А. А. Аграчев, О пространствах симметричных операторов с кратными основными состояниями, *Функц. анализ и его прил.*, 2011, том 45, выпуск 4, 1–15

Функциональный анализ и его приложения
2011, т. 45, вып. 4, с. 1–15

УДК 515.146+512.64

О пространствах симметричных операторов с кратными основными состояниями

© 2011. А. А. Аграчев

Памяти В. И. Арнольда

Исследуется гомологическая структура фильтрации пространства самосопряженных операторов по кратности основного состояния. Рассматриваются только операторы, действующие в конечномерном комплексном или вещественном гильбертовом пространстве, но бесконечномерные обобщения легко угадываются.

§ 1. Введение

Статья посвящается памяти Владимира Игоревича Арнольда и, можно сказать, вдохновлена его известными работами [1], [2] (см. также статью [5]). Она открывает запланированную серию статей о гомологических инвариантах семейств квадратичных форм и сходных геометрических объектов; доказанная ниже теорема 2 служит фундаментом всего того, что последует.

В этой статье изучается фильтрация пространства самосопряженных операторов по кратности основного состояния. Мы ограничиваемся операторами в конечномерном комплексном или вещественном гильбертовом пространстве, но возможные бесконечномерные обобщения легко угадываются.

Пусть $\lambda_1(A) \leqslant \lambda_2(A) \leqslant \dots \leqslant \lambda_k(A) \leqslant \cdots$ — упорядоченные собственные числа оператора A. Операторы, обладающие основным состоянием кратности не менее k, характеризуются уравнением $\lambda_1(A) = \lambda_k(A)$. Теорема 1 описывает гомотопический тип пространства нетривиальных решений этого уравнения: оно оказывается гомотопически эквивалентным пространству Тома определенного векторного расслоения над некоторым грассманианом.

Рост кратности от k к $k+1$ реализуется пересечением пространства решений уравнения $\lambda_1(A) = \lambda_k(A)$ с решениями уравнения $\lambda_k(A) = \lambda_{k+1}(A)$. Мы изучаем гомологическую структуру этой операции пересечения.

Как обычно, удобнее принять двойственную точку зрения, т. е. иметь дело с когомологиями пары $(\mathbb{B}, \{A \in \mathbb{B} : \lambda_1(A) \neq \lambda_k(A)\})$ вместо гомологий пространства $\{A \in \mathbb{B} : \lambda_1(A) = \lambda_k(A)\}$, где $\mathbb{B}$ — пространство всех самосопряженных операторов. При этом пересечение циклов заменяется обычным когомологическим умножением.

Пространство решений уравнения $\lambda_k(A) = \lambda_{k+1}(A)$ есть цикл коразмерности 3 в комплексном случае и цикл по модулю 2 коразмерности 2 в вещественном случае. Двойственный объект есть трехмерный класс когомологий в комплексном и двумерный класс когомологий по модулю 2 в вещественном случае; имеется в виду класс когомологий пары $(\mathbb{B}, \{A \in \mathbb{B} : \lambda_k(A) \neq \lambda_{k+1}(A)\})$.

В обоих случаях мы обозначаем этот когомологический класс символом Γ_k и изучаем отображение когомологий пары $(\mathbb{B}, \{A \in \mathbb{B} : \lambda_1(A) \neq \lambda_k(A)\})$ в когомологии пары $(\mathbb{B}, \{A \in \mathbb{B} : \lambda_1(A) \neq \lambda_{k+1}(A)\})$, переводящее каждый когомологический класс в его произведение с Γ_k. Главный результат статьи, теорема 2, утверждает, что последовательность этих отображений для $k = 1, 2, \ldots$ есть точная последовательность.

Рассмотрим простейший случай самосопряженных операторов на $\mathbb{C}^2$ или, иными словами, эрмитовых 2×2-матриц. Пара $(\mathbb{B}, \{A \in \mathbb{B} : \lambda_1(A) \neq \lambda_k(A)\})$ равна $(\mathbb{R}^4, \varnothing)$ при $k = 1$ и $(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^4 \setminus \mathbb{R})$ при $k = 2$. Точная последовательность из теоремы 2 сводится к очевидной последовательности

$$0 \to H^*(\mathbb{R}^3) \to H^{*+3}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3 \setminus 0) \to 0.$$

Общее многомерное вычисление отнюдь не тривиально и, похоже, имеет фундаментальную природу, что мы надеемся показать в последующих публикациях.

В следующем параграфе вводятся нужные обозначения и напоминаются известные факты о пространствах самосопряженных операторов. Теоремы 1 и 2 сформулированы и доказаны в §3.

Все пары топологических пространств и их подпространств, с которыми мы имеем дело, гомотопически эквивалентны парам конечных клеточных комплексов и их подкомплексов. Пусть (M, X), (M, Y) и $(M, X \cup Y)$ — такие пары, $\xi \in H^i(M, X)$, $\eta \in H^j(M, Y)$; тогда $\xi \smile \eta \in H^{i+j}(M, X \cup Y)$ есть когомологическое произведение элементов ξ и η.

§2. Предварительные сведения

Мы рассматриваем пространства самосопряженных операторов на $\mathbb{R}^n$ или $\mathbb{C}^n$. В обоих случаях через $\lambda_1(A) \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n(A)$ обозначаются упорядоченные собственные числа данного оператора A. Пусть I — единичный оператор, а α — положительное вещественное число; тогда $\lambda_i(A \pm \alpha I) = \lambda_i(A) \pm \alpha$, $\lambda_i(\alpha A) = \alpha \lambda_i(A)$. Кроме того, $A \pm \alpha I$ и αA имеют те же собственные векторы, что A. Удобно не различать операторы, получаемые один из другого только что описанными простыми преобразованиями.

Обозначим через $\mathbb{S}(\mathbb{R})$ (соответственно $\mathbb{S}(\mathbb{C})$) пространство всех нескалярных самосопряженных линейных операторов $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (соответственно $A\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$), факторизованное по отношению эквивалентности $A \sim (\alpha A + \beta I)$ для любых $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$. Тогда $\mathbb{S}(\mathbb{R})$ гомеоморфно сфере $S^{n(n+1)/2-2}$, а $\mathbb{S}(\mathbb{C})$ гомеоморфно S^{n^2-2}. В дальнейшем мы будем одновременно работать с вещественным и эрмитовым случаями и будем просто опускать аргумент у $\mathbb{S}$. Конус над $\mathbb{S}$ обозначим символом $\mathbb{B}$; это шар размерности $n(n+1)/2 - 1$ в вещественном случае и шар размерности $n^2 - 1$ в эрмитовом случае.

Факторизацию можно заменить нормализацией и определить $\mathbb{S}$ как пространство таких самосопряженных операторов A, что $\sum_{i=1}^n \lambda_i(A) = 0$, $\sum_{i=1}^n \lambda_i^2(A) = 1$; тогда $\mathbb{B}$ определяется соотношениями $\sum_{i=1}^n \lambda_i(A) = 0$, $\sum_{i=1}^n \lambda_i^2(A) \leqslant 1$. В одних случаях удобнее факторизация, а в других нормализация, и мы часто используем один и тот же символ для обозначения класса эквивалентности и его представителя; это упрощает обозначения и не приводит к путанице.

Рассмотрим открытые подмножества

$$\Sigma_{k,k+1} \doteq \{A \in \mathbb{S} : \lambda_k(A) \neq \lambda_{k+1}(A)\}.$$

Хорошо известны следующие свойства этих подмножеств:

Предложение 1. $\mathbb{S} \setminus \Sigma_{k,k+1}$ *— алгебраическое подмножество в* $\mathbb{S}$ *коразмерности* 2 *в вещественном и коразмерности* 3 *в эрмитовом случае. Особые точки алгебраического множества* $\mathbb{S} \setminus \Sigma_{k,k+1}$ *суть операторы с не менее чем трехкратным собственным числом* λ_k*; они составляют алгебраическое подмножество в* $\mathbb{S}$ *коразмерности* 5 *в вещественном и коразмерности* 8 *в эрмитовом случае. Кроме того, регулярная часть подмножества* $\mathbb{S} \setminus \Sigma_{k,k+1}$ *ориентируема в эрмитовом случае.*

Набросок доказательства. Пусть $A_0 \in \mathbb{S} \setminus \Sigma_{k,k+1}$, а J_{A_0} — множество всех таких $j \in \{1, \dots, n\}$, что $\lambda_j(A_0) = \lambda_k(A_0)$; тогда $\# J_{A_0} \geqslant 2$. Для данного самосопряженного оператора A положим

$$K_A = \operatorname{span}\{x \in X : Ax = \lambda_j(A)x,\ j \in J_{A_0}\},$$

где X — это $\mathbb{R}^n$ в вещественном и $\mathbb{C}^n$ в эрмитовом случае.

Пусть $\mathscr{O}_0$ — такая окрестность оператора A_0 в $\mathbb{S}$, что $K_A \cap K_{A_0}^{\perp} = 0$ для любого $A \in \mathscr{O}_0$. Обозначим через $P_{A_0 A}^k \colon K_A \to K_{A_0}$ ограничение на K_A ортогонального проектора $X \to K_{A_0}$ и положим $\Phi(A) = P_{A_0 A} A P_{A_0 A}^{-1}$, $A \in \mathscr{O}_0$. Тогда Φ — корректно определенное рациональное отображение окрестности $\mathscr{O}_0$ в пространство самосопряженных операторов на K_{A_0}. Дифференциал отображения Φ в точке A_0 отображает A в композицию оператора $A|_{K_{A_0}}$ с ортогональной проекцией $X \to K_{A_0}$. В частности, линейное отображение $D_{A_0}\Phi$ сюръективно; следовательно, Φ — субмерсия на некоторой окрестности точки A_0. Можно предположить, что Φ — субмерсия на всей окрестности $\mathscr{O}_0$. Кроме того, $\lambda_i(\Phi(A)) = \lambda_{i+j_0}(A)$, $i = 1, \dots, \# J_{A_0}$, где $j_0 = \min J_{A_0}$.

Пусть $A \in \mathscr{O}_0$; равенство $J_A = J_{A_0}$ имеет место в том и только том случае, когда $\Phi(A)$ — скалярный оператор. Следовательно, $\{A \in \mathscr{O}_0 : J_A = J_{A_0}\}$ — регулярное алгебраическое подмножество в $\mathscr{O}_0$ коразмерности $j_0(j_0+1)/2 - 1$ в вещественном и $j_0^2 - 1$ в эрмитовом случае.

Осталось доказать ориентируемость в эрмитовом случае. Достаточно показать, что пространство самосопряженных операторов на K_A, $A \in \mathbb{S}$, обладает канонической ориентацией. Ориентация пространства самосопряженных операторов индуцирована ориентацией самого пространства K_A, а ориентация пространства $K_A \subset \mathbb{C}^n$ определена комплексной структурой (любое комплексное пространство обладает канонической ориентацией). $\square$

Из предложения 1 следует, что $H_{\dim \mathbb{S}-2}(\mathbb{S} \setminus \Sigma_{k,k+1}; \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2$ в вещественном и $H_{\dim \mathbb{S}-3}(\mathbb{S} \setminus \Sigma_{k,k+1}; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ в эрмитовом случае. Согласно двойственности Александера, $H^1(\Sigma_{k,k+1}; \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2$ в вещественном случае, причем значение образующей группы $H^1(\Sigma_{k,k+1}; \mathbb{Z}_2)$ на замкнутой кривой в $\Sigma_{k,k+1}$ равно коэффициенту зацепления этой кривой с $\mathbb{S} \setminus \Sigma_{k,k+1}$ по модулю 2. Аналогично, $H^2(\Sigma_{k,k+1}; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ в эрмитовом случае, и значение образующей группы $H^1(\Sigma_{k,k+1}; \mathbb{Z})$ на компактной ориентированной поверхности в $\Sigma_{k,k+1}$ равно коэффициенту зацепления этой поверхности с $\mathbb{S} \setminus \Sigma_{k,k+1}$.

В дальнейшем в этой статье мы всегда рассматриваем гомологии и когомологии с коэффициентами в $\mathbb{Z}_2$ в вещественном и с коэффициентами в $\mathbb{Z}$ в эрмитовом случае и опускаем указание на коэффициенты, чтобы упростить обозначения. Кроме того, мы обозначаем через ε коразмерность подмножества $\mathbb{S}\setminus\Sigma_{k,k+1}$ в $\mathbb{S}$; таким образом, $\varepsilon = 2$ в вещественном и $\varepsilon = 3$ в эрмитовом случае.

Для данного $A \in \Sigma_{k,k+1}$ положим

$$E_A^k = \operatorname{span}\{x \in X : Ax = \lambda_i(A)x,\ i = 1, \dots, k\},$$

где $X = \mathbb{R}^n$ в вещественном и $X = \mathbb{C}^n$ в комплексном случае. Тогда $\mathscr{E}^k = \{(x, A) : A \in \Sigma_{k,k+1},\ x \in E_A^k\}$ есть k-мерное векторное подрасслоение тривиального расслоения $X \times \Sigma_{k,k+1}$ над $\Sigma_{k,k+1}$. Пусть $\gamma_k \in H^{\varepsilon-1}(\Sigma_{k,k+1})$ — первый характеристический класс Штифеля–Уитни этого расслоения в вещественном и первый класс Чжэня в эрмитовом случае.

Предложение 2. *γ_k есть образующая группы $H^{\varepsilon-1}(\Sigma_{k,k+1})$.*

Доказательство. Нужно вычислить характеристические классы ограничения расслоения $\mathscr{E}^k \to \Sigma_{k,k+1}$ на $(\varepsilon - 1)$-мерное компактное подмногообразие в $\Sigma_{k,k+1}$, имеющее коэффициент зацепления с $\mathbb{S} \setminus \Sigma_{k,k+1}$, равный ± 1.

Обозначим через $\mathbb{S}_2$ пространство таких самосопряженных операторов B на $\mathbb{R}^2$ (в вещественном случае) или на $\mathbb{C}^2$ (в эрмитовом случае), что $\lambda_1(B) + \lambda_2(B) = 0$, $\lambda_1^2(B) + \lambda_2^2(B) = 1$, и положим $\mathbb{B}_2 = \operatorname{conv}(\mathbb{S}_2)$. Тогда $\mathbb{S}_2$ есть $(\varepsilon - 1)$-мерная сфера, а $\mathbb{B}_2$ есть ε-мерный шар, $\mathbb{S}_2 = \partial\mathbb{B}_2$. Пусть A_- — такой самосопряженный оператор на $\mathbb{R}^{k-1}$ (или на $\mathbb{C}^{k-1}$) с простыми собственными числами, что $\lambda_{k-1}(A_-) < -1$, а A_+ — такой самосопряженный оператор на $\mathbb{R}^{n-k-1}$ (или на $\mathbb{C}^{n-k-1}$) с простыми собственными числами, что $\lambda_1(A_+) > 1$. Тогда $A_- \oplus \mathbb{S}_2 \oplus A_+$ есть искомое $(\varepsilon - 1)$-мерное подмногообразие в $\mathbb{S}$. Действительно, $A_- \oplus \mathbb{S}_2 \oplus A_+ = \partial(A_- \oplus \mathbb{B}_2 \oplus A_+)$ и $(A_- \oplus \mathbb{B}_2 \oplus A_+) \cap (\mathbb{S} \setminus \Sigma_{k,k+1}) = (A_- \oplus 0 \oplus A_+)$; при этом пересечение трансверсально. Следовательно, коэффициент зацепления сферы $A_- \oplus \mathbb{S}_2 \oplus A_+$ с $\mathbb{S} \setminus \Sigma_{k,k+1}$ равен ± 1.

Ограничение расслоения $\mathscr{E}^k \to \Sigma_{k,k+1}$ на $A_- \oplus \mathbb{S}_2 \oplus A_+$ разлагается в прямую сумму тривиального расслоения и одномерного расслоения над $\mathbb{S}_2$, слой которого в точке $B \in \mathbb{S}_2$ состоит из собственных векторов, отвечающих собственному числу $\lambda_1(B)$. Нетрудно видеть, что отображение, переводящее $B \in \mathbb{S}_2$ в прямую, состоящую из собственных векторов с собственным значением $\lambda_1(B)$, есть диффеоморфизм пространства $\mathbb{S}_2$ и проективной прямой (вещественной или комплексной). Этот диффеоморфизм отождествляет наше одномерное расслоение с тавтологическим расслоением проективной прямой. $\square$

Пусть $\delta\colon H^i(\Sigma_{k,k+1}) \to H^{i+1}(\mathbb{B}, \Sigma_{k,k+1})$ — изоморфизм, индуцированный точной когомологической последовательностью пары $(\mathbb{B}, \Sigma_{k,k+1})$. Положим $\Gamma_k = \delta \circ \gamma_k \in H^\varepsilon(\mathbb{B}, \Sigma_{k,k+1})$. Значение класса Γ_k на относительном цикле $\xi \in C_\varepsilon(\mathbb{B}, \Sigma_{k,k+1})$ равно индексу пересечения этого цикла с $\operatorname{conv}(\mathbb{S} \setminus \Sigma_{k,k+1})$.

В заключение этого параграфа приведем явное выражение замкнутой дваформы, представляющей класс γ_k в эрмитовом случае.

Пусть A — самосопряженный оператор с простыми собственными числами, а $e_1, \dots, e_n$ — такой ортонормированный базис, что $Ae_i = \lambda_i(A)e_i$, $i = 1, \dots, n$. Векторы e_i определены с точностью до умножения на комплексное число абсолютной величины 1. Пусть $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$ обозначает эрмитово произведение и B —

еще один самосопряженный оператор. Нетрудно видеть, что внешний квадрат над $\mathbb{R}$ комплексного числа $\langle Be_i, e_j\rangle$ зависит только от A, B, i, j, а не от выбора собственных векторов. В частности, $\bigwedge^2_{\mathbb{R}}\langle dA\, e_i, e_j\rangle$ — корректно заданная два-форма на пространстве самосопряженных операторов с простыми собственными значениями. Справедлива формула $\bigwedge^2_{\mathbb{R}}\langle dA\, e_i, e_j\rangle(\partial/\partial B_1, \partial/\partial B_2) = \det_{\mathbb{R}}(\langle B_1 e_i, e_j\rangle, \langle B_2 e_i, e_j\rangle)$; в этой формуле комплексные числа рассматриваются как векторы в $\mathbb{R}^2$.

Предложение 3. *Форма*

$$\Omega_k = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=k+1}^{n} \frac{1}{\pi(\lambda_i - \lambda_j)^2} \bigwedge\nolimits^2_{\mathbb{R}}\langle dA\, e_i, e_j\rangle$$

представляет ограничение класса γ_k на пространство самосопряженных операторов с простыми собственными числами[1)].

Набросок доказательства. Нужно доказать, что Ω_k представляет первый класс Чжэня векторного расслоения $\mathscr{E}^k$, ограниченного на пространство самосопряженных операторов с простыми собственными числами. Это ограничение расслоения $\mathscr{E}^k$ есть прямая сумма одномерных расслоений $\mathscr{L}^i$, $i = 1, \dots, k$, где слой в точке A расслоения $\mathscr{L}^i$ есть прямая $L^i_A \doteq \{z \in \mathbb{C}^n : Az = \lambda_i(A)z\}$. Нужно показать, что форма Ω_k представляет класс $\sum_{i=1}^k c_1(\mathscr{L}^i)$.

Рассмотрим ассоциированное с $\mathscr{L}^i$ главное S^1-расслоение $\mathscr{C}^i$; его слой в точке A имеет вид $C^i_A \doteq \{e_i \in \mathbb{C}^n : e_i \in L^i_A, |e_i| = 1\}$. Пусть $t \mapsto A(t)$ — гладкая кривая в пространстве самосопряженных операторов с простыми собственными числами и $e_i(0) \in C^i_{A(0)}$. Условие $\langle \dot e_i(t), e_i(t)\rangle = 0$ определяет каноническое поднятие $t \mapsto e_i(t)$ кривой $A(\,\cdot\,)$ в расслоение $\mathscr{C}^i$. Эти поднятия суть параллельные переносы вдоль кривых на базе для подходящей связности на главном расслоении $\mathscr{C}^i$. Форма этой связности имеет вид $\operatorname{Im}\langle de_i, e_i\rangle$, где через Im обозначается мнимая часть комплексного числа.

Внешний дифференциал формы связности $\operatorname{Im}\langle de_i, e_i\rangle$ есть обратный образ формы кривизны связности R_i. Простое вычисление показывает, что

$$R_i\left(\frac{\partial}{\partial B_1}, \frac{\partial}{\partial B_2}\right)\bigg|_A = 2\operatorname{Im}\left\langle \frac{\partial e_i(A)}{\partial B_2}, \frac{\partial e_i(A)}{\partial B_1}\right\rangle,$$

где $\partial e_i(A)/\partial B = \frac{d}{dt}e_i(A+tB)|_{t=0}$ и $t \mapsto e_i(A+tB)$ параллельно вдоль кривой $t \mapsto A+tB$. Дифференцируя по t уравнение $\langle (A+tB)e_i(A+tB), e_j(A)\rangle = \lambda_i(A+tB)\langle e_i(A+tB), e_j(A)\rangle$, получаем $\langle \frac{\partial e_i(A)}{\partial B}, e_j(A)\rangle = \frac{1}{\lambda_i(A)-\lambda_j(A)}\langle Be_i(a), e_j(A)\rangle$ для любого $j \neq i$. Следовательно, $\frac{\partial e_i}{\partial B} = \sum_{i\neq j}\frac{1}{\lambda_i - \lambda_j}\langle Be_i, e_j\rangle e_j$ и

$$R_i\left(\frac{\partial}{\partial B_1}, \frac{\partial}{\partial B_2}\right) = \sum_{j\neq i}\frac{2}{(\lambda_i-\lambda_j)^2}\operatorname{Im}(\langle B_2 e_i, e_j\rangle\langle B_1 e_i, e_j\rangle).$$

[1)] Форма Ω_k локально ограничена в топологии пространства $\Sigma_{k,k+1}$. Более того, любой двумерный цикл в $\Sigma_{k,k+1}$ гомотопен циклу в пространстве самосопряженных операторов с простыми собственными числами. Следовательно, форма Ω_k действительно представляет класс γ_k.

В то же время, $\mathrm{Im}(z^1 z^2) = \det_{\mathbb{R}}(z^2, z^1)$ для любых комплексных чисел z^1, z^2. Таким образом, $R_i = \sum_{j\neq i} \frac{2}{(\lambda_i-\lambda_j)^2} \bigwedge_{\mathbb{R}}^2 \langle dA\, e_i, e_j\rangle$. Складывая, получаем требуемое выражение для формы $\Omega_k = \frac{1}{2\pi}\sum_{i=1}^k R_i$, представляющей класс γ_k. $\square$

§3. Основные результаты

Рассмотрим фильтрации

$$M_k = \{A \in \mathbb{S} : \lambda_1(A) = \lambda_{k+1}(A)\}, \quad M^k = \mathbb{S}\setminus M_k, \qquad k = 0, \dots, n-1,$$

пространства $\mathbb{S}$. Нетрудно видеть, что

$$W_k \doteq \{A \in \mathbb{S} : \lambda_{k+1}(A) = \lambda_n(A)\} \subset M^k$$

есть деформационный ретракт пространства M^k. Ретракция $\phi_k \colon M^k \to W_k$ меняет только собственные числа операторов, в то время как собственные векторы остаются неподвижными.

Инволюция $A \mapsto (-A)$, $A \in \mathbb{S}$, переводит W_k в M_{n-k-1}; следовательно, M^k гомотопически эквивалентно M_{n-k-1}. Заметим также, что отображение $A \mapsto A - \lambda_1(A)I$, $A \in \mathbb{S}$, индуцирует гомеоморфизм пространства M_k и пространства ненулевых неотрицательных самосопряженных операторов ранга $< n-k$, факторизованного по отношению эквивалентности $A \sim \alpha A$ для любого $\alpha > 0$.

Везде ниже символ $Gr_k(m)$ обозначает грассманиан k-мерных подпространств пространства $\mathbb{R}^m$ или $\mathbb{C}^m$.

Теорема 1. *M^k имеет гомотопический тип пространства Тома некоторого вещественного векторного расслоения над грассманианом $Gr_k(n-1)$; размерность расслоения равна $k(k+1)/2+k-1$ в вещественном случае и k^2+2k-1 в эрмитовом случае.*

Доказательство. Пусть e — вектор единичной длины (в $\mathbb{R}^n$ или $\mathbb{C}^n$). Положим

$$G_k(e) = \{A \in M_{k-1} \cap W_k : Ae = \lambda_n(A)e\}.$$

Тогда $G_k(e) \cong Gr_k(n-1)$. Кроме того, некоторая окрестность подмногообразия $G_k(e)$ в W_k есть гладкое многообразие и нормальное расслоение к $G_k(e)$ в этом многообразии имеет размерность $k(k+1)/2 + k - 1$ в вещественном случае и $k^2 + 2k - 1$ в эрмитовом. Это нормальное расслоение разлагается в сумму двух подрасслоений. Первое есть нормальное расслоение подмногообразия $G_k(e)$ в $\{A \in W_k : Ae = \lambda_n(A)e\}$; оно изоморфно расслоению самосопряженных эндоморфизмов с нулевым следом тавтологического расслоения грассманиана $Gr_k(n-1)$. Второе подрасслоение есть нормальное расслоение подмногообразия $G_k(e)$ в $M_{k-1} \cap W_k$; оно изоморфно нормальному расслоению подмногообразия $Gr_k(n-1)$ в $Gr_k(n)$. Доказываемая теорема есть прямое следствие такого утверждения:

Лемма 1. *$W_k \setminus G_k(e)$ стягиваемо.*

Доказательство. Мы стянем $W_k \setminus G_k(e)$ к точке $-e^* \otimes e \in W_k \setminus G_k(e)$. Наше стягивание переводит $(A, t) \in (W_k \setminus G_k(e)) \times [0, 1]$ в $\phi_k(A_t)$, где $A_t = (1-t)A - te^* \otimes e$.

Остается доказать, что стягивание определено корректно, т. е. что $A_t \in M^k$ и $\phi_k(A_t)$ лежит вне $G_k(e)$ для любого $t \in [0, 1]$. Включение $\phi_k(A_t) \in G_k(e)$

имеет место в том и только том случае, когда $A_t \in M_{k-1}$ и e ортогонально подпространству $\{x \in X : A_t x = \lambda_1(A_t)x\}$, где X есть $\mathbb{R}^n$ (в вещественном случае) или $\mathbb{C}^n$ (в эрмитовом случае).

Положим $A^t = A - \frac{t}{1-t} e^* \otimes e = \frac{1}{1-t} A_t$; положительный множитель не влияет на кратность собственных чисел, и мы будем работать с A^t вместо A_t. Рассмотрим отдельно два случая.

1. $e \perp \{x \in X : Ax = \lambda_i(A)x,\ i = 1, \dots, k\}$. В этом случае e — собственный вектор оператора A, $Ae = \lambda_n(A)e$. Следовательно, все A^t имеют общие собственные векторы. При этом $n-1$ собственных чисел оператора A^t (подсчитанных с учетом кратности) равны собственным числам оператора A, а собственное число, отвечающее собственному вектору e, монотонно убывает от $\lambda_n(A)$ к $-\infty$, когда t меняется от 0 до 1. Кроме того, $\lambda_1(A) \neq \lambda_k(A)$, поскольку $A \notin G_k(e)$; следовательно, $A^t \in M^k$.

Равенство $\lambda_1(A^t) = \lambda_k(A^t)$ выполняется для некоторого $t \in (0, 1]$ в том и только том случае, когда $\lambda_1(A) = \lambda_{k-1}(A)$; тогда $A^t e = \lambda_1(A^1)e$ и $\phi_k(A^t) \notin G_k(e)$.

2. $e \not\perp \{x \in X : Ax = \lambda_i(A)x,\ i = 1, \dots, k\}$. Ограничение квадратичной формы $x \mapsto \langle A^t x, x\rangle$ на гиперплоскость $e^\perp$ не зависит от t. Таким образом, из минимаксного принципа для собственных чисел вытекает, что

$$\lambda_1(A^t) \leqslant \lambda_1(A) \leqslant \lambda_2(A^t) \leqslant \dots \leqslant \lambda_k(A) \leqslant \lambda_{k+1}(A^t).$$

Предположим, что $\lambda_1(A^t) = \lambda_{k+1}(A^t)$. Следовательно,

$$\lambda_1(A) = \lambda_k(A) = \lambda_1(A^t) = \min_{|x|=1} \langle A^t x, x\rangle.$$

В то же время

$$\langle A^t x, x\rangle = \lambda_1(A) - \frac{t}{1-t}\langle e, x\rangle^2 \qquad \forall x \in \{x \in X : Ax = \lambda_1(A)x\}.$$

Мы пришли к противоречию с предположением

$$e \not\perp \{x \in X : Ax = \lambda_1(A)x\} = \{x \in X : Ax = \lambda_i(A)x,\ i = 1, \dots, k\}.$$

Следовательно, $A_t \in M^k$.

Теперь предположим, что $\lambda_1(A^t) = \lambda_k(A^t)$ и $e \perp \{x \in X : A^t x = \lambda_1(A^t)x\}$. Тогда

$$\lambda_1(A^t)|x|^2 = \langle A^t x, x\rangle = \langle Ax, x\rangle = \lambda_1(A)|x|^2 \qquad \forall x \in \{x \in X : A^t x = \lambda_i(A^t)x,\ i = 1, \dots, k\}. \quad (1)$$

Следовательно, $\lambda_1(A) = \lambda_k(A)$ и

$$\{x \in X : A^t x = \lambda_i(A^t)x,\ i = 1, \dots, k\} = \{x \in X : Ax = \lambda_i(A)x,\ i = 1, \dots, k\},$$

что противоречит предположению **2**. □

Пусть $u_k \in H^{\nu_k}(M^k)$ — класс Тома нормального расслоения подмногообразия $G_k(e)$ в W_k, $\nu_k = k(k+1)/2 + k - 1$ в вещественном случае и $\nu_k = k^2 + 2k - 1$ в эрмитовом случае. Пусть $\mathscr{G}_k$ — тотальное пространство этого расслоения и $G_k(e) \subset \mathscr{G}_k$ — его нулевое сечение. Имеют место равенства

$$\widetilde{H}^{\boldsymbol{\cdot}}(M^k) = H^{\boldsymbol{\cdot}}(\mathscr{G}_k, \mathscr{G}_k \setminus G_k(e)), \qquad H^{\boldsymbol{\cdot}}(G_k(e)) = H^{\boldsymbol{\cdot}}(\mathscr{G}_k),$$

и когомологическое произведение классов из $\widetilde{H}^{\boldsymbol{\cdot}}(M^k)$ и $H^{\boldsymbol{\cdot}}(G_k(e))$ есть корректно определенный класс в $\widetilde{H}^{\boldsymbol{\cdot}}(M^k)$. При этом $\xi \mapsto u_k \smile \xi$, $\xi \in H^{\boldsymbol{\cdot}}(G_k(e))$, есть изоморфизм Тома групп $H(G_k(e))$ и $\widetilde{H}(M^k)$. Напомним, что $u_k|_{G_k(e)} \in H^{\nu_k}(G_k(e))$ — класс Эйлера расслоения $\mathscr{G}_k \to G_k(e)$.

Лемма 2. $u_k|_{G_k(e)} = 0$.

Доказательство. Расслоение $\mathscr{G}_k$ разлагается в сумму двух подрасслоений, как это было отмечено в доказательстве теоремы 1. Мы покажем, что первое подрасслоение, т. е. расслоение самосопряженных эндоморфизмов с нулевым следом тавтологического расслоения грассманиана, имеет нулевой класс Эйлера. В самом деле, индуцированное расслоение над пространством флагов имеет естественное не обращающееся в нуль сечение: значение такого сечения на некотором флаге есть самосопряженный оператор с предписанными простыми собственными числами, а собственные подпространства суть элементы флага. □

Следствие 1. *Когомологическое произведение любых двух классов из* $\widetilde{H}^{\boldsymbol{\cdot}}(M^k)$ *равно нулю.*

Доказательство. В силу изоморфизма Тома достаточно показать, что $u_k \smile u_k = 0$, но $u_k \smile u_k$ есть образ класса $u_k|_{G_k(e)} = 0$ при изоморфизме Тома. □

Очевидно, что $M^k = M^{k-1} \cup \Sigma_{k,k+1}$. Рассмотрим гомоморфизмы

$$\mathbf{d}_k \colon H^{\boldsymbol{\cdot}}(\mathbb{B}, M^{k-1}) \to H^{\boldsymbol{\cdot}}(\mathbb{B}, M^k), \qquad k = 1, \ldots, n-1,$$

состоящие в умножении на класс $\Gamma_k \in H^{\varepsilon}(\mathbb{B}, \Sigma_{k,k+1})$, определенный в конце §2:

$$\mathbf{d}_k(\xi) = \Gamma_k \smile \xi, \qquad \xi \in H^{\boldsymbol{\cdot}}(\mathbb{B}, M^{k-1}).$$

Напомним, что $\varepsilon = 2$ в вещественном случае и $\varepsilon = 3$ в эрмитовом случае.

Теорема 2. *Последовательность*

$$0 \to H^{\boldsymbol{\cdot}}(\mathbb{B}) \stackrel{\mathbf{d}_1}{\to} H^{\boldsymbol{\cdot}}(\mathbb{B}, M^1) \stackrel{\mathbf{d}_2}{\to} \cdots \stackrel{\mathbf{d}_{n-2}}{\to} H^{\boldsymbol{\cdot}}(\mathbb{B}, M^{n-2}) \stackrel{\mathbf{d}_{n-1}}{\to} H^{\boldsymbol{\cdot}}(\mathbb{B}, \mathbb{S}) \to 0 \tag{1}$$

является точной.

Доказательство. Мы проведем вычисления только в вещественном случае; эрмитов вариант разбирается аналогично.

Прежде всего заметим, что $\Gamma_k \smile \Gamma_{k-1} = 0$. В самом деле, $\Gamma_k \smile \Gamma_{k-1}$ есть элемент группы $H^4(\mathbb{B}, \Sigma_{k-1,k} \cup \Sigma_{k,k+1}) = H^4(\mathbb{S}, \Sigma_{k-1,k} \cup \Sigma_{k,k+1})$, но

$$\mathbb{S} \setminus (\Sigma_{k-1,k} \cup \Sigma_{k,k+1}) = \{A \in \mathbb{S} : \lambda_{k-1}(A) = \lambda_{k+1}(A)\}$$

— алгебраическое подмножество коразмерности 5 в $\mathbb{S}$ (см. предложение 1). Следовательно, $\mathbf{d}_k \circ \mathbf{d}_{k-1} = 0$ и последовательность (1) образует коцепной комплекс. Требуется доказать тривиальность когомологий этого комплекса.

Рассмотрим пространства

$$\Sigma_{1,k,k+1} \doteq \{A \in \mathbb{S} : \lambda_1(A) \neq \lambda_k(A) \neq \lambda_{k+1}(A)\} = M^{k-1} \cap \Sigma_{k,k+1}.$$

Заметим, что $\phi_k(\Sigma_{k,k+1}) = \Sigma_{k,k+1} \cap W_k$ и $\Sigma_{k,k+1} \cap W_k$ — деформационный ретракт пространства $\Sigma_{k,k+1}$. Аналогично, $\phi_k(\Sigma_{1,k,k+1}) = \Sigma_{1,k,k+1} \cap W_k$ и $\Sigma_{1,k,k+1} \cap W_k$ — деформационный ретракт пространства $\Sigma_{1,k,k+1}$.

Отображение $A \mapsto \operatorname{span}\{x \in \mathbb{R}^n : Ax = \lambda_i(A)x,\ i = 1, \dots, k\}$ превращает $\Sigma_{k,k+1} \cap W_k$ в локально тривиальное расслоение над $Gr_k(n)$ со слоем в точке $E \in Gr_k(n)$, состоящим из всех таких самосопряженных операторов $A\colon E \to E$, что $\sum_{i=1}^k \lambda_i(A) \leqslant 0$, $\sum_{i=1}^k \lambda_i^2(A) + \frac{1}{n-k}(\sum_{i=1}^k \lambda_i(A))^2 = 1$; такие операторы однозначно продолжаются до (нормализованных) операторов из W_k. Таким образом, слой представляет собой шар размерности $k(k+1)/2 - 1 = \nu_{k-1} + 1$.

Далее, $(\Sigma_{k,k+1} \setminus \Sigma_{1,k,k+1}) \cap W_k$ есть сечение расслоения $\Sigma_{k,k+1} \cap W_k \to Gr_k(n)$, причем значение этого сечения в точке $E \in Gr_k(n)$ — скалярный оператор на E, «центр шара». Следовательно, «сферическое расслоение»

$$\left\{A \in \Sigma_{k,k+1} \cap W_k : \sum_{i=1}^k \lambda_i(A) = 0\right\}$$

с общим слоем $S^{\nu_{k-1}}$ есть гомотопический ретракт пространства $\Sigma_{1,k,k+1}$. Пусть

$$S_E^{\nu_{k-1}} \doteq \Big\{A \in \Sigma_{k,k+1} \cap W_k : \sum_{i=1}^k \lambda_i(A) = 0,\ Ax_i = \lambda_i(A)x_i,\\ x_i \in E \setminus \{0\},\ i = 1, \dots, k\Big\} \qquad (2)$$

— слой сферического расслоения в точке E.

Лемма 3. *Ограничение $u_{k-1}|_{S_E^{\nu_{k-1}}}$ класса $u_{k-1} \in H^{\nu_{k-1}}(M^{k-1})$, индуцированное включением*

$$M^{k-1} \supset \Sigma_{1,k,k+1} \supset S_E^{\nu_{k-1}},$$

есть образующая группы $H^{\nu_{k-1}}(S_E^{\nu_{k-1}})$.

Доказательство. Значение класса Тома u_{k-1} на цикле $S_E^{\nu_{k-1}}$ равно индексу пересечения цикла $\phi_{k-1}(S_E^{\nu_{k-1}})$ с подмногообразием $G_{k-1}(e)$ в $M^{k-1} \cap W_{k-1}$. Очевидно, что это значение не зависит от E. Выберем такое E, что $e \not\perp E$. Тогда пересечение подмногообразий $\phi_{k-1}(S_E^{\nu_{k-1}})$ и $G_{k-1}(e)$ трансверсально и состоит из одной точки A_0, определяемой условиями

$$A_0 \in G_{k-1}(e), \quad \{x \in \mathbb{R}^n : A_0 x = \lambda_1(A_0)x\} = e^\perp \cap E. \qquad \square$$

Следствие 2. *Пусть $v_{k-1} = u_{k-1}|_{\Sigma_{1,k,k+1}}$. Тогда кольцо $H^\cdot(\Sigma_{1,k,k+1})$ есть свободный модуль над кольцом $H^\cdot(Gr_k(n))$ с базисом 1, v_{k-1}. При этом $v_{k-1} \smile v_{k-1} = 0$.*

Доказательство. Структура модуля порождена структурой расслоения $\Sigma_{1,k,k+1} \cap W_k \to Gr_k(n)$. Тот факт, что модуль свободный, следует из леммы 3 и теоремы Лере–Хирша. Равенство $v_{k-1} \smile v_{k-1} = 0$ вытекает из равенства $u_{k-1} \smile u_{k-1} = 0$ (см. следствие 1). $\square$

Лемма 4. *Включения $M^{k-1} \subset M^k$ и $\Sigma_{k,k+1} \subset M^k$ индуцируют нулевой гомоморфизм приведенных групп когомологий.*

Доказательство. Имеет место включение $\phi_k(M^{k-1}) \subset M^k \setminus G_k(e)$. Следовательно, M^{k-1} содержится в стягиваемом подмножестве пространства M^k и ограничение на M^{k-1} превращает любой класс когомологий из $\widetilde{H}(M^k)$ в нулевой класс. Рассмотрим теперь включения

$$\Sigma_{1,k,k+1} \subset \Sigma_{k,k+1} \subset M^k.$$

Из следствия 2 вытекает, что включение $\Sigma_{1,k,k+1} \subset \Sigma_{k,k+1} \cong Gr_k(n)$ индуцирует инъективный гомоморфизм $H^{\cdot}(\Sigma_{k,k+1}) \to H^{\cdot}(\Sigma_{1,k,k+1})$. В то же время $\phi_k(\Sigma_{1,k,k+1}) \subset M^k \setminus G_k(e)$. Следовательно, композиция индуцированных вложениями гомоморфизмов

$$\widetilde{H}^{\cdot}(M^k) \to \widetilde{H}^{\cdot}(\Sigma_{k,k+1}) \to \widetilde{H}^{\cdot}(\Sigma_{1,k,k+1})$$

равна нулю. Стало быть, гомоморфизм $\widetilde{H}^{\cdot}(M^k) \to \widetilde{H}^{\cdot}(\Sigma_{k,k+1})$ также равен нулю. □

Пусть $X \subset \mathbb{S}$ — такое открытое подмножество в $\mathbb{S}$, что его дополнение есть окрестностный деформационный ретракт; через $\hat{\delta}\colon \widetilde{H}^i(X) \to H^{i+1}(\mathbb{B}, X)$ мы обозначаем естественный изоморфизм, индуцированный точной последовательностью пары $\mathbb{B}$, X.

Рассмотрим теперь точную последовательность Майера–Вьеториса пары $\Sigma_{k,k+1}$, M^{k-1}

$$\dots H^{i-1}(M^k) \to H^{i-1}(\Sigma_{k,k+1}) \oplus H^{i-1}(M^{k-1}) \xrightarrow{\theta} H^{i-1}(\Sigma_{1,k,k+1}) \xrightarrow{d} H^i(M^k) \dots,$$

а также ее относительный вариант

$$\dots H^i(\mathbb{B}, M^k) \to H^i(\mathbb{B}, \Sigma_{k,k+1}) \oplus H^i(\mathbb{B}, M^{k-1}) \xrightarrow{\theta} H^i(\mathbb{B}, \Sigma_{1,k,k+1}) \xrightarrow{d} H^{i+1}(\mathbb{B}, M^k) \dots.$$

Естественный изоморфизм $\hat{\delta}$ устанавливает изоморфизм этих двух длинных точных последовательностей. Более того, из леммы 4 следует, что длинная точная последовательность разбивается на короткие:

$$0 \to H^{i-1}(\Sigma_{k,k+1}) \oplus H^{i-1}(M^{k-1}) \xrightarrow{\theta} H^{i-1}(\Sigma_{1,k,k+1}) \xrightarrow{d} H^i(M^k) \to 0, \qquad (3)$$

и аналогичное утверждение справедливо для относительного варианта.

Лемма 5. *Пусть $\xi \in H^{\cdot}(\Sigma_{k,k+1})$, $\eta \in H^{\cdot}(M^{k-1})$. Тогда равенство $\hat{\delta}\xi \smile \hat{\delta}\eta = 0$ эквивалентно включению $(\xi|_{\Sigma_{1,k,k+1}} \smile \eta|_{\Sigma_{1,k,k+1}}) \in \operatorname{im}\theta$.*

Доказательство. Предложение из добавления А влечет за собой равенство

$$\hat{\delta}\xi \smile \hat{\delta}\gamma = \delta \circ d(\xi|_{\Sigma_{1,k,k+1}} \smile \eta|_{\Sigma_{1,k,k+1}}).$$

Утверждение доказываемой леммы теперь следует из точности последовательности (3) и того факта, что $\hat{\delta}$ — изоморфизм. □

Следующий шаг — описание $\operatorname{im}\theta$. Для заданных $\xi \in H^{\cdot}(\Sigma_{k,k+1})$, $\eta \in H^{\cdot}(M^{k-1})$ получаем

$$\theta(\xi \oplus \eta) = \xi|_{\Sigma_{1,k,k+1}} - \eta|_{\Sigma_{1,k,k+1}}.$$

Согласно следствию 2, ограничение $H^{\cdot}(\Sigma_{k,k+1}) \to H^{\cdot}(\Sigma_{k,k+1})|_{\Sigma_{1,k,k+1}}$ инъективно и

$$H^{\cdot}(\Sigma_{1,k,k+1}) = H^{\cdot}(\Sigma_{k,k+1})|_{\Sigma_{1,k,k+1}} \oplus (v_{k-1} \smile H^{\cdot}(\Sigma_{k,k+1})|_{\Sigma_{1,k,k+1}}).$$

Напомним, что M^{k-1} имеет гомотопический тип пространства Тома векторного расслоения над $G_{k-1}(e) \subset M^{k-1}$ с классом Тома $u_{k-1} \in H^{\nu_{k-1}}(M^{k-1})$. Рассмотрим отображение $\varrho_k \colon H^\cdot(G_{k-1}(e)) \to H^\cdot(\Sigma_{k,k+1})$, где

$$v_{k-1} \smile \varrho_k(\zeta)|_{\Sigma_{1,k,k+1}} = \pi_v(u_{k-1} \smile \zeta)|_{\Sigma_{1,k,k+1}} \qquad \forall \zeta \in H^\cdot(G_{k-1}(e)). \tag{4}$$

Тождество (4) однозначно определяет ϱ_k. Более того, отображение ϱ_k инъективно и

$$\operatorname{im}\theta = H^\cdot(\Sigma_{k,k+1})|_{\Sigma_{1,k,k+1}} \oplus (v_{k-1} \smile \operatorname{im}\varrho_k|_{\Sigma_{1,k,k+1}}). \tag{5}$$

Пространство $\Sigma_{k,k+1}$ имеет гомотопический тип грассманиана $Gr_k(n)$, а $G_{k-1}(e)$ отождествляется с грассманианом $\{F \in Gr_{k-1}(n) : F \subset e^\perp\} = Gr_{k-1}(n-1)$. Мы явным образом вычислим отображение ϱ_k в базисах, заданных клетками Шуберта грассманианов.

В последующих вычислениях мы отождествляем многообразие

$$\Sigma_{k,k+1} \cap M_{k-1} \cap W_k = (\Sigma_{k,k+1} \setminus \Sigma_{1,k,k+1}) \cap W_k$$

с грассманианом $Gr_k(n)$, причем $A \in \Sigma_{k,k+1} \cap M_{k-1} \cap W_k$ отождествляется с подпространством $\{x \in \mathbb{R}^n : Ax = \lambda_1(A)x\}$. Пространство $\Sigma_{k,k+1} \cap M_{k-1} \cap W_k$, очевидно, есть гомотопический ретракт пространства $\Sigma_{k,k+1}$. В частности, $H^\cdot(\Sigma_{k,k+1}) = H^\cdot(Gr_k(n))$.

Пусть $e_1 = e, e_2, \dots, e_n$ — ортогональный базис пространства $\mathbb{R}^n$. Отвечающие этому базису замкнутые клетки Шуберта в $Gr_k(n)$ суть циклы, задающие аддитивный базис в гомологиях $H_\cdot(Gr_k(n))$ (см. добавление B). Рассматривается также двойственный *базис Шуберта* в когомологиях $H^\cdot(Gr_k(n))$. Клетки Шуберта размерности $r \geqslant 0$ находятся во взаимно однозначном соответствии с разбиениями числа r на не более чем k целых положительных слагаемых, каждое из которых не превосходит $n-k$.

Аналогично, клетки Шуберта, отвечающие базису $e_2, \dots, e_n$ пространства $e^\perp = \mathbb{R}^{n-1}$, определяют базис Шуберта в когомологиях $H^\cdot(Gr_{k-1}(n-1)) = H^\cdot(G_{k-1}(e))$. Элементы размерности r этого базиса находятся во взаимно однозначном соответствии с разбиениями числа r на менее чем k целых положительных слагаемых, каждое из которых не превосходит $n-k$.

Лемма 6. *Отображение $\varrho_k \colon H^\cdot(G_{k-1}(e)) \to H^\cdot(Gr_k(n))$ переводит элемент базиса Шуберта в когомологиях $H^\cdot(G_{k-1}(e))$, отвечающий некоторому разбиению на менее чем k слагаемых, в элемент базиса Шуберта в когомологиях $H^\cdot(Gr_k(n))$, отвечающий тому же самому разбиению*!

Доказательство. Мы рассмотрим сопряженное отображение $\varrho_k^* \colon H_\cdot(Gr_k(n)) \to H_\cdot(G_{k-1}(e))$. Требуется доказать, что ϱ_k^* переводит в нуль классы Шуберта в $H_\cdot(Gr_k(n))$, отвечающие разбиениям на в точности k слагаемых, в то время как классы, отвечающие разбиениям на меньше чем k слагаемых, переходят в классы Шуберта в $H_\cdot(G_{k-1}(e))$, отвечающие тем же разбиениям.

Пусть $C \subset Gr_k(n)$ — некоторый цикл Шуберта и $[C]$ — его класс гомологий. Положим $S_C^{\nu_{k-1}} = \bigcup_{E \in C} S_E^{\nu_{k-1}}$, см. (2). Тогда $\varrho_k^*[C]$ — класс гомологий пересечения $\phi_{k-1}(S_C^{\nu_{k-1}})$ с $G_{k-1}(e) = Gr_{k-1}(n-1)$. Иными словами, отображение ϱ_k^* по существу определяется многозначным отображением $\mathfrak{r}_k \colon Gr_k(n) \dashrightarrow G_{k-1}(e)$, где $\mathfrak{r}_k(E) = \phi_{k-1}(S_E^{\nu_{k-1}}) \cap G_{k-1}(e)$, $E \in Gr_k(n)$.

Нетрудно видеть, что $\mathfrak{r}_k(E) = \{F \in Gr_{k-1}(n-1) : F \subset E \cap e^\perp\}$. В частности, отображение $\mathfrak{r}_k$ однозначно на $\{E \in Gr_k(n) : E \not\geq e\}$; если $E \not\geq e$, то $\mathfrak{r}_k(E) = E \cap e^\perp$. Однозначное отображение $F \mapsto (F + \mathbb{R}e)$, $F \in Gr_{k-1}(n-1)$, является обратным к $\mathfrak{r}_k$.

Пусть $\mathfrak{d}$ — некоторый символ Шуберта для $Gr_k(n)$, начинающийся с единицы. Тогда $\mathfrak{r}_k(Sc_k^{\mathfrak{d}}(n)) = Sc_{k-1}^{\mathfrak{d}'}(n-1)$, причем символ $\mathfrak{d}'$ получается из символа $\mathfrak{d}$ удалением первой единицы. В самом деле, $e \in E$ для любого $E \in Sc_k^{\mathfrak{d}}(n)$, и требуемое равенство легко следует из определений.

Предположим теперь, что $\mathfrak{d}$ — некоторый символ Шуберта для $Gr_k(n)$, начинающийся с нуля. Покажем, что $\mathfrak{r}_k(Sc_k^{\mathfrak{d}}(n))$ содержится в объединении клеток Шуберта размерности, строго меньшей, чем размерность клетки $Sc_k^{\mathfrak{d}}(n)$. Этот факт завершает доказательство леммы 6.

Пусть $F \in Sc_k^{\mathfrak{d}}(n)$ и $\hat{F} \in \mathfrak{r}_k(Sc_{k-1}^{\hat{\mathfrak{d}}}(n-1))$. Напомним, что

$$d_i^{\mathfrak{d}} = \min\{j : \dim(E_j \cap F) = i\}, \qquad i = 1, \dots, k,$$
$$d_i^{\hat{\mathfrak{d}}} = \min\{j : \dim(E_{j+1} \cap \hat{F}) = i\}, \qquad i = 1, \dots, k-1,$$

где $E_j = \operatorname{span}\{e_1, \dots, e_j\}$, $j = 1, \dots, n$. В то же время,

$$\dim(E_j \cap F_j) - 1 \leqslant \dim(E_j \cap \hat{F}_j) \leqslant \dim(E_j \cap F_j);$$

следовательно, $d_i^{\mathfrak{d}} \leqslant d_i^{\hat{\mathfrak{d}}} + 1 \leqslant d_{i+1}^{\mathfrak{d}}$. Кроме того, $d_1^{\mathfrak{d}} > 1$, поскольку символ $\mathfrak{d}$ начинается с 0. Мы получаем

$$\begin{aligned}\dim Sc_{k-1}^{\hat{\mathfrak{d}}}(n-1) &= \sum_{i=1}^{k-1}(d_i^{\hat{\mathfrak{d}}} - i) \\ &= \sum_{i=1}^{k-1}((d_i^{\hat{\mathfrak{d}}} + 1) - (i+1)) \leqslant \sum_{i=2}^{k}(d_i^{\mathfrak{d}} - i) < \dim Sc_k^{\mathfrak{d}}(n). \qquad \square\end{aligned}$$

Лемма 7. *Пусть $w \in H^1(Gr_k(n))$ — первый класс Штифеля–Уитни тавтологического расслоения и $\xi \in \operatorname{im} \varrho_k$. Включение $(w \smile \xi) \in \operatorname{im} \varrho_k$ справедливо в том и только том случае, когда ξ есть сумма классов Шуберта, отвечающих разбиениям на строго меньше чем $k-1$ слагаемых.*

Доказательство. Пусть Π_j — линейная оболочка классов Шуберта, отвечающих разбиениям на в точности j слагаемых, $j = 0, 1, \dots, k$, и ξ — класс Шуберта, отвечающий разбиению $a_1 + \dots + a_j$. Из формулы Пьери (см. добавление B) вытекает, что разность произведения $w \smile \xi$ и класса Шуберта, отвечающего разбиению $1 + a_1 + \dots + a_j$, лежит в Π_j. С другой стороны, согласно лемме 6, $\operatorname{im} \varrho_k = \bigoplus_{j=0}^{k-1} \Pi_j$. $\square$

Теперь мы готовы к вычислению $\ker \mathbf{d}_k$ и, таким образом, завершению доказательства теоремы 2. Пусть $\xi \in H^{\cdot}(M^{k-1})$; тогда $\xi = \hat{\delta}(u_{k-1} \smile \zeta)$ для некоторого $\zeta \in H^{\cdot}(G_{k-1}(e))$, определенного единственным образом. Мы имеем

$$\mathbf{d}_k(\xi) = \hat{\delta}(\gamma_k) \smile \hat{\delta}(u_{k-1} \smile \zeta),$$

где $\gamma_k \in H^1(\Sigma_{k,k+1})$ — класс, определенный в §2. Согласно лемме 5, равенство $\mathbf{d}_k(\xi) = 0$ имеет место в том и только том случае, когда

$$(u_{k-1} \smile \zeta)|_{\Sigma_{1,k,k+1}} \smile \gamma_k|_{\Sigma_{1,k,k+1}} = (v_{k-1} \smile (\varrho_k(\zeta) \smile \gamma_k)|_{\Sigma_{1,k,k+1}}) \in \operatorname{im}\theta.$$

Далее, $Gr_k(n) = \Sigma_{k,k+1} \cap M_{k-1} \cap W_k$ есть гомотопический ретракт пространства $\Sigma_{k,k+1}$, а $\gamma_k|_{Gr_k(n)}$ — первый класс Штифеля–Уитни тавтологического расслоения грассманиана $Gr_k(n)$, т.е. $\gamma_k|_{Gr_k(n)} = w$ (см. предложение 2). Из равенства (5) теперь следует, что $\mathbf{d}_k(\xi) = 0$ в том и только том случае, когда $(\varrho_k(\zeta) \smile w) \in \operatorname{im}\varrho_k$.

Из леммы 7 и инъективности ϱ_k вытекает, что $\dim\ker\mathbf{d}_k$ равно количеству разбиений на не более чем $k-2$ натуральных слагаемых, каждое из которых не превосходит $n-k$. Иными словами, $\dim\ker\mathbf{d}_k = \binom{n-2}{k-2}$. В то же время, изоморфизмы $H^{\cdot}(\mathbb{B}, M^{k-1}) \cong \widetilde{H}^{\cdot}(M^{k-1}) \cong H^{\cdot}(Gr_{k-1}(n-1))$ влекут за собой равенство $\dim H^{\cdot}(\mathbb{B}, M^{k-1}) = \binom{n-1}{k-1}$. Теперь воспользуемся «треугольником Паскаля» $\binom{n-1}{k-1} = \binom{n-2}{k-2} + \binom{n-2}{k-1}$ и получим

$$\dim H^{\cdot}(\mathscr{B}, M^{k-1}) = \dim\ker\mathbf{d}_k + \dim\ker\mathbf{d}_{k+1}. \qquad \square$$

A. Одно свойство когомологического произведения

Пусть M — симплициальный комплекс, а $X \subset M$ — его подкомплекс; обозначим символом $\delta_X \colon H^*(X) \to H^{*+1}(M, X)$ связывающий гомоморфизм в точной когомологической последовательности пары M, X. Пусть $Y \subset M$ — еще один подкомплекс и $d \colon H^*(X \cap Y) \to H^{*+1}(X \cup Y)$ — связывающий гомоморфизм в точной когомологической последовательности Майера–Вьеториса пары X, Y.

Предложение. *Пусть* $\xi \in H^{\cdot}(X)$, $\eta \in H^{\cdot}(Y)$; *тогда*

$$\delta_X\xi \smile \delta_Y\eta = \delta_{X\cup Y} \circ d(\xi|_{X\cap Y} \smile \eta|_{X\cap Y}).$$

Доказательство. Положим $\zeta = d(\xi|_{X\cap Y} \smile \eta|_{X\cap Y})$. Пусть x и y — коциклы, представляющие когомологические классы ξ и η. Представителем класса ζ служит любой коцикл z, такой, что

$$z|_X = \delta u, \quad z|_Y = \delta v, \quad u|_{X\cap Y} - v|_{X\cap Y} = x|_{X\cap Y} \smile y|_{X\cap Y} \qquad (A)$$

для некоторых коцепей u, v. Можно действовать следующим образом: продолжить x и y до коцепей $\hat{x}$ и $\hat{y}$ на $X \cup Y$ и положить $z = \hat{x} \smile \delta\hat{y}$. Тогда условия (A) выполняются для $u = (-1)^{\dim x} x \smile \hat{y}|_X$, $v = 0$ и мы получаем $\delta z = \delta\hat{x} \smile \delta\hat{y}$. $\square$

B. Клетки Шуберта

Клетки Шуберта задают структуру клеточных комплексов на грассманианах. Эти клетки индексируются *символами Шуберта.* Символ Шуберта $\mathfrak{d}$ для $Gr_k(n)$ есть последовательность нулей и единиц, содержащая ровно k единиц и $n-k$ нулей. Общее число символов для $Gr_k(n)$ (т.е. число клеток клеточного комплекса) равно $\binom{n}{k}$. Обозначим через $d_i^{\mathfrak{d}}$ номер i-й единицы в последовательности; тогда $1 \leqslant d_1^{\mathfrak{d}} < \cdots < d_k^{\mathfrak{d}} \leqslant n$.

Мы рассматриваем одновременно вещественный и комплексный случаи. Пусть $e_1,\dots,e_n$ — некоторый базис пространства $\mathbb{R}^n$ в вещественном и пространства $\mathbb{C}^n$ в комплексном случае. Положим

$$E_i=\operatorname{span}\{e_1,\dots,e_i\},\qquad i=1,\dots,n.$$

Клетка Шуберта $Sc_k^{\mathfrak{d}}(n)$ определяется следующим образом:

$$Sc_k^{\mathfrak{d}}(n)=\{F\in Gr_k(n):\dim(F\cap E_{d_i^{\mathfrak{d}}})=i,\ \dim(F\cap E_{d_i^{\mathfrak{d}}-1})=i-1\}.$$

Имеется взаимно однозначное соответствие между символами Шуберта для $Gr_k(n)$ и разбиениями неотрицательных целых чисел на не более чем k целых положительных слагаемых, каждое из которых не превосходит $n-k$. Слагаемые, отвечающие символу $\mathfrak{d}$, суть числа нулей слева от каждой из единиц, входящих в символ. Иными словами, слагаемые суть ненулевые члены последовательности $(d_i^{\mathfrak{d}}-i)$, $i=1,\dots,k$.

Размерность клетки Шуберта, отвечающей разбиению числа r, равна r в вещественном и $2r$ в комплексном случае. Таким образом, справедливо равенство

$$\dim Sc_k^{\mathfrak{d}}(n)=\epsilon\sum_{i=1}^{k}(d_i^{\mathfrak{d}}-i),$$

где $\epsilon=1$ в вещественном и $\epsilon=2$ в комплексном случае. Замыкание $\overline{Sc_k^{\mathfrak{d}}(n)}$ есть цикл с коэффициентами в $\mathbb{Z}_2$ в вещественном и цикл с коэффициентами в $\mathbb{Z}$ в комплексном случае; эти циклы называются *циклами Шуберта*. В обоих случаях классы гомологий циклов Шуберта образуют аддитивный базис полной группы гомологий грассманиана $Gr_k(n)$ (с коэффициентами в $\mathbb{Z}_2$ в вещественном и с коэффициентами в $\mathbb{Z}$ в комплексном случае). Более того, в комплексном случае группы гомологий свободны.

Двойственный базис полной группы когомологий грассманиана $Gr_k(n)$ называется *базисом Шуберта*. Напомним, что элементы этого базиса размерности r, т. е. r-мерные *классы Шуберта*, находятся во взаимно однозначном соответствии с разбиениями числа r на не более чем k натуральных слагаемых, каждое из которых не превосходит $n-k$.

Характеристические классы Штифеля–Уитни (в вещественном случае) и Чжэня (в комплексном случае) суть классы Шуберта, отвечающие разбиениям на единицы. В частности, класс Штифеля–Уитни w_1 в вещественном и класс Чжэня c_1 в комплексном случае отвечают единственному «разбиению» числа 1.

Имеется полезная *формула Пьери*, вычисляющая когомологическое произведение класса Шуберта, отвечающего разбиению с одним слагаемым a, и класса Шуберта, отвечающего произвольному разбиению $b_1+\dots+b_j$, где $b_1\leqslant\dots\leqslant b_j$. Произведение равно сумме всех классов Шуберта размерности $a+\sum_{i=1}^{j}b_i$, отвечающих таким разбиениям $c_0+c_1+\dots+c_j$, что $b_{i-1}\leqslant c_i\leqslant b_i$, $i=1,\dots,j$, $b_0=0$.

Подробности см. в [4, гл. 5] и [3, гл. 1.5].

Литература

[1] В. И. Арнольд, *Моды и квазимоды*, Функц. анализ и его прил., **6**:2 (1972), 12–20.
[2] V. I. Arnold, *Remarks on eigenvalues and eigenvectors of Hermitian matrices*, *Berry phase*, *adiabatic connections and quantum Hall effect*, Selecta Math., **1**:1 (1995), 1–19.

[3] Ф. Гриффитс, Дж. Харрис, *Принципы алгебраической геометрии*, тт. 1, 2, Мир, М., 1982.
[4] Дж. Милнор, Дж. Сташеф, *Характеристические классы*, Мир, М., 1979.
[5] M. Shapiro, A. Vainshtein, *Stratification of Hermitian matrices and the Alexander mapping*, C. R. Acad. Sci., Sér. I, **321**:12 (1995), 1599–1604.

SISSA, Триест
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
e-mail: agrachevaa@gmail.com

Поступило в редакцию
15 июля 2011 г.