А. А. Аграчев, Кривизна и гиперболичность гамильтоновых систем, *Тр. МИАН*, 2007, том 256, 31–53

ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА ИМ. В.А. СТЕКЛОВА, 2007, т. 256, с. 31–53

УДК 519.6

Кривизна и гиперболичность гамильтоновых систем

©2007 г. А. А. Аграчев[1]

Поступило в июле 2006 г.

Кривизны гамильтоновых систем обобщают секционную кривизну римановых многообразий: отрицательность кривизны служит указателем гиперболичности гамильтонова потока. Настоящая работа содержит замкнутое в себе изложение соответствующих понятий и фактов, в том числе естественное развитие классических результатов о геодезических потоках и описание некоторых новых явлений, не наблюдаемых в геодезических потоках.

ВВЕДЕНИЕ

Эта статья написана специально к 70-летию Дмитрия Викторовича Аносова. Одна из ее целей — объяснить, что классические результаты Аносова о геодезических потоках римановых многообразий отрицательной кривизны в действительности справедливы для значительно более широкого класса потоков, чем это обычно предполагается.

Излишне говорить, что я вовсе не специалист по гиперболической динамике, но, как сотрудник отдела дифференциальных уравнений МИАН, чувствовал себя обязанным, находясь в Москве, аккуратно посещать семинар отдела под руководством Дмитрия Викторовича. Из докладов на этом семинаре и аносовских комментариев даже человек, далекий от гиперболической динамики, мог легко уяснить простейшие понятия и почувствовать общую атмосферу предмета. В какой-то момент я понял, что кривизна общих гамильтоновых систем, открытая и использовавшаяся в совершенно ином контексте, может служить для проверки гиперболичности. Конечно, я первым делом рассказал об этом на аносовском семинаре и вот теперь представляю последовательное изложение.

Предмет настоящей работы — гамильтоновы системы на симплектическом многообразии с заданным лагранжевым распределением. Предполагается выполненным некоторое условие регулярности, гарантирующее невырожденность действия гамильтонова потока на распределение. Это действие порождает однопараметрическое семейство распределений. Вычисляя значения этих распределений в фиксированной точке многообразия, получаем однопараметрическое семейство лагранжевых подпространств касательного пространства многообразия в заданной точке. Такое семейство называется “якобиевой кривой” по аналогии с якобиевыми полями из римановой геометрии. Перечисленные объекты описаны в разд. 1.

Якобиевы кривые суть кривые в лагранжевых грассманианах, и разд. 2–7 посвящены основам дифференциальной геометрии таких кривых. Геометрия якобиевых кривых дает фундаментальные дифференциальные инварианты гамильтоновых систем; эти инварианты описаны и вычислены в разд. 8–10. Главные инварианты суть форма кривизны и приведенная форма кривизны. В разд. 11, 12 рассмотрены случаи, когда одна из этих форм отрицательна. Строгая отрицательность приведенной формы кривизны влечет гиперболичность потока; это естественное обобщение хорошо известного свойства геодезических потоков римановых многообразий отрицательной секционной кривизны.

Строгая отрицательность (неприведенной) формы кривизны влечет очень жесткие условия на асимптотику потоков, описанные в теореме 3 и следствии 6. Здесь мы имеем дело

[1]SISSA/ISAS, Trieste, Italy; Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Москва, Россия.

с явлением, которое не встречается в геодезических потоках, но легко реализуется в классе натуральных механических систем. Мне не удалось выяснить, есть ли и у этого результата подходящий классический предшественник.

1. РЕГУЛЯРНЫЕ ГАМИЛЬТОНОВЫ СИСТЕМЫ

В настоящей работе гладкость означает C^∞; ее результаты, конечно, верны и в классах C^k с конечными, причем небольшими k, но мы предпочитаем не отвлекаться на поиски минимального допустимого k.

Рассмотрим $2n$-мерное симплектическое многообразие N с симплектической формой σ. Гладкое векторное подрасслоение $\Delta \subset TN$ касательного расслоения TN называется *лагранжевым расслоением*, если каждый слой $\Delta_z = \Delta \cap T_zN$, $z \in N$, есть лагранжево подпространство симплектического пространства T_zN; иными словами, $\dim \Delta_z = n$ и $\sigma_z(\xi, \eta) = 0$ $\forall \xi, \eta \in \Delta_z$.

Важнейшие примеры суть кокасательные расслоения со стандартной симплектической структурой и “вертикальным” распределением:

$$N = T^*M, \qquad \Delta_z = T_z(T_q^*M) \quad \forall z \in T_q^*M, \quad q \in M. \tag{1}$$

Пусть $h \in C^\infty(N)$ и $\vec{h} \in \operatorname{Vec} N$ — отвечающее функции h гамильтоново векторное поле: $dh = \sigma(\cdot, \vec{h})$. Предположим, что $\vec{h}$ — полное векторное поле, т.е. решения гамильтоновой системы $\dot{z} = \vec{h}(z)$ определены на всей временнóй оси. Это предположение не уменьшает общности постольку, поскольку мы будем заниматься динамикой гамильтоновых систем на компактных подмножествах N.

Гамильтонов поток, порожденный $\vec{h}$, обозначается $e^{t\vec{h}}$, $t \in \mathbb{R}$. Еще обозначения: $\overline{\Delta} \subset \operatorname{Vec} N$ — пространство сечений лагранжева распределения Δ; $[v_1, v_2] \in \operatorname{Vec} N$ — скобки Ли (коммутатор) полей $v_1, v_2 \in \operatorname{Vec} N$, $[v_1, v_2] = v_1 \circ v_2 - v_2 \circ v_1$.

Определение 1. Говорят, что поле $\vec{h}$ *регулярно* по отношению к лагранжеву распределению Δ, если $\{[\vec{h}, v](z) \colon v \in \overline{\Delta}\} = T_zN$ для любого $z \in N$.

Вот более конструктивный (но менее элегантный) вариант определения 1: пусть $v_i \in \overline{\Delta}$, $i = 1, \ldots, n$, таковы, что векторы $v_1(z), \ldots, v_n(z)$ образуют базис подпространства Δ_z; поле $\vec{h}$ тогда и только тогда регулярно в точке z по отношению к Δ, когда векторы

$$v_1(z), \ldots, v_n(z), [\vec{h}, v_1](z), \ldots, [\vec{h}, v_n](z)$$

образуют базис пространства T_zN.

Зададим билинейное отображение $\beta^h \colon \overline{\Delta} \times \overline{\Delta} \to C^\infty(N)$ формулой

$$\beta^h(v_1, v_2) = \sigma([\vec{h}, v_1], v_2).$$

Лемма 1. *Имеем $\beta^h(v_2, v_1) = \beta^h(v_1, v_2)$ $\forall v_1, v_2 \in \overline{\Delta}$, и $\beta^h(v_1, v_2)(z)$ зависит только от $v_1(z)$, $v_2(z)$.*

Доказательство. Гамильтоновы потоки сохраняют форму σ, а σ равна нулю на $\overline{\Delta}$. Отсюда следует, что

$$0 = \sigma(v_1, v_2) = \left(e^{t\vec{h}*}\sigma\right)(v_1, v_2) = \sigma\left(e^{t\vec{h}}_* v_1, e^{t\vec{h}}_* v_2\right).$$

Дифференцируя тождество $0 = \sigma\left(e^{t\vec{h}}_* v_1, e^{t\vec{h}}_* v_2\right)$ по t при $t = 0$, получаем $0 = \sigma([\vec{h}, v_1], v_2) + \sigma(v_1, [\vec{h}, v_2])$. Теперь, учитывая кососимметричность σ, получаем симметричность β^h. Кроме того, β^h $C^\infty(M)$-линейна по каждому аргументу, следовательно, $\beta^h(v_1, v_2)(z)$ зависит только от $v_1(z)$, $v_2(z)$. $\square$

Пусть $z \in N$, $\xi_i \in \Delta_z$, $\xi_i = v_i(z)$, $v_i \in \Delta$, $i = 1, 2$. Положим $\beta^h_z(\xi_1, \xi_2) = \beta^h(v_1, v_2)(z)$. Согласно лемме 1 β^h_z — корректно определенная симметричная билинейная форма на Δ_z. Нетрудно видеть, что регулярность гамильтониана h в точке z эквивалентна невырожденности формы β^h_z.

Если $N = T^*M$ и Δ — вертикальное распределение (см. (1)), то $\beta^h_z = D^2_z(h|_{T^*_qM})$, где $z \in T^*_qM$. Последнее равенство легко проверяется в локальных координатах. В самом деле, локальные координаты в окрестности $O \subset M$ задают отождествление $T^*M|_O$ с $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n = \{(p, q)\colon p, q \in \mathbb{R}^n\}$, при котором T^*_qM отождествляется с $\mathbb{R}^n \times \{q\}$, форма σ отождествляется с $\sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq_i$, а поле $\vec{h}$ с $\sum_{i=1}^n \bigl(\frac{\partial h}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q_i} - \frac{\partial h}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial p_i}\bigr)$. Поля $\frac{\partial}{\partial p_i}$ образуют базис вертикального распределения, и

$$\beta^h\left(\frac{\partial}{\partial p_i}, \frac{\partial}{\partial p_j}\right) = -\left\langle dq_j, \left[\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial h}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q_i} - \frac{\partial h}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial p_i}\right), \frac{\partial}{\partial p_i}\right]\right\rangle = \frac{\partial^2 h}{\partial p_i \partial p_j}.$$

Определение 2. Регулярное гамильтоново поле $\vec{h}$ называется *монотонным* по отношению к Δ, если β^h_z — знакоопределенная форма для любого $z \in N$.

Если $N = T^*M$ и Δ — вертикальное распределение, то монотонность поля $\vec{h}$ эквивалентна сильной выпуклости или вогнутости сужения функции h на слои T^*_qM, $q \in M$.

Мы изучим действие гамильтонова потока $e^{t\vec{h}}$ на распределение Δ. А именно: для любого $z \in N$ рассмотрим семейство подпространств $J_z(t) = e^{-t\vec{h}}_* \Delta_{e^{t\vec{h}}(z)} \subset T_zM$, $t \in \mathbb{R}$; в частности, $J_z(0) = \Delta_z$. Пусть $G_n(T_zN)$ — грассманово многообразие (грассманиан), состоящее из всех n-мерных подпространств $2n$-мерного пространства T_zN. Тогда $t \mapsto J_z(t)$ — гладкая кривая в $G_n(T_zN)$, которую мы называем *якобиевой кривой* пары $\vec{h}, \Delta$ в точке z. Элементарная дифференциальная геометрия якобиевых кривых снабдит нас искомыми инвариантами типа кривизны. Для того чтобы определить эти инварианты, нам понадобятся некоторые простые факты из геометрии грассманианов.

2. ДВОЙНОЕ ОТНОШЕНИЕ

Пусть Σ — $2n$-мерное векторное пространство и $v_0, v_1 \in G_n(\Sigma)$, $v_0 \cap v_1 = 0$. Тогда $\Sigma = v_0 + v_1$. Обозначим символом $\pi_{v_0v_1}\colon \Sigma \to v_1$ проектор пространства Σ на подпространство v_1 параллельно v_0. Иными словами, $\pi_{v_0v_1}$ — такой линейный оператор на Σ, что $\pi_{v_0v_1}|_{v_0} = 0$ и $\pi_{v_0v_1}|_{v_1} = \mathrm{id}$. Таким образом устанавливается взаимно однозначное соответствие между парами трансверсальных n-мерных подпространств пространства Σ и проекторами ранга n в $\mathrm{gl}(\Sigma)$.

Лемма 2. *Пусть $v_0 \in G_n(\Sigma)$, $v_0^{\pitchfork} = \{v \in G_n(\Sigma)\colon v \cap v_0 = 0\}$ — открытое всюду плотное подмножество многообразия $G_n(\Sigma)$. Тогда $\{\pi_{vv_0}\colon v \in v_0^{\pitchfork}\}$ — аффинное подпространство пространства* $\mathrm{gl}(\Sigma)$.

В самом деле, значения любого оператора вида $\alpha\pi_{vv_0} + (1-\alpha)\pi_{wv_0}$, где $\alpha \in \mathbb{R}$, лежат в v_0, а его ограничение на v_0 — тождественный оператор. Следовательно, $\alpha\pi_{vv_0} + (1-\alpha)\pi_{wv_0}$ — проектор Σ на v_0 вдоль некоторого подпространства.

Отображение $v \mapsto \pi_{vv_0}$, таким образом, задает локальную координатную карту на многообразии $G_n(\Sigma)$. Эти карты, индексированные подпространствами v_0, образуют естественный атлас многообразия $G_n(\Sigma)$.

Для проекторов π_{vw} выполняются следующие тождества:

$$\pi_{v_0v_1} + \pi_{v_1v_0} = \mathrm{id}, \qquad \pi_{v_0v_2}\pi_{v_1v_2} = \pi_{v_1v_2}, \qquad \pi_{v_0v_1}\pi_{v_0v_2} = \pi_{v_0v_1}, \tag{2}$$

где $v_i \in G_n(\Sigma)$ и $v_i \cap v_j = 0$ при $i \neq j$. Если $n = 1$, то многообразие $G_n(\Sigma)$ — это обычная проективная прямая $\mathbb{R}\mathrm{P}^1$; мы увидим, что и для $n > 1$ элементарная геометрия грассманиана

$G_n(\Sigma)$ сильно напоминает геометрию проективной прямой. Группа $\mathrm{GL}(\Sigma)$ действует транзитивно на $G_n(\Sigma)$. Рассмотрим стандартное действие этой группы на прямом произведении $k+1$ экземпляров $G_n(\Sigma)$:

$$A(v_0,\dots,v_k) \stackrel{\mathrm{def}}{=} (Av_0,\dots,Av_k), \qquad A\in \mathrm{GL}(\Sigma), \quad v_i\in G_n(\Sigma).$$

Легко убедиться, что полный набор инвариантов тройки $(v_0,v_1,v_2)\in G_n(\Sigma)\times G_n(\Sigma)\times G_n(\Sigma)$ при этом действии задается размерностями пересечений $\dim(v_i\cap v_j)$, $0\le i,j\le 2$, и $\dim(v_0\cap v_1\cap v_2)$. Четверки точек грассманиана $G_n(\Sigma)$ обладают более интересным инвариантом — многомерной версией классического двойного отношения.

Определение 3. Пусть $v_i\in G_n(\Sigma)$, $i=0,1,2,3$, и $v_0\cap v_1=v_2\cap v_3=0$. *Двойным отношением* точек v_i называется оператор $[v_0,v_1,v_2,v_3]\in \mathrm{gl}(v_1)$, заданный формулой

$$[v_0,v_1,v_2,v_3]=\pi_{v_0v_1}\pi_{v_2v_3}\big|_{v_1}.$$

Замечание. Сужение оператора $\pi_{v_0v_1}\pi_{v_2v_3}$ на подпространство v_1 не приводит к потере информации; действительно, значения этого оператора лежат в v_1, а его ядро содержит v_0.

При $n=1$ подпространство v_1 — прямая, а оператор $[v_0,v_1,v_2,v_3]$ — вещественное число. При произвольном n жорданова форма оператора дает числовые инварианты четверки v_i, $i=0,1,2,3$.

Мы в основном будем работать с инфинитезимальной версией двойного отношения, которая представляет собой инвариант $[\xi_0,\xi_1]\in\mathrm{gl}(v_1)$ пары касательных векторов $\xi_i\in T_{v_i}G_n(\Sigma)$, $i=0,1$, где $v_0\cap v_1=0$. Пусть $\gamma_i(t)$ — такие кривые в $G_n(\Sigma)$, что $\gamma_i(0)=v_i$, $\frac{d}{dt}\gamma_i(t)\big|_{t=0}=\xi_i$, $i=0,1$. Тогда двойное отношение $[\gamma_0(t),\gamma_1(0),\gamma_0(\tau),\gamma_1(\theta)]$ есть некоторый оператор на $v_1=\gamma_1(0)$, корректно определенный для всех t, τ, θ, достаточно близких к 0. Более того, из тождеств (2) следует, что $[\gamma_0(t),\gamma_1(0),\gamma_0(0),\gamma_1(0)]=[\gamma_0(0),\gamma_1(0),\gamma_0(t),\gamma_1(0)]=[\gamma_0(0),\gamma_1(0),\gamma_0(0),\gamma_1(t)]=\mathrm{id}$. Положим

$$[\xi_0,\xi_1]=\frac{\partial^2}{\partial t\partial\tau}\big[\gamma_0(t),\gamma_1(0),\gamma_0(0),\gamma_1(\tau)\big]\big|_{v_1}\Big|_{t=\tau=0}. \tag{3}$$

Нетрудно проверить, что правая часть формулы (3) действительно зависит только от ξ_0, ξ_1 и что $(\xi_0,\xi_1)\mapsto[\xi_0,\xi_1]$ есть билинейное отображение из $T_{v_0}G_n(\Sigma)\times T_{v_1}G_n(\Sigma)$ на $\mathrm{gl}(v_1)$.

Лемма 3. *Пусть $v_0,v_1\in G_n(\Sigma)$, $v_0\cap v_1=0$, $\xi_i\in T_{v_i}G_n(\Sigma)$ и $\xi_i=\frac{d}{dt}\gamma_i(t)\big|_{t=0}$, $i=0,1$. Тогда $[\xi_0,\xi_1]=\frac{\partial^2}{\partial t\partial\tau}\pi_{\gamma_1(t)\gamma_0(\tau)}\big|_{v_1}\big|_{t=\tau=0}$, причем v_1, v_0 — инвариантные подпространства оператора $\frac{\partial^2}{\partial t\partial\tau}\pi_{\gamma_1(t)\gamma_0(\tau)}\big|_{v_1}\big|_{t=\tau=0}$.*

Доказательство. Согласно определению

$$[\xi_0,\xi_1]=\frac{\partial^2}{\partial t\partial\tau}\big(\pi_{\gamma_0(t)\gamma_1(0)}\pi_{\gamma_0(0)\gamma_1(\tau)}\big)\big|_{v_1}\Big|_{t=\tau=0}.$$

Дифференцируя тождества

$$\pi_{\gamma_0(t)\gamma_1(0)}\pi_{\gamma_0(t)\gamma_1(\tau)}=\pi_{\gamma_0(t)\gamma_1(0)}, \qquad \pi_{\gamma_0(t)\gamma_1(\tau)}\pi_{\gamma_0(0)\gamma_1(\tau)}=\pi_{\gamma_0(0)\gamma_1(\tau)},$$

получаем

$$\frac{\partial^2}{\partial t\partial\tau}\big(\pi_{\gamma_0(t)\gamma_1(0)}\pi_{\gamma_0(0)\gamma_1(\tau)}\big)\Big|_{t=\tau=0}=-\pi_{v_0v_1}\frac{\partial^2}{\partial t\partial\tau}\pi_{\gamma_0(t)\gamma_1(\tau)}\Big|_{t=\tau=0}=-\frac{\partial^2}{\partial t\partial\tau}\pi_{\gamma_0(t)\gamma_1(\tau)}\Big|_{t=\tau=0}\pi_{v_0v_1}.$$

Остается заметить, что $\frac{\partial^2}{\partial t\partial\tau}\pi_{\gamma_1(t)\gamma_0(\tau)}=-\frac{\partial^2}{\partial t\partial\tau}\pi_{\gamma_0(\tau)\gamma_1(t)}$. $\square$

3. КООРДИНАТНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ

Для заданных $v_i \in G_n(\Sigma)$, $i = 0,1,2,3$, введем координаты в Σ таким образом, что $\Sigma = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n = \{(x,y)\colon x \in \mathbb{R}^n,\ y \in \mathbb{R}^n\}$ и $v_i \cap \{(0,y)\colon y \in \mathbb{R}^n\} = 0$. Тогда

$$v_i = \{(x, S_i x)\colon\ x \in \mathbb{R}^n\}, \qquad i = 0,1,2,3, \tag{4}$$

для некоторых $(n\times n)$-матриц S_i, причем соотношение $v_i \cap v_j = 0$ эквивалентно неравенству $\det(S_i - S_j) \neq 0$. Если $S_0 = 0$, то проектор $\pi_{v_0v_1}$ представляется $(2n\times 2n)$-матрицей $\left(\begin{smallmatrix} 0 & S_1^{-1} \\ 0 & I \end{smallmatrix}\right)$. В общем случае

$$\pi_{v_0v_1} = \begin{pmatrix} S_{01}^{-1}S_0 & -S_{01}^{-1} \\ S_1S_{01}^{-1}S_0 & -S_1S_{01}^{-1} \end{pmatrix},$$

где $S_{01} = S_0 - S_1$. Соотношения (4) задают координаты $\{x\}$ на пространствах v_i. В этих координатах оператор $[v_0,v_1,v_2,v_3]$ на v_1 представляется матрицей

$$[v_0,v_1,v_2,v_3] = S_{10}^{-1}S_{03}S_{32}^{-1}S_{21},$$

где $S_{ij} = S_i - S_j$.

Опишем теперь координатное представление инфинитезимального двойного отношения. Пусть $\gamma_0(t) = \{(x, S_t x)\colon x \in \mathbb{R}^n\}$, $\gamma_1(t) = \{(x, S_{1+t}x)\colon x \in \mathbb{R}^n\}$, так что $\xi_i = \frac{d}{dt}\gamma_i(t)\big|_{t=0}$ представляется матрицей $\dot S_i = \frac{d}{dt}S_t\big|_{t=i}$, $i = 0,1$. Тогда оператор $[\xi_0,\xi_1]$ представляется матрицей

$$\frac{\partial^2}{\partial t\partial\tau}S_{1t}^{-1}S_{t\tau}S_{\tau 0}^{-1}S_{01}\Big|_{t=0,\,\tau=1} = \frac{\partial}{\partial t}S_{1t}^{-1}\dot S_1\Big|_{t=0} = S_{01}^{-1}\dot S_0 S_{01}^{-1}\dot S_1.$$

Таким образом,

$$[\xi_0,\xi_1] = S_{01}^{-1}\dot S_0 S_{01}^{-1}\dot S_1. \tag{5}$$

Существует естественный изоморфизм $T_{v_0}G_n(\Sigma) \cong \operatorname{Hom}(v_0, \Sigma/v_0)$; он задается следующим образом. Пусть $\xi \in T_{v_0}G_n(\Sigma)$, $\xi = \frac{d}{dt}\gamma(t)\big|_{t=0}$ и $z_0 \in v_0$. Выберем такую гладкую кривую $z(t) \in \gamma(t)$, что $z(0) = z_0$. Тогда смежный класс $(\dot z(0) + v_0) \in \Sigma/v_0$ зависит только от ξ и z_0, а не от специального выбора кривых $\gamma(t)$ и $z(t)$. В самом деле, пусть $\gamma'(t)$ — другая кривая в $G_n(\Sigma)$, скорость которой при $t = 0$ равна ξ. Выберем такие гладко зависящие от t базисы подпространств $\gamma(t)$ и $\gamma'(t)$: $\gamma(t) = \operatorname{span}\{e_1(t),\dots,e_n(t)\}$, $\gamma'(t) = \operatorname{span}\{e'_1(t),\dots,e'_n(t)\}$, что $e_i(0) = e'_i(0)$, $i = 1,\dots,n$; тогда $(\dot e_i(0) - \dot e'_i(0)) \in v_0$, $i = 1,\dots,n$. Пусть $z(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i(t)e_i(t)$, $z'(t) = \sum_{i=1}^n \alpha'_i(t)e'_i(t)$, причем $\alpha_i(0) = \alpha'_i(0)$. В таком случае

$$\dot z(0) - \dot z'(0) = \sum_{i=1}^n \Big(\big(\dot\alpha_i(0) - \dot\alpha'_i(0)\big)e_i(0) + \alpha'_i(0)\big(\dot e_i(0) - \dot e'_i(0)\big)\Big) \in v_0,$$

т.е. $\dot z(0) + v_0 = \dot z'(0) + v_0$.

Касательному вектору ξ ставится в соответствие отображение $\bar\xi\colon v_0 \to \Sigma/v_0$, определенное формулой $\bar\xi z_0 = \dot z(0) + v_0$. Тот факт, что $\xi \mapsto \bar\xi$ — изоморфизм векторных пространств $T_{v_0}G_n(\Sigma)$ и $\operatorname{Hom}(v_0, \Sigma/v_0)$, легко проверяется в координатах. Матрицы $\dot S_i$ суть собственно координатные представления операторов $\bar\xi_i$, $i = 0,1$.

Стандартное действие группы $\mathrm{GL}(\Sigma)$ на грассманиане $G_n(\Sigma)$ индуцирует действие той же группы на касательном расслоении $TG_n(\Sigma)$. Нетрудно видеть, что единственный инвариант касательного вектора ξ при этом действии есть $\operatorname{rank}\bar\xi$ (касательные векторы — это просто “двойные точки” или “пары инфинитезимально близких точек”, а число $n - \operatorname{rank}\bar\xi$ есть инфинитезимальная версия размерности пересечения для пары точек грассманиана). Формула (5) влечет неравенство

$$\operatorname{rank}[\xi_0,\xi_1] \le \min\bigl\{\operatorname{rank}\bar\xi_0, \operatorname{rank}\bar\xi_1\bigr\}.$$

4. КРИВЫЕ В ГРАССМАНИАНЕ

Пусть $t \mapsto v(t)$ — росток в точке $\bar{t}$ некоторой гладкой кривой в грассманиане $G_n(\Sigma)$.

Определение 4. Назовем росток $v(\cdot)$ *достаточным*, если $v(t) \cap v(\bar{t}) = 0$ $\forall t \neq \bar{t}$ и операторнозначная функция $t \mapsto \pi_{v(t)v(\bar{t})}$ имеет полюс (конечного порядка) в точке $\bar{t}$. Росток $v(\cdot)$ называется *регулярным*, если функция $t \mapsto \pi_{v(t)v(\bar{t})}$ имеет простой полюс в точке $\bar{t}$. Гладкая кривая в $G_n(\Sigma)$ называется достаточной (регулярной), если все ее ростки достаточны (регулярны).

Пусть координаты в Σ выбраны так, что $\Sigma = \{(x,y)\colon x,y \in \mathbb{R}^n\}$ и $v(\bar{t}) = \{(x,0)\colon x \in \mathbb{R}^n\}$. Тогда $v(t) = \{(x, S_t x)\colon x \in \mathbb{R}^n\}$, причем $S(\bar{t}) = 0$ и $\pi_{v(t)v(\bar{t})} = \left(\begin{smallmatrix} I & -S_t^{-1} \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Росток $v(\cdot)$ достаточен тогда и только тогда, когда вещественная функция $t \mapsto \det S_t$ имеет нуль конечного порядка в точке $\bar{t}$. Росток $v(\cdot)$ регулярен в том и только том случае, когда матрица $\dot{S}_{\bar{t}}$ невырожденна. Более общим образом, кривая $\tau \mapsto \{(x, S_\tau x)\colon x \in \mathbb{R}^n\}$ достаточна тогда и только тогда, когда $\forall t$ функция $\tau \mapsto \det(S_\tau - S_t)$ имеет нуль конечного порядка в точке t. Эта кривая регулярна в том и только том случае, когда $\det \dot{S}_t \neq 0$ $\forall t$. Бескоординатная формулировка такой характеризации регулярности выглядит следующим образом: кривая $v(\cdot)$ регулярна в том и только том случае, когда отображение $\bar{\dot{v}}(t) \in \mathrm{Hom}(v(t), \Sigma/v(t))$ имеет ранг n $\forall t$.

Пусть $v(\cdot)$ — достаточная кривая в $G_n(\Sigma)$. Рассмотрим разложение Лорана в точке t операторнозначной функции $\tau \mapsto \pi_{v(\tau)v(t)}$:

$$\pi_{v(\tau)v(t)} = \sum_{i=-k_t}^{m} (\tau - t)^i \pi_t^i + O(\tau - t)^{m+1}.$$

Проекторы пространства Σ на подпространство $v(t)$ образуют аффинное подпространство в $\mathrm{gl}(\Sigma)$ (см. лемму 2). Отсюда следует, что π_t^0 — проектор Σ на $v(t)$; иными словами, $\pi_t^0 = \pi_{v^\circ(t)v(t)}$ для некоторого $v^\circ(t) \in v(t)^\pitchfork$. Таким образом, мы получаем еще одну кривую $t \mapsto v^\circ(t)$ в $G_n(\Sigma)$, причем $\Sigma = v(t) \oplus v^\circ(t)$ $\forall t$. Кривая $t \mapsto v^\circ(t)$ называется *производной кривой* достаточной кривой $v(\cdot)$.

Аффинное пространство $\{\pi_{wv(t)}\colon w \in v(t)^\pitchfork\}$ параллельно линейному пространству $\mathfrak{N}(v(t)) = \{\mathfrak{n}\colon \Sigma \to v(t) \mid \mathfrak{n}|_{v(t)} = 0\} \subset \mathrm{gl}(\Sigma)$, содержащему только нильпотентные операторы. Нетрудно видеть, что $\pi_t^i \in \mathfrak{N}(v(t))$ при $i \neq 0$.

Вообще говоря, производная кривая не обязана быть достаточной. Более того, она может быть негладкой и даже разрывной.

Лемма 4. *Если $v(\cdot)$ регулярна, то $v^\circ(\cdot)$ гладкая.*

Доказательство. Мы найдем координатное представление $v^\circ(\cdot)$. Пусть $v(t) = \{(x, S_t x)\colon x \in \mathbb{R}^n\}$. Регулярность $v(\cdot)$ эквивалентна невырожденности $\dot{S}_t$. Далее

$$\pi_{v(\tau)v(t)} = \begin{pmatrix} S_{\tau t}^{-1} S_\tau & -S_{\tau t}^{-1} \\ S_t S_{\tau t}^{-1} S_\tau & -S_t S_{\tau t}^{-1} \end{pmatrix},$$

где $S_{\tau t} = S_\tau - S_t$. Тогда $S_{\tau t}^{-1} = (\tau - t)^{-1} \dot{S}_t^{-1} - \frac{1}{2} \dot{S}_t^{-1} \ddot{S}_t \dot{S}_t^{-1} + O(\tau - t)$ при $\tau \to t$ и

$$\pi_{v(\tau)v(t)} = (\tau - t)^{-1} \begin{pmatrix} \dot{S}_t^{-1} S_t & -\dot{S}_t^{-1} \\ S_t \dot{S}_t^{-1} S_t & -S_t \dot{S}_t^{-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I - \frac{1}{2} \dot{S}_t^{-1} \ddot{S}_t \dot{S}_t^{-1} S_t & \frac{1}{2} \dot{S}_t^{-1} \ddot{S}_t \dot{S}_t^{-1} \\ S_t - \frac{1}{2} S_t \dot{S}_t^{-1} \ddot{S}_t \dot{S}_t^{-1} S_t & \frac{1}{2} S_t \dot{S}_t^{-1} \ddot{S}_t \dot{S}_t^{-1} \end{pmatrix} + O(\tau - t).$$

Положим $A_t = -\frac{1}{2} \dot{S}_t^{-1} \ddot{S}_t \dot{S}_t^{-1}$; тогда матрица

$$\pi_{v^\circ(t)v(t)} = \begin{pmatrix} I + A_t S_t & -A_t \\ S_t + S_t A_t S_t & -S_t A_t \end{pmatrix}$$

гладко зависит от t. Следовательно, кривая $t \mapsto v^\circ(t)$ гладкая. Кроме того, получаем

$$v^\circ(t) = \bigl\{(A_t y, y + S_t A_t y)\colon\ y \in \mathbb{R}^n\bigr\}. \tag{6}$$

5. КРИВИЗНА

Определение 5. Пусть v — достаточная кривая и v° — ее производная кривая. Предположим, что v° дифференцируема в точке t, и положим $R_v(t) = [\dot{v}^\circ(t), \dot{v}(t)]$. Оператор $R_v(t) \in \mathrm{gl}(v(t))$ называется *кривизной* кривой v в точке t.

Если v — регулярная кривая, то v° — гладкая кривая, так что кривизна корректно определена и, кроме того, имеет простое координатное представление. Для того чтобы найти это представление, мы воспользуемся формулой (5), применив ее к $\xi_0 = \dot{v}^\circ(t)$, $\xi_1 = \dot{v}(t)$. Как и прежде, предположим, что $v(t) = \{(x, S_t x)\colon x \in \mathbb{R}^n\}$; в частности, подпространство $v(t)$ трансверсально подпространству $\{(0,y)\colon y \in \mathbb{R}^n\}$. Для того чтобы воспользоваться формулой (5), требуется еще одно предположение, относящееся к выбору координат в Σ: подпространство $v^\circ(t)$ должно быть трансверсально $\{(0,y)\colon y \in \mathbb{R}^n\}$ для данного t. Последнее свойство эквивалентно невырожденности матрицы A_t (см. (6)). Важно отметить, что искомое представление $R_v(t)$ в виде некоторого дифференциального оператора от S должно быть справедливо и без этого дополнительного предположения, поскольку $R_v(t)$ имеет внутреннее бескоординатное определение! Итак, займемся вычислением: $v^\circ(t) = \{(x, (A_t^{-1} + S_t)x)\colon x \in \mathbb{R}^n\}$, $R_v(t) = [\dot{v}^\circ(t), \dot{v}(t)] = A_t \frac{d}{dt}(A_t^{-1} + S_t) A_t \dot{S}_t = (A_t \dot{S}_t)^2 - \dot{A}_t \dot{S}_t = \frac{1}{4}(\dot{S}_t^{-1}\ddot{S}_t)^2 - \dot{A}_t \dot{S}_t$. Кроме того, $\dot{A}\dot{S} = -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\dot{S}^{-1}\ddot{S}\dot{S}^{-1})\dot{S} = (\dot{S}^{-1})^2 - \frac{1}{2}\dot{S}^{-1}\dddot{S}$. Получаем

$$R_v(t) = \frac{1}{2}\dot{S}_t^{-1}\dddot{S}_t - \frac{3}{4}\bigl(\dot{S}_t^{-1}\ddot{S}_t\bigr)^2 = \frac{d}{dt}\bigl((2\dot{S}_t)^{-1}\ddot{S}_t\bigr) - \bigl((2\dot{S}_t)^{-1}\ddot{S}_t\bigr)^2 \tag{7}$$

— матричная версия производной Шварца.

Оператор кривизны — важнейший инвариант кривой в грассманиане. В следующем предложении мы даем еще одну внутреннюю конструкцию этого оператора, не использующую производной кривой.

Предложение 1. *Пусть v — регулярная кривая в $G_n(\Sigma)$. Тогда*

$$[\dot{v}(\tau), \dot{v}(t)] = (\tau - t)^{-2}\,\mathrm{id} + \frac{1}{3}R_v(t) + O(\tau - t)$$

при $\tau \to t$.

Доказательство. Достаточно проверить доказываемое равенство в каких-нибудь координатах. Координаты можно выбрать таким образом, чтобы для данного фиксированного t выполнялись соотношения

$$v(t) = \{(x,0)\colon\ x \in \mathbb{R}^n\}, \qquad v^\circ(t) = \{(0,y)\colon\ y \in \mathbb{R}^n\}.$$

Пусть $v(\tau) = \{(x, S_\tau x)\colon x \in \mathbb{R}^n\}$, тогда $S_t = \ddot{S}_t = 0$ (см. (6)). Кроме того, согласовывая подходящим образом базисы подпространств $v(t)$ и $v^\circ(t)$, можно добиться равенства $\dot{S}_t = I$. Тогда $R_v(t) = \frac{1}{2}\dddot{S}_t$ (см. (7)). С другой стороны, формула (5) для инфинитезимального двойного отношения влечет

$$[\dot{v}(\tau), \dot{v}(t)] = S_\tau^{-1}\dot{S}_\tau S_\tau^{-1} = -\frac{d}{d\tau}(S_\tau^{-1}) = -\frac{d}{d\tau}\left((\tau - t)I + \frac{(\tau - t)^3}{6}\dddot{S}_t\right)^{-1} + O(\tau - t) =$$

$$= -\frac{d}{d\tau}\left((\tau - t)^{-1}I - \frac{\tau - t}{6}\dddot{S}_t\right) + O(\tau - t) = (\tau - t)^{-2}I + \frac{1}{6}\dddot{S}_t + O(\tau - t). \quad \square$$

Оператор кривизны есть инвариант кривой в $G_n(\Sigma)$ с фиксированной параметризацией. Асимптотическое разложение, полученное в предложении 1, влечет красивое цепное правило для кривизны перепараметризованной кривой.

Пусть $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — регулярная перепараметризация, т.е. $\dot\varphi \neq 0\ \forall t$. Стандартное вложение $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}\mathrm{P}^1 = G_1(\mathbb{R}^2)$ превращает φ в регулярную кривую в $G_1(\mathbb{R}^2)$. Как мы уже знаем (см. (7)), кривизна этой кривой есть шварциан от φ:

$$R_\varphi(t) = \frac{\dddot\varphi(t)}{2\dot\varphi(t)} - \frac{3}{4}\left(\frac{\ddot\varphi(t)}{\dot\varphi(t)}\right)^2.$$

Введем обозначение $v_\varphi(t) = v(\varphi(t))$ для любой кривой v в $G_n(\Sigma)$.

Предложение 2. *Пусть v — регулярная кривая в $G_n(\Sigma)$ и $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — регулярная перепараметризация. Тогда*

$$R_{v_\varphi}(t) = \dot\varphi^2(t) R_v(\varphi(t)) + R_\varphi(t). \tag{8}$$

Доказательство. Воспользуемся разложением

$$[\dot v_\varphi(\tau), \dot v_\varphi(t)] = (\tau - t)^{-2}\operatorname{id} + \frac{1}{3} R_{v_\varphi}(t) + O(\tau - t).$$

Кроме того,

$$\begin{aligned}
[\dot v_\varphi(\tau), \dot v_\varphi(t)] &= \big[\dot\varphi(\tau)\dot v(\varphi(\tau)), \dot\varphi(t)\dot v(\varphi(t))\big] = \dot\varphi(\tau)\dot\varphi(t)\big[\dot v(\varphi(\tau)), \dot v(\varphi(t))\big] = \\
&= \dot\varphi(\tau)\dot\varphi(t)\left((\varphi(\tau) - \varphi(t))^{-2}\operatorname{id} + \frac{1}{3} R_v(\varphi(t)) + O(\tau - t)\right) = \\
&= \frac{\dot\varphi(\tau)\dot\varphi(t)}{(\varphi(\tau) - \varphi(t))^2}\operatorname{id} + \frac{\dot\varphi^2(t)}{3} R_v(\varphi(t)) + O(\tau - t).
\end{aligned}$$

Функцию φ можно считать кривой в $\mathbb{R}\mathrm{P}^1 = G_1(\mathbb{R}^2)$. Тогда $[\dot\varphi(\tau), \dot\varphi(t)] = \frac{\dot\varphi(\tau)\dot\varphi(t)}{(\varphi(\tau)-\varphi(t))^2}$ (см. (5)). Теперь воспользуемся одномерной версией предложения 1:

$$[\dot\varphi(\tau), \dot\varphi(t)] = (t - \tau)^{-2} + \frac{1}{3} R_\varphi(t) + O(\tau - t).$$

Таким образом,

$$[\dot v_\varphi(\tau), \dot v_\varphi(t)] = (t - \tau)^{-2} + \frac{1}{3}\big(R_\varphi(t) + \dot\varphi^2(t) R_v(\varphi(t))\big) + O(\tau - t). \qquad \square$$

Следующее тождество есть непосредственное следствие предложения 2:

$$\left(R_{v_\varphi} - \frac{1}{n}(\operatorname{tr} R_{v_\varphi})\operatorname{id}\right)(t) = \dot\varphi^2(t)\left(R_v - \frac{1}{n}(\operatorname{tr} R_v)\operatorname{id}\right)(\varphi(t)). \tag{9}$$

Определение 6. Достаточная кривая v называется *плоской*, если $R_v(t) \equiv 0$.

Предложение 1 влечет, что любой достаточно малый отрезок регулярной кривой в том и только том случае можно сделать плоским с помощью перепараметризации, когда кривизна этой кривой есть оператор умножения на константу, т.е. $R_v(t) = \frac{1}{n}(\operatorname{tr} R_v(t))\operatorname{id}$. В остальных случаях равенство (9) можно использовать для определения некоторой выделенной параметризации и получения не зависящих от параметризации инвариантов кривой.

Замечание. В настоящей работе мы в основном занимаемся регулярными кривыми. Цепное правило, применимое к любой достаточной кривой, и основные инварианты непараметризованных достаточных кривых можно найти в работе [6].

6. СТРУКТУРНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Пусть v и w — две гладкие кривые в $G_n(\Sigma)$, причем $v(t) \cap w(t) = 0\ \forall t$.

Лемма 5. *Для любого t и любого вектора $e \in v(t)$ существует единственный вектор $f_e \in w(t)$, удовлетворяющий следующему условию: существует такая гладкая кривая $e_\tau \in \in v(\tau)$, $e_t = e$, что $\frac{d}{d\tau} e_\tau\big|_{\tau=t} = f_e$. Более того, отображение $\Phi_t^{vw}: e \mapsto f_e$ линейно и для всякого $e_0 \in v(0)$ существует такая единственная гладкая кривая $e(t) \in v(t)$, что $e(0) = e_0$ и*

$$\dot{e}(t) = \Phi_t^{vw} e(t) \qquad \forall t. \tag{10}$$

Доказательство. Начнем с произвольной кривой $\widehat{e}_\tau \in v(\tau)$ такой, что $e_t = e$. Тогда $\widehat{e}_\tau = = a_\tau + b_\tau$, где $a_\tau \in v(t)$, $b_\tau \in w(t)$. Возьмем $x_\tau \in v(\tau)$ таким образом, что $x_t = \dot{a}_t$, и зададим $e_\tau = \widehat{e}_\tau + (t-\tau)x_\tau$. Тогда $\dot{e}_t = \dot{b}_t$ и мы положим $f_e = \dot{b}_t$.

Докажем, что $\dot{b}_t$ зависит только от e, а не от выбора кривой e_τ. Рассматривая разность двух возможных e_τ, сводим лемму к следующему утверждению: если $z(\tau) \in v(\tau)\ \forall \tau$ и $z(t) = 0$, то $\dot{z}(t) \in v(t)$.

Для доказательства последнего утверждения рассмотрим такие гладкие вектор-функции $e_\tau^i \in v(\tau)$, $i = 1, \dots, n$, что $v(\tau) = \operatorname{span}\{e_\tau^1, \dots, e_\tau^n\}$. Тогда $z(\tau) = \sum_{i=1}^n \alpha_i(\tau) e_\tau^i$, $\alpha_i(t) = 0$. Следовательно, $\dot{z}(t) = \sum_{i=1}^n \dot{\alpha}_i(t) e_t^i \in v_t$.

Линейность отображения Φ_t^{vw} следует из единственности f_e. В самом деле, если $f_{e^i} = = \frac{d}{d\tau} e_\tau^i|_{\tau=t}$, то $\frac{d}{d\tau}\big(\alpha_1 e_\tau^1 + \alpha_2 e_\tau^2\big)\big|_{\tau=t} = \alpha_1 f_{e^1} + \alpha_2 f_{e^2}$; следовательно, $\alpha_1 f_{e^1} + \alpha_2 f_{e^2} = f_{\alpha_1 e^1 + \alpha_2 e^2}$ $\forall e^i \in v(t)$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2$.

Рассмотрим теперь гладкое подмногообразие $V = \{(t, e) : t \in \mathbb{R},\ e \in v(t)\}$ пространства $\mathbb{R} \times \Sigma$. Тогда $(1, \Phi_t^{vw} e) \in T_{(t,e)} V$, поскольку $(1, \Phi_t^{vw} e)$ — скорость кривой $\tau \mapsto (\tau, e_\tau)$ в V. Таким образом, $(t, e) \mapsto (1, \Phi_t^{vw} e)$, $(t, e) \in V$, — гладкое векторное поле на V. Кривая $e(t) \in v(t)$ удовлетворяет уравнению (10) в том и только том случае, когда $(t, e(t))$ — траектория этого векторного поля. Стандартная теорема существования и единственности для обыкновенных дифференциальных уравнений обеспечивает существование и единственность решения задачи Коши при t, достаточно близких к нулю, а линейность уравнения гарантирует, что решение определено при всех t. $\square$

Из доказательства леммы следует, что $\Phi_t^{vw} e = \pi_{v(t)w(t)} \dot{e}_\tau\big|_{\tau=t}$ для любого такого $e_\tau \in v(\tau)$, что $e_t = e$. Пусть $v(t) = \{(x, S_{vt} x) : x \in \mathbb{R}^n\}$, $w(t) = \{(x, S_{wt} x) : x \in \mathbb{R}^n\}$; матричное представление линейного отображения Φ_t^{vw} в координатах x имеет вид $(S_{wt} - S_{vt})^{-1} \dot{S}_{vt}$. Линейные отображения Φ_t^{vw} и Φ_t^{wv} задают факторизацию инфинитезимального двойного отношения $[\dot{w}(t), \dot{v}(t)]$. Действительно, равенство (5) влечет

$$[\dot{w}(t), \dot{v}(t)] = -\Phi_t^{wv} \Phi_t^{vw}. \tag{11}$$

Равенство (10) влечет еще одно полезное представление инфинитезимального двойного отношения: если $e(t)$ удовлетворяет (10), то

$$[\dot{w}(t), \dot{v}(t)] e(t) = -\Phi_t^{wv} \Phi_t^{vw} e(t) = -\Phi_t^{wv} \dot{e}(t) = -\pi_{w(t)v(t)} \ddot{e}(t). \tag{12}$$

Пусть теперь w — производная кривая кривой v, т.е. $w(t) = v^\circ(t)$. Оказывается, что в этом случае $\ddot{e}(t) \in v(t)$ и равенство (12) сводится к *структурному уравнению*

$$\ddot{e}(t) = -[\dot{v}^\circ(t), \dot{v}(t)] e(t) = -R_v(t) e(t),$$

где $R_v(t)$ — оператор кривизны. Точнее, справедливо следующее

Предложение 3. *Пусть v — регулярная кривая в $G_n(\Sigma)$, v° — ее производная кривая и $e(\cdot)$ — такая гладкая кривая в Σ, что $e(t) \in v(t)\ \forall t$. Тогда $\dot{e}(t) \in v^\circ(t)$, если и только если $\ddot{e}(t) \in v(t)$.*

Доказательство. Для данного t возьмем такие координаты в Σ, что $v(t) = \{(x,0)\colon x \in \in \mathbb{R}^n\}$, $v^\circ(t) = \{(0,y)\colon y \in \mathbb{R}^n\}$. Тогда $v(\tau) = \{(x, S_\tau x)\colon x \in \mathbb{R}^n\}$ для τ, достаточно близких к t, причем $S_t = \ddot{S}_t = 0$ (см. (6)).

Пусть $e(\tau) = \{(x(\tau), S_\tau x(\tau))\}$. Включение $\dot{e}(t) \in v^\circ(t)$ эквивалентно равенству $\dot{x}(t) = 0$. Далее

$$\ddot{e}(t) = \bigl\{\ddot{x}(t), \ddot{S}_t x(t) + 2\dot{S}_t \dot{x}(t) + S_t \ddot{x}(t)\bigr\} = \bigl\{\ddot{x}(t), 2\dot{S}\dot{x}\bigr\} \in v(t).$$

Регулярность v влечет невырожденность $\dot{S}(t)$. Следовательно, $\ddot{e}(t) \in v(t)$, если и только если $\dot{x}(t) = 0$. $\square$

Из равенства (12) теперь вытекает

Следствие 1. *Если* $\dot{e}(t) = \Phi_t^{vv^\circ} e(t)$, *то* $\ddot{e}(t) + R_v(t)e(t) = 0$.

Рассмотрим обратимое линейное отображение $V_t\colon v(0) \to v(t)$, определенное условиями $V_t e(0) = e(t)$, $\dot{e}(\tau) = \Phi_\tau^{vv^\circ} e(\tau)$, $0 \le \tau \le t$. Из структурного уравнения следует, что кривая v однозначно восстанавливается по $\dot{v}(0)$ и кривой $t \mapsto V_t^{-1} R_v(t)$ в $\mathrm{gl}(v(0))$. Более того, пусть $v_0 \in G_n(\Sigma)$ и $\xi \in T_{v_0} G_n(\Sigma)$, причем отображение $\bar{\xi} \in \mathrm{Hom}(v_0, \Sigma/v_0)$ имеет ранг n; тогда для всякой гладкой кривой $t \mapsto A(t)$ в $\mathrm{gl}(v_0)$ найдется единственная регулярная кривая v такая, что $\dot{v}(0) = \xi$ и $V_t^{-1} R_v(t) V_t = A(t)$. Действительно, пусть $e_i(0)$, $i = 1, \ldots, n$, — некоторый базис подпространства v_0 и $A(t)e_i(0) = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t) e_j(0)$. Тогда $v(t) = \mathrm{span}\{e_1(t), \ldots, e_n(t)\}$, где

$$\ddot{e}_i(\tau) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\tau) e_j(\tau) = 0, \qquad 0 \le \tau \le t, \tag{13}$$

так что $e_i(t)$ однозначно определены заданием $\dot{v}(0)$.

Полученная таким образом классификация регулярных кривых в терминах их кривизны особенно проста в случае, когда оператор кривизны есть умножение на число: $R_v(t) = \rho(t)\,\mathrm{id}$. Действительно, в этом случае $A(t) = V_t^{-1} R_v(t) V_t = \rho(t)\,\mathrm{id}$ и система (13) сводится к набору n копий уравнения Хилла $\ddot{e}(\tau) + \rho(\tau) e(\tau) = 0$.

Напомним, что все $\xi \in TG_n(\Sigma)$, удовлетворяющие условию $\mathrm{rank}\,\bar{\xi} = n$, эквивалентны по отношению к действию группы $\mathrm{GL}(\Sigma)$ в $TG_n(\Sigma)$, индуцированному стандартным действием на грассманиане $G_n(\Sigma)$. Таким образом, мы получаем

Следствие 2. *Для любой гладкой вещественной функции* $\rho(t)$ *существует такая единственная с точностью до действия группы* $\mathrm{GL}(\Sigma)$ *регулярная кривая* v *в* $G_n(\Sigma)$, *что* $R_v(t) = \rho(t)\,\mathrm{id}$.

Еще один важный класс регулярных кривых составляют симметрические кривые.

Определение 7. Регулярная кривая v называется *симметрической*, если $V_t R_v(0) = R_v(t) V_t$ $\forall t$.

Иными словами, кривая v симметрическая тогда и только тогда, когда кривая $A(t) = V_t^{-1} R_v(t) V_t$ в $\mathrm{gl}(v(0))$ есть константа, равная $R_v(0)$. Из структурного уравнения вытекает

Следствие 3. *Для любой* $(n \times n)$*-матрицы* A_0 *существует такая единственная с точностью до действия группы* $\mathrm{GL}(\Sigma)$ *симметрическая кривая* v, *что матрицы операторов* $R_v(t)$ *подобны* A_0.

Производная кривая v° регулярной кривой v не обязана быть регулярной. Из формулы $R_v(t) = \Phi_t^{v^\circ v} \Phi_t^{vv^\circ}$ следует, что v° регулярна в том и только том случае, когда оператор кривизны $R_v(t)$ невырожден для любого t. Тогда можно найти вторую производную кривую $v^{\circ\circ} = (v^\circ)^\circ$.

Предложение 4. *Для того чтобы регулярная кривая* v *с невырожденными операторами кривизны была симметрической, необходимо и достаточно выполнение тождества* $v^{\circ\circ} = v$.

Доказательство. Рассмотрим систему (13) и применим предложение 3 к кривой v° (вместо v) и векторам $\dot{e}_i(t) \in v^\circ(t)$. Согласно предложению 3 $v^{\circ\circ} = v$ в том и только том случае, когда $\frac{d^2}{dt^2}\dot{e}_i(t) \in v^\circ(t)$. Дифференцируя равенство (13), получаем, что $v^{\circ\circ} = v$ тогда и только тогда, когда функции $a_{ij}(t)$ суть константы. Последнее свойство есть не что иное, как характеризация симметрических кривых. $\square$

7. ЛАГРАНЖЕВЫ ГРАССМАНИАНЫ

Мы изучаем кривые в грассманианах, держа в уме якобиевы кривые $J_z(t)$ (см. разд. 1). Напомним, что $J_z(t)$ суть подпространства симплектического пространства T_zN с симплектической формой σ_z. Более того, $J_z(t)$ — лагранжевы подпространства в T_zN. Иными словами, $t \mapsto J_z(t)$ — кривая в лагранжевом грассманиане $L(T_zN)$, состоящем из всех лагранжевых подпространств данного симплектического пространства.

В настоящем разделе мы приводим используемые в дальнейшем простейшие сведения о лагранжевых грассманианах (последовательное описание их геометрии см. в [4, Sect. 4]). Пусть $(\Sigma, \bar{\sigma})$ — $2n$-мерное симплектическое пространство, а $\upsilon_0, \upsilon_1 \in L(\Sigma)$ — пара трансверсальных лагранжевых подпространств, $\upsilon_0 \cap \upsilon_1 = 0$. Билинейная форма $\bar{\sigma}$ определяет невырожденное спаривание υ_0 и υ_1 согласно правилу $(e, f) \mapsto \bar{\sigma}(e, f)$, $e \in \upsilon_0$, $f \in \upsilon_1$. Любому базису $e_1, \dots, e_n$ подпространства υ_0 соответствует единственный двойственный базис $f_1, \dots, f_n$ подпространства υ_1, где $\bar{\sigma}(e_i, f_j) = \delta_{ij}$. Базис $e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n$ пространства Σ полностью нормализует форму $\bar{\sigma}$, поскольку $\bar{\sigma}(e_i, e_j) = \bar{\sigma}(f_i, f_j) = 0$. Отсюда следует, что симплектическая группа

$$\mathrm{Sp}(\Sigma) = \big\{A \in \mathrm{GL}(\Sigma) \colon \bar{\sigma}(Ae, Af) = \bar{\sigma}(e, f),\ e, f \in \Sigma\big\}$$

действует транзитивно на парах трансверсальных лагранжевых подпространств.

Следующий результат есть симплектическая версия леммы 2 из разд. 2.

Лемма 6. *Пусть* $\upsilon_0 \in L(\Sigma)$; *тогда* $\{\pi_{\upsilon\upsilon_0} \colon \upsilon \in \upsilon_0^{\pitchfork} \cap L(\Sigma)\}$ *есть аффинное подпространство аффинного пространства* $\{\pi_{\upsilon\upsilon_0} \colon \upsilon \in \upsilon_0^{\pitchfork}\}$, *характеризуемого условием*

$$\upsilon \in \upsilon_0^{\pitchfork} \cap L(\Sigma) \quad \Leftrightarrow \quad \bar{\sigma}(\pi_{\upsilon\upsilon_0}\cdot, \cdot) + \bar{\sigma}(\cdot, \pi_{\upsilon\upsilon_0}\cdot) = \bar{\sigma}(\cdot, \cdot).$$

Доказательство. Предположим, что $\upsilon_1 \in \upsilon_0^{\pitchfork} \cap L(\Sigma)$. Пусть $e, f \in \Sigma$, $e = e_0 + e_1$, $f = f_0 + f_1$, где $e_i, f_i \in \upsilon_i$, $i = 0, 1$. Тогда

$$\bar{\sigma}(e, f) = \bar{\sigma}(e_0 + e_1, f_0 + f_1) = \bar{\sigma}(e_0, f_1) + \bar{\sigma}(e_1, f_0) = \bar{\sigma}(e_0, f) + \bar{\sigma}(e, f_0) =$$
$$= \bar{\sigma}(\pi_{\upsilon_1\upsilon_0}e, f) + \bar{\sigma}(e, \pi_{\upsilon_1\upsilon_0}f).$$

Обратно, пусть подпространство $\upsilon \in \upsilon_0^{\pitchfork}$ нелагранжево. Тогда найдутся такие $e, f \in \upsilon$, что $\bar{\sigma}(e, f) \neq 0$, а $\bar{\sigma}(\pi_{\upsilon\upsilon_0}e, f) = \bar{\sigma}(e, \pi_{\upsilon\upsilon_0}f) = 0$. $\square$

Следствие 4. *Пусть* $v(\cdot)$ *— регулярная кривая в* $G_n(\Sigma)$ *и* $v^\circ(\cdot)$ *— ее производная кривая. Если* $v(t) \in L(\Sigma)$ $\forall t$, *то* $v^\circ(t) \in L(\Sigma)$.

Доказательство. Определение производной кривой v° было дано в разд. 4. Напомним, что $\pi_{v^\circ(t)v(t)} = \pi_t^0$, где π_t^0 — свободный член в разложении Лорана

$$\pi_{v(\tau)v(t)} \approx \sum_{i=-1}^{\infty} (\tau - t)^i \pi_t^i.$$

Свободный член π_t^0 принадлежит аффинной оболочке проекторов $\pi_{v(\tau)v(t)}$, где τ пробегает некоторую окрестность t. Поскольку $\pi_{v(\tau)v(t)}$ лежат в аффинном пространстве $\{\pi_{\upsilon\upsilon_0} \colon \upsilon \in \upsilon_0^{\pitchfork} \cap \cap L(\Sigma)\}$, то и π_t^0 лежит в том же аффинном пространстве. $\square$

Координатное рассмотрение ясно показывает, как лагранжев грассманиан расположен в обычном. Пусть $\Sigma = \mathbb{R}^{n*} \times \mathbb{R}^n = \{(\eta, y) \colon \eta \in \mathbb{R}^{n*},\ y \in \mathbb{R}^n\}$. Тогда любое $v \in (\{0\} \times \mathbb{R}^n)^{\pitchfork}$ имеет вид $v = \{(y^\top, Sy) \colon y \in \mathbb{R}^n\}$, где S — некоторая $(n \times n)$-матрица. Легко видеть, что подпространство v в том и только том случае лагранжево, когда S — симметричная матрица, т.е. $S = S^\top$.

Покажем, что любой касательный вектор к $L(\Sigma)$ в точке $v \in L(\Sigma)$ естественным образом отождествляется с некоторой квадратичной формой на v. Мы здесь используем то, что v — это не только точка грассманиана, но и n-мерное векторное пространство. Для того чтобы скорости $\dot v(t) \in T_{v(t)} L(\Sigma)$ гладкой кривой $v(\cdot)$ сопоставить квадратичную форму на $v(t)$, мы действуем следующим образом: вектор $z \in v(t)$ включается в гладкую кривую $\tau \mapsto z(\tau)$ в Σ таким образом, что $z(\tau) \in v(\tau)$ $\forall \tau$ и $z(t) = z$. Квадратичная форма $\underline{\dot v}(t)(z)$, $z \in v(t)$, определяется формулой $\underline{\dot v}(t)(z) = \sigma(z, \dot z(t))$.

Форма $\sigma(z, \dot z(t))$ не зависит от свободы в выборе кривой $\tau \mapsto z(\tau)$, несмотря на то что $\dot z(t)$ зависит от этой свободы. Проверим это свойство в координатах. Предположим, что $v(\tau) = \{(y^\top, S_\tau y) \colon y \in \mathbb{R}^n\}$. Тогда $z = (y^\top, S_t y)$ для некоторого $y \in \mathbb{R}^n$ и $z(\tau) = \bigl(y(\tau)^\top, S_\tau y(\tau)\bigr)$. Далее

$$\sigma(z, \dot z(t)) = y^\top \bigl(\dot S_t y + S_t \dot y\bigr) - \dot y^\top S_t y = y^\top \dot S_t y;$$

в правую часть не входит вектор $\dot y$. Мы получили координатное представление квадратичной формы $\underline{\dot v}(t)$:

$$\underline{\dot v}(t)(y^\top, S_t y) = y^\top \dot S_t y,$$

из которого следует, что отображение $\dot v \mapsto \underline{\dot v}$, $\dot v \in T_v L(\Sigma)$, есть изоморфизм $T_v L(\Sigma)$ и векторного пространства квадратичных форм на v.

Нетрудно видеть, что кривая $v(\cdot)$ в $L(\Sigma)$ регулярна в том и только том случае, когда форма $\underline{\dot v}(t)$ невырожденна при любом t. Мы говорим, что кривая *монотонно возрастает* (*убывает*), если квадратичная форма $\underline{\dot v}(t)$ положительно (отрицательно) определена. В обоих случаях мы говорим, что кривая $v(\cdot)$ *монотонна*.

Пусть дана регулярная монотонно возрастающая (убывающая) кривая $v(\cdot)$, тогда квадратичная форма $\underline{\dot v}(t)$ определяет евклидову структуру $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\dot v(t)}$ на $v(t)$, в которой $\langle x, x \rangle_{\dot v(t)} = \underline{\dot v}(t)(x)$ $(= -\underline{\dot v}(t)(x))$. Пусть $R_v(t) \in \mathrm{gl}(v(t))$ — оператор кривизны кривой $v(\cdot)$; определим *квадратичную форму кривизны* $r_v(t)$ на $v(t)$ формулой

$$r_v(t)(x) = \langle R_v(t)x, x \rangle_{\dot v(t)}, \qquad x \in v(t).$$

Предложение 5. *Оператор кривизны $R_v(t)$ является самосопряженным для евклидовой структуры $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\dot v(t)}$. Форма $r_v(t)$ эквивалентна (с точностью до линейной замены переменных) форме $\underline{\dot v}^\circ(t)$, где $v^\circ(\cdot)$ — производная кривая.*

Доказательство. Доказываемое утверждение имеет внутреннюю бескоординатную формулировку, так что его можно проверять в каких угодно координатах. Зафиксируем t и выберем координаты Дарбу $\{(\eta, y) \colon \eta \in \mathbb{R}^{n*},\ y \in \mathbb{R}^n\}$ в Σ таким образом, что $v(t) = \{(y^\top, 0) \colon y \in \mathbb{R}^n\}$, $v^\circ(t) = \{(0, y) \colon y \in \mathbb{R}^n\}$, $\underline{\dot v}(t)(y) = y^\top y$. Пусть $v(\tau) = \{(y^\top, S_\tau y) \colon y \in \mathbb{R}^n\}$, тогда $S_t = 0$. Кроме того, $\dot S(t)$ — матрица квадратичной формы $\underline{\dot v}(t)$ в данных координатах, так что $\dot S_t = I$. Напомним, что $v^\circ(\tau) = \bigl\{(y^\top A_\tau, y + S_\tau A_\tau y) \colon y \in \mathbb{R}^n\bigr\}$, где $A_\tau = -\frac12 \dot S_\tau^{-1} \ddot S_\tau \dot S_\tau^{-1}$ (см. (6)). Следовательно, $\ddot S_t = 0$. Получаем $R_v(t) = \frac12 \dddot S_t$, $r_v(t)(y) = \frac12 y^\top \dddot S_t y$,

$$\underline{\dot v}^\circ(t)(y) = \sigma\bigl((0, y), (y^\top \dot A_t, 0)\bigr) = -y^\top \dot A_t y = \frac12 y^\top \dddot S_t y.$$

Итак, $r_v(t)$ и $\underline{\dot v}^\circ(t)$ имеют одинаковые матрицы при нашем выборе координат в $v(t)$ и $v^\circ(t)$. Оператор кривизны самосопряжен, так как он представлен симметричной матрицей в тех координатах, в которых форма $\underline{\dot v}(t)$ есть стандартное скалярное произведение. $\square$

Из предложения 5 следует, что операторы кривизны регулярных монотонных кривых диагонализуемы и имеют только вещественные собственные значения.

8. КАНОНИЧЕСКАЯ СВЯЗНОСТЬ

Теперь мы применим только что развитую теорию кривых в грассманиане к якобиевым кривым $J_z(t)$ (см. разд. 1).

Предложение 6. *Регулярность (монотонность) всех якобиевых кривых $J_z(\cdot)$, $z \in N$, отвечающих данному гамильтонову полю $\zeta = \vec{h}$, эквивалентна регулярности (монотонности) поля ζ.*

Доказательство. Определение регулярного (монотонного) поля есть по существу специализация определения ростка регулярной (монотонной) кривой в лагранжевом грассманиане: общее определение применяется к росткам в нуле кривых $t \mapsto J_z(t)$. Остается показать, что другие ростки тех же кривых регулярны (монотонны), если только ростки в нуле таковы. Последний факт вытекает из тождества

$$J_z(t+\tau) = e_*^{-t\zeta} J_{e^{t\zeta}(z)}(\tau) \tag{14}$$

(которое в свою очередь есть прямое следствие тождества $e_*^{-(t+\tau)\zeta} = e_*^{-t\zeta} \circ e_*^{-\tau\zeta}$). В самом деле, из равенства (14) следует, что росток кривой $J_z(\cdot)$ в точке t есть образ ростка кривой $J_{e^{t\zeta}(\tau)}(\cdot)$ в нуле при линейном симплектическом отображении $e_*^{-t\zeta}\colon T_{e^{t\zeta}(z)}N \to T_zN$. Регулярность и монотонность ростков сохраняются при симплектических отображениях, поскольку это внутренние свойства, их определение не использует ничего, кроме линейной и симплектической структур. $\square$

Пусть ζ — регулярное поле, так что определены производные кривые $J_z^\circ(t)$. Более того, из тождества (14) и того факта, что производная кривая определяется внутренним образом, следует равенство

$$J_z^\circ(t) = e_*^{-t\zeta} J^\circ_{e^{t\zeta}(z)}(0). \tag{15}$$

Значение производной кривой в нуле определяет разложение $T_zM = J_z(0) \oplus J_z^\circ(0)$, где, напомним, $J_z(0) = \Delta_z$.

Подпространства $J_z^\circ(0) \subset T_zN$, $z \in N$, образуют гладкое распределение — прямое дополнение к "вертикальному" распределению Δ. Прямые дополнения к вертикальному распределению иногда называют связностями Эресмана (или просто нелинейными связностями, невзирая на то, что линейные связности — их частные случаи). Связность Эресмана $\Delta^\zeta = \{J_z^\circ(0)\colon z \in N\}$ называется *канонической связностью*, отвечающей полю ζ, а соответствующее разложение $TN = \Delta \oplus \Delta^\zeta$ *каноническим разложением*. Наша ближайшая цель — дать простую внутреннюю характеризацию распределения Δ^ζ, не требующую интегрирования уравнения $\dot z = \zeta(z)$ и удобную для вычислений как в локальных координатах, так и с подвижными реперами.

Пусть $\Xi = \{\Xi_z \subset T_zN\colon z \in N\}$ — некоторая связность Эресмана и ξ — векторное поле на N; введем обозначения: $\xi_{\mathrm{ver}}(z) = \pi_{\Xi_z\Delta_z}\xi$, $\xi_{\mathrm{hor}}(z) = \pi_{\Delta_z\Xi_z}\xi$ — "вертикальная" и "горизонтальная" части $\xi(z)$. Тогда $\xi = \xi_{\mathrm{ver}} + \xi_{\mathrm{hor}}$, где ξ_{ver} — сечение распределения Δ, а ξ_{hor} — сечение распределения Ξ. Вообще сечения распределения Δ называются вертикальными полями, а сечения распределения Ξ горизонтальными.

Предложение 7. *Связность Эресмана Ξ есть каноническая связность поля ζ в том и только том случае, когда для любого вертикального поля ν выполняется равенство*

$$[\zeta,[\zeta,\nu]]_{\mathrm{hor}} = 2[\zeta,[\zeta,\nu]_{\mathrm{ver}}]_{\mathrm{hor}}. \tag{16}$$

Здесь $[\cdot,\cdot]$ — скобки Ли векторных полей.

Доказательство. Вывод тождества (16) основан на классическом выражении

$$\frac{d}{dt} e_*^{-t\zeta}\xi = e_*^{-t\zeta}[\zeta,\xi], \tag{17}$$

справедливом для любого поля ξ.

Для данного $z\in N$ выберем координаты в T_zN таким образом, что $T_zN=\{(x,y)\colon x,y\in\mathbb{R}^n\}$, где $J_z(0)=\{(x,0)\colon x\in\mathbb{R}^n\}$, $J_z^\circ(0)=\{(0,y)\colon y\in\mathbb{R}^n\}$. Пусть $J_z(t)=\{(x,S_tx)\colon x\in\mathbb{R}^n\}$, тогда $S_0=\ddot S_0=0$, причем $\det\dot S_0\neq 0$ в силу регулярности якобиевой кривой J_z.

Пусть ν — вертикальное поле, $\nu(z)=(x_0,0)$, $\big(e_*^{-t\zeta}\nu\big)(z)=(x_t,y_t)$. Тогда $(x_t,0)=\big(e_*^{-t\zeta}\nu\big)_{\mathrm{ver}}(z)$, $(0,y_t)=\big(e_*^{-t\zeta}\nu\big)_{\mathrm{hor}}(z)$. Кроме того, $y_t=S_tx_t$, поскольку $\big(e_*^{-t\zeta}\nu\big)(z)\in J_z(t)$. Дифференцируя тождество $y_t=S_tx_t$, получаем $\dot y_t=\dot S_tx_t+S_t\dot x_t$. В частности, $\dot y_0=\dot S_0x_0$. Из равенства (17) следует, что $(\dot x_0,0)=[\zeta,\nu]_{\mathrm{ver}}$, $(0,\dot y_0)=[\zeta,\nu]_{\mathrm{hor}}$. Таким образом, $(0,\dot S_0x_0)=[\zeta,\nu]_{\mathrm{hor}}(z)$, где, напомним, ν — произвольное вертикальное поле. Еще раз продифференцируем, на этот раз только в нуле:

$$\ddot y_0=\ddot S_0x_0+2\dot S_0\dot x_0+S_0\ddot x_0=2\dot S_0\dot x_0. \tag{18}$$

Двойные скобки Ли из левой и правой частей равенства (18) имеют вид $(0,\ddot y_0)=[\zeta,[\zeta,\nu]]_{\mathrm{hor}}$, $(0,\dot S_0\dot x_0)=[\zeta,[\zeta,\nu]_{\mathrm{ver}}]_{\mathrm{hor}}$. Таким образом, тождество (16) следует из (18).

Предположим теперь, что $\{(0,y)\colon y\in\mathbb{R}^n\}\neq J_z^\circ(0)$; тогда $\ddot S_0x_0\neq 0$ для некоторого x_0. Следовательно, $\ddot y_0\neq 2\dot S_0\dot x_0$ и тождество (16) не выполняется. $\square$

Равенство (16) можно эквивалентным образом записать в следующем несколько более удобном для вычислений виде:

$$\pi_*[\zeta,[\zeta,\nu]](z)=2\pi_*[\zeta,[\zeta,\nu]_{\mathrm{ver}}](z)\qquad\forall z\in N. \tag{19}$$

Пусть $R_{J_z}(t)\in\mathrm{gl}(J_z(t))$ — кривизна якобиевой кривой $J_z(t)$. Из тождества (14) и того факта, что якобиева кривая строится внутренним образом, следует, что

$$R_{J_z}(t)=e_*^{-t\zeta}R_{J_{e^{t\zeta}(z)}}(0)e_*^{t\zeta}\big|_{J_z(t)}.$$

Напомним, что $J_z(0)=\Delta_z$; оператор $R_{J_z}(0)\in\mathrm{gl}(\Delta_z)$ называется *оператором кривизны поля* ζ в точке z. Введем обозначение $R_\zeta(z)\overset{\mathrm{def}}{=}R_{J_z}(0)$; тогда $R_\zeta=\{R_\zeta(z)\}_{z\in E}$ — эндоморфизм "вертикального" векторного расслоения Δ.

Предложение 8. *Пусть* $TN=\Delta\oplus\Delta^\zeta$ *— каноническое разложение. Тогда*

$$R_\zeta\nu=-[\zeta,[\zeta,\nu]_{\mathrm{hor}}]_{\mathrm{ver}} \tag{20}$$

для любого вертикального поля ν.

Доказательство. Напомним, что $R_{J_z}(0)=[\dot J_z^\circ(0),\dot J_z(0)]$, где $[\cdot,\cdot]$ — инфинитезимальное двойное отношение (не скобки Ли!). Формула (11) для инфинитезимального двойного отношения влечет

$$R_\zeta(z)=R_{J_z}(0)=-\Phi_0^{J_z^\circ J_z}\Phi_0^{J_zJ_z^\circ},$$

где $\Phi_0^{vw}e=\pi_{v(0)w(0)}\dot e_0$ для любой такой гладкой кривой $e_\tau\in v(\tau)$, что $e_0=e$. Из равенств (15) и (17) следует $\Phi_0^{J_zJ_z^\circ}\nu(z)=[\zeta,\nu]_{\mathrm{ver}}(z)$ $\forall z\in M$. Аналогичным образом $\Phi_0^{J_z^\circ J_z}\mu(z)=[\zeta,\mu]_{\mathrm{hor}}(z)$ для любого горизонтального поля μ и любого $z\in M$. Таким образом, мы получаем

$$R_\zeta(z)\nu(z)=-\Phi_0^{J_z^\circ J_z}\Phi_0^{J_zJ_z^\circ}=-[\zeta,[\zeta,\nu]_{\mathrm{hor}}]_{\mathrm{ver}}(z).\quad\square$$

9. ВЫЧИСЛЕНИЯ В КООРДИНАТАХ

Мы ограничимся случаем инволютивного распределения Δ; в этом случае интегральные многообразия распределения Δ образуют лагранжево слоение симплектического многообразия N. Согласно стандартной теореме Дарбу–Вейнстайна (см. [2]) все лагранжевы слоения локально эквивалентны. Точнее, эта теорема утверждает, что любая точка $z\in M$ обладает такой координатной окрестностью O_z, что некоторые локальные координаты превращают ограничение данного лагранжева слоения на O_z в тривиальное расслоение $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n = \{(x,y)\colon x,y \in \mathbb{R}^n\}$ и одновременно превращают $\sigma|_{O_z}$ в форму $\sum_{i=1}^n dx_i \wedge dy_i$. Слоями расслоения служат координатные подпространства $\mathbb{R}^n \times \{y\}$, $y \in \mathbb{R}^n$. Ниже мы используем сокращенные обозначения $\frac{\partial}{\partial x_i} = \partial_{x_i}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \varphi_{x_i}$ и т.д. Мы также используем стандартное соглашение о суммировании по повторяющимся индексам.

Рассмотрим гамильтоново поле $\zeta = -h_{y_i}\partial_{x_i} + h_{x_i}\partial_{y_i}$, где h — гладкая функция на $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ (гамильтониан). Поле ζ регулярно в том и только том случае, когда матрица $h_{xx} = (h_{x_i x_j})_{i,j=1}^n$ невырожденна. Теперь мы вычислим каноническую связность, отвечающую полю ζ.

Векторные поля ∂_{x_i}, $i = 1,\dots,n$, образуют базис пространства вертикальных полей. В заданных локальных координатах любая связность Эресмана имеет единственный базис вида

$$(\partial_{y_i})_{\mathrm{hor}} = \partial_{y_i} + c_i^j \partial_{x_j},$$

где c_i^j, $i,j = 1,\dots,n$, — гладкие функции на $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Для того чтобы задать связность в координатах, нужно просто указать функции c_i^j. В случае канонической связности регулярного поля функции c_i^j легко находятся из тождества (19), примененного к $\nu = \partial_{x_i}$, $i = 1,\dots,n$.

Положим $C = (c_i^j)_{i,j=1}^n$; прямое вычисление сводит тождество (19) к равенствам

$$2(h_{xx} C h_{xx})_{ij} = h_{x_k} h_{x_i x_j y_k} - h_{y_k} h_{x_i x_j x_k} - h_{x_i y_k} h_{x_k x_j} - h_{x_i x_k} h_{y_k x_j},$$

или в матричной форме

$$2 h_{xx} C h_{xx} = \{h, h_{xx}\} - h_{xy} h_{xx} - h_{xx} h_{yx},$$

где $\{h, h_{xx}\}$ — скобки Пуассона: $\{h, h_{xx}\}_{ij} = \{h, h_{x_i x_j}\} = h_{x_k} h_{x_i x_j y_k} - h_{y_k} h_{x_i x_j x_k}$. Заметим, что матрица C симметрична (действительно, $h_{xx} h_{yx} = (h_{xy} h_{xx})^\top$) — это координатное выражение лагранжевости канонической связности.

Зная каноническую связность, легко вычислить кривизну, используя формулу (20); правда, явное координатное выражение кривизны может оказаться достаточно громоздким. Посмотрим, что получается для некоторых специальных классов полей. В случае гамильтониана натуральной механической системы в $\mathbb{R}^n$

$$h(x,y) = \frac{1}{2}|x|^2 + U(y) \tag{21}$$

каноническая связность тривиальна: $c_i^j = 0$; матрица оператора кривизны есть просто U_{yy}.

Гамильтоново поле, отвечающее гамильтониану $h(x,y) = g^{ij}(y) x_i x_j$ с невырожденной симметричной матрицей $(g^{ij})_{i,j=1}^n$, порождает (псевдо)риманов геодезический поток. В этом случае каноническая связность есть классическая связность Леви-Чивита, а оператор кривизны есть оператор Риччи (псевдо)римановой геометрии (подробности см. в [5, Sect. 5]). Наконец, гамильтониан $h(x,y) = g^{ij}(y) x_i x_j + U(y)$ (энергия натуральной механической системы на (псевдо)римановом многообразии) имеет ту же каноническую связность, что и гамильтониан $h(x,y) = g^{ij}(y) x_i x_j$, а его оператор кривизны есть сумма оператора Риччи и второй ковариантной производной U.

Более общим образом, пусть $\vec{h}$ — регулярное гамильтоново поле на T^*M и U — гладкая функция на M (потенциал). Мы можем считать U постоянной на слоях функцией на T^*M. Тогда $\vec{U}$ — вертикальное поле, гамильтониан $h + U$ имеет ту же каноническую связность, что и h, в то же время $R_{\vec{h}+\vec{U}}\nu = R_{\vec{h}} - [\vec{u}, [\vec{h}, \nu]_{\mathrm{hor}}]_{\mathrm{ver}}$ согласно формуле (20). Второй член в правой части этой формулы можно рассматривать как вторую ковариантную производную U в силу данной связности Эресмана.

10. РЕДУКЦИЯ

Мы рассматриваем гамильтонову систему $\dot{z} = \vec{h}(z)$ на симплектическом многообразии N с заданным лагранжевым распределением Δ. Предположим, что $g\colon N \to \mathbb{R}$ — первый интеграл нашей гамильтоновой системы, т.е. $\{h, g\} = 0$.

Лемма 7. *Пусть $z \in N$, $g(z) = c$. Подпространство Δ_z в том и только том случае трансверсально гиперповерхности $g^{-1}(c)$ в точке z, когда $\vec{g}(z) \notin \Delta_z$.*

Доказательство. Гиперповерхность $g^{-1}(c)$ нетрансверсальна Δ_z в точке z, если и только если

$$d_z g(\Delta_z) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sigma(\vec{g}(z), \Delta_z) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{g}(z) \in \Delta_z^{\angle} = \Delta_z,$$

где $\mathcal{A}^{\angle}$ — косоортогональное дополнение (т.е. ортогональное дополнение по отношению к симплектической форме) подмножества $\mathcal{A}$ в симплектическом пространстве. $\square$

Если все точки некоторого множества уровня $g^{-1}(c)$ удовлетворяют условиям леммы 7, то $g^{-1}(c)$ — $(2n-1)$-мерное многообразие с распределением $\Delta_z^g \overset{\text{def}}{=} T_z(E_z \cap g^{-1}(c))$ ранга $n-1$. Заметим, что $\mathbb{R}\vec{g}(z) = \ker \sigma|_{T_z g^{-1}(c)}$, следовательно, $\Sigma_z^g \overset{\text{def}}{=} T_z g^{-1}(c)/\mathbb{R}\vec{g}(z)$ есть $2(n-1)$-мерное симплектическое пространство, а Δ_z^g — лагранжево подпространство в Σ_z^g, т.е. $\Delta_z^g \in L(\Sigma_z^g)$.

Подмногообразие $g^{-1}(c)$ — инвариантное многообразие потока $e^{t\vec{h}}$. Более того, $e_*^{t\vec{h}}\vec{g} = \vec{g}$. Следовательно, $e_*^{t\vec{h}}$ задает симплектическое отображение $e_*^{t\vec{h}}\colon \Sigma_z^g \to \Sigma_{e^{t\vec{h}}(z)}^g$. Положим $J_z^g(t) = e_*^{-t\vec{h}}\Delta_{e^{t\vec{h}}(z)}^g$. Кривая $t \mapsto J_z^g(t)$ в лагранжевом грассманиане $L(\Sigma_z^g)$ называется *g-редуцированной якобиевой кривой* гамильтонова поля $\vec{h}$ в точке $z \in N$.

Редуцированная якобиева кривая легко строится по якобиевой кривой $J_z(t) = e_*^{-t\vec{h}}\Delta_{e^{t\vec{h}}(z)} \in L(T_z N)$ и вектору $\vec{g}(z)$. Простое вычисление показывает, что

$$J_z^g(t) = J_z(t) \cap \vec{g}(z)^{\angle} + \mathbb{R}\vec{g}(z).$$

Теперь мы на время забудем о симплектическом многообразии и гамильтонианах и еще немного поработаем с кривыми в лагранжевом грассманиане. Пусть $v(\cdot)$ — гладкая кривая в лагранжевом грассманиане $L(\Sigma)$ и γ — одномерное подпространство в Σ. Пусть $v^\gamma(t) = v(t) \cap \gamma^{\angle} + \gamma$ — лагранжево подпространство симплектического пространства $\gamma^{\angle}/\gamma$. Если $\gamma \not\subset v(t)$, то $v^\gamma(\cdot)$ — гладкая кривая и $\underline{\dot{v}}^\gamma(t) = \underline{\dot{v}}(t)|_{\Lambda(t)\cap\gamma^{\angle}}$, как легко вытекает из определений. В частности, регулярность и монотонность кривой $v(\cdot)$ влекут регулярность и монотонность кривой $v^\gamma(\cdot)$. Кривизны кривых $v(\cdot)$ и $v^\gamma(\cdot)$ связаны более сложным образом.

Теорема 1. *Пусть $v(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, — регулярная монотонная кривая в $L(\Sigma)$ и γ — такое одномерное подпространство в Σ, что $\gamma \not\subset v(t)$ $\forall t \in [t_0, t_1]$. Тогда $r_{v^\gamma}(t) \geq r_v(t)|_{v(t)\cap\gamma^{\angle}}$ и $\operatorname{rank}\bigl(r_{v^\gamma}(t) - r_v(t)|_{v(t)\cap\gamma^{\angle}}\bigr) \leq 1$. Более того, справедливо равенство*

$$r_{v^\gamma}(t)(x) = r_v(t)(x) + \frac{3\sigma(\ddot{a}_e(t), x)^2}{4\sigma(a_e(t), e)}, \qquad x \in v(t) \cup \gamma^{\angle},$$

где $e \in \gamma \setminus 0$, а вектор $a_e(t) \in v(t)$ определяется условием $(\dot{a}_e(t) - e) \in v(t)$.

Доказательство. Достаточно вычислить кривизны при $t = 0$. Выберем координаты в Σ таким образом, что $\Sigma \cong \mathbb{R}^{n*} \times \mathbb{R}^n = \{(\eta, y)\colon \eta \in \mathbb{R}^{n*},\ y \in \mathbb{R}^n\}$, $v(0) = \mathbb{R}^{n*} \times \{0\}$, а γ — некоторая координатная ось в $\{0\} \times \mathbb{R}^n$. Тогда $v(t) = \{(y^\top, S_t y)\colon y \in \mathbb{R}^n\}$, $v^\gamma(t) = \{(y_\gamma^\top, S_t^\gamma y_\gamma)\colon y_\gamma \in \mathbb{R}^{n-1}\}$, где S_t^γ получено из матрицы S_t удалением строки и столбца, отвечающих оси γ. Можно также считать, что $v(\cdot)$ монотонно возрастает и что $\dot{S}_0 = I$. Координатное выражение кривизны через производную Шварца влечет

$$r_v(0)(y) = \frac{1}{2}\langle \dddot{S}_0 y, y\rangle - \frac{3}{4}\langle \ddot{S}_0 y, \ddot{S}_0 y\rangle, \qquad r_{v^\gamma}(0)(y_\gamma) = \frac{1}{2}\langle \dddot{S}_0^\gamma y_\gamma, y_\gamma\rangle - \frac{3}{4}\langle \ddot{S}_0^\gamma y_\gamma, \ddot{S}_0^\gamma y_\gamma\rangle.$$

Теперь очевидно, что $r_{v^\gamma}(0) - r_v(0)|_{v(t)\cap\gamma^\angle}$ — неотрицательная квадратичная форма и ее ранг не превосходит единицы. Представим эту форму в виде, не зависящем от специального выбора базиса в $\mathbb{R}^n$:

$$r_{v^\gamma}(0)(y) - r_v(0)(y) = \frac{3\langle\ddot{S}_0 a_0, y\rangle^2}{4\langle a_0, e\rangle},$$

где e — любой ненулевой вектор прямой $\gamma \subset \mathbb{R}^n$ и $a_0 = \dot{S}_0^{-1} e$.

Далее $a_e(t) = (y_e^\top(t), S_t y_e(t))$, где $y_e(0) = a_0$, $\ddot{S}a_0 = -\dot{S}_0\dot{y}_e(0)$. Следовательно, $(\ddot{a}(0) + \ddot{S}_0 a_0) \in$ $\in v(0)$ и $\langle \ddot{S}a_0, y\rangle = -\sigma(\ddot{a}_e(0), y)$, $\langle a_0, e\rangle = \sigma(a_e(0), e)$. $\square$

Неравенство $r_{v^\gamma}(t) \geq r_v(t)|_{v(t)\cap\gamma^\angle}$ становится равенством, если $\gamma \subset v^\circ(t)$ $\forall t$. Тогда $\gamma \subset$ $\subset \ker \underline{\dot{v}}^\circ(t)$. Согласно предложению 5 прямой γ отвечает прямая в ядре формы $r_v(t)$; в частности, форма $r_v(t)$ вырожденна.

Вернемся к якобиевым кривым $J_z(t)$ монотонного гамильтонова поля $\vec{h}$. Квадратичная форма $r_z \overset{\mathrm{def}}{=} r_{J_z}(0)$ на Δ_z называется *формой кривизны* гамильтониана h в точке $z \in N$. Таким образом, $r_z(\xi) = \beta_z^h(R_z\xi, \xi)\,\mathrm{sgn}\,\beta^h$, $\xi \in \Delta_z$, где β_z^h — симметричная билинейная форма, определенная в разд. 1. Пусть g — первый интеграл поля $\vec{h}$ и $d_z g \neq 0$; тогда из монотонности поля $\vec{h}$ следует $\vec{g} \notin \Delta_z$. Квадратичная форма $r_z^g \overset{\mathrm{def}}{=} r_{J_z^g}(0)$ называется *g-приведенной формой кривизны* гамильтониана h в точке z. Следующее тождество есть простое следствие теоремы 1:

$$r_z^g(\xi) = r_z(\xi) + \frac{3\sigma_z([\vec{h}, [\vec{h}, \bar{a}]](z), \xi)^2}{4|\beta_z^h(\bar{a}, \bar{a})|}, \qquad \xi \in \Delta_z \cap \ker d_z h,$$

где векторное поле $\bar{a}$ определяется тождеством $\beta(\xi, \bar{a}) = \sigma(\xi, \vec{g})$ $\forall \xi \in \Delta$.

Всегда есть по крайней мере один первый интеграл: сам гамильтониан h. Вообще говоря, $\vec{h}(z) \notin J_z^\circ(0)$ и процедура редукции влияет на кривизну нетривиальным образом. Например, в случае натуральной механической системы в $\mathbb{R}^n$ (см. (21)) получаем $r^h_{(x,y)}(\xi) = r_{(x,y)}(\xi) +$ $+ \frac{3}{|x|^2}\left\langle \frac{dU}{dy}, \xi\right\rangle^2$. Более общим образом, для натуральной механической системы на римановом многообразии с потенциальной энергией U имеет место равенство

$$r^h_{x,y}(\xi) = r_{x,y}(\xi) + \frac{3\beta^h(d_y U, \xi)^2}{2(h(x,y) - U(y))}. \tag{22}$$

Тем не менее имеется важный класс гамильтонианов и лагранжевых слоений, для которых соотношение $\vec{h}(z) \in J_z^\circ(0)$ выполняется для всех z. Это гамильтонианы на кокасательных расслоениях, однородные на слоях (в частности, гамильтонианы, порождающие римановы и финслеровы геодезические потоки). В этом случае эйлерово векторное поле, порождающее гомотетии в слоях, лежит в ядре формы кривизны.

11. ГИПЕРБОЛИЧНОСТЬ

В этом разделе мы покажем, что отрицательность форм кривизны влечет гиперболическое поведение потока, порожденного монотонным гамильтоновым полем. Это естественное обобщение хорошо известного свойства риманова геодезического потока в случае отрицательной секционной кривизны.

Основным средством служит структурное уравнение, выведенное в разд. 6. Прежде всего мы покажем, что это уравнение согласовано с симплектической структурой. Пусть $\Lambda(t)$, $t \in \mathbb{R}$, — регулярная кривая в $L(\Sigma)$ и $\Sigma = \Lambda(t) \oplus \Lambda^\circ(t)$ — соответствующее каноническое разложение. Рассмотрим структурное уравнение

$$\ddot{e}(t) + R_\Lambda(t)e(t) = 0, \qquad \text{где} \quad e(t) \in \Lambda(t), \quad \dot{e}(t) \in \Lambda^\circ(t) \tag{23}$$

(см. следствие 1).

Лемма 8. *Отображение* $e(0) \oplus \dot e(0) \mapsto e(t) \oplus \dot e(t)$, *где* $e(\cdot)$ *и* $\dot e(\cdot)$ *удовлетворяют уравнению* (23), *есть симплектическое преобразование пространства* Σ.

Доказательство. Необходимо проверить, что величины $\sigma(e_1(t), e_2(t))$, $\sigma(\dot e_1(t), \dot e_2(t))$ и $\sigma(e_1(t), \dot e_2(t))$ не зависят от t, если $e_i(t)$, $\dot e_i(t)$, $i = 1, 2$, удовлетворяют уравнению (23). Это несложно: первые две величины равны нулю, поскольку $\Lambda(t)$ и $\Lambda^\circ(t)$ — лагранжевы подпространства. Производная третьей величины также равна нулю в силу того, что $\ddot e_i(t) \in \Lambda(t)$. □

Пусть $\vec h$ — регулярное монотонное поле на симплектическом многообразии N с лагранжевым распределением Δ. Как и выше, символом $J_z(t)$ обозначается якобиева кривая поля $\vec h$, а символом $J_z^h(t)$ — h-редуцированная кривая (см. предыдущий раздел). Пусть $R(z) = R_{J_z}(0)$, $R^h(z) = R_{J_z^h}(0)$ — соответствующие операторы кривизны, а r_z, r_z^h — формы кривизны. Скажем, что гамильтоново поле $\vec h$ имеет отрицательную кривизну в точке z (по отношению к распределению Δ), если все собственные числа оператора $R(z)$ отрицательны или, эквивалентно, $r_z < 0$. Скажем, что поле $\vec h$ имеет отрицательную приведенную кривизну в точке z, если все собственные числа оператора R_z^h отрицательны; иными словами, если $r_z^h < 0$.

Предложение 9. *Пусть* $z_0 \in N$, $z_t = e^{t\vec h}(z)$. *Предположим, что* $\overline{\{z_t : t \in \mathbb{R}\}}$ — *компактное подмножество* N *и что* N *снабжено римановой структурой. Если поле* $\vec h$ *имеет отрицательную кривизну в каждой точке* $z \in \overline{\{z_t : t \in \mathbb{R}\}}$, *то найдутся такие константа* $\alpha > 0$ *и разложение* $T_{z_t}N = \Delta_{z_t}^+ \oplus \Delta_{z_t}^-$, *где* $\Delta_{z_t}^\pm$ — *лагранжевы подпространства в* $T_{z_t}N$, *что* $e_*^{\tau\vec h}(\Delta_{z_t}^\pm) = \Delta_{z_{t+\tau}}^\pm$ $\forall\, t, \tau \in \mathbb{R}$ *и*

$$\left\| e_*^{\pm\tau\vec h}\zeta_\pm \right\| \ge e^{\alpha\tau}\|\zeta_\pm\| \qquad \forall\, \zeta \in \Delta_{z_t}^\pm, \quad \tau \ge 0, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{24}$$

Аналогично если поле $\vec h$ *имеет отрицательную приведенную кривизну в любой точке* $z \in \overline{\{z_t : t \in \mathbb{R}\}}$, *то найдется такое разложение* $T_{z_t}(h^{-1}(c)/\mathbb{R}h(z_t)) = \widehat\Delta_{z_t}^+ \oplus \widehat\Delta_{z_t}^-$, *где* $c = h(z_0)$ *и* $\widehat\Delta_{z_t}^\pm$ — *лагранжевы подпространства в* $T_{z_t}(h^{-1}(c)/\mathbb{R}h(z_t))$, *что* $e_*^{\tau\vec h}(\widehat\Delta_{z_t}^\pm) = \widehat\Delta_{z_{t+\tau}}^\pm$ $\forall\, t, \tau \in \mathbb{R}$ *и*

$$\left\| e_*^{\pm\tau\vec h}\zeta_\pm \right\| \ge e^{\alpha\tau}\|\zeta_\pm\| \qquad \forall\, \zeta \in \widehat\Delta_{z_t}^\pm, \quad \tau \ge 0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Доказательство. Ясно, что требуемые свойства распределений $\Delta_{z_t}^\pm$ и $\widehat\Delta_{z_t}^\pm$ не зависят от выбора римановой структуры на N. Мы введем специальную риманову структуру, определяемую гамильтонианом h. Риманова структура есть гладкое семейство скалярных произведений $\langle\cdot,\cdot\rangle_z$ на T_zN, $z \in N$. Рассмотрим разложение $T_zN = J_z(0) \oplus J_z^\circ(0)$, где $J_z(0) = \Delta_z$. Заменяя, если необходимо, h на $-h$, мы можем предполагать, что β_z^h — положительно определенные формы, и частично определить скалярные произведения равенством $\langle\cdot,\cdot\rangle_z|_{J_z(0)} = \beta_z^h$. Симплектическая форма σ задает невырожденное спаривание $J_z(0)$ и $J_z^\circ(0)$. В частности, для любого $\zeta \in J_z(0)$ существует такое единственное $\zeta^\circ \in J_z^\circ(0)$, что $\sigma(\zeta^\circ, \cdot)|_{J_z(0)} = \langle\zeta,\cdot\rangle_z|_{J_z(0)}$. Существует единственное продолжение скалярного произведения $\langle\cdot,\cdot\rangle_z$ с подпространства $J_z(0)$ на все пространство T_zN, обладающее следующими свойствами:

- подпространства $J_z^\circ(0)$ и $J_z(0)$ ортогональны по отношению к $\langle\cdot,\cdot\rangle_z$;
- $\langle\zeta_1,\zeta_2\rangle_z = \langle\zeta_1^\circ,\zeta_2^\circ\rangle_z$ $\forall\, \zeta_1, \zeta_2 \in J_z(0)$.

Нам понадобится следующий стандартный факт из гиперболической динамики (см., например, [3, § 17.6]).

Лемма 9. *Пусть* $A(t)$, $t \in \mathbb{R}$, — *ограниченное непрерывное семейство симметричных* $(n \times n)$-*матриц, имеющих только отрицательные собственные значения, равномерно отделенные от нуля. Пусть* $\Gamma(t,\tau)$ — *фундаментальная матрица* $2n$-*мерной линейной системы*

$\dot{x} = -y$, $\dot{y} = A(t)x$, где $x, y \in \mathbb{R}^n$, т.е.

$$\frac{\partial}{\partial t}\Gamma(t,\tau) = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ A & 0 \end{pmatrix}\Gamma(t,\tau), \qquad \Gamma(\tau,\tau) = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}. \tag{25}$$

Тогда существуют такие замкнутые конические окрестности C^+_Γ, C^-_Γ, $C^+_\Gamma \cap C^-_\Gamma = 0$, некоторых n-мерных подпространств в $\mathbb{R}^{2n}$ и константа $\alpha > 0$, что

$$\Gamma(t,\tau)C^+_\Gamma \subset C^+_\Gamma, \qquad |\Gamma(t,\tau)\xi_+| \ge e^{\alpha(\tau-t)}|\xi_+| \quad \forall\, \xi_+ \in C^+_\Gamma, \qquad t \le \tau,$$

и

$$\Gamma(t,\tau)C^-_\Gamma \subset C^-_\Gamma, \qquad |\Gamma(t,\tau)\xi_-| \ge e^{\alpha(t-\tau)}|\xi_-| \quad \forall\, \xi_- \in C^-_\Gamma, \qquad t \ge \tau.$$

Константа α зависит только от верхней и нижней границ собственных чисел матриц $A(t)$. $\square$

Следствие 5. *Пусть $C^\pm_\Gamma$ — конусы, описанные в лемме 9. Тогда $\Gamma(0,\pm t)C^\pm_\Gamma \subset \Gamma(0,\pm\tau)C^\pm_\Gamma$ для любых $t \ge \tau \ge 0$, а подмножества $K^\pm_\Gamma = \bigcap_{t\ge 0}\Gamma(0,t)C^\pm_\Gamma$ суть лагранжевы подпространства пространства $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ со стандартной симплектической формой.*

Доказательство. Из включений $\Gamma(\tau,t)C^+_\Gamma \subset C^+_\Gamma$ и $\Gamma(-\tau,-t)C^-_\Gamma \subset C^-_\Gamma$ следует, что

$$\Gamma(0,\pm t)C^\pm_\Gamma = \Gamma(0,\pm\tau)\Gamma(\pm\tau,\pm t)C^\pm_\Gamma \subset \Gamma(0,\pm\tau)C^\pm_\Gamma.$$

Мы рассмотрим только K^+_Γ; те же рассуждения годятся и для K^-_Γ. Пусть $\zeta, \zeta' \in K^+_\Gamma$; тогда $\zeta = \Gamma(0,t)\zeta_t$ и $\zeta' = \Gamma(0,t)\zeta'_t$ для любого $t \ge 0$ и некоторых $\zeta_t, \zeta'_t \in C^+_\Gamma$. Далее согласно лемме 9 $|\zeta_t| \le e^{-\alpha t}|\zeta|$, $|\zeta'_t| \le e^{-\alpha t}|\zeta'|$, т.е. ζ_t и ζ'_t стремятся к нулю при $t \to +\infty$. В то же время

$$\sigma(\zeta,\zeta') = \sigma(\Gamma(0,t)\zeta_t, \Gamma(0,t)\zeta'_t) = \sigma(\zeta_t,\zeta'_t) \quad \forall t \ge 0,$$

поскольку $\Gamma(0,t)$ — симплектическая матрица. Следовательно, $\sigma(\zeta,\zeta') = 0$.

Мы показали, что K^+_Γ — изотропное подмножество пространства $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. С другой стороны, подмножество K^+_Γ содержит некоторое n-мерное подпространство, так как конус C^+_Γ содержит такое подпространство, а $\Gamma(0,t)$ — обратимые линейные преобразования. Изотропное n-мерное подпространство равно своему косоортогональному дополнению, поэтому K^+_Γ — лагранжево подпространство. $\square$

Рассмотрим теперь регулярную монотонную кривую $\Lambda(t)$, $t \in \mathbb{R}$, в лагранжевом грассманиане $L(\Sigma)$. Можно считать, что $\Lambda(\cdot)$ монотонно возрастает, т.е. $\dot{\Lambda}(t) > 0$. Напомним, что $\underline{\dot{\Lambda}}(t)(e(t)) = \sigma(e(t), \dot{e}(t))$, где $e(\cdot)$ — произвольная гладкая кривая в Σ, удовлетворяющая условию $e(\tau) \in \Lambda(\tau)$ $\forall\tau$. Дифференцируя тождество $\sigma(e_1(\tau), e_2(\tau)) = 0$, получаем

$$\sigma(e_1(t), \dot{e}_2(t)) = -\sigma(\dot{e}_1(t), e_2(t)) = \sigma(e_2(t), \dot{e}_1(t)),$$

если $e_i(\tau) \in \Lambda(\tau)$ $\forall\tau$, $i = 1, 2$. Следовательно, евклидова структура $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\dot{\Lambda}(t)}$, определенная квадратичной формой $\underline{\dot{\Lambda}}(t)$, имеет вид

$$\langle e_1(t), e_2(t)\rangle_{\dot{\Lambda}(t)} = \sigma(e_1(t), \dot{e}_2(t)).$$

Пусть $e_1(0), \dots, e_n(0)$ — базис подпространства $\Lambda(0)$, в котором форма $\underline{\dot{\Lambda}}(0)$ имеет единичную матрицу, т.е. $\sigma(e_i(0), \dot{e}_j(0)) = \delta_{ij}$. На самом деле векторы $\dot{e}_j(0)$ определены по модулю $\Lambda(0)$; мы можем их нормализовать, предполагая, что $\dot{e}_i(0) \in \Lambda^\circ(0)$, $i = 1, \dots, n$. Тогда $e_1(0), \dots, e_n(0), \dot{e}_1(0), \dots, \dot{e}_n(0)$ — базис Дарбу симплектического пространства Σ. Зададим координаты в Σ, используя этот базис: $\Sigma = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, где $\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ отождествляется с $\sum_{j=1}^n (x^j e_j(0) + y^j \dot{e}_j(0)) \in \Sigma$, $x = (x^1, \dots, x^n)^\top$, $y = (y^1, \dots, y^n)^\top$.

Мы утверждаем, что найдется такое гладкое семейство $A(t)$, $t \in \mathbb{R}$, симметричных $(n \times n)$-матриц, что собственные значения $A(t)$ совпадают с собственными значениями $R_\Lambda(t)$ и, кроме того,

$$\Lambda(t) = \Gamma(0,t)\begin{pmatrix}\mathbb{R}^n\\ 0\end{pmatrix}, \qquad \Lambda^\circ(t) = \Gamma(0,t)\begin{pmatrix}0\\ \mathbb{R}^n\end{pmatrix} \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

в заданных координатах, где $\Gamma(t,\tau)$ есть решение системы (25). Действительно, пусть $e_i(t)$, $i = 1,\dots,n,$ — решения структурного уравнения (23). Тогда

$$\Lambda(t) = \operatorname{span}\{e_1(t),\dots,e_n(t)\}, \qquad \Lambda^\circ(t) = \operatorname{span}\{\dot e_1(t),\dots,\dot e_n(t)\}.$$

Более того, $\ddot e_i(t) = -\sum_{i=1}^n a_{ij}(t)e_j(t)$, где $A(t) = \{a_{ij}(t)\}_{i,j=1}^n$ — матрица оператора $R_\Lambda(t)$ в "подвижном" базисе $e_1(t),\dots,e_n(t)$. Из леммы 8 следует, что $\langle e_i(t), e_j(t)\rangle_{\dot\Lambda(t)} = \sigma(e_i(t),\dot e_j(t)) = \delta_{ij}$. Иными словами, евклидова структура $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\dot\Lambda(t)}$ имеет единичную матрицу в базисе $e_1(t),\dots,e_n(t)$. Оператор $R_\Lambda(t)$ самосопряжен по отношению к евклидовой структуре $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\dot\Lambda(t)}$ (см. предложение 5). Следовательно, матрица $A(t)$ симметрична.

Пусть $e_i(t) = \binom{x_i(t)}{y_i(t)} \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ в заданных координатах. Составим $(n \times n)$-матрицы $X(t) = (x_1(t),\dots,x_n(t))$, $Y(t) = (y_1(t),\dots,y_n(t))$ и $(2n \times 2n)$-матрицу $\begin{pmatrix}X(t) & \dot X(t)\\ Y(t) & \dot Y(t)\end{pmatrix}$. Тогда

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}X & \dot X\\ Y & \dot Y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}X & \dot X\\ Y & \dot Y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -A(t)\\ I & 0\end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix}X & \dot X\\ Y & \dot Y\end{pmatrix}(0) = \begin{pmatrix}I & 0\\ 0 & I\end{pmatrix}.$$

Следовательно, $\begin{pmatrix}X & \dot X\\ Y & \dot Y\end{pmatrix}(t) = \Gamma(t,0)^{-1} = \Gamma(0,t)$.

Пусть теперь $\Lambda(\cdot)$ — якобиева кривая, $\Lambda(t) = J_{z_0}(t)$. Положим $\xi_i(z_t) = e_*^{t\vec h}e_i(t)$, $\eta_i(z_t) = e_*^{t\vec h}\dot e_i(t)$; тогда

$$\xi_1(z_t),\dots,\xi_n(z_t),\eta_1(z_t),\dots,\eta_n(z_t) \tag{26}$$

является базисом Дарбу пространства $T_{z_t}N$, причем $J_{z_t}(0) = \operatorname{span}\{\xi_1(z_t),\dots,\xi_n(z_t)\}$, $J_{z_t}^\circ(0) = \operatorname{span}\{\eta_1(z_t),\dots,\eta_n(z_t)\}$. Кроме того, базис (26) ортонормальный по отношению к скалярному произведению $\langle\cdot,\cdot\rangle_{z_t}$ на $T_{z_t}N$.

Тот факт, что структурное уравнение строится внутренним бескоординатным образом, влечет трансляционную инвариантность конструкции репера (26): если начать с точки z_s вместо z_0 и положить $\Lambda(t) = J_{z_s}(t)$, $e_i(0) = \xi_i(z_s)$, $\dot e_i(0) = \eta_i(z_s)$ для некоторого $s \in \mathbb{R}$, то получим $e_*^{t\vec h}e_i(t) = \xi_i(z_{s+t})$, $e_*^{t\vec h}\dot e_i(t) = \eta_i(z_{s+t})$.

Репер (26) определяет фиксированные ортонормальные координаты Дарбу в $T_{z_s}N$ для всех $s \in \mathbb{R}$ и соответствующие симплектические $(2n \times 2n)$-матрицы $\Gamma_{z_s}(\tau,t)$. При этом $\Gamma_{z_s}(\tau,t) = \Gamma_{z_0}(s+\tau, s+t)$; в самом деле, $\Gamma_{z_s}(\tau,t)\binom{x}{y}$ есть координатное представление вектора

$$e_*^{(\tau-t)\vec h}\sum_i\bigl(x^i\xi^i(z_{s+t}) + y^i\eta_i(z_{s+t})\bigr)$$

в базисе $\xi_i(z_{s+\tau}),\eta_i(z_{s+\tau})$. В частности,

$$\left|\Gamma_{z_s}(0,t)\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\right| = \left\|e_*^{-t\vec h}\sum_i\bigl(x^i\xi^i(z_{s+t}) + y^i\eta_i(z_{s+t})\bigr)\right\|_{z_s}. \tag{27}$$

Напомним, что $\xi_1(z_\tau),\dots,\xi_n(z_\tau),\eta_1(z_\tau),\dots,\eta_n(z_\tau)$ — ортонормальный репер для скалярного произведения $\langle\cdot,\cdot\rangle_{z_\tau}$ и $\|\zeta\|_{z_\tau} = \sqrt{\langle\zeta,\zeta\rangle_{z_\tau}}$.

Введем обозначение

$$\lfloor W \rfloor_{z_s} = \left\{ \sum_i \bigl(x^i \xi^i(z_s) + y^i \eta_i(z_s)\bigr) \colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in W \right\}$$

для любого $W \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Пусть $C^{\pm}_{\Gamma_{z_0}}$ — конусы из леммы 9. Тогда

$$e_*^{-\tau\vec{h}} \Big\lfloor \Gamma_{z_s}(0,t) C^{\pm}_{\Gamma_{z_0}} \Big\rfloor_{z_{s-\tau}} = \Big\lfloor \Gamma_{z_{s-\tau}}(0,t+\tau) C^{\pm}_{\Gamma_{z_0}} \Big\rfloor_{z_{s-\tau}} \qquad \forall\, t,\tau,s. \tag{28}$$

Положим теперь $K^+_{\Gamma_{z_s}} = \bigcap_{t\ge 0} C^+_{\Gamma_{z_0}}$, $K^-_{\Gamma_{z_s}} = \bigcap_{t\le 0} C^-_{\Gamma_{z_0}}$ и $\Delta^{\pm}_{z_s} = \big\lfloor K^{\mp}_{\Gamma_{z_s}} \big\rfloor_{z_s}$. Из следствия 5 вытекает, что $\Delta^{\pm}_{z_s}$ — лагранжевы подпространства в $T_{z_s}N$. Кроме того, из (28) следует равенство $e_*^{t\vec{h}} \Delta^{\pm}_{z_s} = \Delta^{\pm}_{z_{s+t}}$; неравенство (24) теперь вытекает из (28) и (27).

Мы, таким образом, доказали часть предложения 9, касающуюся якобиевых кривых $J_z(t)$. Случай редуцированных якобиевых кривых $J_z^h(t)$ требует лишь незначительного изменения приведенного доказательства; мы это оставляем читателю. $\square$

Замечание. Константа α, конечно, зависит от римановой структуры на N. В случае специальной римановой структуры, определенной в начале доказательства предложения 9, эта константа зависит только от верхней и нижней границ собственных чисел операторов кривизны (см. лемму 9 и последующие рассуждения).

Пусть e^{tX}, $t \in \mathbb{R}$, — поток, порожденный векторным полем X на многообразии M. Напомним, что компактное инвариантное подмножество $W \subset M$ потока e^{tX} называется гиперболическим множеством, если для некоторой римановой структуры в окрестности W, положительной константы α и разложения $T_zM = E_z^+ \oplus E_z^- \oplus \mathbb{R}X(z)$, $z \in W$, касательного расслоения в прямую сумму непрерывных подрасслоений справедливы соотношения $e_*^{tX} E_z^{\pm} = E^{\pm}_{e^{tX}(z)}$ и $\|e_*^{\pm tX}\zeta^{\pm}\| \ge e^{\alpha t}\|\zeta^{\pm}\|$ $\forall t \ge 0$, $\zeta^{\pm} \in E_z^{\pm}$. Как известно, знание того, что некоторое инвариантное подмножество гиперболическое, влечет достаточно подробную информацию об асимптотическом поведении потока в окрестности этого множества (см., например, главы, посвященные гиперболической динамике, в [3]). Поток e^{tX} называется потоком Аносова, если все многообразие M есть гиперболическое множество.

Следующий результат — прямое следствие предложения 9 и предыдущего замечания.

Теорема 2. *Пусть $\vec{h}$ — регулярное монотонное поле на N, $c \in \mathbb{R}$ и $W \subset h^{-1}(c)$ — компактное инвариантное подмножество потока $e^{t\vec{h}}$, $t \in \mathbb{R}$, причем $d_zh \ne 0$ $\forall z \in W$. Если приведенная кривизна поля $\vec{h}$ отрицательна во всех точках множества W, то W — гиперболическое множество потока $e^{t\vec{h}}|_{h^{-1}(c)}$.* $\square$

Эта теорема обобщает классический результат о геодезических потоках на компактных римановых многообразиях отрицательной секционной кривизны. В самом деле, если N — кокасательное расслоение риманова многообразия, а $e^{t\vec{h}}$ — геодезический поток, то отрицательность приведенной кривизны поля $\vec{h}$ означает просто отрицательность римановой секционной кривизны. В этом случае гамильтониан h однороден на слоях кокасательного расслоения и потоки $e^{t\vec{h}}|_{h^{-1}(c)}$ эквивалентны для всех $c > 0$.

Положение меняется, если h — энергия общей натуральной механической системы на компактном римановом многообразии. В этом случае поток и приведенная кривизна зависят от уровня энергии. Тем не менее отрицательность секционной кривизны влечет отрицательность приведенной кривизны поля $\vec{h}$ на $h^{-1}(c)$ при всех достаточно больших c. В частности, $e^{t\vec{h}}|_{h^{-1}(c)}$ — поток Аносова при всех достаточно больших c; это легко выводится из формулы (22).

Теорема 2 относится только к приведенной кривизне, а в следующей теореме рассматривается (неприведенная) кривизна поля $\vec{h}$.

Теорема 3. *Пусть h — регулярное монотонное поле и W — компактное инвариантное подмножество потока $e^{t\vec{h}}$. Если поле $\vec{h}$ имеет отрицательную кривизну в каждой точке множества W, то множество W конечно, причем любая его точка есть гиперболическое положение равновесия поля $\vec{h}$.*

Доказательство. Пусть $z \in W$; траектория $z_t = e^{t\vec{h}}(z)$, $t \in \mathbb{R}$, удовлетворяет условиям предложения 9. Рассмотрим соответствующее разложение $T_{z_t}N = \Delta^+_{z_t} \oplus \Delta^-_{z_t}$. В частности, $\vec{h}(z_t) = \vec{h}^+(z_t) + \vec{h}^-(z_t)$, где $\vec{h}^\pm(z_t) \in \Delta^\pm_{z_t}$.

Мы имеем $e^{\tau\vec{h}}_*\vec{h}(z_t) = \vec{h}(z_{t+\tau})$. Следовательно,

$$\|\vec{h}(z_{t+\tau})\| = \left\|e^{\tau\vec{h}}_*\vec{h}(z_t)\right\| \geq \left\|e^{\tau\vec{h}}_*\vec{h}^+(z_t)\right\| - \left\|e^{\tau\vec{h}}_*\vec{h}^-(z_t)\right\| \geq e^{\alpha\tau}\|\vec{h}^+(z_t)\| - e^{-\alpha\tau}\|\vec{h}^-(z_t)\| \qquad \forall \tau \geq 0.$$

Из компактности множества $\overline{\{z_t : t \in \mathbb{R}\}}$ вытекает равномерная ограниченность $\vec{h}^+(z_t)$. Следовательно, $\vec{h}^+(z_t) = 0$. Аналогичным образом $\|\vec{h}(z_{t-\tau})\| \geq e^{\alpha\tau}\|\vec{h}^-(z_t)\| - e^{-\alpha\tau}\|\vec{h}^+(z_t)\|$, откуда следует равенство $\vec{h}^-(z_t) = 0$. Следовательно, $\vec{h}(z_t) = 0$. Иными словами, $z_t \equiv z$ — положение равновесия поля $\vec{h}$, а $T_zN = \Delta^+_z \oplus \Delta^-_z$ — разложение T_zN на отталкивающее и притягивающее инвариантные подпространства линеаризации потока $e^{t\vec{h}}$ в точке z. Итак, z — гиперболическое положение равновесия; в частности, z — изолированное положение равновесия поля $\vec{h}$. □

Скажем, что подмножество конечномерного многообразия ограничено, если оно имеет компактное замыкание.

Следствие 6. *Предположим, что h — регулярный монотонный гамильтониан, причем кривизна поля $\vec{h}$ отрицательна во всех точках. Тогда любая ограниченная полутраектория системы $\dot{z} = \vec{h}(z)$ с экспоненциальной скоростью сходится к положению равновесия, в то время как другая полутраектория той же траектории обязана быть неограниченной.* □

Типичными примерами гамильтонианов, удовлетворяющих условиям следствия 6, служат функции энергии натуральных механических систем в $\mathbb{R}^n$ с сильно вогнутой потенциальной энергией. В самом деле, в этом случае вторая производная потенциальной энергии равна матрице оператора кривизны в стандартных декартовых координатах (см. разд. 9).

12. ЭНТРОПИЯ

Материал предыдущего раздела ясно показывает, что структурное уравнение (23) позволяет почти автоматически обобщать на случай произвольных монотонных гамильтоновых полей рассуждения, обычно применяемые для исследования римановых геодезических потоков. Это верно не только для проверки гиперболичности, но и для оценки метрической энтропии. Мы закончим работу такой оценкой, обобщающей результат, полученный в [9]; подробное доказательство этого обобщения см. в [10].

Предположим, что $\vec{h}$ — регулярное монотонное поле и $h^{-1}(c)$ — компактное множество уровня, причем $\vec{h}(z) \notin \Delta_z$ $\forall z \in h^{-1}(c)$. Нормализованная мера Лиувилля на $h^{-1}(c)$ определяется формой $\mu = \frac{1}{C} i_X \sigma^n|_{h^{-1}(c)}$, где $\langle dh, X\rangle = 1$ и $C = \int_{h^{-1}(c)} i_X\sigma^n$. Легко проверить, что форма μ не зависит от произвола в выборе поля X.

Гамильтонов поток $e^{t\vec{h}}$ сохраняет симплектическую форму σ, а поток $e^{t\vec{h}}|_{h^{-1}(c)}$ сохраняет μ. Пусть $\mathfrak{h}_\mu$ — метрическая энтропия последнего потока.

Теорема 4 (Бальман–Войтковский–Китаро)**.** *Предположим, что приведенный оператор кривизны R^h_z неположителен для всех $z \in h^{-1}(c)$. Тогда*

$$\mathfrak{h}_\mu \geq \int\limits_{h^{-1}(c)} \operatorname{tr}\sqrt{-R^h_z}\,\mu_t. \tag{29}$$

Замечание. Приведенная оценка точна: неравенство (29) становится равенством, если все редуцированные якобиевы кривые $J_z^h(\cdot)$ симметрические (см. определение 7); потоки, порожденные такими "симметрическими" гамильтонианами, естественным образом обобщают геодезические потоки симметрических римановых многообразий.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аносов Д.В.* Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны. М.: Наука, 1967. 210 с. (Тр. МИАН; Т. 90).
2. *Арнольд В.И., Гивенталь А.Б.* Симплектическая геометрия // Динамические системы–4. М.: ВИНИТИ, 1985. С. 5–139. (Итоги науки и техники. Совр. пробл. математики. Фунд. напр.; Т. 4).
3. *Каток А., Хассельблатт Б.* Введение в современную теорию динамических систем. М.: Факториал, 1999. 767 с.
4. *Agrachev A., Gamkrelidze R.* Symplectic methods for optimization and control // Geometry of feedback and optimal control / Ed. by B. Jakubczyk, W. Respondek. New York: M. Dekker, 1998. P. 19–77.
5. *Agrachev A.A., Gamkrelidze R.V.* Feedback-invariant optimal control theory and differential geometry. I: Regular extremals // J. Dyn. and Control Syst. 1997. V. 3, N 3. P. 343–389.
6. *Agrachev A.A., Zelenko I.* Geometry of Jacobi curves. I, II // J. Dyn. and Control Syst. 2002. V. 8, N 1. P. 93–140; N 2. P. 167–215.
7. *Аграчев А.А., Щербакова Н.Н.* Гиперболичность гамильтоновых систем отрицательной кривизны // ДАН. 2005. Т. 400, №3. С. 295–298.
8. *Agrachev A.A., Chtcherbakova N.N., Zelenko I.* On curvatures and focal points of dynamical Lagrangian distributions and their reductions by first integrals // J. Dyn. and Control Syst. 2005. V. 11, N 3. P. 297–327.
9. *Ballmann W., Wojtkowski M.* An estimate for the measure theoretic entropy of geodesic flows // Ergod. Theory and Dyn. Syst. 1989. V. 9, N 2. P. 271–279.
10. *Chittaro F.C.* An estimate for the entropy of Hamiltonian flows: E-print, 2006. math.DS/0602674.