

# Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

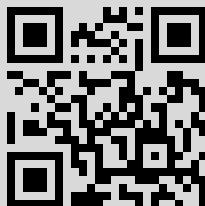
П. С. Александров, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко, Лев Семенович Понтрягин (к шестидесятилетию со дня рождения), *УМН*, 1968, том 23, выпуск 6(144), 187–196

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением  
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 95.129.140.250

18 ноября 2015 г., 14:24:00



## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ В СССР

### ЛЕВ СЕМЕНОВИЧ ПОНТЯГИН

(к шестидесятилетию со дня рождения)

3 сентября 1968 г. исполнилось 60 лет Льву Семеновичу Понтрягину. Он принадлежит к числу тех немногих математиков мира, которые при жизни стали заслуженно признаваться классиками мировой науки.

Труды академика Л. С. Понтрягина относятся не к одной области математики, а к целому ряду ее разделов. Это — ученый широкого профиля и огромного математического кругозора. Фундаментальные научные результаты, принадлежащие Льву Семеновичу, можно встретить в алгебре и геометрии, топологии и теории дифференциальных уравнений, математической теории управления и теории игр. И каждый раз с его именем связаны наиболее важные, глубокие, основополагающие результаты.

Многие тысячи работ, выходящих во всех уголках мира (и притом работ не только математического, но и прикладного, инженерного плана) существенно используют результаты и методы, принадлежащие Л. С. Понтрягину. Уследить за всеми работами, в которых имеются ссылки на исследования Льва Семеновича, сейчас уже стало невозможно. Особенно большой поток работ вызвали исследования в области математической теории оптимального управления, выполненные Львом Семеновичем и его учениками. Имя Понтрягина в этой сфере стало уже символическим. Весьма показательно, что Международная астронавтическая Академия избрала Л. С. Понтрягина своим почетным членом (вместе с Ю. Гагариным и В. Терешковой).

Л. С. Понтрягин, являясь создателем двух больших научных школ в математике (школы алгебраической топологии и школы математической теории оптимального управления), воспитал целое поколение советских ученых. Являясь советским и русским патриотом, он всегда с большим достоинством и авторитетом представляет нашу науку за рубежом на всех крупных международных математических конгрессах.

Родина высоко оценила научный подвиг ученого: он награжден двумя орденами Ленина, орденом Трудового Красного Знамени, орденом «Знак Почета», его труды отмечены Ленинской и Государственной премиями, а также премией имени Лобачевского.

\* \* \*

Л. С. Понтрягин родился в малообеспеченной семье; его отец, Семен Акимович Понтрягин, был мелким служащим из г. Трубчевска Орловской губернии; он умер в 1927. Мать Льва Семеновича, Татьяна Андреевна Понтрягина, происходит из крестьян Ярославской губернии (род. в 1879 г.), а в Москве работала портнихой. Материальное положение семьи не давало возможности отдать мальчика в гимназию или даже в (значительно более дешевое) реальное училище — первоначальное образование Л. С. Понтрягин получил в городском училище. В возрасте 14 лет с ним произошло несчастье: в результате взрыва он потерял зрение. С этого момента все заботы об устройстве жизни своего сына берет на себя Татьяна Андреевна. Несмотря на большие трудности, которые ей пришлось при этом преодолеть, она решила взятую на себя задачу, чем по праву заслужила благодарность советской и мировой науки. В течение многих лет она фактически выполняла обязанности личного секретаря Льва Семеновича, читала ему вслух научную литературу, вставляла формулы в его научные рукописи, правила корректуру его работ и т. п. Для этого ей пришлось, в частности, научиться читать на иностранных языках. Помимо этого, Т. А. Понтрягина помогала Льву Семеновичу и во всех остальных отношениях и окружила его самой большой заботой и вниманием.

Небольшой штрих наглядно покажет, какие трудности приходилось первоначально преодолевать Татьяне Андреевне и ее талантливому сыну. Мы, математики, постоянно используем знаки  $\cap$ ,  $\cup$ ,  $\supset$ ,  $\subset$ . Несмотря на внешнюю схожесть, они для нас совершенно различны по смыслу и имеют разные названия. Но для Татьяны Андреевны термины «включение» или «пересечение» ничего не говорили. Пришлось для вставки формул и правки корректур выработать специальный язык: знак пересечения  $\cap$  назывался «хвосты вниз», знак  $\subset$  назывался «хвосты направо» и т. д.

В 1925 г. Л. С. Понтрягин становится студентом Московского университета. Его выдающиеся математические способности и большая широта научных интересов сразу обращают на себя внимание; он учится блестяще. Поразительное впечатление производило, что студент Л. С. Понтрягин удерживал в памяти сложнейшие выкладки (например, по тензорному анализу), ничего при этом не записывая.

Студентам физмата того времени (как и сейчас на мехмате) предлагался на выбор ряд спецкурсов и семинаров, на которых рассматривалось огромное разнообразие математических вопросов. При выборе вопросов для самостоятельной научной работы огромную роль играла не только сама тематика, но и личность профессора. Лев Семенович вспоминает, что на лекциях А. Я. Хинчина по аналитической теории чисел ему было холодно и неудобно. И наоборот, на лекциях и семинарах Павла Сергеевича Александрова ему дышалось легко и свободно, он чувствовал себя на них «как дома». Вообще, личное обаяние П. С. Александрова, его внимание и помощь сыграли необычайно большую роль в формировании научных интересов Л. С. Понтрягина — не меньшую, чем личные способности и склонности молодого ученого.

В результате общения с Павлом Сергеевичем Л. С. Понтрягин начал заниматься топологией. Интерес и привязанность к этой науке он сохранил в течение четверти столетия.

Первую свою самостоятельную научную работу — усиление, а затем и обобщение закона двойственности Александера Л. С. Понтрягин делает в 1927 г., в возрасте 19 лет. Для доказательства он использовал введенный ранее Брауэром коэффициент зацепления. Это позволило придать теореме двойственности более алгебраический и более эффективный характер: на место негативного свойства цикла (негомологичность нулю) было поставлено позитивное свойство — существование другого цикла, зацепленного с первоначальным. Использование коэффициентов зацепления для доказательства теорем двойственности оказалось необычайно удачной находкой: с этого момента начинается первый большой цикл топологических работ Л. С. Понтрягина, завершающийся в 1932 г. доказательством классического результата — знаменитого закона двойственности, связывающего группы гомологий любого ограниченного замкнутого множества, лежащего в евклидовом пространстве, с группами гомологий его дополнения. Большим открытием было уже нахождение самого характера этой связи — она оказалась не изоморфизмом, а именно «двойственностью» в смысле Понтрягина, заключающейся в том, что каждая из двух рассматриваемых групп оказалась группой характеров другой. При этом на замкнутом множестве надо было брать группы Бетти по бикомпактной, а на дополнительном открытом множестве — по двойственной дискретной группе коэффициентов. Таким образом, в частности, впервые было доказано, что при гомеоморфных замкнутых множествах  $\Phi$  и  $\Phi'$  дополнительные открытые множества  $\Gamma$  и  $\Gamma'$  имеют для любой дискретной, значит, в частности, для простейшей, целочисленной области коэффициентов изоморфные группы гомологий.

С закона двойственности Понтрягина пошла большая новая область топологического исследования — теория топологической двойственности, которой посвящено огромное число работ крупнейших топологов как у нас, так и за границей. Локальная форма этого метода составляет важную сторону гомологической теории размерности, развитой П. С. Александровым.

\* \* \*

Общематематическое значение закона двойственности Понтрягина не исчерпывается влиянием, оказанным этой теоремой на дальнейшее развитие топологии: не менее важным является то обстоятельство, что теорема Понтрягина послужила поводом для построения Львом Семеновичем общей теории характеров коммутативных топологических групп. Эта теория является не только исторически первым действительно выдающимся достижением в новом математическом направлении — топологической алгебре — но и одним из фундаментальных продвижений всей математики текущего столетия, аналогичным, например, созданию в свое время теории Галуа.

Топологическая алгебра осуществляет синтез абстрактной алгебры и топологии, — синтез, возникающий тогда, когда в одном и том же множестве

определены как алгебраические, так и топологические операции, причем алгебраические операции непрерывны в имеющейся топологии. А. Н. Колмогоров первый предугадал, что такого рода тополого-алгебраические объекты, удовлетворяющие лишь весьма общим аксиоматическим требованиям, оказываются неожиданно конкретными. Реализуя эту идею, Л. С. Понтрягин доказывает замечательную теорему, в силу которой единственными локально компактными связными телами являются поле действительных чисел, поле комплексных чисел и тело кватернионов. Эта теорема, окончательный характер которой очевиден, дала возможность А. Н. Колмогорову в несколько слов построить тополого-алгебраическую аксиоматику проективной геометрии.

Наконец, к области топологической алгебры относятся результаты Л. С. Понтрягина, выясняющие структуру компактных и локально компактных топологических групп, причем в компактном, а также в коммутативном случае это выяснение является окончательным.

В итоге своих занятий топологической алгеброй Л. С. Понтрягин написал монографию «Непрерывные группы». Первое издание этой замечательной книги вышло в 1938 г. и было сейчас же переведено на английский язык. Второе издание, вышедшее в 1954 г. и представляющее собой значительное расширение и усовершенствование первого, переведено на немецкий и японский языки. Книга Льва Семеновича принадлежит к категории немногочисленных математических книг, которые в полной мере заслуживают наименование «классических»: это книги, сохраняющие свое значение в течение десятилетий; книги, формирующие научное мировоззрение целых поколений математиков. Трудно найти произведение математической литературы, в большей степени отвечающее этим требованиям, чем «Непрерывные группы» Л. С. Понтрягина.

\* \* \*

Отдельное место в творчестве Л. С. Понтрягина занимает его работа, посвященная вычислению групп гомологий классических компактных групп Ли. Она как бы соединяет топологические и тополого-алгебраические исследования Л. С. Понтрягина. Определение групп гомологий, данное Пуанкаре, использует симплициальное разбиение рассматриваемого геометрического объекта. Зная схему этого разбиения, можно элементарными операциями вычислить группы гомологий объекта. Однако если геометрический объект задан не своей симплициальной схемой, а как либо иначе, например, системой уравнений в евклидовом пространстве, задающей «гладкое многообразие», то метод симплициального разбиения для вычисления групп гомологий становится совершенно нереальным. Одну задачу такого рода поставил в 1934 г., при своем визите в Москву, известный французский математик Э. Картан. Он прочитал лекцию в профессорской комнате мехмата (в старом здании МГУ), причем читал он ее на французском языке, а Л. С. Понтрягину, не владевшему этим языком, лекцию шепотом переводила сидевшая рядом Нина Карловна Бари. В своей лекции Картан и поставил задачу вычисления групп гомологий классических компактных групп Ли, обрисовав вместе

с тем возможным путь решения проблемы. Эта задача была полностью решена Львом Семеновичем в 1935 г., причем для решения он применил метод, совершенно отличный от предложенного Картаном; Понтрягин воспользовался идеями Морса — рассмотрел поверхности уровня некоторых функций и ортогональные к ним траектории.

\* \* \*

Параллельно со своими исследованиями по теории характеров и топологической двойственности Л. С. Понтрягин занимается теорией размерности. Здесь он одновременно и независимо от немецкого математика Небелинга доказывает известную теорему о том, что всякий  $n$ -мерный компакт гомеоморфен множеству, лежащему в  $(2n + 1)$ -мерном евклидовом пространстве. К опубликованию этого результата Лев Семенович привлек свою тогдашнюю ученицу Г. В. Толстову, вследствие чего теорема была напечатана в совместной работе Л. С. Понтрягина и Г. В. Толстой. Саму же теорему естественно называть теоремой Небелинга — Понтрягина, а отнюдь не Менгера — Небелинга, ибо Менгер так и не преодолел те, названные им «техническими», трудности, которые весьма серьезным образом стали на его пути при попытках доказать сформулированную теорему.

Кстати, именно понтрягинский метод доказательства является наиболее эффективным и допускающим дальнейшие применения; он был развит и использован в работах В. Г. Болтянского о  $k$ -регулярных вложениях.

В это же время Л. С. Понтрягин строит свои замечательные примеры, как мы теперь говорим, «размерно неполноценных» континуумов («понтрягинские поверхности»), опровергающих гипотезу о том, что при топологическом перемножении компактов их размерности складываются. Эти примеры послужили подтверждением целесообразности гомологического подхода к размерности и дали повод к дальнейшим интересным исследованиям в этой области.

\* \* \*

Важнейшее место в математическом творчестве Л. С. Понтрягина занимает период с 1935 г. и до конца сороковых годов. В это время он создает свои основные труды по гомотопической теории и теории косых произведений. Ниже мы отметим те конкретные результаты, которые были получены в этом направлении Л. С. Понтрягиным. Но еще большее значение, чем эти основополагающие результаты, имеют созданные Л. С. Понтрягиным методы, не потерявшие своего значения и до настоящего времени, несмотря на бурный расцвет алгебраической топологии в пятидесятые годы (в значительной степени подготовленный работами Л. С. Понтрягина). Сюда относятся метод оснащенных многообразий, открытие классифицирующих пространств и характеристических классов (называемых теперь характеристическими классами Понтрягина), а также открытие теории когомологических операций. Именно в работах Льва Семеновича была высказана идея о применении когомологических операций к решению задач гомотопической классификации,

были построены первые такие операции. Именно работами Л. С. Понтрягина было вызвано дальнейшее триумфальное развитие теории когомологических операций и появление таких достижений топологии, как спектральная теория гомологий расслоенных пространств, созданная французскими математиками, теория натуральных систем М. М. Постникова, а также новейшие достижения топологии на основе  $K$ -теории. Этот взлет современной алгебраической топологии был подготовлен в период 1935—1950 гг., составившими целую эпоху работами Л. С. Понтрягина. В этот период советская школа алгебраической топологии, бесспорно, была ведущей в мире.

Интерес к гомотопическим проблемам возник у Льва Семеновича в результате решения отмечавшейся выше задачи о гомологиях компактных групп Ли. Там впервые им были применены гомотопические методы. Вначале Лев Семенович наивно полагал, что при решении гомотопических задач все сводится к гомологиям. Как раз в это время появился результат Хопфа о том, что число классов отображений трехмерной сферы в двумерную бесконечно (хотя гомологически все эти отображения тривиальны). Этот результат Хопфа явился большой научной сенсацией; он глубоко поразил Льва Семеновича, так как совершенно противоречил его первоначальным представлениям. Лев Семенович понял, что гомотопическая теория не укладывается в рамки теории гомологий, а должна существовать самостоятельно. И он развернул свою деятельность в области гомотопической теории.

В 1936 г. Л. С. Понтрягин получает свой первый результат в этой области: находит гомотопическую классификацию отображений  $(n + 1)$ -мерной сферы в  $n$ -мерную (при  $n \geq 3$ ). Результат был удивительный: существовало всего два класса! Далее Л. С. Понтрягин занимается классификацией отображений  $(n + k)$ -мерной сферы в  $n$ -мерную. Сразу обнаружилось, что число классов при достаточно большом  $n$  зависит только от  $k$ . Лев Семенович решает (с ошибкой в вычислениях, которая была им впоследствии исправлена) эту задачу при  $n = 2$ . Но дальше (для больших  $k$ ) дело не пошло — вопрос сводился к трудным и нерешенным задачам теории гладких многообразий. Именно на этом пути Л. С. Понтрягиным был создан метод оснащенных многообразий, который впоследствии привел ученика Л. С. Понтрягина, В. А. Рохлина, к решению задачи для  $k = 3$  и к созданию теории внутренних гомологий. Сейчас эти результаты (вычисление групп  $\pi_{n+1}(S^n)$ ,  $\pi_{n+2}(S^n)$ ,  $\pi_{n+3}(S^n)$  при больших  $n$ ) представляют лишь исторический интерес: метод спектральных последовательностей и другие мощные методы современной топологии далеко отодвинули те границы, для которых задача решена, и сделали трудности чисто вычислительными. Но метод оснащенных многообразий не потерял своего значения и в современных условиях; уже после открытий французской топологической школы этот метод с успехом был применен Р. Томом для решения важных задач теории гладких многообразий.

Сам Лев Семенович, развивая метод оснащенных многообразий, пришел к открытию характеристических циклов, названных теперь его именем. Характеристические классы Понтрягина связаны с многими задачами топологии и алгебраической геометрии. Со времени выхода работ Л. С. Понтрягина появились многие сотни работ, изучающих и применяющих характери-

стические классы Понтрягина. Эта серия работ увенчалась недавно велико-  
лепным достижением: С. П. Новикову удалось доказать топологическую  
инвариантность классов Понтрягина, решив тем самым важную поставлен-  
ную Л. С. Понтрягиным проблему.

Далее Л. С. Понтрягин решает ряд задач о гомотопической классифика-  
ции отображений полиэдров в полиэдры, отличные от сфер. Этому вопросу  
посвящено несколько работ Льва Семеновича. В них он ввел различные  
когомологические операции (в частности, «понтрягинские квадраты», о кото-  
рых впоследствии престарелый Хопф говорил, что это находится на грани  
его понимания). Впоследствии они послужили прообразом для далеко иду-  
щего развития теории когомологических операций в работах американского  
тополога Стинрода, М. М. Постникова — ученика Л. С. Понтрягина и других  
топологов. Но это был уже период конца сороковых и начала пятидесятых  
годов — период, когда сам Лев Семенович перестал активно заниматься  
топологией.

\* \* \*

Еще в тридцатых годах Л. С. Понтрягин установил контакт с некоторы-  
ми физиками (главным образом с Александром Александровичем Андроно-  
вым, с которым у Льва Семеновича установились дружеские отношения).  
На протяжении двадцати лет (вплоть до смерти А. А. Андропова в 1952 г.)  
Лев Семенович несколько раз в году встречается с ним, обсуждая важные  
вопросы теории колебаний и теории автоматического регулирования, кото-  
рыми А. А. Андронов занимался. В результате этих бесед Лев Семенович  
выполнил некоторые исследования в этом новом для него направлении:  
в 1932 г. была сделана совместно с А. А. Андроновым работа о грубых дина-  
мических системах, а в 1942 г. работа о нулях некоторых элементарных  
трансцендентных функций. В 1952 г. Л. С. Понтрягин организовал семинар  
по математическим вопросам теории колебаний и регулирования, к участию  
в котором сначала привлек некоторых своих старших учеников и учеников  
П. С. Александрова (В. Г. Болтянского, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко),  
а затем и более молодых студентов и аспирантов. Одновременно он читает  
в МГУ курс обыкновенных дифференциальных уравнений, в котором больше,  
чем в прежних курсах обыкновенных уравнений, отведено место приложе-  
ниям. В это время особенно ярко проявляется другая сторона таланта  
Л. С. Понтрягина — черпать постановки математических задач из нужд  
естествознания и техники. Возглавляя семинар, Л. С. Понтрягин в коллек-  
тиве своих учеников ведет интенсивную научную работу, получив за сравни-  
тельно короткое время результаты, являющиеся в рассматриваемом круге  
вопросов открытиями первостепенного значения. Одним из этих вопросов  
является исследование уравнений с малым параметром при старших производ-  
ных. Результаты Льва Семеновича и его учеников в этой области носят  
законченный и конкретный характер, доведены до расчетных формул и про-  
ливают новый свет на некоторые физические явления, выясняя, например,  
с совершенной математической полнотой роль паразитных параметров в раз-  
личных электрических и радиотехнических системах.



Второе направление работ Л. С. Понтрягина и его семинара — это теория оптимальных процессов управления, по существу, относящаяся к вариационному исчислению и имеющая огромные перспективы практического применения. Эти результаты сразу получили известность среди широких кругов техников и математиков, занимающихся вопросами математической теории управления.

Это направление исследования внешне появилось как бы случайно, но в действительности благодаря усердным поискам новых прикладных направлений работы. На важность и необходимость изучения прикладных задач неоднократно указывали Льву Семеновичу и его сотрудникам общественные организации Математического института им. В. А. Стеклова. Л. С. Понтрягин и его сотрудники провели много бесед с инженерными работниками. В результате таких бесед, посвященных в основном практическим прикладным вопросам регулирования, у Льва Семеновича возникло желание дать точную математическую теорию проблем управления. Лев Семенович привлек к этой работе [В. Г. Болтянского, а затем Р. В. Гамкрелидзе и Е. Ф. Мищенко. Большим достижением явилось то, что Л. С. Понтрягину удалось математически сформулировать понятие управляемой системы и сформулировать задачу оптимального управления для такой системы. До этого понятие управляемой системы точно определено не было, хотя аналогичными задачами в несколько менее общей и точной постановке занимались в нашей стране и раньше. Затем Л. С. Понтрягин сформулировал необходимое условие оптимальности под названием принципа максимума. В этой форме условие оптимальности стало широко известно: сейчас принцип максимума Понтрягина известен во всем мире. Доказательство этой теоремы было первоначально найдено Р. В. Гамкрелидзе в линейном случае, а затем, в общем случае, В. Г. Болтянским.

Приведем формулировку этого важнейшего результата. Процесс называется управляемым, если он описывается системой дифференциальных уравнений вида  $\dot{x}^i = f^i(x^1, \dots, x^n, u)$  ( $i = 1, \dots, n$ ), где  $u$  — управляющий параметр, который может изменяться в пределах некоторой области  $U$ , например, в пределах произвольного замкнутого ограниченного множества  $r$ -мерного векторного пространства  $(u^1, \dots, u^r)$ . Ставится следующая задача: выбрать управление  $u(t)$  в классе кусочно-непрерывных функций таким образом, чтобы точка  $x$  перешла из заданного положения  $x_0$  в другое заданное положение  $x_1$  за минимальное время (соответствующие траектория  $x(t)$  и управление  $u(t)$  называются оптимальными). Положим

$$H(x, \psi, u) = \psi_\alpha f^\alpha(x, u).$$

Напишем, далее, соотношения

$$\dot{x}^i = \frac{\partial H}{\partial \psi_i}, \quad \dot{\psi}_i = -\frac{\partial H}{\partial x^i} \quad (i = 1, \dots, n). \quad (1)$$

Тогда (принцип максимума Понтрягина) для оптимальности траектории  $x(t)$  и управления  $u(t)$  ( $t_0 \leq t \leq t_1$ ) необходимо существование такого переменного вектора  $\psi(t)$ , что (помимо справедливости соотношений (1))

при каждом  $t$  ( $t_0 \leq t \leq t_1$ ) выполняется условие

$$H(x(t), \psi(t), u(t)) = \max_{u \in U} H(x(t), \psi(t), u) \geq 0.$$

Принцип максимума — это ядро созданной в школе Л. С. Понтрягина математической теории оптимальных процессов. Учениками Льва Семеновича принцип максимума был существенно обобщен впоследствии, к нему добавлены теоремы существования и единственности оптимального управления, достаточные условия оптимальности, теория скользящих режимов, исследование случаев нелинейного синтеза и другие результаты. Отметим также выполненную Л. С. Понтрягиным совместно с Е. Ф. Мищенко работу об оптимальном преследовании стохастически движущегося объекта. Все эти результаты вошли в монографию «Математическая теория оптимальных процессов», написанную Л. С. Понтрягиным совместно с его учениками и удостоенную Ленинской премии в 1962 г. Математическая теория оптимальных процессов, развитая коллективом, возглавляемым Л. С. Понтрягиным, — большое достижение советской науки. Во всем мире признается руководящая роль советской науки в этой области — и в этом огромная заслуга Льва Семеновича перед Родиной.

Последние несколько лет Л. С. Понтрягин и руководимый им семинар занимаются главным образом теорией дифференциальных игр. Теория дифференциальных игр существенно обобщает постановку задачи, имеющуюся в теории оптимального управления, которая получается, если в игре участвует один партнер, а не два. В этой новой области за последние три года Л. С. Понтрягин получил глубокие результаты. И хотя сейчас теория дифференциальных игр только еще начинает интенсивно развиваться, уже ясно, что достаточные для завершения игры условия Л. С. Понтрягина войдут в число основных теорем этой теории.

#### СПИСОК ПЕЧАТНЫХ РАБОТ Л. С. ПОНТЯГИНА <sup>1)</sup>

1958

72. Доказательство некоторых асимптотических формул для решений дифференциальных уравнений с малым параметром, ДАН **120**, № 5, 967—969 (совм. с Е. Ф. Мищенко).
73. Системы обыкновенных дифференциальных уравнений с малыми параметрами при высших производных, Труды III Всесоюзн. матем. съезда, т. 3, 570—577.

1959

74. Вывод некоторых асимптотических оценок для решений дифференциальных уравнений с малым параметром при производных, Изв. АН, серия матем. **23** : 5, 643—660 (совм. с Е. Ф. Мищенко).
75. Одна статистическая задача оптимального управления, ДАН **128**, № 5, 890—892 (совм. с Е. Ф. Мищенко).
76. Оптимальные процессы регулирования, УМН **14**, вып. 1, 3—20.

1960

77. Оптимальные процессы регулирования, Proc. Intern. Congress Math., 1958, Cambridge, 182—202.

<sup>1)</sup> Начало списка опубликовано в УМН **14**, вып. 3 (1959).

78. Периодическое решение одной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром при производных, ДАН 132, № 3, 537—540 (совм. с Л. В. Родыгиним).
79. Приближенное решение одной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром при производных, ДАН 131, № 2, 255—258 (совм. с Л. В. Родыгиним).
80. Теория оптимальных процессов. I. Принцип максимума, Изв. АН, серия матем. 24 : 1, 3—42 (совм. с В. Г. Болтянским и Р. В. Гамкрелидзе).
81. Differential equations with a small parameter attached to the higher derivatives and some problems in the theory of oscillation, IRE Trans. on Circuit Theory, CT-7, 527—535 (совм. с Е. Ф. Мищенко).

## 1961

82. Математическая теория оптимальных процессов, М. (совм. с В. Г. Болтянским, Р. В. Гамкрелидзе и Е. Ф. Мищенко).
83. Об одной статистической задаче оптимального управления, Изв. АН, серия матем. 25 : 4, 477—498 (совм. с Е. Ф. Мищенко).
84. Принцип максимума в теории оптимальных процессов управления, Труды I Междунар. конгресса ИФАК, Теория дискретных оптимальных и самонастраивающихся систем, М., 457—470 (совм. с В. Г. Болтянским, Р. В. Гамкрелидзе и Е. Ф. Мищенко).

## 1962

85. Об одной вероятностной задаче оптимального управления, ДАН 145, № 5, 993—995 (совм. с А. Н. Колмогоровым и Е. Ф. Мищенко).
86. A statistical problem in the theory of optimal control. Abstracts of short Communications, Intern. Congress Math., Stockholm, 3—15.

## 1963

87. Математическая теория оптимальных процессов, Труды IV Всесоюзн. матем. съезда, т. I, 214—218 (совм. с В. Г. Болтянским, Р. В. Гамкрелидзе и Е. Ф. Мищенко).
88. Relaxation oscillations and differential equations containing a small parameter with the senior derivative, Calcutta Math. Soc. Golden Jubilee Commemoration Volume 1958/1959, 1, Calcutta, 141—150 (совм. с Е. Ф. Мищенко).

## 1964

89. О некоторых дифференциальных играх, ДАН 156, № 4, 738—741.

## 1965

90. Обыкновенные дифференциальные уравнения, изд. 2-е, перераб., М., «Наука».

## 1966

91. К теории дифференциальных игр, УМН 21, вып. 4, 219—274.
92. Поэтические будни математики (Беседа с акад. Л. С. Понтрягиным. Записал В. Мякушев), Научно-техн. о-во СССР, 1, 48—51.

## 1967

93. Линейные дифференциальные игры, ДАН 174, № 1, 27—29 (совм. с Е. Ф. Мищенко).
94. О линейных дифференциальных играх. I, ДАН 174, № 6, 1278—1280.
95. О линейных дифференциальных играх. II, ДАН 175, № 4, 764—766.
96. Linear differential games. Mathematical theory of control, Pros. Conf. Univ. Southern California, Los Angeles, 330—334.

*П. С. Александров, В. Г. Болтянский,  
Р. В. Гамкрелидзе и Е. Ф. Мищенко*