

Общероссийский математический портал

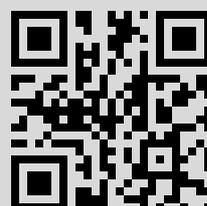
А. А. Аграчев, Качение шаров и октавы, *Тр. МИАН*, 2007, том 258, 17–27

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением  
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 95.129.140.250

17 ноября 2015 г., 15:38:24



УДК 514.8

## Качение шаров и октавы

©2007 г. А. А. Аграчев<sup>1</sup>

Поступило в ноябре 2006 г.

В этой полубзорной работе выявлены скрытые симметрии одной классической неголономной кинематической модели и сделана попытка объяснить геометрический смысл важнейших инвариантов векторных распределений.

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Эта статья написана к 70-летию Владимира Игоревича Арнольда. Это всего лишь скромный математический сувенир, но я надеюсь, что, рассматривая его, Владимир Игоревич получит некоторое удовольствие. Содержание статьи хорошо описывается представленной ниже криптограммой. На рис. 1 изображены система корней исключительной группы Ли  $G_2$  — группы автоморфизмов алгебры октав (чисел Кэли) и две касающиеся друг друга окружности с отношением диаметров 3:1.

Все начинается с классической и достаточно важной в робототехнике неголономной кинематической системы: твердое тело катится по заданной поверхности без проскальзываний и прокручиваний. Заданная поверхность есть поверхность другого твердого тела, и ситуация в действительности симметрична: одно тело катится по другому. Поверхности тел предполагаются гладкими, и, кроме того, их форма такова, что они не могут касаться друг друга одновременно более чем в одной точке.

Пространство конфигураций описанной системы пятимерно: координаты точки касания на каждой из поверхностей дают четыре параметра, а пятый параметр измеряет взаимную ориентацию тел в точке касания.

Теперь представим себе одно тело неподвижным, а другое будем по нему катать. Ясно, что подвижное тело можно прокатить вдоль любой кривой, нарисованной на неподвижном, причем если начальная конфигурация задана, то это можно сделать ровно одним способом. Иными словами, допустимые движения, начинающиеся с заданной конфигурации, параметризуются кривыми на двумерной поверхности с заданной начальной точкой. В то же время нетрудно показать (см. [2, гл. 24]), что допустимыми движениями можно добраться из любой конфигурации до любой другой, если только наши тела не конгруэнтны. Все это означает, что мы имеем дело с типичной неголономной системой, поскольку, напомним, конфигурационное пространство пятимерно.

Теперь обратимся к математике. Допустимые скорости (т.е. скорости допустимых движений) образуют векторное распределение ранга 2 на конфигурационном пространстве. Это распределение инволютивно в том и только том случае, когда наши тела суть шары одинакового радиуса. Пусть векторные поля  $f, g$  образуют базис нашего распределения в некоторой области конфигурационного пространства, символ  $[f, g]$  обозначает коммутатор (скобку Ли) полей  $f$  и  $g$ , а  $q$  — точка рассматриваемой области. Оказывается, что векторы  $f(q), g(q), [f, g](q)$  в том и только том случае линейно независимы, когда две поверхности имеют разную кривизну

<sup>1</sup>SISSA/ISAS, Trieste, Italy; Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Москва, Россия.  
E-mail: agrachev@sissa.it

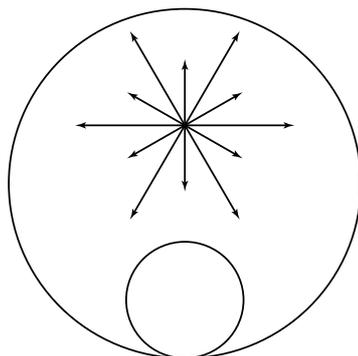


Рис. 1

в точке касания, отвечающей конфигурации  $q$ . Более того, если поверхности имеют разную кривизну в точке касания, то справедливо и более сильное условие

$$f(q) \wedge g(q) \wedge [f, g](q) \wedge [f, [f, g]](q) \wedge [g, [g, f]](q) \neq 0. \quad (1)$$

Иными словами, базисные поля, их скобка Ли и скобки Ли второго порядка линейно независимы. Все эти вычисления приведены в [2, гл. 24].

Ростки векторных распределений ранга 2 в  $\mathbb{R}^5$ , удовлетворяющие условию (1), впервые исследовались Эли Картаном в его знаменитой работе [6]. Простой подсчет параметров показывает, что 5 — наименьшая размерность, в которой классификация ростков распределений общего положения должна иметь функциональные модули. Такие модули имеются у ростков распределений рангов 2 и 3 в  $\mathbb{R}^5$ , причем классификации для обоих значений ранга по существу эквивалентны и достаточно изучить случай ранга 2.

Картан нашел важнейший тензорный инвариант — некоторую форму четвертой степени на распределении; двойное отношение корней этой формы и есть искомым функциональный инвариант. Все ростки с тождественно равной нулю формой Картана эквивалентны, мы будем называть такие ростки *плоскими*. Росток распределения ранга 2 является плоским в том и только том случае, когда он обладает базисом, порождающим пятимерную нильпотентную алгебру Ли. Картан показал, что группа симметрий плоского распределения есть некомпактная вещественная форма 14-мерной исключительной группы Ли  $G_2$ . Во всех остальных случаях размерность группы симметрий не превосходит 7.

Какое это имеет отношение к качению тел? Достаточно ясно, что распределение, определяемое условиями непроскальзывания и непрокручивания, вообще не имеет симметрий в случае тел общего положения. Группа симметрий этого распределения в том и только том случае действует транзитивно на пространстве конфигураций, когда поверхность каждого из тел имеет постоянную кривизну. Мы ограничимся случаем неотрицательных кривизн, в этом случае наши поверхности — сферы (одна из них может быть плоскостью, т.е. сферой бесконечного радиуса).

Изометрии обеих сфер задают естественные симметрии пространства конфигураций; они образуют компактную шестимерную группу Ли. Первым, кто обнаружил, что в случае пары сфер с отношением диаметров 3:1 распределение “непроскальзывания и непрокручивания” плоское, был Роберт Брайнт. Он, правда, никогда не обнаружил своих записей на этот счет, утверждая, что лишь скрупулезно следовал методу Картана. Кроме того, оставалась совершенно непонятной природа дополнительных симметрий (размерность группы симметрий подскакивает с 6 до 14, когда отношение диаметров становится 3:1!). К сожалению, метод Картана в этом смысле мало что дает: конструкция инвариантов основана на запутанных процедурах редукции и продолжения в пространствах струй, так что всякая связь с исходной геометрической задачей теряется задолго до конца пути.

Цель настоящей работы — наконец разгадать эту головоломку. В разд. 2 описана простая твисторная модель пространства конфигураций, а также распределения непроскальзывания и непрокручивания в случае шаров; роль группы  $G_2$  из этой модели еще неясна.

Некомпактная форма группы  $G_2$  есть группа автоморфизмов *сплит-октав* — гиперболического аналога обычных октав, когда положительно определенная квадратичная форма (квадрат нормы октавы) заменяется невырожденной знаконеопределенной квадратичной формой. Сплит-октавы обладают нетривиальными делителями нуля (нули знаконеопределенной формы суть делители нуля). Простое квадратичное преобразование превращает распределение непроскальзывания и непрокручивания в распределение делителей нуля сплит-октав в случае, когда диаметры шаров относятся, как 3:1. Это все описано в разд. 3.

В разд. 4 дан набросок недавно развитого вариационного метода построения дифференциальных инвариантов векторных распределений; качение тел оказывается, таким образом, включенным в весьма общий контекст.

## 2. ТВИСТОРНАЯ МОДЕЛЬ

Мы исследуем допустимые движения пары шаров  $B_r$  и  $B_R$ , катящихся один по другому без проскальзывания и прокручивания. Здесь  $r$  и  $R$  — радиусы шаров. Мгновенная конфигурация пары шаров определяется сохраняющей ориентацию изометрией касательных плоскостей к сферам  $S_r = \partial B_r$  и  $S_R = \partial B_R$  в точках касания. Иными словами, пространство конфигураций нашей кинематической системы имеет вид

$$M_{R,r} = \{ \mu: T_{q_1} S_r \rightarrow T_{q_2} S_R \mid q_1 \in S_r, q_2 \in S_R, \mu - \text{изометрия ориентированных плоскостей} \}.$$

Нетрудно видеть, что  $M_{R,r}$  — гладкое пятимерное многообразие. Движения системы суть семейства изометрий  $\mu(t): T_{q_1(t)} S_r \rightarrow T_{q_2(t)} S_R, t \in \mathbb{R}$ . Условие непроскальзывания записывается следующим образом:

$$\mu(t)(\dot{q}_1(t)) = \dot{q}_2(t).$$

Условие непрокручивания означает, что семейство изометрий  $\mu(t)$  преобразует векторные поля, параллельные вдоль кривой  $q_1(t)$ , в векторные поля, параллельные вдоль кривой  $q_2(t)$ .

Эти два условия определяют векторное распределение  $D^{R,r}$  ранга 2 на многообразии  $M_{R,r}$ . Таким образом,  $D^{R,r} = \bigcup_{\mu \in M_{R,r}} D_\mu^{R,r}$ , где  $D_\mu^{R,r}$  — двумерное подпространство пятимерного пространства  $T_\mu M_{R,r}$ ; допустимые движения в пространстве конфигураций системы из двух шаров — это в точности интегральные кривые распределения  $D^{R,r}$ . Всякое допустимое движение однозначно определяется начальной конфигурацией и кривой точек касания на одной из двух сфер, причем кривая может быть произвольной. На формальном геометрическом языке это означает, что подпространство  $D_\mu^{R,r} \subset T_\mu M_{R,r}$ , где  $\mu: T_{q_1} \rightarrow T_{q_2}$ , взаимно однозначно проектируется на  $T_{q_1} S_r$  и на  $T_{q_2} S_R \forall \mu \in M_{R,r}$ .

Чтобы двигаться дальше, нам будет удобно отождествить  $S_r$  и  $S_R$  с единичной сферой в  $\mathbb{R}^3$ , меняя лишь расстояние (масштаб), а не множество точек. Таким образом,

$$M_{R,r} = \{ \mu: q_1^\perp \rightarrow q_2^\perp \mid q_i \in \mathbb{R}^3, |q_i| = 1, i = 1, 2, R|\mu(v)| = r|v| \forall v \in q_1^\perp \}.$$

Пусть  $\rho = \frac{R}{r}$ ; отображение подобия  $\iota_\rho: \mu \mapsto \rho\mu, \mu \in M_{R,r}$ , преобразует  $M_{R,r}$  в  $M_{1,1}$ . Положим  $D^\rho = \iota_{\rho*} D^{R,r}$ . Распределение  $D^\rho$  на  $M_{1,1}$  определяется “отмасштабированным” условием непроскальзывания

$$\mu(\dot{q}_1(t)) = \rho\dot{q}_2(t)$$

и условием непрокручивания, которое остается неизменным.

Начиная с этого момента мы рассматриваем фиксированное пространство  $M_{1,1}$ , снабженное семейством распределений  $D^\rho$ , вместо семейства пар  $(M_{R,r}, D^{R,r})$ . Для того чтобы явно описать распределения  $D^\rho$ , мы воспользуемся классической кватернионной параметризацией сферического расслоения  $\mathfrak{p}: \mathcal{S} \rightarrow S^2$  единичной сферы  $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ , где

$$\mathcal{S} = \{(q, v) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \mid |q| = |v| = 1, \langle q, v \rangle = 0\}, \quad \mathfrak{p}(q, v) = q.$$

Напомним эту параметризацию. Прежде всего мы отождествляем пространство  $\mathbb{R}^3$  с пространством чисто мнимых кватернионов:

$$\mathbb{R}^3 = \{\alpha i + \beta j + \gamma k \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{H}.$$

Пусть  $S^3 = \{w \in \mathbb{H} \mid |w| = 1\}$  — группа унитарных кватернионов; тогда  $\mathfrak{h}: S^3 \rightarrow S^2$ ,  $\mathfrak{h}(w) = \bar{w}iw$  — классическое расслоение Хопфа, а отображение

$$\Psi: S^3 \rightarrow \mathcal{S}, \quad \Psi(w) = (\bar{w}iw, \bar{w}jw)$$

является двулиственным накрытием. Кроме того, диаграмма

$$\begin{array}{ccc} S^3 & \xrightarrow{\Psi} & \mathcal{S} \\ \downarrow \mathfrak{h} & & \downarrow \mathfrak{p} \\ S^2 & \xlongequal{\quad} & S^2 \end{array}$$

коммутативна, следовательно,  $\Psi$  есть послойное отображение расслоения  $\mathfrak{h}: S^3 \xrightarrow{S^1} S^2$  на расслоение  $\mathfrak{p}: \mathcal{S} \xrightarrow{S^1} S^2$ , индуцирующее двулистное накрытие слоев. Слои расслоения  $\mathfrak{h}: S^3 \rightarrow S^2$  суть классы смежности  $\{e^{i\theta}w \mid \theta \in \mathbb{R} \bmod 2\pi\}$  однопараметрической подгруппы, порожденной кватернионом  $i$ .

Векторы, ортогональные слоям, образуют распределение

$$\text{span}\{jw, kw\} \subset T_w S^3, \quad w \in S^3.$$

Это распределение есть связность на главном расслоении  $\mathfrak{h}: S^3 \rightarrow S^2$ . Нетрудно видеть, что отображение  $\Psi$  переводит эту связность в связность Леви-Чивита на расслоении  $\mathfrak{p}: \mathcal{S} \rightarrow S^2$ , определяющую обычный параллельный перенос на сфере  $S^2$ .

Теперь все готово для описания кватернионной модели конфигурационного пространства  $M_{1,1}$  (точнее, двулистного накрытия этого пространства) и распределений  $D^\rho$  непроскальзывания и непрокручивания. Для любых  $w_1, w_2 \in S^3$  существует единственная сохраняющая ориентацию изометрия слоя

$$\mathfrak{h}^{-1}(\mathfrak{h}(w_1)) = \{e^{i\theta}w_1 \mid \theta \in \mathbb{R} \bmod 2\pi\}$$

на слой  $\mathfrak{h}^{-1}(\mathfrak{h}(w_2))$ , переводящая  $w_1$  в  $w_2$ . Эта изометрия переводит  $e^{i\theta}w_1$  в  $e^{i\theta}w_2$ ; при этом пары  $(w_1, w_2)$  и  $(w'_1, w'_2)$  в том и только том случае определяют одну и ту же изометрию, когда  $w'_1 = e^{i\theta'}w_1$ ,  $w'_2 = e^{i\theta'}w_2$  (с одним и тем же  $\theta'$ ). Таким образом, фактор-пространство пространства  $S^3 \times S^3$  по орбитам действия  $(w_1, w_2) \mapsto (e^{i\theta}w_1, e^{i\theta}w_2)$  однопараметрической группы  $\{e^{i\theta} \mid \theta \in \mathbb{R} \bmod 2\pi\}$  есть двулистное накрытие пространства  $M_{1,1}$ . Мы используем символ  $\mathbf{M}$  для обозначения этого фактор-пространства и  $\pi: S^3 \times S^3 \rightarrow \mathbf{M}$  для канонической проекции. Символом  $\mathbf{D}^\rho = \bigcup_{x \in \mathbf{D}} \mathbf{D}_x^\rho$  обозначим распределение ранга 2 на  $\mathbf{M}$  — прообраз распределения  $D^\rho$  при двулистном накрытии  $\mathbf{M} \rightarrow M_{1,1}$ . Тогда

$$\mathbf{D}_{\pi(w_1, w_2)}^\rho = \pi_* \text{span}\{(jw_1, \rho jw_2), (kw_1, \rho kw_2)\} \quad \forall w_1, w_2 \in S^3.$$

Теперь взглянем на кватернионное пространство  $\mathbb{H}^2 = \{(w_1, w_2) \mid w_i \in \mathbb{H}\}$  как на комплексное пространство  $\mathbb{C}^4$ , где  $w_1 = z_1 + z_2j$ ,  $w_2 = z_3 + z_4j$ ,  $z_l \in \mathbb{C}$ ,  $l = 1, \dots, 4$ . Мы видим, что многообразие  $\mathbf{M}$  есть не что иное, как комплексная проективная коника:

$$\mathbf{M} = \{z_1 : z_2 : z_3 : z_4 \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 = |z_3|^2 + |z_4|^2\} \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^3.$$

Эту конику часто называют “пространством изотропных твисторов”. Кроме того,

$$\mathbf{D}_{\pi(w_1, w_2)}^\rho = \pi_* \mathbb{C}j(w_1, \rho w_2).$$

### 3. СПЛИТ-ОКТАВЫ

Теперь взглянем на пространство  $\mathbb{H}^2$  с еще одной точки зрения: как на алгебру  $\widehat{\mathbb{O}} = \{w_1 + \ell w_2 \mid w_i \in \mathbb{H}\}$  сплит-октав, где

$$(a + \ell b)(c + \ell d) = (ac + d\bar{b}) + \ell(\bar{a}d + cb). \quad (2)$$

Пусть  $x = w_1 + \ell w_2$ ,  $\bar{x} = \bar{w}_1 - \ell \bar{w}_2$  и  $Q(x) = \bar{x}x = |w_1|^2 - |w_2|^2$ . Тогда  $Q(xy) = Q(x)Q(y)$  и  $x^{-1} = \frac{\bar{x}}{Q(x)}$ , если  $Q(x) \neq 0$ ; конус  $Q^{-1}(0)$  состоит из делителей нуля.

Группа автоморфизмов алгебры  $\widehat{\mathbb{O}}$  есть некомпактная вещественная форма исключительной группы  $G_2$  [10]. Автоморфизмы алгебры  $\widehat{\mathbb{O}}$  сохраняют квадратичную форму  $Q$  и, следовательно, ее поляризацию  $\mathbf{Q}(x, y) = \frac{1}{4}(Q(x+y) - Q(x-y))$ . В частности, эти автоморфизмы сохраняют подпространство  $\mathbb{R}^7 = \{x \in \widehat{\mathbb{O}} \mid \mathbf{Q}(1, x) = 0\}$  и конику

$$K = \{x \in \mathbb{R}^7 \mid Q(x) = 0\} = \{x \in \widehat{\mathbb{O}} \mid xx = 0\}.$$

Более того, группа автоморфизмов алгебры  $\widehat{\mathbb{O}}$  действует транзитивно на “сферизации”  $\mathbf{K} = \{\mathbb{R}_+x \mid x \in K \setminus 0\} = S^2 \times S^3$  конуса  $K$ .

Всякому  $x \in K \setminus 0$  отвечает трехмерное подпространство

$$\Delta_x = \{y \in \mathbb{R}^7 \mid xy = 0\},$$

состоящее из делителей нуля; “сферизация” превращает подпространство  $\Delta_x$  в двумерное подпространство  $\Delta_x \subset T_x \mathbf{K}$ , где  $\mathbf{x} = \mathbb{R}_+x$ . Ясно, что группа автоморфизмов алгебры  $\widehat{\mathbb{O}}$  сохраняет векторное распределение  $\Delta = \{\Delta_x\}_{x \in K}$ .

**Предложение 1.** *Отображение  $\Phi: (w_1 + \ell w_2) \mapsto (w_1^{-1}i w_1 + \ell(w_1^{-1}w_2))$  индуцирует диффеоморфизм многообразий  $\mathbf{M}$  и  $\mathbf{K}$ , причем дифференциал этого диффеоморфизма переводит распределение непроскальзывания и непрокручивания  $\mathbf{D}^3$  в распределение “делителей нуля”  $\Delta$ .*

**Доказательство.** Пусть  $\widehat{\Phi}: \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{K}$  — отображение, индуцированное отображением  $\Phi$ . Приведем явную формулу для обратного отображения  $\widehat{\Phi}^{-1}$ : пусть  $v_1 \in S^2$ ,  $v_1 = \mathfrak{h}(w_1)$ , тогда

$$\widehat{\Phi}^{-1}(v_1 + \ell v_2) = \pi(w_1 + \ell(w_1 v_2)) \quad \forall v_2 \in S^3.$$

Теперь мы должны доказать, что  $\Phi(x)(D_x \Phi y) = 0$  для любых таких  $x = w_1 + \ell w_2$ ,  $y = zjw_1 + 3\ell(zjw_2)$ , что  $|w_1| = |w_2|$ ,  $z \in \mathbb{C}$ . Достаточно провести вычисления в случае  $|w_1| = |w_2| = 1$ . Получаем

$$D_{w_1 + \ell w_2} \Phi(zjw_1 + \ell(zjw_2)) = 2\bar{w}_1 z k w_1 + 2\ell(\bar{w}_1 z j w_2).$$

Нужный результат теперь следует из правила умножения (2).

Дадим теперь явную параметризацию распределения  $\Delta$  на многообразии  $\mathbf{K}$ . Сначала параметризуем само многообразие  $\mathbf{K}$ :

$$\mathbf{K} = \{v_1 + \ell v_2 \mid v_1 \in \mathbb{R}^3, v_2 \in \mathbb{H}, |v_1| = |v_2| = 1\}.$$

Тогда  $\Delta_{v_1 + \ell v_2} = \{v_1 u + \ell(uv_2) \mid u, (v_1 u) \in \mathbb{R}^3\}$ ; это прямое следствие правила умножения (2). Пусть  $v \in \mathbb{R}^3$ ,  $|v| = 1$ ; отображение  $w \mapsto w + v w v$  отображает  $\mathbb{H}$  на подпространство  $\{u \mid u, (vu) \in \mathbb{R}^3\}$ . Теперь, заменяя  $u$  на  $w + v_1 w v_1$  в приведенном выше описании подпространства  $\Delta_{v_1 + \ell v_2}$ , получаем параметризацию

$$\Delta_{v_1 + \ell v_2} = \{[v_1, w] + \ell((w + v_1 w v_1)v_2) \mid w \in \mathbb{H}\}.$$

#### 4. ЯКОБИЕВЫ КРИВЫЕ

В этом разделе мы кратко описываем вариационный подход к построению дифференциальных инвариантов векторных распределений (см. [1, 3, 11]), включая, таким образом, модель качения шаров в общий контекст. Этот подход, основанный на современной технике оптимального управления, предлагает альтернативу классическому методу эквивалентности (см. [6–8]) Эли Картана.

Векторное распределение  $\Delta$  ранга  $k$  на  $n$ -мерном гладком многообразии  $M$  — это просто гладкое векторное подрасслоение касательного расслоения  $TM$ :

$$\Delta = \bigcup_{q \in M} \Delta_q, \quad \Delta_q \subset T_q M, \quad \dim \Delta_q = k.$$

Распределения  $\Delta$  и  $\Delta'$  называются локально эквивалентными в точке  $q_0 \in M$ , если существуют такие окрестность  $O_{q_0} \subset M$  точки  $q_0$  и диффеоморфизм  $\Phi: O_{q_0} \rightarrow O_{q_0}$ , что  $\Phi_* \Delta_q = \Delta'_{\Phi(q)}$   $\forall q \in O_{q_0}$ .

Локальным базисом распределения  $\Delta$  называется такой набор  $k$  гладких векторных полей  $f_1, \dots, f_k \in \text{Vec } M$ , что

$$\Delta_q = \text{span}\{f_1(q), \dots, f_k(q)\}, \quad q \in O_{q_0}.$$

Задав локальный базис, можно вычислить *флаг распределения*

$$\Delta_q^l = \text{span}\{(\text{ad } f_{i_j} \dots \text{ad } f_{i_1} f_{i_0})(q) \mid 0 \leq j < l\}, \quad l = 1, 2, \dots,$$

где  $\text{ad } fg \stackrel{\text{def}}{=} [f, g]$  — скобки Ли.

Нетрудно видеть, что подпространства  $\Delta_q^l$  не зависят от локального базиса. Положим  $\Delta^l = \bigcup_{q \in M} \Delta_q^l$ ; это возрастающая последовательность подмножеств многообразия  $TM$ . Последовательность стабилизируется, как только наступает равенство  $\Delta^{l+1} = \Delta^l$ . Распределение  $\Delta$  инволютивно в том и только том случае, когда  $\Delta^2 = \Delta$ , и вполне неголономно, если  $\Delta^l = TM$  для достаточно большого  $l$ . Нас интересуют именно вполне неголономные распределения; распределения общего положения, конечно, таковы.

Интегральные кривые распределения часто называют *горизонтальными путями*. Удобно рассматривать все пути класса  $H^1$ , а не только гладкие. Таким образом, мы получаем гильбертово многообразие  $\Omega_\Delta$  горизонтальных путей:

$$\Omega_\Delta = \{\gamma \in H^1([0, 1]; M) \mid \dot{\gamma}(t) \in \Delta_{\gamma(t)} \text{ для почти всех } t \in [0, 1]\}.$$

Теперь рассмотрим *граничные отображения*

$$\partial_t: \Omega_\Delta \rightarrow M \times M,$$

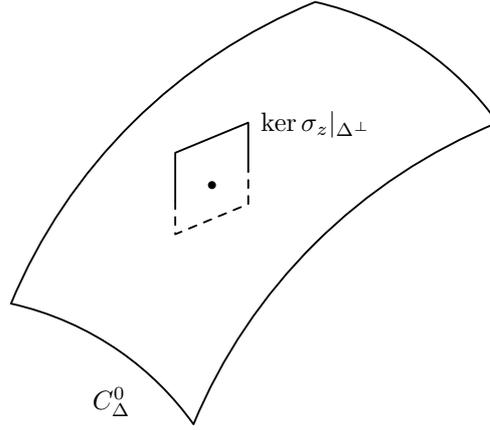


Рис. 2

определенные формулой  $\partial_t(\gamma) = (\gamma(0), \gamma(t))$ . Нетрудно показать, что  $\partial_t$  — гладкие отображения.

Критические точки отображения  $\partial_1$  называются *особыми кривыми* распределения  $\Delta$ . Любая особая кривая автоматически является критической точкой отображений  $\partial_t \forall t \in [0, 1]$ . Более того, каждой особой кривой отвечает некоторая *особая экстремаль*, т.е. такая кривая  $\lambda: [0, 1] \rightarrow T^*M$  класса  $H^1$  в кокасательном расслоении многообразия  $M$ , что

$$\lambda(t) \in T_{\gamma(t)}^*M \setminus \{0\}, \quad (\lambda(t), -\lambda(0))D_\gamma \partial_t = 0 \quad \forall t \in [0, 1].$$

Положим

$$\Delta_q^\perp = \{\nu \in T_q^*M \mid \langle \nu, \Delta_q \rangle = 0, \nu \neq 0\}, \quad \Delta^\perp = \bigcup_{q \in M} \Delta_q^\perp.$$

Ясно, что  $\Delta^\perp$  — гладкое  $(n+k)$ -мерное подмногообразие в  $T^*M$  (аннулятор распределения  $\Delta$ ).

Пусть  $\sigma$  — каноническая симплектическая структура на  $T^*M$ . Из принципа максимума Понтрягина следует, что кривая  $\lambda$  в  $T^*M$  в том и только том случае есть особая экстремаль, когда она характеристическая кривая формы  $\sigma|_{\Delta^\perp}$ ; иными словами,

$$\lambda(t) \in \Delta^\perp, \quad \dot{\lambda}(t) \in \ker(\sigma|_{\Delta^\perp}), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Все особые экстремали содержатся в *характеристическом многообразии*

$$C_\Delta = \{z \in \Delta^\perp \mid \ker \sigma_z|_{\Delta^\perp} \neq 0\}.$$

Несложное вычисление показывает, что  $C_\Delta = \Delta^{2\perp}$  при  $k = 2$ ;  $C_\Delta = \Delta^\perp$ , если  $k$  нечетно; как правило,  $C_\Delta$  — подмногообразие коразмерности 1 многообразия  $\Delta^\perp$ , если  $k$  четно.

Полное описание особых экстремалей — трудная задача; чтобы упростить работу, мы займемся только регулярной частью характеристического многообразия. Положим

$$C_\Delta^0 = \{z \in C_\Delta \mid \dim \ker \sigma_z|_{\Delta^\perp} \leq 2, \dim(\ker \sigma_z|_{\Delta^\perp} \cap T_z C_\Delta) = 1\}$$

(см. рис. 2). Если  $k = 2$ , то  $C_\Delta^0 = \Delta^{2\perp} \setminus \Delta^{3\perp}$ .

Заметим, что  $C_\Delta^0$  — гладкое подмногообразие многообразия  $\Delta^\perp$ ; оно расслоено особыми экстремальями, а также “вертикальными слоями”  $T_q^*M \cap C_\Delta^0$ .

Движение вдоль особых экстремалей определяет локальный поток на многообразии  $C_\Delta^0$ ; как правило, этот поток не послойный, т.е. не преобразующий вертикальные слои в вертикальные слои (см. рис. 3).

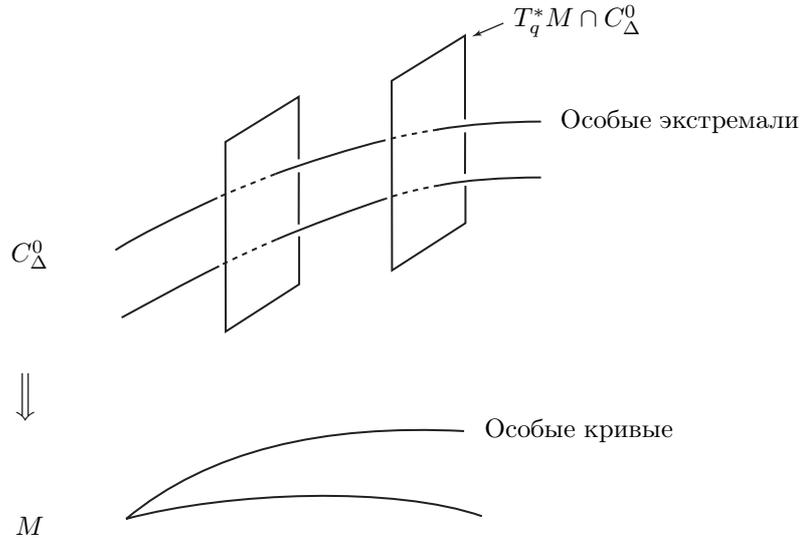


Рис. 3

Зададим точку  $z \in C_\Delta^0$ , подходящую малую окрестность  $C_z^0$  этой точки в многообразии  $C_\Delta^0$  и рассмотрим каноническую проекцию

$$F: C_z^0 \rightarrow C_z^0 / \{\text{Слоение особых экстремалей}\}$$

окрестности  $C_z^0$  на пространство содержащихся в  $C_z^0$  особых экстремалей.

Пусть  $\lambda$  — особая экстремаль, проходящая через точку  $z$  и отвечающая особой кривой  $\gamma$ , т.е.  $\lambda(0) = z, \lambda(t) \in T_{\gamma(t)}^*M$ . Рассмотрим семейство подпространств

$$J_\lambda^0(t) = T_\lambda F(T_{\gamma(t)}^*M \cap C_z^0)$$

пространства

$$T_\lambda C_z^0 / \{\text{Слоение особых экстремалей}\} \cong T_z C_\Delta^0 / T_z \lambda.$$

Отображение  $t \mapsto J_\lambda^0(t)$  есть гладкая кривая в соответствующем грассмановом многообразии. Геометрия кривых  $t \mapsto J_\lambda^0(\cdot)$  отражает динамику вертикальных слоев вдоль особых экстремалей и содержит важнейшую информацию о распределении  $\Delta$ .

В оставшейся части работы мы предполагаем, что  $k = 2, n \geq 5$ , а подпространства  $\Delta_q^2, \Delta_q^3$  имеют максимальную возможную размерность, т.е.  $\dim \Delta_q^2 = 3, \dim \Delta_q^3 = 5$ .

I. Сначала рассмотрим случай  $n = 5$ , который изучал Картан (см. введение). Пусть  $z \in T_q^*M$  и  $\pi: T_z(T^*M) \rightarrow T_qM$  — дифференциал проекции  $T^*M \rightarrow M$  в точке  $z$ , тогда  $\pi(J_\lambda^0(t)) \subset z^\perp \subset T_qM$ . Кроме того,  $T_q\gamma \subset \pi(J_\lambda^0(t))$  и отображение  $t \mapsto \pi(J_\lambda^0(t))$  есть кривая в проективной плоскости  $P(z^\perp/T_q\gamma)$ .

**Предложение 2** (см. [4]). *Распределение  $\Delta$  (имеющее ранг 2 и заданное на пятимерном многообразии) является плоским в том и только том случае, когда для любой особой экстремали  $\lambda$  кривая  $\pi(J_\lambda^0(\cdot))$  есть квадратика.*

Вообще говоря, кривая  $\pi(J_\lambda^0(\cdot))$  не обязана быть квадратикой; пусть  $q = \gamma(0)$  и  $K_z(q) \subset z^\perp$  — квадратика, наилучшим образом аппроксимирующая кривую  $\pi(J_\lambda^0(\cdot))$  вблизи точки, отвечающей нулевому значению параметра  $t$  (оскулирующая квадратика классической проективной геометрии). Тогда  $K_z(q)$  — множество нулей некоторой квадратичной формы сигнатуры  $(2, 1)$

на  $z^\perp/T_q\gamma$ . Конус  $K_z(q)$  можно, конечно, рассматривать как множество нулей некоторой вырожденной квадратичной формы на  $z^\perp$ . Наконец,  $\mathcal{K}(q) = \bigcup_{z \in \Delta_q^\perp} K_z(q)$  — множество нулей некоторой квадратичной формы сигнатуры  $(3, 2)$  на  $T_qM$  (подробности см. в [4]).

Семейство квадратичных конусов  $\mathcal{K}(q)$ ,  $q \in M$ , — это внутренним образом “вырастающая” из  $\Delta$  конформная структура на многообразии  $M$ , при этом  $\Delta_q \subset K(q)$ . Эта конформная структура была впервые найдена Нуровским [9] при помощи метода эквивалентности Картана.

**Замечание.** Для распределения делителей нуля  $\Delta$  из разд. 3 конформная структура Нуровского описывается особенно просто. А именно  $\mathcal{K}(\mathbf{x}) = Q^{-1}(0) \cap T_{\mathbf{x}}\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbf{K}$ , в этом случае.

II. Начиная с этого момента  $n$  — любое целое число не меньше 5. Пусть  $z \in C_\Delta^0$ ,  $\lambda$  — особая экстремаль, проходящая через точку  $z$ , и  $\gamma$  — соответствующая особая кривая. Положим

$$J_\lambda(t) = D_\lambda F(\pi^{-1}\Delta_{\gamma(t)}) \subset T_z C_\Delta^0 / T_z \lambda,$$

тогда  $J_\lambda(t) \supset J_\lambda^0(t)$  и  $J_\lambda(t)$  — лагранжево подпространство симплектического пространства  $T_z C_\Delta^0 / T_z \lambda$ . Иными словами,  $J_\lambda(t)^\triangleleft = J_\lambda(t)$ , где

$$S^\triangleleft \stackrel{\text{def}}{=} \{\zeta \in T_z C_\Delta^0 : \sigma(\zeta, S) = 0\}, \quad S \subset T_z.$$

Пусть  $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , тогда  $s\lambda$  — особая экстремаль, проходящая через точку  $sz \in C_\Delta^0$ . Следовательно,  $T_z(\mathbb{R}z) \subset J_\lambda(t) \forall t$  и  $J_\lambda(t) \subset T_z(\mathbb{R}z)^\triangleleft$ . Это включение позволяет сделать еще одну полезную редукцию. Пусть  $\Sigma_z = T_z(\mathbb{R}z)^\triangleleft / T_z \mathbb{R}z$  — симплектическое пространство размерности  $2(n-3)$ , а  $J_\lambda(t)$  — лагранжево подпространство симплектического пространства  $\Sigma_z$ .

Наконец, пусть  $L(\Sigma_z)$  — лагранжев грассманиан, т.е. многообразие, образованное всеми лагранжевыми подпространствами пространства  $\Sigma_z$ . Кривая  $t \mapsto J_\lambda(t)$ , рассматриваемая как кривая в  $L(\Sigma_z)$ , называется *якобиевой кривой*, отвечающей экстремали  $\lambda$ .

Размерность лагранжева подпространства равна половине размерности содержащего его симплектического пространства. В частности, находящаяся в общем положении пара лагранжевых подпространств имеет нулевое пересечение. Якобиевы кривые — это вовсе не кривые общего положения, тем не менее при очень скромном условии регулярности на распределение (см. [11]) они обладают следующим важным свойством:  $J_\lambda(t) \cap J_\lambda(\tau) = 0$  для достаточно малых  $|t - \tau| \neq 0$ .

Пусть  $\pi_{t\tau}$  — линейный проектор пространства  $\Sigma_z$  на подпространство  $J_\lambda(\tau)$  вдоль  $J_\lambda(t)$ . Иными словами,  $\pi_{t\tau} : \Sigma_z \rightarrow \Sigma_z$ ,

$$\pi_{t\tau}|_{J_\lambda(t)} = 0, \quad \pi_{t\tau}|_{J_\lambda(\tau)} = \mathbf{1}.$$

**Лемма 1** (см. [3]). *Справедливо равенство*

$$\text{tr} \left( \frac{\partial^2 \pi_{t\tau}}{\partial t \partial \tau} \Big|_{J_\lambda(\tau)} \right) = \frac{(n-3)^2}{(t-\tau)^2} + g_\lambda(t, \tau),$$

где  $g_\lambda(t, \tau)$  — симметрическая функция от  $(t, \tau)$ , определенная и гладкая в некоторой окрестности точки  $(t, t)$  для всех  $t$ , лежащих вне некоторого фиксированного дискретного подмножества области определения кривой  $J_\lambda(\cdot)$ .

В дальнейшем мы, не упоминая это специально, всегда берем  $t$  вне “плохого” дискретного подмножества, упомянутого в лемме 1. Простейший инвариант параметризованной особой экстремали  $\lambda$  есть *обобщенная кривизна Риччи*  $\mathbf{r}_\lambda$ , где

$$\mathbf{r}_\lambda(\lambda(t)) \stackrel{\text{def}}{=} g_\lambda(t, t).$$

Обобщенная кривизна Риччи зависит от параметризации экстремали; эта зависимость описывается следующим цепным правилом. Пусть  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  — некоторая замена параметра, тогда

$$\mathfrak{r}_{\lambda \circ \varphi}(\lambda(\varphi(t))) = \mathfrak{r}_\lambda(\lambda(\varphi(t)))\dot{\varphi}^2(t) + (n-3)^2\mathbb{S}(\varphi),$$

где  $\mathbb{S}(\varphi) = \frac{\ddot{\varphi}(t)}{2\dot{\varphi}(t)} - \frac{3}{4}\left(\frac{\ddot{\varphi}(t)}{\dot{\varphi}(t)}\right)^2$  — производная Шварца. Из цепного правила следует, что обобщенную кривизну Риччи  $\mathfrak{r}_\lambda$  можно обратить в нуль при помощи локальной перепараметризации экстремали  $\lambda$ . Мы называем локальный параметр  $t$  *проективным параметром*, если  $\mathfrak{r}_\lambda(t) \equiv 0$ ; проективный параметр определен с точностью до дробно-линейного преобразования.

Пусть  $t$  — проективный параметр, тогда величина

$$A(\lambda(t)) = \left. \frac{\partial^2 g}{\partial \tau^2}(t, \tau) \right|_{\tau=t} (dt)^4$$

есть корректно определенный дифференциал четвертой степени на кривой  $\lambda$ ; мы называем его *фундаментальной формой* на кривой  $\lambda$ .

При произвольной не обязательно проективной параметризации фундаментальная форма имеет следующее выражение:

$$A(\lambda(t)) = \left( \left. \frac{\partial^2 g}{\partial \tau^2} \right|_{\tau=t} - \frac{3}{5(n-3)^2} \mathfrak{r}_\lambda(t)^2 - \frac{3}{2} \ddot{\mathfrak{r}}_\lambda(t) \right) (dt)^4.$$

Предположим, что  $A(\lambda(t)) \neq 0$ , тогда тождество  $|A(\lambda(s))(\frac{d}{ds})| = 1$  определяет единственный (с точностью до сдвига) *нормальный параметр*  $s$ .

Пусть  $z \in C_\Delta^0$  и  $\lambda_s$  — нормально параметризованная особая экстремаль, проходящая через точку  $z$ . Положим

$$\bar{\mathfrak{r}}(z) = \mathfrak{r}_{\lambda_s}(z).$$

Функция  $z \mapsto \bar{\mathfrak{r}}(z)$  на  $C_\Delta^0$  зависит только от  $\Delta$  и называется *проективной обобщенной кривизной Риччи*.

Теперь мы вернемся к случаю  $k = 2$ ,  $n = 5$ . В этом случае фундаментальная форма  $A$  сводится к знаменитой картановской форме четвертой степени на распределении, построенной в работе [6] при помощи метода эквивалентности. Распределение является плоским в том и только том случае, когда  $A \equiv 0$ .

Зеленко в работе [11] провел детальные вычисления для распределения непроскальзывания и непрокручивания в случае качения шаров. Пусть, как и раньше,  $\rho$  — отношение диаметров шаров. Предположим, что  $1 < \rho \leq +\infty$ . Оказывается, что

$$\text{sgn}(A) = \text{sgn}(\rho - 3).$$

Особые кривые — это просто качения шара вдоль геодезических на сфере (т.е. вдоль больших кругов). Группа симметрий действует транзитивно на пространстве геодезических, поэтому в рассматриваемом случае функция  $\mathfrak{r}$  должна быть константой. Вот эти константы:

$$\bar{\mathfrak{r}} = \frac{4\sqrt{35}(\rho^2 + 1)}{3\sqrt{(\rho^2 - 9)(9\rho^2 - 1)}}.$$

В частности, распределения, отвечающие различным  $\rho$ , попарно неэквивалентны и только в случае  $\rho = 3$  получается плоское распределение.

**Благодарности.** В заключение, я хочу поблагодарить Роберта Браунта, Арольдо Капелана и Игоря Зеленко за очень интересные стимулирующие обсуждения.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Agrachev A.A.* Feedback-invariant optimal control theory and differential geometry. II: Jacobi curves for singular extremals // *J. Dyn. and Control Syst.* 1998. V. 4, N 4. P. 583–604.
2. *Аграчев А.А., Сачков Ю.Л.* Геометрическая теория управления. М.: Физматлит, 2004. 392 с.
3. *Agrachev A.A., Zelenko I.* Geometry of Jacobi curves. I, II // *J. Dyn. and Control Syst.* 2002. V. 8, N 1. P. 93–140; V. 8, N 2. P. 167–215.
4. *Agrachev A., Zelenko I.* Nurowski's conformal structures for  $(2, 5)$ -distributions via dynamics of abnormal extremals // *Developments of Cartan geometry and related mathematical problems: Proc. RIMS Symp., Kyoto, 2005.* Kyoto: Kyoto Univ., 2006. P. 204–218.
5. *Bryant R., Hsu L.* Rigidity of integral curves of rank 2 distributions // *Invent. math.* 1993. V. 114, N 2. P. 435–461.
6. *Cartan E.* Les systèmes de Pfaff à cinq variables et les équations aux dérivées partielles du second ordre // *Ann. Sci. Ecole Norm. Super. Sér. 3.* 1910. V. 27. P. 109–192.
7. *Gardner R.B.* The method of equivalence and its applications. Philadelphia (PA): SIAM, 1989. viii+127 p.
8. *Montgomery R.* A tour of subriemannian geometries, their geodesics and applications. Providence (RI): Amer. Math. Soc., 2002. xx+259 p.
9. *Nurowski P.* Differential equations and conformal structures // *J. Geom. and Phys.* 2005. V. 55. P. 19–49.
10. *Springer T.A., Veldkamp F.D.* Octonions, Jordan algebras and exceptional groups. Berlin: Springer, 2000. viii+208 p.
11. *Zelenko I.* On variational approach to differential invariants of rank two distributions // *Diff. Geom. and Appl.* 2006. V. 24, N 3. P. 235–259.