Р. В. Гамкрелидзе, Семинар Л. С. Понтрягина по математическим проблемам теории колебаний и автоматического регулирования, *УМН*, 1957, том 12, выпуск 3(75), 267–272

1957 г. май—июнь т. XII, вып. 3 (75)
УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

СЕМИНАР Л. С. ПОНТРЯГИНА ПО МАТЕМАТИЧЕСКИМ ПРОБЛЕМАМ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ И АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

Р. В. Гамкрелидзе

Семинар по математическим проблемам теории колебаний и автоматического регулирования, работающий в отделе топологии Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР и руководимый Л. С. Понтрягиным, начал свою работу осенью 1952 г. Большую роль в создании семинара сыграли настойчивые пожелания отделу топологии со стороны дирекции и партийной организации института начать научную работу в этом направлении.

Все участники семинара, в том числе и его руководитель Л. С. Понтрягин, до создания семинара никогда не занимались систематически обыкновенными дифференциальными уравнениями, которые в основном и применяются в теории колебаний и автоматического регулирования. Поэтому в начале своей работы семинар носил чисто учебный характер; например, в первых докладах изучались способы составления дифференциальных уравнений для электромеханических схем, теорема Рауса—Гурвица, задача Вышнеградского в теории прямого регулирования и т. д. Однако с самого же начала работы семинар поставил перед собой цель изучать не только накопленный в этой области математический материал или ждущие своего разрешения уже сформулированные математические проблемы. Мы считали не менее важным изучать чисто физическую и техническую сторону вопроса, так как надеялись, что это поможет нам, во-первых, лучше разобраться в уже поставленных задачах и, во-вторых, приведет нас к постановке совершенно новых математических задач, которые, кроме технического интереса, будут иметь чисто математический интерес.

Как нам кажется, наши ожидания нас не обманули. Изучая чисто технические проблемы, мы пришли к постановке двух математических задач, решением которых занялись некоторые участники нашего семинара. Правда, оказалось, что первой из задач, о которой я сейчас буду говорить, уже раньше занимались многие математики; наиболее сильные результаты в этом направлении, полученные до работ, выполненных в нашем семинаре Е. Ф. Мищенко, Л. С. Понтрягиным и Л. В. Родыгиным, принадлежат А. А. Дородницыну, Н. А. Тихонову и ученикам последнего.

Перехожу к формулировке этой задачи и к изложению полученных здесь результатов.

Теорию колебаний мы начали изучать по книге А. А. Андронова и С. Э. Хайкина «Теория колебаний». Среди многочисленных колебательных схем, рассмотренных в этой книге, наше особое внимание привлекли электрические схемы, в которых возникают разрывные колебания (схема с неоновой лампой, мультивибратор, схема Фрюхгауфа и т. д.). Если при составлении уравнений для этих схем пренебречь малыми паразитными параметрами, то получаются системы дифференциальных уравнений, не разрешимые однозначно относительно старших производных, т. е. системы, не приводящиеся к нормальному виду. Чтобы установить наличие устойчивых периодических режимов в схеме и рассчитать их, этой системы уравнений недостаточно и приходится вводить дополнительные гипотезы нематематического характера; таковы, например, известные физические условия «скачка», связанные с энергетическими соображениями.

Поэтому для адекватного математического описания явлений, происходящих в таких схемах, пришлось учесть некоторые паразитные параметры. Если составить систему дифференциальных уравнений для схемы, надлежащим образом учитывая паразитные параметры, то порядок системы повышается и мы приходим к нормальной системе дифференциальных уравнений, однако при этом оказывается, что высшие производные входят в некоторые уравнения системы с одним и тем же малым коэффициентом ε. В общем случае получается нормальная система порядка $k+l$:

$$\begin{aligned} \varepsilon\dot{x}^i &= f^i(x^1, \ldots, x^k;\ y^1, \ldots, y^l) \qquad (i=1, \ldots, k), \\ \dot{y}^j &= g^j(x^1, \ldots, x^k;\ y^1, \ldots, y^l) \qquad (j=1, \ldots, l). \end{aligned}$$

Перепишем систему в виде двух векторных уравнений

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon\dot{x} &= f(x, y), \\ \dot{y} &= g(x, y), \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

где x — k-мерный вектор, y — l-мерный вектор. Оказалось, что если в схеме возникают устойчивые разрывные колебания, то при правильном учете паразитных параметров в соответствующей системе (1) при достаточно малом ε существует предельный цикл с быстро проходимыми участками; этот цикл зависит от ε и при $\varepsilon \to 0$ стремится к разрывному колебанию, а время, затрачиваемое на прохождение быстрых участков, стремится к нулю. Можно поставить задачу о приближенном вычислении решений системы (1), в частности задачу об асимптотическом вычислении периодического решения и периода в зависимости от ε.

Руководящей идеей при изучении системы (1) послужили следующие соображения.

Если $f(x, y) \neq 0$, то при $\varepsilon \to 0$ проекция на пространство x фазовой скорости в точке (x, y) стремится к бесконечности. Поэтому переменные x можно назвать быстро меняющимися, переменные y — медленно меняющимися. Сперва изучается поведение быстро меняющихся переменных при постоянном значении медленно меняющихся переменных, т. е. изучаются решения уравнения

$$\varepsilon\dot{x} = f(x, y), \tag{2}$$

в котором y — постоянный параметр. Допустим, что когда y меняется в некоторой области G пространства y, решения уравнения (2) приближаются при $t \to +\infty$ к устойчивому положению равновесия, непрерывно зависящему от y. Обозначим его через $x = \varphi(y)$, $y \in G$; очевидно, $f(\varphi(y), y) \equiv 0$. Интуитивно ясно, что решение системы (1) с начальными условиями (x_0, y_0) при малом ε должно быстро приблизиться к точке $(\varphi(y_0), y_0)$, лежащей на поверхности $f(x, y) = 0$, и после этого, оставаясь все время вблизи этой поверхности, должно вести себя примерно, как решение «вырожденной» системы

$$\left.\begin{aligned} f(x, y) &= 0, \\ \dot{y} &= g(x, y) \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

с начальными условиями $(\varphi(y_0), y_0)$. Оказывается, что решение системы (1) отличается от соответствующего решения вырожденной системы (3) на величину порядка ε, пока y не выходит из области G. Этот участок решения системы (1) является медленным участком. На медленном участке легко найти асимптотическое разложение решения системы (1) в ряд по целым степеням ε. Если вырожденная система (3) имеет устойчивое периодическое решение, лежащее на поверхности $f(x, y) = 0$, проекция которого на пространство y целиком содержится в области G, то вблизи него с точностью до ε проходит периодическое решение системы (1).

При выходе точки y из области G устойчивое положение равновесия $x = \varphi(y)$ уравнения (2) может исчезнуть в результате слияния устойчивого положения равновесия $\varphi(y)$ с неустойчивым. В момент слияния проекция изображающей точки системы (1) на пространство x быстро переходит в окрестность нового устойчивого положения равновесия уравнения (2) (предполагается, что оно существует). Наступает переходный процесс или «срыв» изображающей точки системы (1) с одного листа поверхности $f(x, y) = 0$ на другой лист. В вырожденной системе (3) переходному участку соответствует мгновенный перескок при $y = \text{const}$ с одного листа поверхности $f(x, y) = 0$ на другой лист. При старой трактовке вопроса имелась только вырожденная система (3), и та точка поверхности $f(x, y) = 0$, куда попадала фазовая точка после перескока, выделялась дополнительным «условием скачка», о котором говорилось выше.

В невырожденной системе (1) переходный процесс длится определенное время, зависящее от ε, и приближенное вычисление этого времени и соответствующего участка траектории представило наибольшие трудности.

После окончания переходного процесса вновь наступает медленное движение, при котором изображающая точка системы (1) снова движется с точностью до ε как решение вырожденной системы (3), но уже около другого листа поверхности $f(x, y) = 0$ вплоть до следующего срыва и т. д.

Если существует устойчивое периодическое решение вырожденной системы (3), т. е. решение, которое замыкается после нескольких срывов и порождает сжатое отображение в себя ортогональной к нему $(l-1)$-мерной площадки (лежащей в поверхности $f(x, y) = 0$), то в соответствующей схеме имеется устойчивый периодический разрывный режим. В этом случае невырожденная система (1) также имеет периодическое решение, которое стремится к разрывному периодическому решению при $\varepsilon \to 0$.

В заметке Е. Ф. Мищенко и Л. С. Понтрягина, опубликованной в Докладах Академии наук СССР, дано асимптотическое разложение периодического решения системы (1) с точностью до членов порядка $\varepsilon^{2/3}$ и $\varepsilon \ln \varepsilon$ с пренебрежением членами порядка ε; с той же точностью рассчитан период этого движения.

Большой интерес представляет случай, когда в уравнении (2) для быстрых переменных при $y \in G$ решения быстро приближаются не к положению равновесия $x = \varphi(y)$, а к устойчивому периодическому движению $x = \varphi\left(\frac{t}{\varepsilon T(y)}, y\right)$, где φ — периодическая функция первого аргумента с периодом 1, следовательно, $\varepsilon T(y)$ — период решения. В этом случае проекция на пространство x изображающей точки системы (1) быстро движется вблизи решения $\varphi\left(\frac{t}{\varepsilon T(y)}, y\right)$, а ее проекция на пространство y медленно движется, как решение некоторого автономного уравнения, правая часть которого получается, если в $g(x, y)$ положить $x = \varphi\left(\frac{t}{\varepsilon T(y)}, y\right)$ и осреднить функцию $g\left(\varphi\left(\frac{t}{\varepsilon T(y)}, y\right), y\right)$ по периоду $\varepsilon T(y)$, т. е. проекция на пространство y движется, как решение уравнения

$$\dot{y} = F(y) = \frac{1}{\varepsilon T(y)} \int\limits_0^{\varepsilon T(y)} g\left(\varphi\left(\frac{t}{\varepsilon T(y)}, y\right), y\right) dt = \int\limits_0^1 g(\varphi(\tau, y), y)\, d\tau.$$

Если решение этого уравнения обозначить через $\psi(t)$, то оказывается, что решение системы (1) с точностью до ε записывается в виде

$$x = \varphi\left(\int\limits_0^t \frac{d\tau}{\varepsilon T(\psi(\tau))} + w(t),\ \psi(t)\right),$$
$$y = \psi(t),$$

где $w(t)$ — некоторая функция.

Указанное приближение справедливо для значений $y \in G$, при которых периодическое решение $\varphi\left(\frac{t}{\varepsilon T(y)}, y\right)$ устойчиво.

Это исследование выполнено Л. С. Понтрягиным и Л. В. Родыгиным и пока не опубликовано.

Переходные процессы в этом случае совсем не изучались.

Весьма поучительно, что к постановке последней задачи, когда имеется устойчивое периодическое решение $x = \varphi\left(\frac{t}{\varepsilon T(y)}, y\right)$, Л. С. Понтрягин пришел из чисто математических соображений, а Л. В. Родыгин — совершенно независимо - при изучении работы некоторых радиотехнических схем.

Л. В. Родыгиным была составлена вырожденная система (3) для некоторой схемы и периодический режим рассчитывался в предположении, что на поверхности $f(x, y) = 0$ лежит устойчивое периодическое решение этой системы. Однако оказалось, что измеренная частота возникающих в схеме колебаний во много раз превосходила частоту колебаний, вычисленную из соответствующей системы (3). Объясняется это тем, что решения уравнения (2) для быстрых переменных в этом случае стремились к устойчивому периодическому движению с очень большой частотой $\frac{1}{\varepsilon T(y)}$, а не к положению равновесия $x=\varphi(y)$, которое в данном случае было неустойчивым.

Такова в общих чертах проделанная семинаром работа в этом направлении.

Теперь я перейду к нашей второй основной задаче.

В настоящее время в теории автоматического регулирования большое значение придается максимальному повышению быстродействия различного рода регуляторов и следящих систем, другими словами, наиболее быстрому или, как принято выражаться, оптимальному осуществлению процесса регулирования. Этому вопросу посвящены работы наших и зарубежных ученых, в которых изучаются оптимальные процессы в системах автоматического регулирования. Ряд других технических проблем также приводит к задачам, в которых экстремируется время; такова, например, известная задача об управлении ракетой для поражения цели в минимальное время и т. д.

Насколько нам известно, общего математического подхода ко всем этим задачам до сих пор не существовало. В совместной заметке В. Г. Болтянского, Л. С. Понтрягина и моей, опубликованной в Докладах Академии наук СССР, мы сформулировали следующую математическую задачу, которая включает большинство известных нам задач, возникающих в технике в связи с оптимальными процессами.

Изображающую точку $x=(x^1, \ldots, x^n)$ в n-мерном фазовом пространстве назовем объектом. Движение объекта подчиняется нормальной системе n-го порядка

$$\dot{x}^i = f^i(x^1, \ldots, x^n;\ u^1, \ldots, u^r) \qquad (i=1, \ldots, n). \tag{4}$$

Здесь $u=(u^1, \ldots, u^r)$ — управляющие параметры объекта; если задан закон управления, т. е. задан переменный r-мерный вектор $u(t)=(u^1(t), \ldots, u^r(t))$, то система (4) однозначно определяет закон движения объекта. На управляющий вектор наложено условие кусочной непрерывности и предполагается, что $u(t)$ принадлежит некоторой замкнутой области пространства переменных $u^1, \ldots, u^r$. Это значит, что управление «безынерционное» — вектор управления $u(t)$ может делать скачки, а некоторые координаты u^i, или даже все, ограничены неравенствами, что вполне естественно; например, одним из управляющих параметров может быть мощность двигателя и т. п. Управляющий вектор, удовлетворяющий перечисленным условиям, назовем допустимым.

Основная задача, которую надо здесь решить, заключается в следующем. В фазовом пространстве $x^1, \ldots, x^n$ заданы две точки ξ_0, ξ_1; требуется выбрать допустимый управляющий вектор $u(t)$ так, чтобы объект (двигаясь согласно системе (4)) перешел из состояния ξ_0 в состояние ξ_1 за минимальное время.

Я не буду излагать полученные здесь результаты. Они довольно подробно изложены в нашей совместной заметке (ДАН **110**, № 1 (1956)).

Добавлю только, что мной продолжено это исследование для случая линейных систем, которые имеют особый интерес в теории автоматического регулирования. Результаты будут в скором времени опубликованы.

Наконец, упомяну еще одну задачу, решенную в нашем семинаре В. Г. Болтянским и Л. С. Понтрягиным, имеющую приложения в теории релейных систем автоматического регулирования. Они нашли необходимое и достаточное условие локальной устойчивости начала координат для следующей нелинейной системы:

$$\dot{x}^i = \sum_{\alpha=1}^{n} a^i_\alpha x^\alpha + b^i \operatorname{sign} x^1 \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{5}$$

где a^i_α — постоянные коэффициенты, $\operatorname{sign} x^1$ — релейная функция переменной x^1.

В заключение следует сказать, что мы изучаем теорию колебаний и теорию регулирования не только по имеющейся литературе. Наш семинар поддерживает тесные научные контакты с инженерами и специалистами в этой области техники, в частности, такие контакты у нас имеются с Институтом автоматики и телемеханики АН СССР. Многие члены нашего семинара принимают участие в общегородском семинаре по теории автоматического регулирования, одним из руководителей которого является Л. С. Понтрягин и который собирается в Институте автоматики и телемеханики.

Отмечу, что задача о локальной устойчивости начала координат для системы (5) возникла после бесед с З. Я. Цыпкиным. На важность оптимальных процессов в линейных системах для теории автоматического регулирования нам указал А. А. Фельдбаум в докладе, который он по нашему приглашению сделал у нас на семинаре. И хотя тематика научной работы нашего семинара уже вполне определилась и, как видно из изложенного, она довольно обширна, мы никоим образом не собираемся прекращать наших связей с представителями техники. Напротив, в расширении таких связей мы видим один из основных залогов наших будущих успехов.