Р. В. Гамкрелидзе, Циклы Черна комплексных алгебраических многообразий, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, 1956, том 20, выпуск 5, 685–706

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
20 (1956), 685—706

Р. В. ГАМКРЕЛИДЗЕ

ЦИКЛЫ ЧЕРНА КОМПЛЕКСНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ МНОГООБРАЗИЙ

(*Представлено академиком* **П. С. Александровым**)

В работе вычислены циклы Черна комплексных алгебраических многообразий. В полученных формулах циклы Черна выражаются через проективные инварианты многообразия.

Введение

1°. Циклы Черна компактных аналитических многообразий рассматривались впервые Черном в работе (1). Эти циклы играют важную роль при изучении топологической и аналитической структуры многообразия, поэтому задача вычисления циклов Черна для возможно более широкого класса комплексных аналитических многообразий не лишена интереса.

Эта задача решена мною для комплексных алгебраических многообразий [см. (2)]. В полученных формулах циклы Черна алгебраического многообразия выражены через довольно простые и легко обозримые проективные инварианты многообразия.

В настоящей работе дается подробное изложение результатов работы (2).

2°. Под комплексным алгебраическим многообразием M в работе понимается такое алгебраическое многообразие комплексного проективного пространства P, которое может быть представлено как регулярный (т. е. локально-гомеоморфный и аналитический) образ некоторого абстрактного компактного комплексно-аналитического многообразия N; само многообразие N также будет называться алгебраическим.

Это сужение класса комплексных алгебраических многообразий необходимо для того, чтобы через каждую точку $z \in M \subset P$ можно было провести единственное касательное к M подпространство пространства P; при этом не исключаются и точки самопересечения многообразия M, так как им приписывается необходимая кратность, определяемая локально-гомеоморфным отображением. Следовательно, для любого алгебраического многообразия можно строить тангенциальное косое произведение и тем самым определить циклы Черна этого многообразия.

В дальнейшем произвольные алгебраические многообразия, задаваемые в проективном пространстве системой алгебраических уравнений, будут называться комплексными алгебраическими псевдомногообразиями. Размерность множества особых точек такого псевдомногообразия хотя бы на две единицы меньше размерности самого псевдомногообразия. Следовательно, задавая на псевдомногообразии ориентацию, определяемую комплексно-аналитической структурой, мы превращаем его в цикл *.

§ 1. Краткое изложение содержания работы

1°. Пусть M^k — комплексное алгебраическое многообразие комплексной размерности k, лежащее в n-мерном комплексном проективном пространстве P^n (см. введение, n^o 2).

Наряду с P^n рассмотрим многообразие P^n_k всевозможных пар (z, P^k), где $z \in P^n$, а k-мерное подпространство $P^k \subset P^n$ содержит точку $z: P^k \ni z$; очевидно, что P^n_k является комплексным алгебраическим многообразием.

Вложение $M^k \subset P^n$ определяет комплексное алгебраическое многообразие $N^k \subset P^n_k$ всевозможных пар (z, P^k_z), где $z \in M^k$, а подпространство P^k_z касается многообразия M^k в точке z. Между многообразиями M^k и N^k существует естественный аналитический гомеоморфизм φ: $N^k \to M^k$, отображающий точку $(z, P^k_z) \in N^k$ в точку $z \in M^k$. Поэтому задача вычисления циклов ** Черна алгебраического многообразия M^k эквивалентна такой же задаче для многообразия N^k.

2°. Для вычисления циклов Черна многообразия N^k излагаемым методом необходимо знание баз гомологий некоторых размерностей многообразия P^n_k.

Именно, необходимо знание баз гомологий размерностей $\leqslant 2k$, а также некоторых циклов из баз гомологий дополнительных размерностей. Они вычислены в § 2,3 методом Л. С. Понтрягина ([3]).

Оказывается, что комплексное многообразие P^n_k не имеет кручений и все его нечетномерные группы гомологий тривиальны. Базу $2s$-мерных гомологий при $s \leqslant k$ обозначим через $\{X^s_i\}$, $i = 1, \ldots, \alpha_s$; дуальную к ней базу $(2r - 2s)$-мерных гомологий, где $2r$ — размерность многообразия P^n_k, обозначим через $\{Y^{r-s}_j\}$, $j = 1, \ldots, \alpha_s$. Циклы X^s_i и часть циклов Y^{r-s}_j будут реализованы в P^n_k в виде комплексных алгебраических псевдомногообразий (теоремы 2.1, 3.1, 3.2) (мы говорим лишь о части циклов Y^{r-s}_j, так как в работе рассмотрены не все циклы Y^{r-s}_j).

3°. Построим ряд косых произведений, необходимых для дальнейшего.

В проективном пространстве P^n зафиксируем систему однородных координат и все построения, приведенные ниже и использующие координаты, будем проводить в этой системе.

Каждой точке $z = (z^0, \ldots, z^n)$ поставим в соответствие аффинную часть E^n_z пространства P^n, полученную из P^n удалением $(n-1)$-мерного подпространства, уравнение которого имеет вид:

$$\bar{z}^0 w^0 + \bar{z}^1 w^1 + \ldots + \bar{z}^n w^n = 0, \tag{1.1}$$

---

* На протяжении всей работы под размерностью будет подразумеваться топологическая размерность. Комплексная размерность алгебраических псевдомногообразий будет каждый раз особо оговариваться. Исключение составят комплексные проективные пространства, комплексная размерность которых будет называться просто размерностью; размерность проективного пространства будет обозначаться верхним индексом.

** Для удобства мы говорим о циклах, а не о классах гомологий.

где $\overline{z^i}$ — комплексно-сопряженные величины к координатам z^i точки z, а w^i — координаты текущей точки w удаляемого $(n-1)$-мерного подпространства.

Используя это замечание, построим косое произведение $T(E^k, P_k^n)$ комплексного k-мерного векторного пространства E^k на базисное многообразие P_k^n с группой линейных преобразований слоя. Именно, точке (z, P^k) базы P_k^n мы отнесем слой

$$E^k_{(z,\,P^k)} = P^k \cap E^n_z$$

с центром в точке $z \in E^k_{(z,\,P^k)}$. Аффинные координаты вводятся в слой $E^k_{(z,\,P^k)}$ следующим образом. Сначала введем аффинные координаты в E^n_z. Если $z^i \neq 0$, то точке $w = (w^0, \ldots, w^n) \in E^n_z$ мы отнесем аффинные координаты $u^1, \ldots, u^n$, определяемые соотношениями:

$$u^1 = \frac{w^0}{\sum} - \frac{z^0}{\sum_0},\quad u^2 = \frac{w^1}{\sum} - \frac{z^1}{\sum_0},\ \ldots,\ u^i = \frac{w^{i-1}}{\sum} - \frac{z^{i-1}}{\sum_0},$$
$$u^{i+1} = \frac{w^{i+1}}{\sum} - \frac{z^{i+1}}{\sum_0},\ \ldots,\ u^n = \frac{w^n}{\sum} - \frac{z^n}{\sum_0},$$

где

$$\textstyle\sum_0 = z^0\overline{z^0} + \cdots + z^n\overline{z^n},\qquad \sum = w^0\overline{z^0} + \cdots + w^n\overline{z^n}.$$

Эти координаты естественным образом порождают координаты в слое

$$E^k_{(z,\,P^k)} = E^n_z \cap P^k.$$

Простые вычисления показывают, что различные координатные системы слоя $E^k_{(z,\,P^k)}$ получаются друг из друга линейными преобразованиями.

Частями косого произведения $T(E^k, P^n_k)$ являются косые произведения

$$T(E^k, X^s_i),\quad s \leqslant k,\quad T(E^k, N^k),$$

троящиеся аналогичным образом. Нетрудно видеть, что косое произведение $T(E^k, N^k)$ эквивалентно тангенциальному косому произведению многообразия N^k и потому циклы Черна косого произведения $T(E^k, N^k)$ совпадают с циклами Черна многообразия N^k.

4°. Обозначим через $H(k, m)$ многообразие k-мерных подпространств $(k+m)$-мерного комплексного векторного пространства. Это многообразие хорошо изучено [см. ([4])]. Здесь мы напомним, что его размерность равна $2km$ и все его нечетномерные числа Бетти равны нулю (см. также § 2, n^o 1).

При достаточно большом m существует [см. ([1])] непрерывное отображение f многообразия P^n_k в $H(k, m)$, индуцирующее косое произведение, эквивалентное косому произведению $T(E^k, P^n_k)$. Так как число m можно выбрать сколь угодно большим, то отображение f можно считать гомеоморфизмом.

Одновременно с P^n_k в многообразие $H(k, m)$ отображаются и базы X^s_i, N^k косых произведений $T(E^k, X^s_i)$, $T(E^k, N^k)$, причем индуцированные этими отображениями косые произведения также эквивалентны косым произведениям $T(E^k, X^s_i)$, $T(E^k, N^k)$.

Пусть Z^{km-s} — цикл размерности $2(km-s)$ многообразия $H(k, m)$, порождающий $2(r-s)$-мерный цикл Черна Ω^{r-s} косого произведения

$T(E^k, P_k^n)$ [см. (1)]. Цикл Ω^{r-s} задается формулой

$$\Omega^{r-s} = f^{-1}(Z^{km-s} \times f(P_k^n)) = \sum_{j=1}^{\alpha_s} \sigma_j^s Y_j^{r-s}, \tag{1.2}$$

где $\times$ — знак пересечения, σ_j^s — целые числа (кручения в P_k^n отсутствуют), а f^{-1} — обратное к f отображение.

Так как отображение $f: N^k \to H(k, m)$ индуцирует тангенциальное косое произведение многообразия N^k, то цикл Z^{km-s} порождает $2(k-s)$-мерный цикл Черна Ψ^{k-s} многообразия N^k, который, на основании формулы (1.2), может быть представлен в виде:

$$\Psi^{k-s} = f^{-1}(Z^{km-s} \times f(N^k)) = [f^{-1}(Z^{km-s} \times f(P_k^n))] \times N^k = \sum_{j=1}^{\alpha_s} \sigma_j^s (Y_j^{r-s} \times N^k). \tag{1.3}$$

Наконец, $2(k-s)$-мерный цикл Черна Γ^{k-s} многообразия M^k задается формулой

$$\Gamma^{k-s} = \varphi(\Psi^{k-s}) = \sum_{j=1}^{\alpha_s} \sigma_j^s \varphi(Y_j^{r-s} \times N^k), \tag{1.4}$$

где $\varphi: N^k \to M^k$ — указанный выше (см. n^0 1) аналитический гомеоморфизм. Так как $s \leqslant k$, то формула (1.4) дает все циклы Черна многообразия M^k.

Следовательно, для вычисления циклов Черна Γ^{k-s} многообразия M^k необходимо найти целые числа σ_j^s и вычислить циклы $\varphi(Y_j^{r-s} \times N^k)$. Вычисление чисел σ_j^s оказалось наиболее трудной частью работы и ему посвящен § 5. Вычисление проведено следующим образом. Цикл Z^{km-s}, порождающий $2(k-s)$-мерный цикл Черна Ψ^{k-s} многообразия N^k, порождает в базе X_i^s косого произведения $T(E^k, X_i^s)$ 0-мерный цикл Черна Ω^0, индекс которого равен σ_i^s:

$$\operatorname{ind}(\Omega^0) = \sigma_i^s.$$

В самом деле, учитывая дуальность баз гомологий $\{X_i^s\}$ и $\{Y_j^{r-s}\}$, получим из (1.2):

$$\operatorname{ind}(\Omega^0) = \operatorname{ind}[f^{-1}(Z^{km-s} \times f(X_i^s))] = \operatorname{ind}[f^{-1}(Z^{km-s} \times f(P_k^n)) \times X_i^s] =$$
$$= \operatorname{ind}\left[\left(\sum_{j=1}^{\alpha_s} \sigma_j^s Y_j^{r-s}\right) \times X_i^s\right] = \sum_{j=1}^{\alpha_s} \sigma_j^s \operatorname{ind}(Y_j^{r-s} \times X_i^s) = \sigma_i^s.$$

С другой стороны, $\operatorname{ind}(\Omega^0)$ равен сумме индексов особенностей $(k-s+1)$-реперного поля, построенного в косом произведении $T(E^k, X_i^s)$ [см. (1)]. В § 5 эти поля строятся явным образом для всех косых произведений

$$T(E^k, X_i^s), \quad s \leqslant k, \quad i = 1, \ldots, \alpha_s,$$

и вычисляются суммы их индексов особенностей, т. е. вычисляются числа σ_i^s, $s \leqslant k$, $i = 1, \ldots, \alpha_s$. Некоторые из чисел $\sigma_i^s = 0$. Поэтому соответствующие им циклы $\varphi(Y_j^{r-s} \times N^k)$ в формуле (1.4) можно не вычислять. Остальные циклы $\varphi(Y_j^{r-s} \times N^k)$ вычислены в § 4 (теорема 4.1).

Оказывается, что циклы $\varphi(Y_j^{r-s} \times N^k) \subset M^k$ можно получить, применив к M^k простые проективно инвариантные операции; следовательно, циклы $\varphi(Y_j^{r-s} \times N^k)$ являются алгебраическими псевдомногообразиями алгебраического многообразия M^k.

В § 6 сформулирована в окончательном виде теорема о циклах Черна комплексного алгебраического многообразия и приведены примеры.

§ 2. Вычисление баз гомологий $\{X_i^s\}$ при $s \leqslant k$

1°. Через $H(k, n-k)$ обозначим многообразие k-мерных подпространств $P^k \subset P^n$, содержащих фиксированную точку $O \subset P^n$. $H(k, n-k)$ является комплексным алгебраическим многообразием. Гомологии в $H(k, n-k)$ изучались в ([4]). Здесь мы приведем необходимые для дальнейшего результаты.

Введем целочисленную неубывающую функцию ω целочисленного аргумента $i: 0 \leqslant \omega(i) \leqslant n-k,\ i=1, \ldots, k$.

Пусть $Q_i \subset P^n$ — подпространства размерностей $i+\omega(i)$, удовлетворяющие условию:

$$O \subset Q_1 \subset \ldots \subset Q_k.$$

Через $Z(\omega)$ обозначим множество всех подпространств $P^k \in H(k, n-k)$, удовлетворяющих условиям:

$$\dim(P^k \cap Q_i) \geqslant i, \quad i=1, \ldots, k. \tag{2.1}$$

Множество $Z(\omega)$ является комплексным алгебраическим псевдомногообразием и, следовательно, циклом размерности $2t = 2\sum\limits_{i=1}^{k}\omega(i)$, лежащим в $H(k, n-k)$.

Если вместо Q_i взять другие подпространства Q_i', удовлетворяющие тем же условиям:

$$O \subset Q_1' \subset \ldots \subset Q_k', \quad \dim Q_i' = i+\omega(i),$$

то получим цикл $Z'(\omega)$, гомологичный в $H(k, n-k)$ циклу $Z(\omega)$.

Местом скачка функции ω будем называть такое значение i ее аргумента, что $\omega(i) \neq \omega(i+1)$.

Пусть $i_1, \ldots, i_{m-1}$ — совокупность всех мест скачков функции ω, взятых в возрастающем порядке; положим еще $i_m = k$. Оказывается, что условия (2.1) эквивалентны условиям

$$\dim(P^k \cap Q_{i_h}) \geqslant i_h, \quad h=1, \ldots, m. \tag{2.2}$$

Таким образом, цикл $Z(\omega)$ однозначно (с точностью до гомологий) определяется подпоследовательностью

$$Q_{i_1} \subset Q_{i_2} \subset \ldots \subset Q_{i_m}$$

последовательности

$$Q_1 \subset Q_2 \subset \ldots \subset Q_k.$$

Гомологии в $H(k, n-k)$ описываются следующим образом.

Многообразие $H(k, n-k)$ комплексной размерности $k(n-k)$ не имеет кручений и все его нечетномерные числа Бетти равны нулю. Число Бетти размерности $2t$ равно числу всевозможных функций ω, удовлетворяющих условию: $\sum\limits_{i=1}^{k}\omega(i) = t$. Соответствующие циклы $Z(\omega)$ образуют базу гомологий размерности $2t$.

2°. При вычислении баз $\{X_i^s\}$, $s \leqslant k$ (см. § 1, n^0 2) мы используем следующее предложение, содержащееся в приведенных в ([3]) теоремах.

Пусть M — компактное действительное ориентируемое дифференцируемое многообразие четной размерности и пусть f — заданная на M непостоянная действительная дифференцируемая функция. Пусть f достигает максимума и минимума на ориентируемых четномерных многообразиях R и Q соответственно и пусть полный дифференциал функции f обращается в нуль только на R и Q. Пусть, наконец, многообразия R и Q не имеют кручений и их нечетномерные числа Бетти равны нулю.

Тогда оказывается, что и многообразие M не имеет кручений и все его нечетномерные группы гомологий тривиальны.

База $2s$-мерных гомологий многообразия M может быть найдена следующим образом.

Пусть $\{R_i\}$ — полная база гомологий (во всех размерностях) многообразия R, $\{Q_i^s\}$ — база $2s$-мерных гомологий многообразия Q; пусть, далее, $\{M_i^s\}$ — максимальное множество $2s$-мерных циклов из M, пересечение каждого из которых с многообразием R дает некоторый цикл R_i из базы $\{R_i\}$, причем выполнено условие: различные циклы из $\{M_i^s\}$ пересекаются с R по различным базисным циклам R_i. Тогда множество всех циклов M_i^s и Q_i^s составляет базу $2s$-мерных гомологий многообразия M.

3°. Переходим к построению баз $\{X_i^s\}$, $s \leqslant k$ (см. § 1, n° 2). Пусть Q^l — некоторое фиксированное l-мерное подпространство пространства P^n. Множество всевозможных пар (z, P^k), где $z \in Q^l$, $P^k \ni z$, является комплексным алгебраическим многообразием комплексной размерности $l + k(n-k)$, которое мы обозначим через $P_{k,l}^n$.

При $k = 0$, $l = n$ получаем многообразие $P_{0,n}^n$, т. е. проективное пространство P^n; при $l = 0$ получаем многообразие

$$P_{k,0}^n = H(k, n-k);$$

наконец, при $l = n$ мы получаем многообразие

$$P_{k,n}^n = P_k^n,$$

базы гомологий $\{X_i^s\}$ которого мы вычисляем при $s \leqslant k$.

4°. Многообразия $P_{k,l}^n$, рассматриваемые как действительные дифференцируемые многообразия, имеют четную размерность. Мы зададим сейчас на каждом из них при $l > 0$ действительную функцию f, удовлетворяющую всем условиям приведенного в n° 2 предложения.

В пространстве P^n зафиксируем некоторую систему проективных координат и будем считать их нормированными: если $z = (z^0, \ldots, z^n) \in P^n$, то

$$z^0\overline{z^0} + \cdots + z^n\overline{z^n} = 1.$$

Далее, будем считать, что подпространство $Q^l \subset P^n$, участвующее в определении многообразия $P_{k,l}^n$, задается в P^n системой уравнений

$$z^0 = \cdots = z^{n-l-1} = 0.$$

Функцию f на $P_{k,l}^n$, $l > 0$, определим следующим образом: f принимает в точке $(z, P^k) \in P_{k,l}^n$ значение

$$f((z, P^k)) = z^{n-l}\overline{z^{n-l}},$$

где $z = (0, \ldots, 0; z^{n-l}, \ldots, z^n) \in Q^l$. Очевидно, что функция f однозначно определена (так как координаты нормированы) и дифференцируема.

Ее максимальное значение равно 1 и достигается на множестве всевозможных пар

$$((\overbrace{0, \ldots, 0}^{n-l}; 1, 0, \ldots, 0), P^k) \in P^n_{k,l},$$

т. е. на подмногообразии $R_l = H(k, n-k)$ всевозможных k-мерных подпространств, содержащих точку

$$(\overbrace{0, \ldots, 0}^{n-l}; 1, 0, \ldots, 0) \in Q^l.$$

Минимальное значение f равно 0 и достигается на многообразии $Q_l = P^n_{k,\, l-1}$ всевозможных пар (z, P^k), где

$$z = (0, \ldots, 0; 0, z^{n-l+1}, \ldots, z^n) \in Q^{l-1}.$$

Легко проверяется, что полный дифференциал функции f обращается в нуль только на выделенных подмногообразиях $R_l = H(k, n-k)$ и $Q_l = P^n_{k,\, l-1}$. При $l = 1$ многообразие

$$Q_1 = P^n_{k,\, 0} = H(k, n-k)$$

и, следовательно, для многообразия $P^n_{k,\, 1}$ и функции f, заданной на нем, выполняются все условия предложения n° 2. Поэтому $P^n_{k,\, 1}$ не имеет кручений и его числа Бетти всех нечетных размерностей равны нулю. Это утверждение справедливо, следовательно, и для многообразий $P^n_{k,\, 2}$, $P^n_{k,\, 3}$ и т. д., вплоть до $P^n_{k,\, n} = P^n_k$ включительно; каждое из них не имеет кручений и их нечетномерные числа Бетти равны нулю. Этим доказано, что все перечисленные в предложении n°2 условия выполнены для построенных нами многообразий $P^n_{k,\, l}$, R_l, Q_l и функций f при $l = 1, \ldots, n$.

Обозначим через B^s_l базу $2s$-мерных гомологий многообразия $P^n_{k,\, l}$, а через A^s_l — максимальное множество $2s$-мерных циклов многообразия $P^n_{k,\, l}$, пересекающихся в $P^n_{k,\, l}$ с многообразием $R_l = H(k, n-k)$ по базисным циклам из R_l и удовлетворяющих условию: различные циклы из A^s_l пересекаются с многообразием R_l по различным базисным циклам последнего. Из предложения n° 2 и из того, что $Q_l = P^n_{k,\, l-1}$ следует (см. обозначения § 1, n° 2):

$$\{X^s_i\} = B^s_n = A^s_n \cup B^s_{n-1} = \cdots = A^s_n \cup A^s_{n-1} \cup \cdots \cup A^s_1 \cup B^s_0.$$

Обозначая $B^s_0 = A^s_0$, получим формулу

$$\{X^s_i\} = B^s_n = A^s_n \cup A^s_{n-1} \cup \ldots \cup A^s_0. \tag{2.3}$$

Итак, вычисление базы $B^s_n = \{X^s_i\}$ $2s$-мерных гомологий многообразия $P^n_{k,\, n} = P_k$ свелось к нахождению циклов, составляющих множества A^s_l, $l = 0, 1, \ldots, n$. Мы найдем их для интересующего нас случая $s \leqslant k$.

При $s < l$ множество A^s_l пусто, так как

$$\dim R_l + 2s - \dim P^n_{k,\, l} = 2(k(n-k) + s - l - k(n-k)) < 0.$$

Найдем циклы, составляющие множества A^s_{s-t}, $t = 0, 1, \ldots, s$.

Цикл размерности $2s$ многообразия $P^n_{k,\, s-t}$ пересекается в $P^n_{k,\, s-t}$ с многообразием $R_{s-t} = H(k, n-k)$ по $2t$-мерному циклу, так как

$$\dim R_{s-t} + 2s - \dim P^n_{k,\, s-t} = 2t.$$

Если $Z^t(\omega)$ — один из базисных $2t$-мерных циклов многообразия $R_{s-t} =$

$= H(k, n-k)$, то всякое подпространство $P^k \in Z^t(\omega)$ содержит некоторое фиксированное подпространство Q^{k-t} размерности $k-t$. В самом деле, так как $\dim Z^t(\omega) = 2t$, то при $i \leqslant k-t$ функция $\omega(i) = 0$ (см. n° 1). Следовательно, если Q_i, $i = 1, \ldots, k$, — последовательность, определяющая цикл $Z^t(\omega)$, то

$$\dim Q_{k-t} = k - t + \omega(k-t) = k - t,$$

и для всякого $P^k \in Z^t(\omega)$ имеем:

$$\dim (P^k \cap Q_{k-t}) \geqslant k - t$$

[см. формулу (2.1)], т. е. всякое $P^k \in Z^t(\omega)$ содержит фиксированное $(k-t)$-мерное подпространство Q_{k-t}. Так как $s \leqslant k$, то можно считать (см. n° 1),что Q_{k-t} содержит подпространство Q^{s-t}, входящее в определение многообразия $P^n_{k,\,s-t}$.

Итак, всякий $2t$-мерный базисный цикл $Z^t(\omega)$ многообразия $R_{s-t} = H(k, n-k)$ можно выбрать так, чтобы все $P^k \in Z^t(\omega)$ содержали подпространство Q^{s-t}, входящее в определение многообразия $P^n_{k,\,s-t}$. Поэтому множество всевозможных пар (z, P^k), $z \in Q^{s-t}$, $P^k \in Z^t(\omega)$, является прямым произведением подпространства Q^{s-t} на цикл $Z^t(\omega)$, т. е. является алгебраическим псевдомногообразием и, следовательно, циклом размерности $2s$, лежащим в $P^n_{k,\,s-t}$. Мы обозначим его через $(Q^{s-t}, Z^t(\omega))$.

Псевдомногообразие $(Q^{s-t}, Z^t(\omega))$ и многообразие R_{s-t} находятся в общем положении в многообразии $P^n_{k,\,s-t}$. Поэтому их пересечением в $P^n_{k,\,s-t}$ является цикл $Z^t(\omega)$*.

Через $\{(Q^{s-t}, Z^t(\omega))\}$ обозначим совокупность циклов $(Q^{s-t}, Z^t(\omega))$, выбранных для всевозможных базисных циклов $Z^t(\omega)$ многообразия R_{s-t} при данном фиксированном t, $0 \leqslant t \leqslant s$. Эта совокупность составит полный набор $2s$-мерных циклов из $P^n_{k,\,s-t}$, пересекающихся в $P^n_{k,\,s-t}$ с многообразием R_{s-t} по базисным циклам последнего, так как соответствующие $Z^t(\omega)$ составляют в R_{s-t} базу $2t$-мерных гомологий (см. n° 1). Следовательно, A^s_l пусто при $l < s$ и $A^s_{s-t} = \{(Q^{s-t}, Z^t(\omega))\}$ при $0 \leqslant t \leqslant s$. Для базы $\{X^s_i\}$ $2s$-мерных гомологий формула (2.3) дает следующее выражение:

$$\{X^s_i\} = \bigcup_{t=0}^{s} \{(Q^{s-t}, Z^t(\omega))\}.$$

Все доказанное относительно гомологий в P^n_k мы сформулируем в виде следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 2.1. *Комплексное алгебраическое многообразие P^n_k комплексной размерности $n + k(n-k)$ не имеет кручений и его числа Бетти*

---

* Пусть M_1 и M_2 — псевдомногообразия, лежащие в многообразии P, N_1 и N_2 — множества особых точек псевдомногообразий M_1 и M_2 соответственно. Мы говорим, что M_1 и M_2 находятся в общем положении в P, если в P находятся в общем положении многообразия (M_1 / N_1) и (M_2 / N_2), причем

$$\dim (N_1 \cap M_2 \cup N_2 \cap M_1) \leqslant \dim (M_1 \cap M_2) - 2.$$

В этом случае теоретико-множественное пересечение $M_1 \cap M_2$ псевдомногообразий M_1 и M_2 само является псевдомногообразием и совпадает с топологическим пересечением циклов M_1 и M_2 (при надлежащей ориентации пересечения $M_1 \cap M_2$).

Чтобы сократить изложение, доказательства всех утверждений об общности положения псевдомногообразий мы в дальнейшем будем опускать.

всех нечетных размерностей равны нулю. База $\{X_i^s\}$, $i=1,\ldots,\alpha_s$, $2s$*-мерных гомологий при* $s\leqslant k$ *состоит из* α_s*-циклов* X_i^s, *которые могут быть получены следующим образом. Пусть* $0\leqslant t\leqslant s\leqslant k$; *все подпространства* $P^k\in Z^t(\omega)$, *где* $Z^t(\omega)$ — *произвольный* $2t$*-мерный базисный цикл многообразия* $H(k,n-k)$, *содержат некоторое фиксированное* $(s-t)$*-мерное подпространство* Q^{s-t}. *Множество всевозможных пар* (z, P^k), $z\in Q^{s-t}$, $P^k\in Z^t(\omega)$, *есть алгебраическое псевдомногообразие размерности* $2s$, *лежащее в алгебраическом многообразии* P_k^n. *Обозначим его через* $(Q^{s-t}, Z^t(\omega))$. *Совокупность всех циклов* $(Q^{s-t}, Z^t(\omega))$, *соответствующих всевозможным* $Z^t(\omega)$, $t=0,1,\ldots,s$, *при данном фиксированном* s, *образует базу* $2s$*-мерных гомологий* $\{X_i^s\}$, $i=1,\ldots,\alpha_s$, *многообразия* P_k^n.

§ 3. Циклы U_t^s, V_t^{r-s}

1°. Мы выделим сейчас из базы $\{X_i^s\}$ $s+1$ цикл U_t^s, $t=0,\ldots,s$. В § 5, где индексы σ_i^s (см. § 1, n^o 4) фактически вычислены для всех $i=1,\ldots,\alpha_s$, будет показано, что $\sigma_i^s=0$, если соответствующий цикл $X_i^s\neq U_t^s$. В следующем пункте строятся циклы V_t^{r-s} из дуальной базы $\{Y_j^{r-s}\}$ (см. § 1, n^o2), соответствующие циклам U_t^s. В § 4 вычисляются пересечения $V_t^{r-s}\times N^k$ и циклы $\varphi(V_t^{r-s}\times N^k)$ (см. § 1, n^o 4). Остальные циклы $\varphi(Y_j^{r-s}\times N^k)$ не нужны для вычисления циклов Черна Γ^{k-s}, так как формула (1.4) принимает, после сказанного, вид:

$$\Gamma^{k-s}=\sum_{t=0}^{s}\rho_t^s\,\varphi(V_t^{r-s}\times N^k). \tag{3.1}$$

Было показано (см. § 2, n^o 4), что функция ω цикла $Z^t(\omega)$ может делать первый скачок не раньше, чем на $(k-t)$-м месте, так как

$$\dim Z^t(\omega)=2t.$$

Рассмотрим циклы $X_i^s=(Q^{s-t}, Z^t(\omega))$ данной размерности $2s$, функция ω которых делает первый скачок на $(k-t)$-м месте. Таких циклов имеется $s+1$: каждому $t=0,1,\ldots,s$ соответствует один цикл X_i^s, функция ω_t которого имеет вид:

$$\omega_t(1)=\cdots=\omega_t(k-t)=0,\quad \omega_t(k-t+1)=\cdots=\omega_t(k)=1.$$

Цикл $Z^t(\omega)$ можно получить следующим образом. Пусть $Q^{k-t}\subset Q^{k+1}$ — два фиксированных подпространства пространства P^n (они соответствуют пространствам Q_{i_1}, Q_{i_m}, см. § 2, n^o 1). Тогда $Z^t(\omega)$ состоит из всех подпространств $P^k\subset Q^{k+1}$, содержащих подпространство Q^{k-t}.

Сказанное сформулируем в виде следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 3.1. *Для каждого* $s\leqslant k$ *из базы* $\{X_i^s\}$ *выделяется* $s+1$ *цикл* U_t^s, $t=0,\ldots,s$, *при помощи следующей конструкции. Рассмотрим три фиксированных подпространства:* $Q^{s-t}\subset Q^{k-t}\subset Q^{k+1}$. *Цикл* U_t^s *состоит из всевозможных пар* (z, P^k), *где* $z\in Q^{s-t}$, $Q^{k-t}\subset P^k\subset Q^{k+1}$; *обозначим его через* $(Q^{s-t}, Q^{k-t}, Q^{k+t})$. *Индекс* σ_i^s, *соответствующий циклу* U_t^s, *обозначим через* ρ_t^s. *Имеем:*

$$\sigma_i^s=0 \quad \textit{при} \quad X_i^s\neq U_t^s,$$
$$\sigma_i^s=\rho_t^s \quad \textit{при} \quad X_i^s=U_t^s.$$

Формула для вычисления индекса ρ_t^s дана в § 5 [см. формулу (5.2)].

2°. Циклы V_t^{r-s} определяются следующей теоремой.

ТЕОРЕМА 3.2. *Пусть* $Q^{n-k-2+t} \subset Q^{n-s+t}$ — *два фиксированных подпространства пространства* P^n. *Цикл* V_t^{r-s} *состоит из всевозможных пар* $(z, P^k) \in P_k^n$, *где* $z \in Q^{n-s+t}$, $\dim (P^k \cap Q^{n-k-2+t}) \geqslant t-1$.

Мы будем этот цикл обозначать через

$$V_t^{r-s} = (Q^{n-k-2+t}, Q^{n-s+t}).$$

Доказательство. Прежде всего докажем, что V_t^{r-s} есть алгебраическое псевдомногообразие, и, следовательно, цикл размерности $2(k(n-k) + n-s)$. Множество всевозможных пар $(z, P^k) \in V_t^{r-s}$, где $z \notin Q^{n-k-2+t}$, образует $2(k(n-k)+n-s)$-мерное псевдомногообразие (открытое, если $n-k-2+t \geqslant 0$). В самом деле, множество Z всевозможных пар $(z, P^k) \in V_t^{r-s}$ при фиксированном $z \notin Q^{n-k-2+t}$ можно определить следующим образом: Z состоит из всевозможных пар (z, P^k), где подпространство P^k содержит точку z и имеет с $(n-k-1+t)$-мерным подпространством, содержащим $Q^{n-k-2+t}$ и z, пересечение размерности $\geqslant t$.

Следовательно, Z есть базисный цикл многообразия $H(k, n-k)$, построенного в точке z, функция ω которого задается условиями:

$$\omega(1) = \cdots = \omega(t) = n-k-1,$$

$$\omega(t+1) = \cdots = \omega(k) = n-k; \quad \dim Z = 2(k(n-k)-t),$$

[см. § 2, n^0 1].

Выберем некоторую пару (z, P^k) из псевдомногообразия Z. Она имеет в V_t^{r-s} окрестность, гомеоморфную прямому произведению окрестности точки z в Q^{n-s+t} и окрестности точки (z, P^k) в $Z \subset H(k, n-k)$. Следовательно, множество всех пар $(z, P^k) \in V_t^{r-s}$, где $z \notin Q^{n-k-2+t}$, образует псевдомногообразие (открытое, если $Q^{n-k-2+t}$ не пусто) размерности

$$2(n-s+t) + \dim Z = 2(k(n-k) + n-s).$$

Обозначим его через W.

Аналогичные рассуждения показывают, что множество всевозможных пар $(z, P^k) \in V_t^{r-s}$, $z \in Q^{n-k-2+t}$, образует замкнутое псевдомногообразие W' размерности

$$2(k(n-k)+n-k-1).$$

Так как

$$\dim W - \dim W' = 2(k-s+1) \geqslant 2,$$

то размерность множества особых точек $W \cup W' = V_t^{r-s}$ оказывается хотя бы на 2 единицы меньше, чем

$$\dim V_t^{r-s} = 2(k(n-k)+n-s).$$

Следовательно, V_t^{r-s} есть замкнутое псевдомногообразие размерности $2(k(n-k)+n-s)$. Его алгебраичность очевидна.

Теорема будет доказана, если доказать равенства:

$$\operatorname{ind}(X_i^s \times V_t^{r-s}) = 0 \quad \text{при} \quad X_i^s \neq U_t^s \quad \text{и} \quad \operatorname{ind}(U_t^s \times V_t^{r-s}) = 1.$$

Пусть

$$X_i^s = (Q^{s-t'}, Z^{t'}(\omega)) \mp U_t^s$$

(см. n^o 1) и

$$V_t^{r-s} = (Q^{n-k-2+t}, Q^{n-s+t}).$$

Если $t' > t$, то подпространства Q^{n-s+t} и $Q^{s-t'}$ можно выбрать непересекающимися, и в этом случае

$$\operatorname{ind}(X_i^s \times V_t^{r-s}) = 0.$$

Пусть $t' \leqslant t$. Если

$$X_i^s = (Q^{s-t'}, Z^{t'}(\omega)) \mp U_t^s,$$

то функция ω может делать первый скачок не раньше, чем на $(k-t+1)$-м месте. Следовательно, все подпространства $P^k \in Z^{t'}(\omega)$ содержат некоторое фиксированное подпространство R^{k-t+1} размерности $k-t+1$ (см. § 2, n^o 4). Будем считать, что подпространство $Q^{n-k-2+t}$, участвующее в определении цикла V_t^{r-s}, находится в общем положении с подпространством R^{k-t+1}. Имеем:

$$\dim(R^{k-t+1} \cap Q^{n-k-2+t}) = -1,$$

т. е. пересечение пусто. Если $(z, P^k) \in X_i^s$ и $\in V_t^{r-s}$, то $P^k \supset R^{k-t+1}$ и

$$\dim(P^k \cap Q^{n-k-2+t}) \geqslant t-1,$$

но это невозможно, так как размерность подпространства, содержащего R^{k-t+1} и некоторое $(t-1)$-мерное подпространство $R^{t-1} \subset Q^{n-k-2+t}$, не меньше, чем

$$\dim R^{k-t+1} + \dim R^{t-1} + 1 = k+1$$

(R^{k-t+1} и R^{t-1} не пересекаются!).

Остается доказать равенство

$$\operatorname{ind}(U_t^s \times V_t^{r-s}) = 1.$$

Пусть

$$U_t^s = (Q^{s-t}, Q^{k-t}, Q^{k+1})$$

(см. n^o 1),

$$V_t^{r-s} = (Q^{n-k-2+t}, Q^{n-s+t})$$

и будем предполагать, что $Q^{n-k-2+t}$ и Q^{n-s+t} находятся в общем положении с подпространствами

$$Q^{s-t} \subset Q^{k-t} \subset Q^{k+1}.$$

Имеем:

$$Q^{n-s+t} \cap Q^{s-t} = R^0 = z, \qquad Q^{n-k-2+t} \cap Q^{k+1} = R^{t-1}.$$

Подпространство R^{t-1} не пересекается с Q^{k-t}, следовательно, существует единственное подпространство $P^k \subset Q^{k+1}$, содержащее подпространства Q^{k-t} и R^{t-1}. Пара (z, P^k) и будет единственной точкой пересечения (в теоретико-множественном смысле) циклов U_t^s и V_t^{r-s}. Нетрудно показать (см. сноску на стр. 692), что эта точка является неособой точкой для обоих псевдомногообразий, и что в ней U_t^s и V_t^{r-s} находятся в общем положении. Наконец, учитывая естественные ориентации комплексных псевдомногообразий U_t^s и V_t^{r-s}, получаем:

$$\operatorname{ind}(U_t^s \times V_t^{r-s}) = 1.$$

§ 4. Операция Π_t и вычисление циклов $\varphi(V_t^{r-s} \times N^k)$

1°. Для вычисления пересечений $V_t^{r-s} \times N^k$ в P_k^n выберем подпространства $Q^{n-k-2+t}$ и Q^{n-s+t}, определяющие цикл V_t^{r-s}, так, чтобы, во-первых, Q^{n-s+t} и $M^k \subset P^n$ находились в общем положении в P^n и, во-вторых, псевдомногообразие V_t^{r-s} и многообразие N^k находились в общем положении в P_k^n (см. сноску на стр. 692). Этого можно достичь сколь угодно малым шевелением подпространств $Q^{n-k-2+t}$, Q^{n-s+t} около произвольного первоначального положения.

Доказательство этого утверждения требует довольно длинных выкладок и поэтому мы его здесь не будем приводить.

Если подпространства $Q^{n-k-2+t} \subset Q^{n-s+t}$ выбраны указанным способом, то из самого определения циклов V_t^{r-s} (§ 3, $n^0$2) и N^k (§ 1, n^0 1) следует

ЛЕММА 1. *Пересечение циклов V_t^{r-s} и N^k, находящихся в общем положении в P_k^n, совпадает с их теоретико-множественным пересечением и, следовательно, состоит из пар (z, P_z^k), где $z \in M^{k-s+t} = M^k \cap Q^{n-s+t}$, а P_z^k — касательное к M^k в точке z подпространство, имеющее с $Q^{n-k-2+t}$ пересечение размерности $\geqslant t-1$.*

2°. Образ $\varphi(V_t^{r-s} \times N^k)$ пересечения $V_t^{r-s} \times N^k$ при гомеоморфизме $\varphi: N^k \to M^k$ (см. § 1, n^0 1) состоит, очевидно, из первых компонентов пар $(z, P_z^k) \in V_t^{r-s} \times N^k$. Поэтому из леммы 1 следует

ЛЕММА 2. *Образ $\varphi(V_t^{r-s} \times N^k)$ цикла $V_t^{r-s} \times N^k$ при аналитическом гомеоморфизме $\varphi: N^k \to M^k$ состоит из тех точек $z \in M^{k-s+t} = M^k \cap Q^{n-s+t}$, в которых касательное к M^{k-s+t} подпространство $P_z^{k-s+t} \subset Q^{n-s+t}$ имеет с $Q^{n-k-2+t}$ пересечение размерности $\geqslant t-1$.*

Очевидно, что цикл $\varphi(V_t^{r-s} \times N^k)$ является алгебраическим псевдомногообразием размерности

$$\dim V_t^{r-s} + \dim N^k - \dim P_k^n = 2(r-s+k-r) = 2(k-s).$$

Формулировку леммы 2 можно слегка изменить, заменив условие

$$\dim(P_z^{k-s+t} \cap Q^{n-k-2+t}) \geqslant t-1$$

эквивалентным условием: подпространство P_z^{k-s+t} содержится в некотором подпространстве $P^{n-s+t-1} \subset Q^{n-s+t}$, содержащем подпространство $Q^{n-k-2+t}$.

ЛЕММА 3. *Цикл $\varphi(V_t^{r-s} \times N^k)$ состоит из точек $z \in M^{k-s+t} = M^k \cap Q^{n-s+t}$, в которых касательное к M^{k-s+t} подпространство $P_z^{k-s+t} \subset Q^{n-s+t}$ содержится в некотором подпространстве пучка $(n-s+t-1)$-мерных подпространств пространства Q^{n-s+t}, содержащих подпространство $Q^{n-k-2+t}$.*

3°. Используя леммы 1—3, мы определим операцию Π_t, которая каждому комплексному алгебраическому многообразию $M^l \subset P^m$ комплексной размерности l ставит в соответствие некоторое комплексное алгебраическое псевдомногообразие комплексной размерности $l-t$, лежащее в M^l:

$$\Pi_t(M^l) = M^{l-t} \subset M^l.$$

Для этого в пространстве P^m зафиксируем подпространство $Q^{m-l-2+t}$ и рассмотрим пучок $(m-1)$-мерных подпространств пространства P^m, содержащих $Q^{m-l-2+t}$.

Обозначим через $\Pi_t(M^l)$ множество точек z многообразия M^l, обладающих свойством: касательное к M^l в точке z подпространство содержится в некотором подпространстве нашего пучка.

Учитывая результаты n^o 1—2, мы можем утверждать, что при надлежащем выборе «оси» пучка $Q^{m-l-2+t}$ множество $\Pi_t(M^l)$ превратится в алгебраическое псевдомногообразие $M^{l-t} \subset M^l$.

Окончательный результат настоящего параграфа мы сформулируем в виде теоремы 4.1.

ТЕОРЕМА 4.1. *Подпространства* $Q^{n-k-2+t} \subset Q^{n-s+t}$, *определяющие цикл* V_t^{r-s}, *можно выбрать таким образом, чтобы псевдомногообразие* V_t^{r-s} *и многообразие* N^k *находились в общем положении в* P_k^n. *Тогда цикл* $\varphi(V_t^{r-s} \times N^k)$ *является алгебраическим псевдомногообразием размерности* $k-s$, *лежащим в* M^k. *Он получается, если к пересечению*

$$M^{k-s+t} = M^k \cap Q^{n-s+t}$$

применить операцию Π_t *в подпространстве* Q^{n-s+t}:

$$\varphi(V_t^{r-s} \times N^k) = \Pi_t(M^{k-s+t}).$$

Формула (3.1) для вычисления циклов Черна принимает теперь вид

$$\Gamma^{k-s} = \sum_{t=0}^{s} \rho_t^s \Pi_t(M^{k-s+t}). \tag{4.1}$$

§ 5. Вычисление индексов σ_i^s

В настоящем параграфе вычисляются индексы σ_i^s (см. § 1, n^o 4). Именно, в каждом косом произведении $T(E^k, X_i^s)$, $i = 1, \ldots, \alpha_s$, $s = 1, \ldots k$ (см. § 1, n^o 3), явным образом строится поле $k-s+1$ реперов с изолированными особенностями и вычисляется сумма индексов особенностей этого поля, которая совпадает с σ_i^s.

1°. Покажем, что если базисный цикл X_i^s косого произведения $T(E^k, X_i^s)$ не совпадает ни с одним из циклов U_t^s, то соответствующий индекс $\sigma_i^s = 0$:

$$\sigma_i^s = 0 \quad \text{при} \quad X_i^s \neq U_t^s.$$

Функция ω, входящая в определение цикла

$$X_i^s = (Q^{s-t}, Z^t(\omega)) \neq U_t^s,$$

имеет первый скачок на j-м месте, где $j > k-t$, $t \geqslant 2$ (см. § 3, n^o 1). Следовательно, все подпространства $P^k \in Z^t(\omega)$ содержат некоторое фиксированное подпространство $R^{k-t+1} \supset Q^{s-t}$. Над подпространством Q^{s-t}, как над базой, построим косое произведение $T(E^{k-t+1}, Q^{s-t})$ комплексного $(k-t+1)$-мерного векторного пространства E^{k-t+1} на Q^{s-t}. Именно, точке $z \in Q^{s-t}$ отнесем слой

$$E_z^{k-t+1} = R^{k-t+1} \cap E_z^n$$

(см. § 1, n^o 3). Легко доказать, что в косом произведении $T(E^{k-t+1}, Q^{s-t})$ $(k-s+1)$-реперное поле строится без особенностей [см. ([1])]. Допустим, что такое поле построено. Так как любое подпространство $P^k \in Z^t(\omega)$ содержит R^{k-t+1}, то в каждом слое

$$E_{(z, P^k)}^k = P^k \cap E_z^n$$

косого произведения $T(E^k, X_i^s)$, где z фиксировано, содержится слой

$$E_z^{k-t+1} = R^{k-t+1} \cap E_z^n$$

косого произведения $T(E^{k-t+1}, Q^{s-t})$. Если в слое $E^k_{(z, P^k)}$ задать $(k-s+1)$-репер, который уже построен в соответствующем слое E_z^{k-t+1}, то тем самым в косом произведении $T(E^k, X_i^s)$ будет задано $(k-s+1)$-реперное поле без особенностей.

Следовательно, соответствующий индекс $\sigma_i^s = 0$.

2^0. Переходим к вычислению индексов ρ_t^s, соответствующих косым произведениям $T(E^k, U_t^s)$.

Функция ω_t цикла

$$U_t^s = (Q^{s-t}, Z^t(\omega_t))$$

имеет вид:

$$\omega_t(1) = \cdots = \omega_t(k-t) = 0, \quad \omega_t(k-t+1) = \cdots = \omega_t(k) = 1.$$

Цикл

$$U_t^s = (Q^{s-t}, Z^t(\omega_t))$$

определяется тремя подпространствами

$$Q^{s-t} \subset Q^{k-t} \subset Q^{k+1}$$

и состоит из всевозможных пар (z, P^k), где $z \in Q^{s-t}$, $Q^{k-t} \subset P^k \subset Q^{k+}$ (см. § 3, n^0 1).

Покажем, что псевдомногообразие $Z^t(\omega_t)$ является комплексным t-мерным проективным пространством.

В самом деле, выберем подпространства

$$Q^{s-t} \subset Q^{k-t} \subset Q^{k+1} \subset P^n$$

таким образом, чтобы в фиксированной системе координат они задавались в P^n, соответственно, уравнениями:

$$z^{s-t+1} = \ldots = z^n = 0,$$

$$z^{k-t+1} = \ldots = z^n = 0,$$

$$z^{k+2} = \ldots = z^n = 0.$$

Тогда каждое подпространство $P^k \in Z^t(\omega_t)$, т. е. подпространство, удовлетворяющее условиям:

$$Q^{k-t} \subset P^k \subset Q^{k+1},$$

задается в Q^{k+1} уравнением

$$\sum_{i=1}^{t+1} \zeta^{i-1} w^{k-t+i} = 0, \tag{5.1}$$

где $w^0, \ldots, w^{k+1}$ — координаты переменной точки в Q^{k+1}, а числа $\zeta^0, \ldots, \zeta^t$ одновременно в нуль не обращаются. Очевидно, что каждому подпространству $P^k \in Z^t(\omega_t)$ взаимно однозначно, с точностью до множителя, соответствует система $(\zeta^0, \ldots, \zeta^t)$, т. е. комплексное алгебраическое псевдомногообразие $Z^t(\omega_t)$ является комплексным проективным пространством размерности t.

Таким образом, цикл

$$U_t^s = (Q^{s-t},\ Z^t(\omega_t))$$

есть прямое произведение двух комплексных проективных пространств Q^{s-t} и $Z^t(\omega_t)$ размерностей $s-t$ и t соответственно. Для точек $(z, P^k) \in U_t^s$ примем обозначения:

$$(z, P^k) = (z, \zeta) = (z^0, \ldots, z^{s-t};\ \zeta^0, \ldots, \zeta^t).$$

В дальнейшем мы всегда будем предполагать числа ζ^i нормированными:

$$\sum_{i=0}^{t} \zeta^i \overline{\zeta^i} = 1.$$

В каждом слое $E^k_{z,\zeta}$ косого произведения $T(E^k, U_t^s)$ мы зададим сейчас последовательность из $k-s+2$ точек

$$q_1 = z,\ q_2, \ldots, q_{k-s+2},$$

непрерывно зависящих от точки (z, ζ) базы U_t^s. Как указано, первая точка последовательности всегда совпадает с центром z слоя $E^k_{(z,\zeta)}$.

Этим в каждом слое $E^k_{(z,\zeta)}$ будет задана последовательность из $k-s+1$ вектора, концами которых служат точки $q_2, \ldots, q_{k-s+2}$, а началом — точка $q_1 = z$. Выбор последовательности точек произведем так, чтобы они становились зависимыми лишь в конечном числе слоев косого произведения $T(E^k, U_t^s)$ и, следовательно, зададим в косом произведении $T(E^k, U_t^s)$ $(k-s+1)$-реперное поле с изолированными особенностями. Сумма индексов этих особенностей равна ρ_t^s.

В слое $E^k_{(z,\zeta)}$ искомые $k-s+2$ точки задаем матрицей (I):

$$\left(\begin{array}{c|c|c} z^0,\ z^1, \ldots,\ z^{s-t} & 0,\ 0, \ldots,\ 0 & 0,\ \ 0, \ldots,\ \ 0 \\ a_0 z^0, a_1 z^1, \ldots, a_{s-t} z^{s-t} & 0,\ 0, \ldots,\ 0 & \Phi(\zeta^0\overline{\zeta^0} - 1),\ \Phi\zeta^0\overline{\zeta^1}, \ldots, \Phi\zeta^0\overline{\zeta^t} \\ \hline b_0 z^0, b_1 z^1, \ldots, b_{s-t} z^{s-t} & \Phi_1, 0, \ldots, 0 & 0,\ \ 0, \ldots,\ \ 0 \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ l_0 z^0, l_1 z^1, \ldots, l_{s-t} z^{s-t} & 0,\ 0, \ldots, \Phi_{k-s} & 0,\ \ 0, \ldots,\ \ 0 \end{array}\right) \qquad \text{(I)}$$

В этой матрице, разбитой на три вертикальные клетки, $k-s+2$ строки и $k+2$ столбца. Вдоль i-й строки стоят координаты точки q_i, $i = 1, \ldots, k-s+2$, в подпространстве Q^{k+1}. Коэффициенты $a_0, a_1, \ldots, l_{s-t}$, стоящие в первой клетке, все положительны и алгебраически независимы между собой, т. е. никакая подсистема этой системы чисел не обращает в нуль никакого многочлена с целыми коэффициентами от соответствующего числа переменных. Далее, $\Phi, \Phi_1, \ldots, \Phi_{k-s}$ — линейные формы переменных $z^0, \ldots, z^{s-t}$, причем коэффициенты этих форм вместе с коэффициентами $a_0, \ldots, l_{s-t}$ также алгебраически независимы между собой.

Покажем, что заданная этой матрицей последовательность из $k-s+2$ точек удовлетворяет всем перечисленным выше требованиям.

Прежде всего очевидна независимость такого задания от координат точки $(z, \zeta) \in U_t^s$: $\Phi, \Phi_1, \ldots, \Phi_{k-s}$ являются линейными формами переменных $z^0, \ldots, z^{s-t}$, и координаты ζ^i нормированы.

Докажем, что все $k-s+2$ точки, заданные матрицей (I), лежат в слое $E^k_{(z,\,\zeta)}$. Для этого покажем сначала, что все эти точки лежат в k-мерном подпространстве

$$\zeta = P^k \subset Q^{k+1}.$$

Это надо проверить только для точки q_2, так как все строки третьей клетки матрицы (I), за исключением второй строки, состоят из нулей [см. уравнение (5.1) для подпространства $P^k=\zeta$].

Но так как координаты ζ^i нормированы, то

$$\zeta^0\Phi(\zeta^0\overline{\zeta^0}-1)+\zeta^1\Phi\zeta^0\overline{\zeta^1}+\ldots+\zeta^t\Phi\zeta^0\overline{\zeta^t}=0.$$

Покажем, что точки $q_1, \ldots, q_{k-s+2}$ принадлежат аффинной части $E^k_{(z,\,\zeta)}$ подпространства ζ. Это следует из неравенств [см. уравнение (1.1) § 1, n^0 3]:

$$\sum_{i=0}^{s-t} z^i\overline{z^i}>0, \quad \sum_{i=0}^{s-t} a_i z^i\overline{z^i}>0, \ldots, \quad \sum_{i=0}^{s-t} l_i z^i\overline{z^i}>0,$$

которые выполняются в силу того, что все коэффициенты $a_0, \ldots, l_s$ — положительны, а z^i, $i=0, \ldots, s-t$, одновременно в нуль не обращаются.

Наконец, докажем, что точки $q_1, \ldots, q_{k-2+s}$ становятся зависимыми лишь в конечном числе слоев косого произведения $T(E^k, U^s_t)$ и найдем эти слои.

Если точка $(z, \zeta)=(z^0, \ldots, z^{s-t};\ \zeta^0, \ldots, \zeta^t)$ такова, что $\zeta^0\overline{\zeta^0}-1 \neq 0$, то при любом выборе точки $z \in Q^{s-t}$ $k-s+2$ точки $q_1, \ldots, q_{k-s+2}$ независимы в слое $E^k_{(z,\,\zeta)}$: в этом случае ранг матрицы (I) равен $k-s+2$.

Действительно, пусть среди координат z^i точки (z, ζ) отличны от нуля r координат, все же остальные z^i равны нулю. Пусть, например, от нуля отличны первые r координат z^i (это допущение не повлияет на общность рассуждений). На нормированные координаты ζ^i наложено единственное условие:

$$\zeta^0\overline{\zeta^0}-1 \neq 0.$$

Среди $k-s+1$ формы $\Phi, \Phi_1, \ldots, \Phi_{k-s}$ в нуль в точке z может обратиться не более $r-1$ формы, так как их коэффициенты алгебраически независимы между собой. Следовательно, в точке z отличны от нуля хотя бы $k-s+2-r$ форм. При этом, если форма $\Phi \neq 0$, то элемент $\Phi(\zeta^0\overline{\zeta^0}-1)$ матрицы (I) отличен от нуля в рассматриваемой точке (z, ζ).

Составим определитель $(k-s+2)$-го порядка из первых r столбцов первой клетки матрицы (I) (там все $z^i \neq 0$) и из тех $k-s+2-r$ столбцов второй и третьей клеток (из третьей клетки можно брать только первый столбец), в которых формы $\Phi, \Phi_1, \ldots, \Phi_{k-s}$ в нуль не обратились. Легко видеть, что этот определитель отличен от нуля.

Перейдем к случаю, когда слой $E^k_{(z,\,\zeta)}$ отнесен точке (z, ζ), для которой

$$\zeta^0\overline{\zeta^0}-1=0,$$

и, следовательно,

$$\zeta^1=\ldots=\zeta^t=0,$$

так как координаты ζ^i нормированы.

В этом случае в матрице (I) вся третья клетка обращается в нуль и ее ранг определяется первыми двумя клетками, т. е. выбором точки $z \in Q^{s-t}$, поскольку первые две клетки зависят только от переменных z^i.

Мы покажем сейчас, что среди слоев $E^k_{(z\,\zeta)}$, где

$$(z, \zeta) = (z;\ 1, 0, \ldots, 0),$$

существует ровно

$$\binom{k-t+1}{k-s+1}$$

слоев, в которых точки $q_1, \ldots, q_{k-s+2}$ становятся зависимыми; символом $\binom{a}{b}$ обозначен биномиальный коэффициент.

Пусть в точке $(z, \zeta) = (z^0, \ldots, z^{s-t};\ \zeta^0, \ldots, \zeta^t)$ от нуля отличны только r координат; среди форм $\Phi_1, \ldots, \Phi_{k-s}$ в точке z в нуль обращается не более $r-1$ формы (см. выше). Если в нуль обращается ровно $r-1$ форма, то ранг матрицы в рассматриваемой точке будет равен $k-s+1$ и, следовательно, соответствующий слой $E^k_{(z,\,\zeta)}$ будет особым. Если в нуль обращается меньшее число форм, то в слое $E^k_{(z,\,\zeta)}$ точки $q_1, \ldots, q_{k-s+2}$ независимы.

Следовательно, для подсчета общего числа особых слоев в косом произведении $T(E^k, U^s_t)$ нужно подсчитать число точек $z \in Q^{s-t}$, удовлетворяющих следующему условию: среди координат z^i точки z от нуля отличны только r координат, и в точке z обращается в нуль ровно $r-1$ форма из $k-s$ форм $\Phi_1, \ldots, \Phi_{k-s}$.

Если число r удовлетворяет условиям:

$$1 \leqslant r \leqslant s-t+1, \quad 1 \leqslant r \leqslant k-s+1,$$

то при произвольном выборе индексов $i_1, \ldots, i_r, j_1, \ldots, j_{r-1}$ можно найти единственную точку $z \in Q^{s-t}$, удовлетворяющую условиям:

$$z^{i_1} \neq 0, \ldots, z^{i_r} \neq 0,$$

$$\text{все остальные } z^i = 0,\ \Phi_{j_1}(z) = 0, \ldots, \Phi_{j_{r-1}}(z) = 0.$$

Для этого решим следующую систему из $r-1$ уравнения с r неизвестными $z^{i_1}, \ldots, z^{i_r}$:

$$\begin{array}{c} \Phi_{j_1}(z) = c_{11}z^{i_1} + \ldots + c_{1r}z^{i_r} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Phi_{j_{r-1}}(z) = c_{r-1,\,1}z^{i_1} + \ldots + c_{r-1,\,r}z^{i_r} = 0. \end{array} \qquad (*)$$

Так как коэффициенты c_{ij} алгебраически независимы между собой, то все определители матрицы системы отличны от нуля. Следовательно, всякое решение этой системы получается из некоторого фиксированного решения $(z_0^{i_1}, \ldots, z_0^{i_r})$, все координаты которого отличны от нуля, умножением последнего на соответствующий множитель.

Примем в качестве координат z^{i_s}, $s = 1, \ldots, r$, искомой точки $z \in Q^{s-t}$ координаты $z_0^{i_s}$ решения $(z_0^{i_1}, \ldots, z_0^{i_r})$; все остальные координаты z^i положим равными нулю. Очевидно, что эта точка удовлетворяет требуемому условию и она единственная (при фиксированном значении индексов $i_1, \ldots, i_r$, $j_1, \ldots, j_{r-1}$), так как ее координаты определены с точностью до множителя.

Другими словами, система $(*)$ однозначно определяет особую точку косого произведения $T(E^k, U^s_t)$.

Если индексы $i_1, \ldots, i_r$ оставить без изменения, но изменить хотя бы один из индексов $j_1, \ldots, j_{r-1}$, то получим другую особую точку $z \in Q^{s-t}$, так как коэффициенты форм Φ_i алгебраически независимы между собой. При фиксированной последовательности $i_1, \ldots, i_r$ $r-1$ индекс $j_1, \ldots, j_{r-1}$ можно выбрать $\binom{k-s}{r-1}$ различными способами, сами же индексы $i_1, \ldots, i_r$ можно выбрать $\binom{s-t+1}{r}$ различными способами. Следовательно, при фиксированном r получаются

$$\binom{k-s}{r-1}\binom{s-t+1}{r}$$

различных особых точек. Если просуммировать по r от 1 до $s-t+1$, то получим общее число особых точек. Обозначив это число через ϑ, найдем:

$$\vartheta = \sum_{r=1}^{s-t+1}\binom{k-s}{r-1}\binom{s-t+1}{r} = \sum_{r=1}^{s-t+1}\binom{k-s}{r-1}\binom{s-t+1}{s-t+1-r} =$$

$$= \sum_{q=0}^{s-t}\binom{k-s}{q}\binom{s-t+1}{s-t-q}.$$

Воспользовавшись тождеством

$$\sum_{q=0}^{n}\binom{a}{q}\binom{b}{n-q} = \binom{a+b}{n},$$

получим:

$$\vartheta = \sum_{q=0}^{s-t}\binom{k-s}{q}\binom{s-t+1}{s-t-q} = \binom{k-t+1}{s-t} = \binom{k-t+1}{k-t+1-s+t} = \binom{k-t+1}{k-s+1}.$$

Итак,

$$\vartheta = \binom{k-t+1}{k-s+1}.$$

3°. Для вычисления суммы ρ_t^s индексов особенностей $(k-s+1)$-реперного поля, заданного матрицей (I), остается найти индекс особенности в каждом из $\binom{k-t+1}{k-s+1}$ особых точек.

Мы покажем, что этот индекс не зависит от s и для каждого из этих слоев равен $(-1)^t$. Следовательно, для суммы ρ_t^s индексов особенностей получается формула

$$\rho_t^s = (-1)^t\binom{k-t+1}{k-s+1}. \tag{5.2}$$

Пусть точка $(z_0, \zeta_0) = (z_0;\ 1, 0, \ldots, 0)$ — особая.

Для определенности мы допустим, что для точки

$$z_0 = (z_0^0, \ldots, z_0^{s-t}) \in Q^{s-t}$$

координата $z_0^0 \neq 0$.

Рассмотрим такую окрестность D точки (z_0, ζ_0) в U_t^s, что если

$$(z, \zeta) = (z^0, \ldots, z^{s-t};\ \zeta^0, \ldots, \zeta^t) \in D,$$

то $z^0 \neq 0$, $\zeta^0 \neq 0$ и, кроме того, ни один из слоев, отнесенных точкам (z, ζ) этой окрестности, не является особым, кроме слоя $E^k_{(z_0, \zeta_0)}$.

Множество L всех слоев $E^k_{(z, \zeta)}$, где $(z, \zeta) \in D$, изоморфно прямому произведению $E^k \cdot D$ фиксированного k-мерного комплексного векторного пространства E^k на окрестность D. Гомеоморфизм $f: L \to E^k \cdot D$ отображает соответствующие слои линейно. Точке $(z, \zeta) \in D$ отнесен слой

$$E^k_{(z, \zeta)} = \zeta \cap E^n_z$$

множества L. Мы построим сейчас «непрерывное семейство» аналогичных множеств L_λ, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$; все L_λ будут изоморфны прямому произведению $E^k \cdot D$ и $L_1 = L$. Для построения множеств L_λ каждой точке $(z, \zeta) \in D$ отнесем слой

$$E^k_{(z, \zeta), \lambda} = \zeta \cap E^n_{z, \lambda},$$

где $E^n_{z, \lambda}$ — n-мерная «аффинная часть» проективного пространства P^n, определяемая условием:

$$w = (w^0, \ldots, w^n) \in E^n_{z, \lambda}$$

тогда и только тогда, когда

$$\overline{z^0} w_0 + \lambda (\overline{z^1} w^1 + \ldots + \overline{z^n} w^n) \neq 0.$$

Так как при $(z, \zeta) = (z^0, \ldots, z^{s-t}; \zeta) \in D$ координата $z^0 \neq 0$, то это условие имеет смысл при любом λ, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$. Положим

$$L_\lambda = \{E^k_{(z, \zeta), \lambda}\},$$

где $\{E^k_{(z, \zeta), \lambda}\}$ — совокупность всевозможных слоев $E^k_{(z, \zeta), \lambda}$, $(z, \zeta) \in D$. Очевидно, что $L_1 = L$.

Покажем, что при любом λ, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, все $k - s + 2$ точки $q_1, \ldots, q_{k-s+2}$, заданные в слое $E^k_{(z, \zeta)}$ матрицей (I), принадлежат слою $E^k_{(z, \zeta), \lambda}$. В самом деле, точка $q_i \in E^k_{(z, \zeta), \lambda}$, если $q_i \in E^n_{z, \lambda}$. Первые $s - t + 1$ координат точки q_i равны

$$\alpha_0 z^0, \alpha_1 z^1, \ldots, \alpha_{s-t} z^{s-t},$$

где z^j — координаты точки $z = q_1$, а числа $\alpha_j > 0$ [см. матрицу (I)]. Поэтому при любом $\lambda \geqslant 0$ сумма

$$\overline{z^0} \alpha_0 z^0 + \lambda (\overline{z^1} \alpha_1 z^1 + \ldots + \overline{z^{s-t}} \alpha_{s-t} z^{s-t}) > 0,$$

так как $z^0 \neq 0$, и, следовательно, $q_i \in E^n_{z, \lambda}$.

Нетрудно задать непрерывное семейство гомеоморфизмов f_λ:

$$L_\lambda \to E^k \cdot D, \quad 0 \leqslant \lambda \leqslant 1,$$

линейно отображающих каждый из слоев

$$E^k_{(z, \zeta), \lambda}, \quad 0 \leqslant \lambda \leqslant 1,$$

на слой $E^k \cdot (z, \zeta)$. Следовательно, в каждом из прямых произведений L_λ матрица (I) задает $(k - s + 1)$-реперное поле с единственной особой точкой (z_0, ζ_0), и искомый индекс особенности первоначального поля в $L = L_1$ равен индексу особенности реперного поля в L_0, к вычислению которого мы и переходим.

Определим отображение $h: L_0 \to E^k \cdot D$ следующим образом: если

$$w = (w^0, \ldots, w^{k+1}) \in E^k_{(z, \zeta), 0} \subset L_0,$$

то

$$h(w) = \left(\left(\frac{w^1}{w^0} - \frac{z^1}{z^0}, \ldots, \frac{w^{s-t}}{w^0} - \frac{z^{s-t}}{z^0}, \frac{w^{s-t+1}}{w^0}, \ldots, \frac{w^{k-t}}{w^0}, \frac{w^{k-t+2}}{w^0}, \ldots, \frac{w^{k+1}}{w^0}\right), (z, \zeta)\right) \in E^k \cdot D,$$

где $(z^0, \ldots, z^{s-t}; 0, \ldots, 0) \in Q^{s-t} \subset Q^{k+1}$ (см. стр. 698). Отображение h определено всюду на L_0 и является изоморфизмом, так как $w^0 \neq 0$, $z^0 \neq 0$ и координаты w^i связаны единственным соотношением [см. формулу (5.1)]

$$\zeta^0 w^{k-t+1} + \ldots + \zeta^t w^{k+1} = 0,$$

где $\zeta^0 \neq 0$.

Реперное поле, заданное в L_0 матрицей (I), переходит при изоморфизме h в реперное поле в $E^k \cdot D$, которое задается матрицей (II), получающейся из матрицы (I), если, во-первых, вычеркнуть из нее первый столбец третьей клетки, во-вторых, в полученной матрице разделить все элементы каждой строки на первый элемент той же строки и удалить первый столбец, и, наконец, вычесть из каждой строки этой последней матрицы первую строку, а затем удалить из полученной матрицы первую строку:

$$\left(\begin{array}{c|c|c} \alpha_1 u^1, \ldots, \alpha_{s-t} u^{s-t} & 0, \ 0, \ldots, 0 & \psi\zeta^0\overline{\zeta^1}, \ldots, \psi\zeta^0\overline{\zeta^t} \\ \hline \beta_1 u^1, \ldots, \beta_{s-t} u^{s-t} & \psi_1, 0, \ldots, 0 & 0, \ \ldots, \ 0 \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ \delta_1 u^1, \ldots, \delta_{s-t} u^{s-t} & 0, \ 0, \ldots, \psi_{k-s} & 0, \ \ldots, \ 0 \end{array}\right). \qquad \text{(II)}$$

Матрица (II) состоит из $k-s+1$ строки и k столбцов. Вдоль ее i-й строки стоят координаты i-го вектора, лежащего в слое $E^k \cdot (z, \zeta)$. Величины $u^i = \frac{z^i}{z^0}$ являются аффинными координатами точки

$$z = (z^0, \ldots, z^{s-t}) \in Q^{s-t}, \quad z^0 \neq 0;$$

коэффициенты $\alpha_1, \ldots, \delta_{s-t}$ алгебраически независимы между собой, так как получены из алгебраически независимых между собой коэффициентов $a_0, \ldots, l_{s-t}$ матрицы (I) путем рациональных операций. Далее, $\psi, \psi_1, \ldots, \psi_{k-s}$ — линейные неоднородные многочлены переменных u^i, коэффициенты которых вместе с коэффициентами $\alpha_1, \ldots, \delta_{s-t}$ алгебраически независимы.

Точку $(z, \zeta) = (z^0, \ldots, z^{s-t}; \zeta^0, \ldots, \zeta^t) \in D$ будем записывать в аффинных координатах:

$$(z, \zeta) = (u^1, \ldots, u^{s-t}; v^1, \ldots, v^t),$$

где

$$u^i = \frac{z^i}{z^0}, \quad v^i = \frac{\zeta^i}{\zeta^0}.$$

Получим:

$$\zeta^0\overline{\zeta^i} = \zeta^0\overline{\zeta^0}\overline{v^i} = \theta\overline{v^i}.$$

Матрице (II) можно придать теперь вид:

$$\left(\begin{array}{c|c|c} \alpha_1 u^1, \ldots, \alpha_{s-t} u^{s-t} & 0, \ 0, \ldots, 0 & \psi\theta\overline{v^1}, \ldots, \psi\theta\overline{v^t} \\ \hline \beta_1 u^1, \ldots, \beta_{s-t} u^{s-t} & \psi_1, 0, \ldots, 0 & 0, \ \ldots, \ 0 \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ \delta_1 u^1, \ldots, \delta_{s-t} u^{s-t} & 0, \ \ldots, \psi_{k-s} & 0, \ \ldots, \ 0 \end{array}\right) \qquad \text{(III)}$$

Пусть аффинные координаты особой точки

$$(z_0, \zeta_0) = (u_0^1, \ldots, u_0^{s-t}; 0, \ldots, 0)$$

удовлетворяют, например, условиям:

$$u_0^1 \neq 0, \ldots, u_0^r \neq 0, \ u_0^{r+1} = \ldots = u^{s-t} = 0, \quad 0 \leqslant r \leqslant s-t.$$

Так как точка (z_0, ζ_0) — особая, то в точке z_0 должны обращаться в нуль r многочленов из $\psi_1, \ldots, \psi_{k-s}$. Если бы в нуль обращалось меньшее число многочленов, то ранг матрицы (III) был бы равен $k-s+1$ и точка (z_0, ζ_0) была бы неособой; бо̀льшее же число многочленов одновременно в нуль не может обратиться в силу алгебраической независимости их коэффициентов между собой. Без нарушения общности можно предположить, что в точке z_0

$$\psi_1 = \ldots = \psi_r = 0.$$

Легко видеть, что в достаточно малой окрестности $D' \subset D$ точки (z_0, ζ_0) матрицу (III) можно продеформировать в матрицу (IV), не меняя в процессе деформации ее ранга:

$$\left(\begin{array}{c|c|c} 0, \ldots, 0; \quad u^{r+1}, \ldots, u^{s-t} & u^1 - \overset{1}{u_0}, \ldots, u^r - \overset{r}{u_0};\ 0, \quad \ldots, 0, & \bar{v}^1, \ldots, \bar{v}^t \\ \hline \beta_1 \overset{1}{u_0}, \ldots, \beta_r \overset{r}{u_0},\ 0, \quad \ldots, 0, & 0, \quad \ldots, 0; \quad 0, \quad \ldots, 0, & 0, \ldots, 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots \\ \gamma_1 \overset{1}{u_0}, \ldots, \gamma_r \overset{r}{u_0},\ 0, \quad \ldots, 0, & 0, \quad \ldots, 0; \quad 0, \quad \ldots, 0, & 0, \ldots, 0 \\ 0, \quad \ldots, 0; \quad 0, \quad \ldots, 0, & 0, \quad \ldots, 0; \quad \overset{0}{\psi}_{r+1}, \ldots, 0, & 0, \ldots, 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots \\ 0, \quad \ldots, 0; \quad 0, \quad \ldots, 0, & 0, \quad \ldots, 0; \quad 0, \quad \ldots, \overset{0}{\psi}_{k-s} & 0, \ldots, 0 \end{array}\right) \qquad \text{(IV)}$$

где $\overset{0}{\psi}_{r+1}, \ldots, \overset{0}{\psi}_{k-s}$ — значения форм ψ_i, $i \geqslant r+1$, в точке z_0. Очевидно, что искомый индекс равен индексу особенности $(k-s+1)$-реперного поля, заданного матрицей (IV).

Размерность окрестности D' точки (z_0, ζ_0) равна $2s$. Окружим особую точку $(z_0, \zeta_0) \in D'$ сферой S^{2s-1} размерности $2s-1$.

Матрица (IV) задает отображение f этой сферы в многообразие $V_{k,\, k-s+1}$ неособых $(k-s+1)$-реперов k-мерного комплексного векторного пространства E^k [см. ([1])]. Это отображение можно описать следующим образом. В E^k рассмотрим $k-s$ независимых фиксированных векторов $e_1, \ldots, e_{k-s}$, заданных $k-s$ строками матрицы (IV), начиная со второй. Через E^{k-s} обозначим $(k-s)$-мерное подпространство, натянутое на эти $k-s$ векторов, через E^s — дополнительное к E^{k-s} подпространство.

Отображение $f: S^{2s-1} \longrightarrow V_{k,\, k-s+1}$ переводит точку $(u^1, \ldots, u^{s-t}; v^1, \ldots, v^t) \in S^{2s-1}$ в $(k-s+1)$-репер, первые $k-s$ векторов которого совпадают с фиксированными векторами $e_1, \ldots, e_{k-s}$, а $(k-s+1)$-й вектор лежит в E^s и задается первой строкой матрицы (IV). Когда точка пробегает сферу S^{2s-1}, кончик $(k-s+1)$-го вектора пробегает $(2s-1)$-мерную сферу в E^s. Следовательно, f есть гомеоморфизм и, снабдив сферу $f(S^{2s-1})$ соответствующей ориентацией, его можно принять за базисный $(2s-1)$-мерный цикл многообразия $V_{k,\, k-s+1}$, [см. ([1])]. Очевидно, что степень отображения f естественно проориентированной сферы $S^{2s-1} \subset D'$ на ориентированную сферу $f(S^{2s-1})$ равна $(-1)^t$, так как в первой строке матрицы (IV) операция перехода к комплексно сопряженным величинам применяется к t координатам $v^1, \ldots, v^t$.

Этим доказано, что искомый индекс равен $(-1)^t$ и, следовательно, доказана формула (5.2).

§ 6. Циклы Черна алгебраического многообразия

Из формул (4.1) и (5.2) следует

ТЕОРЕМА. *Пусть* M^k — *комплексное алгебраическое многообразие комплексной размерности* k [см. введение, n^0 2], *лежащее в комплексном проективном пространстве* P^n. *Его* $2(k-s)$-*мерный цикл Черна* Γ^{k-s} *дается формулой*

$$\Gamma^{k-s}=\sum_{t=0}^{s}(-1)^t\binom{k-t+1}{k-s+1}\Pi_t(M^{k-s+t}),\qquad s=0,\ldots,k,$$

где алгебраические псевдомногообразия $\Pi_t(M^{k-s+t})\subset M^k$ *определены в* § 4, n^0 3.

При $s=k$ получаем нульмерный цикл Черна, индекс которого равен эйлеровой характеристике $\chi(M^k)$ многообразия M^k [см. ([1])]. Следовательно,

$$\chi(M^k)=\operatorname{ind}\Gamma^0=\sum_{t=0}^{k}(-1)^t(k-t+1)\operatorname{ind}\Pi_t(M^t).$$

Индекс $\operatorname{ind}\Pi_t(M^t)$ можно назвать, по аналогии с классом плоской алгебраической кривой, классом t-мерного сечения

$$M^t=M^k\cap P^{n-k+t}$$

многообразия M^k.

В случае плоской алгебраической кривой $M^1\subset P^2$ для эйлеровой характеристики $\chi(M^1)$ получается известная формула

$$\chi(M^1)=2p-q,$$

где p — степень кривой (класс нульмерного сечения), q — ее класс.

Если задана алгебраическая поверхность $M^2\subset P^3$, то получаем:

$$\chi(M^2)=3p-2q+r,$$

где p — степень поверхности (класс нульмерного сечения), q — класс одномерного сечения поверхности, r — класс самой поверхности.

Легко подсчитать, что для неособой поверхности степени p класс одномерного сечения $q=p(p-1)$, а класс поверхности $r=p(p-1)^2$. Следовательно,

$$\chi(M^2)=3p-2p(p-1)+p(p-1)^2=6p-4p^2+p^3.$$

Аналогичные формулы можно вывести для неособых гиперповерхностей произвольных размерностей.

Поступило
1.XI.1955

ЛИТЕРАТУРА

[1] Chern S., Characteristic classes of Hermitian manifolds, Ann. of Math., 47, 1 (1946), 85—121.

[2] Гамкрелидзе Р. В., Вычисление циклов Черна алгебраических многообразий, Доклады Ак. наук СССР, 90, № 5 (1953), 719—722.

[3] Понтрягин Л. С., Один метод вычисления гомологий, Матем. сборн., 11 (53) (1942), 3—14.

[4] Ehresmann C., Sur la topologie de certains espaces homogènes, Ann. of Math., 35, 2 (1934), 396—443.