А. А. Аграчев, Инвариантные лагранжевы подмногообразия диссипативных систем, *УМН*, 2010, том 65, выпуск 5(395), 185–186

2010 г. сентябрь — октябрь *т. 65, вып. 5 (395)*
УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

В МОСКОВСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ

СООБЩЕНИЯ МОСКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Инвариантные лагранжевы подмногообразия диссипативных систем

А. А. Аграчёв

Пусть M – компактное риманово многообразие класса C^k, $k \geqslant 2$, с римановой структурой $(\xi,\eta) \mapsto \langle I_q^{-1}\xi,\eta\rangle$, $\xi,\eta \in T_qM$, $q \in M$, где $I_q\colon T_q^*M \to T_qM$ – самосопряженное линейное отображение, определяющее положительно определенную квадратичную форму $z \mapsto \langle z, I_q z\rangle$, $z \in T_q^*M$.

Пусть $V \in C^k(M)$ и ω – такая замкнутая дифференциальная 1-форма на M класса C^k, что $\nabla\omega = 0$, где $\nabla\omega$ – ковариантная производная формы ω. Рассмотрим гамильтониан $H \in C^k(T^*M)$, заданный формулой

$$H(z) = \frac{1}{2}\,\langle I_q(z+\omega_q), z+\omega_q\rangle + V(q), \qquad z \in T_q^*M.$$

Пусть $\vec{H}$ – гамильтоново векторное поле на T^*M, отвечающее гамильтониану H, а ℓ – "вертикальное" эйлерово векторное поле векторного расслоения $T^*M \to M$. В локальных координатах $z=(p,q)$, $p,q \in \mathbb{R}^n$, $T_q^*M = (\mathbb{R}^n, q)$, эти объекты имеют вид: $H(p,q) = \dfrac{1}{2}\,(p+\omega(q))^* I_q(p+\omega(q)) + V(q)$, $\vec{H}(p,q) = \sum_i \left(\dfrac{\partial H}{\partial p^i}\,\dfrac{\partial}{\partial q^i} - \dfrac{\partial H}{\partial q^i}\,\dfrac{\partial}{\partial p^i}\right)$, $\ell(p,q) = \sum_i p^i \dfrac{\partial}{\partial p^i}$.

Рассмотрим диссипативную систему $\dot z = \vec{H}(z) - \alpha\ell(z)$, где α – положительная константа. Нетрудно видеть, что любая ограниченная траектория этой системы лежит в множестве

$$B_H \stackrel{\mathrm{def}}{=} \Bigl\{z \in T^*M : H(z-\omega_{\pi(z)}) \leqslant \max_{q\in M} H(0_q)\Bigr\},$$

где 0_q – начало координат векторного пространства T_q^*M и $\pi\colon T^*M \to M$, $\pi(T_q^*M)=q$.

Для всякого $z \in T^*M$ обозначим через $\rho(z)$ максимальное собственное значение симметричного оператора $\xi \mapsto \mathfrak{R}(\xi, I_q z)I_q z + \nabla_\xi(\nabla V)$, $\xi \in T_qM$, где $\mathfrak{R}$ – риманова кривизна. Наконец, положим $r = \max\{\rho(z) : z \in B_H\}$.

Обозначим Ω^α множество всех таких абсолютно непрерывных кривых $\gamma\colon \mathbb{R}_+ \to M$, что интеграл $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\langle I_{\gamma(t)}^{-1}\dot\gamma(t), \dot\gamma(t)\rangle\,dt$ сходится. Введем функционал *дисконтного действия*

$$\mathfrak{I}_\alpha(\gamma) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\biggl(\frac{1}{2}\,\langle I_{\gamma(t)}^{-1}\dot\gamma(t), \dot\gamma(t)\rangle - V(\gamma(t)) + \langle \omega_{\gamma(t)}, \dot\gamma(t)\rangle\biggr)\,dt, \qquad \gamma \in \Omega_\alpha.$$

Теорема 1. *Пусть* $u(q) = -\inf\{\mathfrak{I}_\alpha(\gamma) : \gamma \in \Omega_\alpha,\ \gamma(0)=q\}$, $q \in M$. *Если* $r \leqslant 0$ *или* $0 < r < \alpha^2/4$ *и* $k < 2/(1-2\sqrt{r}/\alpha)$, *то*:

1) $u \in C^k(M)$ *и отображение* $(H,\alpha) \mapsto u$ *непрерывно в топологии* C^2;

2) *функция* u *удовлетворяет модифицированному уравнению Гамильтона–Якоби* $H(du)+\alpha u=0$, *а* $\{d_q u : q\in M\}\subset T^*M$ *– инвариантное подмногообразие системы* $\dot z=\vec H(z)-\alpha\ell(z)$;

3) *существует такая содержащая* 0 *окрестность* $\mathscr{O}$ *функции* u *в* $C^2(M)$, *что для любого* $v_0\in\mathscr{O}$ *классическое решение* v_t *задачи Коши*

$$\frac{\partial u_t}{\partial t}+H(du_t)+\alpha u_t=0, \qquad u_0=v_0,$$

определено для всех $t\geqslant 0$ *и* $\|dv_t-du\|_{C^1}\to 0$ *с экспоненциальной скоростью при* $t\to+\infty$.

Замечание. Теорема 1 справедлива для гамильтонианов на $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ вида $H(p,q)=|p+a|^2/2+V(q)$, где $a\in\mathbb{R}^n$ – постоянный вектор и V – гладкий периодический потенциал. Здесь r – максимум собственных чисел матриц d^2V/dq^2, $q\in\mathbb{R}^n$. Если $r<\alpha^2/4$, то уравнение

$$\frac{1}{2}\left|\frac{du}{dq}+a\right|^2+V(q)+\alpha u=0$$

имеет периодическое решение u класса C^k, где k – максимальное целое число, строго меньшее, чем $2/(1-\sqrt{1-4r/\alpha^2}\,)$. При этом $\{(du/dq,q) : q\in\mathbb{R}^n\}$ – инвариантное подмногообразие системы

$$\dot q=p+a, \qquad \dot p=-\frac{dV}{dq}-\alpha p.$$

Доказательство теоремы 1 основано на результатах работ [1] и [2]. В самом деле, теорема 1 есть некоторое усиление результатов работы [1]. А именно, рассматривается более широкий класс гамильтонианов (допускаются ненулевые формы ω), улучшается гладкость функции u и формулируются свойства устойчивости полученного решения. В действительности, форма ω не влияет на каноническую связность и операторы кривизны, так что рассмотрение более общих гамильтонианов не требует существенного изменения доказательства.

Улучшение гладкости и устойчивость опираются на работу [2]. В самом деле, предложение 1 из [1] влечет, что $\{d_q u : q\in M\}$ – нормально гиперболическое инвариантное подмногообразие (см. определение в [2]) потока, порожденного векторным полем $\vec H(z)-\alpha\ell(z)$. Более того, это нормально гиперболическое инвариантное подмногообразие имеет нулевое неустойчивое подрасслоение и, в действительности, может быть названо "нормально устойчивым" инвариантным подмногообразием. Теорема 4.1 из [2] содержит оценки степени гладкости нормально гиперболического инвариантного подмногообразия в терминах показателей Ляпунова, а анализ доказательства предложения 1 из [1] дает явные оценки показателей Ляпунова через константы r и α.

Список литературы

[**1**] А. А. Аграчев, *Дифференциальные уравнения и топология. I*, Тр. МИАН, **268**, МАИК, М., 2010, 24–39; англ. пер.: A. A. Agrachev, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **268** (2010), 17–31.

[**2**] M. W. Hirsch, C. C. Pugh, M. Shub, *Invariant manifolds*, Lecture Notes in Math., **583**, Springer-Verlag, Berlin, 1977.

А. А. Аграчёв (A. A. Agrachev)
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН;
International School for Advanced Studies (SISSA)
E-mail: agrachev@mi.ras.ru, agrachev@sissa.it

Представлено В. М. Закалюкиным
Принято редколлегией
08.07.2010