы (12) функции $u(x)$ для любого уравнения (4) с численными коэффициентами, по видимому, не вызовет никаких затруднений.

Если собственные значения преобразования A действительны и различны, то любое решение уравнения (8) имеет вид:

$$c_\alpha h^\alpha(t) = c_\alpha e^{\lambda_\alpha t},$$

где λ_α — действительные числа. В этом случае корни функции $c_\alpha h^\alpha(t)$ очень просто зависят от коэффициентов c_α , и можно без труда получить результаты, сформулированные в n° 1.

То же самое можно сказать и о нулях решения $c_\alpha h^\alpha(t)$ [уравнения (8) при $n = 2$, независимо от характера собственных значений преобразования A].

5°. Пример. Рассмотрим случай действительных собственных значений преобразования A . Для простоты будем предполагать, что собственные значения простые и отрицательные. Множество M совпадает в этом случае со всем пространством X .

Докажем, что множество точек переключения M_0 является гиперповерхностью, разбивающей пространство X на две связные области M_+ и M_- .

Любое оптимальное управление имеет в рассматриваемом случае вид:

$$u(t) = \text{sign } c_\alpha e^{\lambda_\alpha t},$$

где c_α , λ_α , $\alpha = 1, \dots, n$, — действительные числа. При доказательстве мы используем известный факт, что квазимногочлен $c_\alpha e^{\lambda_\alpha t}$ при действительных c_α , λ_α может иметь не более $(n-1)$ -го нуля, если учесть кратности, и что любое наперед заданное распределение этих нулей можно получить соответствующим подбором коэффициентов c_α , $\alpha = 1, \dots, n$, при любых попарно различных фиксированных показателях λ_α , $\alpha = 1, \dots, n$.

Обозначим через R_+^1 следующее решение уравнения (4):

$$x(t) = \varphi_\alpha(t) \int_0^t \psi^\alpha \cdot b \text{sign } e^{\lambda_\alpha \tau} d\tau, \quad -\infty < t \leq 0,$$

а через R_-^1 — решение

$$x(t) = -\varphi_\alpha(t) \int_0^t \psi^\alpha \cdot b \text{sign } e^{\lambda_\alpha \tau} d\tau, \quad -\infty < t \leq 0.$$

Эти решения дают нам оптимальные траектории, ведущие в начало и соответствующие оптимальным управлениям

$$u_+(t) = \text{sign } e^{\lambda_\alpha t} = 1, \quad u_-(t) = -\text{sign } e^{\lambda_\alpha t} = -1.$$

Вдоль каждой из них управление не делает ни одного скачка.

Сформулированное свойство о нулях квазимногочлена $c_\alpha e^{\lambda_\alpha t}$ позволяет так подобрать оптимальное управление вида

$$u(t) = \text{sign } (c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}),$$

чтобы оно имело на полуоси $-\infty < t < 0$ единственный скачок в любой наперед заданный момент $t = t_0$, где совершается скачок со значения $+1$ на значение -1 , если двигаться в сторону уменьшающихся t . Если выпустить фазовую точку в момент $t = 0$ из начала координат по соответствующей управлению

$$u(t) = \text{sign } (c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t})$$

траектории и наблюдать за ней при уменьшающихся t , то точка будет двигаться сначала по R_+^1 (в обратном направлении); после первого (и единственного) скачка управления $u(t)$, который, в силу произвольно-

сти t_0 , может быть совершен в любой точке траектории R_+^1 , фазовая точка сойдет с R_+^1 и никогда больше на нее не попадет, в силу теоремы единственности для экстремалей ($n^\circ 2$).

Симметричное построение можно провести для кривой R_-^1 .

В силу однозначной определенности экстремалей, мы получаем двумерную поверхность R^2 , разбитую линией $R^1 = R_+^1 \cup R_-^1$ на две области R_+^2 , R_-^2 . Область R_+^2 заполнена теми частями оптимальных траекторий, которые начинаются в точках R_-^1 и описываются фазовой точкой после первого и единственного скачка оптимального управления

$$u(t) = \text{sign}(c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t})$$

со значения -1 на значение $+1$ (если двигаться в сторону уменьшающихся t). R_-^2 определяется симметрично.

Очевидно, любая точка этой поверхности при $n \geq 3$ может служить местом скачка некоторого оптимального управления и т. д.

Таким образом, мы получаем последовательность вложенных друг в друга поверхностей:

$$R^1 \subset R^2 \subset \dots \subset R^{n-1} \subset R^n.$$

Поверхность R^i имеет размерность i и разбивается на две связные области R_+^i , R_-^i поверхностью R^{i-1} . Область R_+^i заполнена оптимальными траекториями, которые начинаются на R_-^{i-1} , если двигаться в сторону уменьшающегося времени, и соответствуют оптимальным управлениям вида

$$u(t) = \text{sign} \sum_{\alpha=1}^i c_\alpha e^{\lambda_\alpha t},$$

принимаям вдоль этих траекторий значение $+1$; на этом значении $u(t)$ стабилизируется при изменении t от 0 до $-\infty$ после $(i-1)$ -го скачка, который совершается в момент отрыва фазовой точки от поверхности R_-^{i-1} .

Любая точка областей R_+^{n-1} , R_-^{n-1} гиперповерхности R^{n-1} может служить местом $(n-1)$ -го и, следовательно, последнего скачка управления

$$u(t) = \sum_{\alpha=1}^n c_\alpha e^{\lambda_\alpha t}.$$

R^n совпадает со всем пространством X , области R_+^n , R_-^n совпадают с областями M_+ , M_- .

Пусть числа $t_1, t_2, \dots, t_{n-1}$ удовлетворяют условию:

$$0 \geq t_1 \geq t_2 \geq \dots \geq t_{n-1}.$$

Существует оптимальное управление

$$u(t_1, \dots, t_{n-1}; t) = \text{sign} \sum_{\alpha=1}^n c_\alpha e^{\lambda_\alpha t},$$

имеющее скачки на полуоси $-\infty < t \leq 0$ лишь в точках $t_1, \dots, t_{n-1}$.

Из сказанного следует, что каждую точку гиперповерхности переключения R^{n-1} можно записать в виде:

$$x(t_1, \dots, t_{n-1}) = \pm \varphi_x(t_{n-1}) \int_0^{t_{n-1}} \psi^x \mathbf{b} u(t_1, \dots, t_{n-1}; \tau) d\tau,$$

где $0 \geq t_1 \geq t_2 \geq \dots \geq t_{n-1}$ — соответствующим образом подобранные числа. Наоборот, всякая такая точка $x(t_1, \dots, t_{n-1}) \in R^{n-1}$. Тем самым получено параметрическое представление гиперповерхности R^{n-1} :

$$\begin{aligned} x(t_1, \dots, t_{n-1}) &= \pm \varphi_x(t_{n-1}) \int_0^{t_{n-1}} \psi^x \cdot \mathbf{b} u(t_1, \dots, t_{n-1}; \tau) d\tau = \\ &= \pm \varphi_x(t_{n-1}) \left(\int_0^{t_1} \psi^x \cdot \mathbf{b} d\tau - \int_{t_1}^{t_2} \psi^x \cdot \mathbf{b} d\tau + \dots + (-1)^{n-2} \int_{t_{n-2}}^{t_{n-1}} \psi^x \cdot \mathbf{b} d\tau \right), \end{aligned} \quad (16)$$

где параметры $t_1, \dots, t_{n-1}$ подчиняются единственному условию:

$$0 \geq t_1 \geq \dots \geq t_{n-1}.$$

§ 3. Случай нескольких управляющих параметров.

Теорема существования

1°. Обобщение на случай нескольких управляющих параметров. Развитые в § 1 методы без изменения переносятся на линейные системы с несколькими управляющими параметрами. Поэтому здесь будут кратко сформулированы лишь основные определения и выписаны уравнения для оптимальных управлений и соответствующих им оптимальных траекторий.

Пусть задано линейное дифференциальное векторное уравнение с r управляющими параметрами $u^1, \dots, u^r$:

$$\dot{x} = Ax + \mathbf{b}_1 u^1 + \dots + \mathbf{b}_r u^r. \quad (17)$$

Как и в § 1, здесь x — вектор в n -мерном фазовом пространстве X , $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_r$ — фиксированные векторы этого пространства, A — линейное преобразование пространства X , не зависящее от времени. Управляющая вектор-функция $\mathbf{u} = (u^1, \dots, u^r)$ выбирается в классе кусочно-непрерывных вектор-функций, каждая из координат которых в любой момент времени не превосходит по модулю 1: $|u^i| \leq 1$, $i = 1, \dots, r$; такие управления назовем допустимыми.

Основная задача формулируется так же, как и в § 1: в фазовом пространстве X заданы две точки ξ_0, ξ_1 ; требуется выбрать такое допустимое векторное управление $\mathbf{u} = (u^1(t), \dots, u^r(t))$, чтобы изображающая точка $x(t)$, двигаясь по траектории уравнения (17), перешла из положения ξ_0 в положение ξ_1 за минимальное время.

Уравнения для оптимальных управлений и оптимальных траекторий мы, как и в § 1, напишем для невырожденного случая.

Уравнение (17) назовем невырожденным, если каждая из следующих r систем содержит по n линейно независимых векторов:

$$\mathbf{b}_i, A\mathbf{b}_i, \dots, A^{n-1}\mathbf{b}_i, \quad i = 1, \dots, r.$$

Следовательно, если уравнение (17) невырожденное, то каждая из следующих r систем содержит по n линейно независимых функций (см. § 1):

$$h_i^1(t) = \psi^1(t) \cdot \mathbf{b}_i, \dots, h_i^n(t) = \psi^n(t) \cdot \mathbf{b}_i, \quad i = 1, \dots, r. \quad (18)$$

Оптимальные управления и соответствующие им оптимальные траектории невырожденного уравнения (17), выходящие из заданной точки ξ_0 фазового пространства X , определяются при помощи следующего предложения.

Все оптимальные управления $(u^1(t), \dots, u^r(t))$ и соответствующие им траектории $\mathbf{x}(t)$, выходящие при $t=0$ из точки ξ_0 фазового пространства уравнения (17), содержатся в управлениях и соответствующих им траекториях, получаемых при решении следующей системы уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= A\mathbf{x} + \mathbf{b}_1 u^1 + \dots + \mathbf{b}_r u^r, \quad \mathbf{x}(0) = \xi_0 \\ \dot{\psi} &= -A'\psi, \\ u^i &= \text{sign } \psi \cdot \mathbf{b}_i, \\ \psi(0) \cdot (A\mathbf{x}(0) + \mathbf{b}_1 u^1(0) + \dots + \mathbf{b}_r u^r(0)) &\geq 0. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Так как функции (18) линейно независимы и $|\psi(0)| \neq 0$, то уравнения

$$u_i(t) = \text{sign } \psi(t) \cdot \mathbf{b}_i = \text{sign } c_\alpha \psi^\alpha(t) \cdot \mathbf{b}_i = \text{sign } c_\alpha h_i^\alpha(t), \quad i = 1, \dots, r,$$

однозначно определяют управление $(u^1(t), \dots, u^r(t))$.

Две теоремы единственности, доказанные в § 2, $n^\circ 2$ и играющие важную роль при синтезе оптимальной системы, очевидным образом переносятся на случай уравнения (17).

2°. Теорема существования. Пусть ξ_0, ξ_1 — две произвольные точки фазового пространства X , соединимые траекторией уравнения (17) при помощи некоторого допустимого управления $(u^1(t), \dots, u^r(t))$. Тогда существует оптимальное управление, переводящее фазовую точку из положения ξ_0 в положение ξ_1 по оптимальной траектории.

Доказательство *. Прежде всего мы расширим класс допустимых управлений $(u^1(t), \dots, u^r(t))$ в уравнении (17). Именно, управление $(u^1(t), \dots, u^r(t))$ назовем допустимым, если каждая из функций $u^i(t)$, $i = 1, \dots, r$, измерима и почти всюду не превосходит по модулю 1: $|u^i| \leq 1$. Соответствующее решение $\mathbf{x}(t)$ уравнения (17) есть абсолютно непрерывная вектор-функция, и равенство (17) справедливо почти всюду.

Необходимые условия (19) остаются справедливыми и при таком расширении класса допустимых управлений, если считать, что равенства (19) выполняются почти всюду.

* Данное здесь доказательство существенно проще первоначального. На возможность такого упрощения мое внимание обратил А. Ф. Филиппов.

Другими словами, если $(u^1(t), \dots, u^r(t))$ — оптимальное управление в классе измеримых управлений, удовлетворяющее почти всюду неравенствам $|u^i| \leq 1$, $i = 1, \dots, r$, и переводящее фазовую точку $x(t)$ уравнения (17) из положения ξ_0 в положение ξ_1 по оптимальной траектории, то найдется такое решение $\psi(t) \neq 0$ уравнения $\dot{\psi} = -A'\psi$, что почти всюду

$$u^i(t) = \text{sign } \psi(t) \cdot b_i, \quad i = 1, \dots, r. \quad (20)$$

Это можно доказать, очевидным образом видоизменив соответствующее доказательство из § 1.

Пусть $(u_k^1(t), \dots, u_k^r(t))$, $k = 1, 2, \dots$, — последовательность допустимых (измеримых) управлений, переводящих фазовую точку $x(t)$ из положения ξ_0 в положение ξ_1 по траектории уравнения (17) и минимизирующих время перехода. Назовем такую последовательность минимизирующей последовательностью.

Время перехода, соответствующее управлению $(u_k^1(t), \dots, u_k^r(t))$, обозначим через t_k , нижнюю грань времен перехода из ξ_0 в ξ_1 — через T . Так как последовательность $(u_k^1(t), \dots, u_k^r(t))$ минимизирующая, то

$$\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = T.$$

Соответствующие траектории уравнения (17) имеют вид (см. формулу (7)):

$$x_k(t) = \varphi_x(t) \left(\xi_0^x + \int_0^t \psi^x \cdot (b_1 u_k^1 + \dots + b_r u_k^r) d\tau \right). \quad (21)$$

Так как $t_k \rightarrow T$ при $k \rightarrow \infty$ и $t_k \geq T$, то точка

$$x_k(T) = \varphi_x(T) \left(\xi_0^x + \int_0^T \psi^x \cdot (b_1 u_k^1 + \dots + b_r u_k^r) d\tau \right)$$

определена при любом k и $x_k(T) \rightarrow \xi_1$ при $k \rightarrow \infty$, ибо $x_k(t_k) = \xi_1$ при любом k .

Мы покажем сейчас, что существует допустимое управление $(u^1(t), \dots, u^r(t))$ (в классе измеримых управлений), переводящее фазовую точку из ξ_0 в ξ_1 за время T . Тем самым теорема существования будет доказана, так как, согласно равенствам (20), почти всюду

$$u^i(t) = \text{sign } \psi(t) \cdot b_i, \quad i = 1, \dots, r, \quad 0 \leq t \leq T,$$

и, следовательно, релейное управление

$$(\text{sign } \psi \cdot b_1, \dots, \text{sign } \psi \cdot b_r), \quad 0 \leq t \leq T,$$

переводит фазовую точку по траектории уравнения (17) из положения ξ_0 в ξ_1 за время T .

Будем рассматривать функции $u_k^i(t)$, $0 \leq t \leq T$, $i = 1, \dots, r$, $k = 1, 2, \dots$, как элементы гильбертова пространства L^2 интегрируемых с квадратом функций, определенных на отрезке $0 \leq t \leq T$. Каждая из функций $u_k^i(t)$ принадлежит шару радиуса $\sqrt{T}$ этого пространства, так как

$$\int_0^T u_k^{i2}(t) dt \leq \int_0^T dt = T.$$

Так как шар в гильбертовом пространстве слабо компактен, то существует такая измеримая вектор-функция $\mathbf{u}(t) = (u^1(t), \dots, u^r(t))$, где $u^i(t)$, $i = 1, \dots, r$, принадлежат шару радиуса $\sqrt{T}$, что к этой вектор-функции слабо сходится некоторая подпоследовательность последовательности управлений $(u_k^1(t), \dots, u_k^r(t))$. Обозначим эту подпоследовательность через

$$(v_k^1(t), \dots, v_k^r(t)), \quad k = 1, 2, \dots$$

Из определения слабой сходимости следует:

$$\begin{aligned} & \int_0^T \psi^\alpha(t) \cdot (\mathbf{b}_1 v_k^1(t) + \dots + \mathbf{b}_r v_k^r(t)) dt \rightarrow \\ & \rightarrow \int_0^T \psi^\alpha(t) \cdot (\mathbf{b}_1 u^1(t) + \dots + \mathbf{b}_r u^r(t)) dt, \quad \alpha = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

при $k \rightarrow \infty$.

С другой стороны, при $k \rightarrow \infty$

$$\varphi_\alpha(T) (\xi_0^\alpha + \int_0^T \psi^\alpha \cdot (\mathbf{b}_1 v_k^1 + \dots + \mathbf{b}_r v_k^r) dt) \rightarrow \xi_1$$

и, следовательно,

$$\varphi_\alpha(T) (\xi_0^\alpha + \int_0^T \psi^\alpha \cdot (\mathbf{b}_1 u^1 + \dots + \mathbf{b}_r u^r) dt) = \xi_1.$$

Таким образом, измеримое управление $(u^1(t), \dots, u^r(t))$ переводит фазовую точку из положения ξ_0 в положение ξ_1 за время T (см. формулу (21)).

Для окончания доказательства надо еще показать, что почти всюду на отрезке $0 \leq t \leq T$ имеем: $|u^i| \leq 1$, $i = 1, \dots, r$. Допустим противное; пусть на множестве $\mathcal{G}$ положительной меры имеем, например, $u^i(t) > 1$. Тогда на $\mathcal{G}$ выполняется неравенство

$$u^i(t) - u_k^i(t) \geq u^i(t) - 1 > 0.$$

Обозначим через $f(t)$ характеристическую функцию множества $\mathcal{G}$: $f(t) = 1$ при $t \in \mathcal{G}$, $f(t) = 0$ при $t \notin \mathcal{G}$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^T f(t) (u^i(t) - v_k^i(t)) dt & \geq \int_0^T f(t) (u^i(t) - 1) dt = \\ & = \int_{\mathcal{G}} (u^i(t) - 1) dt > 0, \end{aligned}$$

что противоречит утверждению о слабой сходимости последовательности $v_k^i(t)$ к $u^i(t)$.

Математический институт
им. В. А. Стеклова Ак. наук СССР

Поступило
26.VII.1957

ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Болтянский В. Г., Гамкредидзе Р. В., Понтрягин Л. С., К теории оптимальных процессов, Доклады Ак. наук СССР, 110, № 1 (1956), 7—10.
- ² Фельдбаум А. А., О синтезе оптимальных систем с помощью фазового пространства, Автоматика и телемеханика, XVI, № 2 (1955), 129—149.
- ³ Цянъ Сюэ-Сэнъ, Техническая кибернетика, М., ИЛ, 1956.