А. А. Аграчев, Р. В. Гамкрелидзе, Принцип максимума Понтрягина 50 лет спустя, *Тр. ИММ УрО РАН*, 2006, том 12, номер 1, 6–14

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 12 № 1 2006

УДК 517.977.52

ПРИНЦИП МАКСИМУМА ПОНТРЯГИНА 50 ЛЕТ СПУСТЯ

А. А. Аграчев, Р. В. Гамкрелидзе

1. Вводные замечания

Прошло ровно 50 лет, как был сформулирован принцип максимума Понтрягина в заметке [1], возвестившей появление математической теории оптимального управления. За прошедшие полвека новая теория успешно развивалась многими исследователями, в ряду которых почетное место безусловно принадлежит и ученому, которому посвящен настоящий сборник. Поэтому мы сочли уместным описать здесь наш взгляд на принцип максимума и некоторые его следствия так, как они представляются нам сегодня.

Сформулированная в середине пятидесятых годов прошлого века задача управления на быстродействие с замкнутым множеством допустимых значений для управляющего параметра была экстремальной задачей нового типа, недоступной для существовавших методов. С самого начала было ясно, что адекватная математическая обработка проблемы потребует "условий экстремальности" нового типа. Не вызывало сомнений также и то обстоятельство, что реальная причина трудностей — не в общности проблемы, а скорее в ее специфическом характере, заключавшемся в том, что в типических проблемах допустимое множество значений управляющего параметра было замкнутым. В то время как простейшие задачи быстродействия для линейных дифференциальных уравнений второго порядка с замкнутым интервалом действительной оси в качестве допустимого множества значений управления представлялись совершенно неприступными, самая общая задача управления с открытым множеством допустимых значений управляющего параметра очевидным образом сводилась к классической задаче Лагранжа, следовательно, дифференциальные уравнения для экстремалей можно было автоматически выписывать.

Принцип максимума явился математическим ответом на вызов, выдвинутый новыми технологиями, и был полностью воспринят в инженерных кругах сразу же после его публикации как адекватное решение проблемы, хотя в смежных математических кругах, за немногими исключениями, еще долго отказывались видеть в полученном результате нечто радикально новое.

В связи с этим в середине шестидесятых вполне интенсивно, хотя и не очень продуктивно, обсуждалась проблема о возможности вывода принципа максимума из классических результатов вариационного исчисления. По нашему мнению, существуют два действительно независимых метода доказательства принципа максимума в его естественной общности — первоначальное доказательство В.Г. Болтянского [2], который изобрел для этой цели игольчатые вариации, и доказательство, основанное на обобщенных управлениях (скользящих режимах), см. [3]. Решающим моментом в обоих доказательствах является возможность особым "выпуклым" образом комбинировать рассматриваемые вариации управления, независимо от структуры множества допустимых значений, и при этом получить достаточно богатое достижимое в первом приближении множество. В то же самое время комбинирование классических вариаций существенно зависит от структуры допустимого множества, как только управление выходит на границу множества.

Невозможность доказательства принципа максимума с помощью классических конструкций, конечно, не может рассматриваться как его особое достоинство. По нашему мнению, растущую научную востребованность принципа максимума с момента его появления можно объяснить двумя действительно исключительными чертами, которыми он обладает.

Начнем с того, что принцип максимума, формулируемый предельно просто и с универсальной общностью, без всяких исключений, тем не менее полностью работоспособен в удивительно многочисленных нетривиальных ситуациях, часто генерируя целые семейства минималей (так называемый оптимальный синтез), давая тем самым полное решение проблем, иначе не решаемых. Такая эффективность принципа максимума может служить частичным объяснением того факта, что, несмотря на простоту и общность формулировки, его доказательство не просто.

В качестве второго замечательного свойства принципа максимума мы отметим его "симплектически-инвариантную" форму, в которой он был фактически сформулирован с самого начала, проясняя тем самым действительный внутренний смысл условий экстремальности.

Принцип максимума канонически сопоставляет оптимальной проблеме на конфигурационном многообразии гамильтоново векторное поле на кокасательном расслоении многообразия, сводя решение оптимальной задачи в первом приближении к нахождению траекторий гамильтонова поля, удовлетворяющих некоторому дополнительному "условию максимума". Процедуры, сводящие решение некоторой первоначальной проблемы, заданной на многообразии, к изучению канонически построенных инфинитезимальных объектов на кокасательном расслоении исходного многообразия, часто встречаются в современном анализе под общим названием канонической микролокализации. Они полезны для обнаружения инвариантов начальной проблемы, а также инвариантов самого многообразия, на котором формулируется проблема. Исторически, принцип максимума был одной из ранних процедур, где такой переход явно указан.

Благодаря общности формулировки и полностью инвариантной форме уже в первоначальной формулировке, принцип максимума никогда не подвергался в дальнейшем сколько-нибудь существенным обобщениям. Все успехи последующего развития необходимых условий экстремальности в первом порядке были в основном связаны с обобщениями самой оптимальной проблемы, преимущественно в направлении негладкого анализа, и в получении для них необходимых условий первого порядка по образу и подобию принципа максимума.

В § 2 мы даем краткий обзор необходимого материала о гамильтоновом лифте векторных полей на гладких многообразиях, после чего, в § 3, дана инвариантная формулировка принципа максимума. Заключительный § 4 посвящен обсуждению условий второго порядка, объединенных понятием якобиевой кривой.

Мы ограничиваемся изложением задачи быстродействия, которая полностью содержит все трудности, присущие общей задаче оптимального управления (с произвольным минимизируемым функционалом интегрального типа), и в то же время формулируется очень просто и геометрически наглядно. К тому же общая задача оптимизации легко сводится к задаче быстродействия простым преобразованием временного параметра. Наконец, задача быстродействия имеет еще одно дополнительное преимущество — она канонически связана с данной динамической системой, а следовательно, и с исходным конфигурационным многообразием.

2. Гамильтонов лифт векторных полей

Начнем с краткого обзора обозначений и замечаний терминологического характера, относящихся к геометрии касательного и кокасательного расслоений гладкого n-мерного многообразия M.

Произвольное (гладкое) векторное поле X на M будем рассматривать без дополнительных замечаний одновременно и как дифференцирование действительной алгебры $C^\infty(M)$ гладких функций на M, и как гладкое сечение касательного расслоения TM,

$$X : z \mapsto X_z \in T_z M \subset TM, \quad z \in M.$$

Таким образом, семейство всех (гладких) векторных полей $\operatorname{Vect} M$ на M будет рассматриваться одновременно, в зависимости от контекста, как действительная алгебра Ли или как $C^\infty(M)$-модуль.

Здесь, однако, уместно заметить, что векторные поля имеют еще и третье лицо, важное для наших рассмотрений. Именно, каждое векторное поле X на M канонически отождествляется, согласно своему определению, со скалярной функцией H_X на кокасательном расслоении T^*M, которая линейна на слоях $T^*_z M \subset T^*M,\ z \in M$. Обратно, каждая функция H на T^*M, линейная на слоях, однозначно представима в виде $H = H_X$. В самом деле, действие X на функции $a \in C^\infty(M)$ задано формулой

$$(Xa)_z = (\langle X, da\rangle)_z \stackrel{def}{=} H\left((da)_z\right), \quad z \in M,$$

где $(da)_z$ — значение дифференциала da в точке z и $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — обычные "скобки двойственности". Поэтому мы не будем различать H_X и X и будем в подходящих местах заменять H_X на X.

Произвольную точку кокасательного многообразия T^*M обозначим ξ, а если она лежит в слое $T^*_z M$, мы будем также писать $\xi = \xi_z$. Каноническая проекция расслоения T^*M обозначается через $\pi : T^*M \longrightarrow M$, а ее дифференциал через $d\pi : T(T^*M) \longrightarrow TM$.

$\mathbb{R}$-алгебра $C^\infty(T^*M)$ будет также рассматриваться, в зависимости от контекста, как $C^\infty(M)$-модуль, с умножением на "скаляры", определенным формулой

$$aH \stackrel{def}{=} \pi^* a \cdot H \quad \forall a \in C^\infty(M),\ H \in C^\infty(T^*M),$$

где $\pi^* a = a \circ \pi$ — обратный образ функции a при подстановке проекции π.

Наравне с гладкими функциями на T^*M, линейными на слоях, т.е. векторными полями на M, особую роль в геометрии многообразия M играют гладкие функции на T^*M, которые постоянны на слоях, ибо вместе с первыми они составляют достаточно обширный класс функций для того, чтобы с их помощью покрыть все пространство T^*M "каноническими" координатными окрестностями.

Действительно, гладкие постоянные на слоях функции очевидным образом идентифицируются как обратные образы $\pi^* a \stackrel{def}{=} a \circ \pi,\ a \in C^\infty(M)$. Далее, с помощью каждой координатной окрестности (O, x) многообразия M, $x = (x^1, \ldots, x^n) : O \longrightarrow \mathbb{R}^n$, мы канонически строим *расслоенную или каноническую окрестность расслоения* T^*M *над* (O, x), состоящую из пары

$$\left(\pi^{-1} O, (q, p)\right), \quad q = (q^1, \ldots, q^n), \quad p = (p_1, \ldots, p_n),$$

с координатным отображением

$$(q, p) : \pi^{-1} O \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}, \quad q^i = \pi^* x^i, \quad p_j = \frac{\partial}{\partial x^j}, \quad i, j = 1, \ldots, n.$$

Координатные функции $q^i,\ i = 1, \ldots, n$, являются обратными образами соответствующих координат x^i, следовательно, они постоянны на слоях. "Сопряженные" к ним координаты p_i равны соответственно частным производным по x^i, следовательно, они линейны на слоях. Таким образом, всякая гладкая фунция H на T^*M локально представляется как $H = F(q, p)$, $F \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$. В частности, введенные выше функции H_X представляются в координатных окрестностях $\pi^{-1} O$ в виде

$$H_X = \sum_{\alpha=1}^n \pi^* X^\alpha \cdot p_\alpha = \sum_\alpha^n X^\alpha p_\alpha,$$

где $X = \sum\limits_{\alpha=1}^n X^\alpha \dfrac{\partial}{\partial x^\alpha}$ — векторное поле на O.

Обозначим $C^\infty(M)$-подмодуль модуля $C^\infty(T^*M)$, порожденный постоянными или линейными на слоях функциями, через

$$\mathfrak{M} = \left\{ a + bH_X \,\middle|\, a, b \in C^\infty(M),\ X \in \operatorname{Vect} M \right\}.$$

$\mathbb{R}$-линейный оператор $D_X : \mathfrak{M} \longrightarrow \mathfrak{M}$ называется *дифференцированием модуля* $\mathfrak{M}$ *над заданным векторным полем* $X \in \operatorname{Vect} M$, если

$$D_X(a + bH_Y) = Xa + Xb \cdot H_Y + bD_X H_Y \quad \forall a, b \in C^\infty(M),\ Y \in \operatorname{Vect} M.$$

Векторное поле $\mathcal{W}$ на кокасательном расслоении T^*M будем называть *проектируемым*, если ограничение композиции $d\pi \circ \mathcal{W}$ на произвольный слой $T^*_z M$, $z \in M$, постоянно и, следовательно, равно некоторому касательному вектору X_z к M в точке z,

$$d\pi \cdot \mathcal{W}_{\xi_z} = X_z \quad \forall \xi_z \in T^*_z M,\ z \in M.$$

Однозначно определенное векторное поле X на M, $z \mapsto X_z$, $z \in M$, будем называть *проекцией* $\mathcal{W}$ *на* M, поле $\mathcal{W}$ — *подъемом над* X *в кокасательном расслоении* T^*M. Если поле $\mathcal{W}$ гамильтоново, мы называем его *гамильтоновым подъемом над* X.

Например, частная производная $\dfrac{\partial}{\partial q^i}$ является подъемом в $\pi^{-1}O$ над векторным полем $\dfrac{\partial}{\partial x^i}$, заданным на O,

$$\left(d\pi \circ \frac{\partial}{\partial q^i} \right)_{\xi_z} x^j = \left(\frac{\partial}{\partial q^i} \right)_{\xi_z} \cdot \pi^* x^j = \left(\frac{\partial}{\partial q^i} \right)_{\xi_z} q^j = \delta^j_i \quad \forall \xi_z \in T^*_z M,\ z \in M.$$

Очевидно, подъем $\mathcal{W}$ над данным векторным полем $X \in \operatorname{Vect} M$ определен неоднозначно, ибо вместе с $\mathcal{W}$ подъемом над X является всякое векторное поле $\mathcal{W} + \mathcal{W}'$, где $\mathcal{W}'$ — вертикальное векторное поле на T^*M (т.е. принадлежит ядру дифференциала $d\pi$ — подрасслоению в $T(T^*M)$ ранга n). Например, частные производные $\dfrac{\partial}{\partial p_i}$ на $\pi^{-1}O$, $i = 1, \ldots, n$, являются вертикальными векторными полями. Однако если мы ограничимся только гамильтоновыми полями, то результат окажется более определенным. Обозначив через $\overrightarrow{H}$ гамильтоново векторное поле с гамильтоновой функцией H, легко видеть, что произвольный гамильтонов подъем над векторным полем $X \in \operatorname{Vect} M$ имеет вид $\overrightarrow{H_X + K}$, где функция H_X (линейная на слоях) введена выше и канонически определена векторным полем X, в то время как K — произвольная гладкая функция на $C^\infty(T^*M)$, постоянная на слоях.

Действительно, представляя векторное поле $\overrightarrow{H}$ локально, в канонических координатах, в виде

$$\overrightarrow{H} = \sum_{\alpha=1}^{n} \left(\frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \frac{\partial}{\partial q^\alpha} - \frac{\partial H}{\partial q^\alpha} \frac{\partial}{\partial p_\alpha} \right),$$

получим соотношения

$$d\pi \left(\overrightarrow{H}_{\xi_z} \right) = \sum_{\alpha=1}^{n} \left(\frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \right)_{\xi_z} \left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \right)_z = \sum_{\alpha=1}^{n} X^\alpha_z \left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \right)_z$$
$$\forall \xi_z \in T^*_z M,\ z \in M.$$

Из них следует, что функции $\dfrac{\partial H}{\partial p_\alpha}$, $i = 1, \ldots, n$, постоянны на слоях и равны соответственно $\pi^* X^i$, следовательно, H имеет вид $H = \sum\limits_{\alpha=1}^{n} p_\alpha X^\alpha + K$, где функция K постоянна на слоях. Процедуру можно канонизировать, положив $K = 0$. Тем самым мы получаем канонический метод построения на кокасательном расслоении T^*M гамильтонова подъема над векторным полем $X \in \mathrm{Vect}\, M$: *следует взять канонически определенную скалярную функцию H_X на T^*M и перейти к соответствующему гамильтонову векторному полю $\overrightarrow{H_X}$*. Это в точности совпадает с процедурой, с помощью которой принцип максимума вводит гамильтонову систему для нахождения экстремалей в задаче быстродействия, хотя и с помощью произвольных координат.

В дифференциальной геометрии практикуется универсальная каноническая процедура, описываемая общепринятым символом $\mathrm{ad}\, X$, $X \in \mathrm{Vect}\, M$, и приводящая к описанному выше гамильтонову подъему. В самом деле, по определению, $\mathrm{ad}\, X$ действует на векторные поля $Y \in \mathrm{Vect}\, M$ по формуле

$$\mathrm{ad}\, X \cdot Y = [X, Y] \text{ — скобки Ли полей } X, Y,$$

и является дифференцированием модуля $\mathfrak{M}$ над полем X, ибо

$$\mathrm{ad}\, X(a + bY) \overset{def}{=} Xa + [X, bY] = Xa + Xb \cdot Y + b[X, Y] = Xa + Xb \cdot H_Y + bH_{[X,Y]}.$$

Очевидно, это действие однозначно расширяется до дифференцирования на всей алгебре $C^\infty(T^*M)$, т.е. $\mathrm{ad}\, X$ однозначно расширяется до векторного поля на T^*M, которое обозначим тем же символом $\mathrm{ad}\, X$. Прямое вычисление в произвольных канонических координатах на T^*M показывает, что векторные поля $\mathrm{ad}\, X$ и $\overrightarrow{H_X}$ совпадают на подмодуле $\mathfrak{M}$, следовательно, они идентичны. Тем самым мы доказали, что *построенное векторное поле* $\mathrm{ad}\, X$ *в кокасательном расслоении T^*M есть гамильтонов подъем над $X \in \mathrm{Vect}\, M$* .

З а м е ч а н и е. Двойственная конструкция, проведенная на касательном расслоении TM, приводит к векторному полю $\mathcal{L}_X$ над $X \in \mathrm{Vect}\, M$ в касательном расслоении TM. Оно называется *производной Ли над X* и, будучи ограниченным на дифференциальных 1-формах (т.е. на функциях из $C^\infty(TM)$ линейных на слоях), совпадает с дифференцированием $i_X \circ d + d \circ i_X$, где d — внешний дифференциал, i_X — внутреннее умножение на X. Двойственность между $\mathrm{ad}\, X$ и $\mathcal{L}_X$ принимает форму

$$\langle \mathrm{ad}\, X \cdot Y, \omega \rangle + \langle Y, \mathcal{L}_X \omega \rangle = X \langle Y, \omega \rangle,$$

где $Y \in \mathrm{Vect}\, M$ и ω — дифференциальная 1-форма на M. Соответствующие потоки в TM и T^*M над потоком e^{tX}, $e^{t\mathcal{L}_X}$ и $e^{t\,\mathrm{ad}\,\mathrm{X}}$ совпадают соответственно с дифференциалом de^{tX} потока e^{tX} и с обратным потоком к потоку, сопряженному к дифференциалу de^{tX}.

3. Инвариантная формулировка принципа максимума

Теперь мы в состоянии инвариантно сформулировать принцип максимума, пользуясь введенными выше геометрическими образами. Начнем с определения задачи быстродействия.

Управляемой системой на гладком n-мерном многообразии M, с произвольным подмножеством $U \subset \mathbb{R}^r$ в качестве *множества допустимых значений для управляющего параметра u*, называется семейство векторных полей $\{X(u), u \in U'\}$ на гладком многообразии M, для которого замыкание $\overline{U} \subset U'$ и отображение $(z, u) \mapsto X_z(u) \in TM$ непрерывно из $M \times U'$ в TM. *Допустимые управляющие функции — это, по определению, измеримые существенно ограниченные отображения* $t \mapsto u(t) \in U, t \geq 0$.

Каждой допустимой управляющей функции $u(t)$ мы ставим в соответствие неавтономное дифференциальное уравнение на M

$$\frac{dz}{dt} = X_z(u(t)).$$

Тогда для любых $z_1 \in M$, $t_1 \geq 0$ и достаточно малого сегмента $[t_1, t_2]$ существует единственное (абсолютно непрерывное) решение $z(t)$ написанного уравнения, определенное на $[t_1, t_2]$ и удовлетворяющее начальному условию $z(t_1) = z_1$. Мы называем пару $u(t), z(t)$, $t \in [t_1, t_2]$, *решением задачи быстродействия для управляемой системы, заданной семейством $X(u), u \in U$,* если для произвольной допустимой управляющей функции $v(t)$ и соответствующего решения $y(t),\ t_1 \le t \le t_2'$, задачи Коши

$$\frac{dy}{dt} = X_y(v(t)), \quad y(t_1) = z_1$$

произвольное равенство $y(t_2') = z(t_2)$ влечет неравенство $t_2' \ge t_2$.

Обозначим семейство гамильтонианов на T^*M, соответствующее семейству $X(u)$, через $H_u = H_{X(u)}$. Мы будем говорить, что для данного значения $\widehat{u}$ параметра и заданной точки $\xi \in T^*M$ выполняется *условие максимума Понтрягина*, если

$$H_{\widehat{u}}(\xi) = \sup_{u \in U} H_u(\xi).$$

Для упрощения формулировки принципа максимума мы предположим еще, что многообразие M естественно вложено в кокасательное расслоение как гладкое n-мерное подмногообразие, $M \subset T^*M$. Следовательно, каждая точка $z \in M$ отождествляется с нулем слоя T_z^*M и для произвольной управляющей функции $u(t),\ t_1 \le t \le t_2$, соответствующие функции $H_{X(u(t))} \in C^\infty(T^*M)$ обращаются в тождественный нуль на M, а условие максимума вырождается на M в тождество

$$H_{\widehat{u}}(\xi) \equiv \sup_{u \in U} H_u(\xi) \equiv 0 \quad \forall \widehat{u},\ \xi \in M.$$

Далее, ограничение гамильтонова подъема $\overrightarrow{H}_{X(u(t))}$ на M совпадает с неавтономным векторным полем $X(u(t))$, и из теоремы единственности для решений непосредственно следует, что всякая траектория $\xi(t),\ t_1 \le t \le t_2$, гамильтонова подъема $\overrightarrow{H}_{X(u(t))}$, пересекающаяся с M, является траекторией векторного поля $X(u(t))$ и, следовательно, полностью содержится в M. Поэтому мы рассматриваем этот случай как вырожденный и называем траектории неавтономного векторного поля $X(u(t))$ *тривиальными траекториями гамильтонова подъема* $\overrightarrow{H}_{X(u(t))}$. Очевидно, траектория $\xi(t),\ t_1 \le t \le t_2$, гамильтонова подъема $\overrightarrow{H}_{X(u(t))}$ *нетривиальна* в том и только том случае, когда $\xi(t_1) \ne \pi\xi(t_1)$.

Теорема 3.1 (Принцип максимума Понтрягина). *Пусть управляющая функция $u(t)$, $t_1 \le t \le t_2$, и соответствующая траектория $z(t),\ t_1 \le t \le t_2,\ z(t_1) = z_1$, неавтономного векторного поля $X(u(t))$ задают решение задачи быстродействия, определенной семейством $X(u)$. Тогда существует такая нетривиальная траектория $\xi(t),\ t_1 \le t \le t_2$, гамильтонова подъема $\overrightarrow{H}_{X(u(t))}$ над траекторией $z(t)$,*

$$\frac{d\xi(t)}{dt} = \overrightarrow{H}_{X(u(t))}(\xi(t)), \quad \pi\xi(t_1) = z_1, \tag{3.1}$$

что для почти всех $t \in [t_1, t_2]$ выполняется условие максимума Понтрягина

$$H_{u(t)}(\xi(t)) = \sup_{u \in U} H_u(\xi(t)) \quad \text{п.в. на } [t_1, t_2]. \tag{3.2}$$

Если векторные поля $X(u)$ семейства автономны, то функция $t \mapsto \sup_{u \in U} H_u(\xi(t))$, $t_1 \le t \le t_2$, постоянна и неотрицательна:

$$\sup_{u \in U} H_u(\xi(t)) \equiv \mathrm{const} \ge 0, \quad t_1 \le t \le t_2. \tag{3.3}$$

Каждое нетривиальное решение $\xi(t)$ системы (3.1)–(3.2) называется *экстремалью* задачи быстродействия, заданной семейством $X(u)$. Условие максимума можно рассматривать здесь как некоторый обобщенный "динамический" алгоритм исключения параметра u в процессе его изменения, пригодный для *почти всех* моментов времени t и вычисляющий траекторию $\xi(t)$. Однако следует здесь же оговориться, что, вообще говоря, достаточно богатые семейства рассматриваемых экстремалей не включаются в потоки на кокасательном расслоении, как это имеет место для регулярной задачи классического вариационного исчисления. Например, для семейства экстремалей $\xi(t)$ с начальным условием $\pi\xi(t_1) = z_1$, где $z_1 \in M$ фиксировано, даже в простейших задачах быстродействия не удовлетворяется условие единственности для траекторий потока — две экстремали семейства с одинаковыми начальными условиями не обязательно совпадают.

В рассматриваемом контексте условие максимума можно также рассматривать как обобщение преобразования Лежандра для "представления решения задачи в канонических координатах."

4. Якобиевы кривые

Принцип максимума — условие оптимальности первого порядка. Его можно рассматривать как обобщение классического метода множителей Лагранжа, где роль множителя Лагранжа играет траектория $\xi(t)$. Вообще говоря, это не достаточное условие для оптимальности и требуется дополнительная информация второго порядка для выделения оптимальных управляющих функций из тех, что удовлетворяют принципу максимума.

В данном параграфе мы покажем, как можно сформулировать условия оптимальности второго порядка по аналогии с принципом максимума, используя инвариантный симплектический язык и соответствующим образом расширяя универсальный принцип исключения. Мы предполагаем, что $(z, u) \mapsto X_z(u)$ — гладкое отображение из $M \times U'$ в TM (а не только непрерывное, как выше).

Вся важнейшая информация второго порядка содержится в так называемых якобиевых кривых. Для заданной экстремали $\xi(t),\ t_1 \le t \le t_2$, якобиева кривая — это некоторое семейство $J_\xi(t),\ t_1 \le t < t_2$, лагранжевых подпространств симплектического пространства $T_{\xi(t_1)}(T^*M)$. Мы дадим здесь общую абстрактную конструкцию якобиевых кривых; конкретные случаи, а также методы их эффективного вычисления для регулярных, особых и релейных экстремалей можно найти в [4–6]. Построение якобиевой кривой основано на "хороших вариациях" исходной управляющей функции.

Пусть $u(t),\ t_1 \le t \le t_2,$ — допустимая управляющая функция. *Хорошей вариацией* управляющей функции u называется росток в 0 такого дважды дифференцируемого в 0 отображения

$$F = (f, \phi) : \mathbb{R}^k \to L^\infty([t_0, t_1]; U \times \mathbb{R}),$$

что

$$f(0)(t) = u(t), \quad \phi(0)(t) = 1, \quad t_1 \le t \le t_2, \quad \int\limits_{t_1}^{t_2} \phi(x)(t)\, dt = t_2 - t_1, \quad x \in \mathbb{R}^k.$$

Если заданы хорошие вариации $F_i : \mathbb{R}^{k_i} \to L^\infty([t_0, t_1]; U \times \mathbb{R})$, $i = 1, 2$, $k_1 \le k_2$, то мы пишем $F_1 \prec F_2$, если F_1 является ограничением F_2 на некоторое k_1-мерное координатное подпространство пространства $\mathbb{R}^{k_2}$. Очевидно, для каждой пары хороших вариаций F_1, F_2 существует такая хорошая вариация F, что $F_1 \prec F$ и $F_2 \prec F$. Другими словами, частичный порядок $\prec$ превращает множество хороших вариаций в направленное множество. Обозначим направленное множество хороших вариаций через $\mathcal{V}$ и воспользуемся символом $\mathcal{V}$-lim для обозначения пределов обобщенных последовательностей, индексированных элементами направленного множества $\mathcal{V}$.

Каждой хорошей вариации $F = (f, \phi)$ и каждому моменту $t \in [t_1, t_2)$ мы ставим в соответствие росток отображения $\mathcal{F}_t : \mathbb{R}^k \to M$, определенного условием: $\mathcal{F}_t(x)$ равен значению $y(t_1)$

решения задачи Коши

$$\dot{y}(\tau) = X_{y(\tau)}\left(f(x)\left(\int\limits_{t_1}^{\tau} \phi(\theta)\,d\theta\right)\right), \quad t_1 \le \tau \le t, \qquad y(t) = z(t),$$

где $\dot{z}(t) = X_{z(t)}(u(t)),\ t_1 \le t \le t_2,\ z(t_1) = z_1$. В частности, $\mathcal{F}_t(0) = z_1,\ t_1 \le t < t_2$.

Предположим, что $u(\cdot)$ удовлетворяет принципу максимума и $\xi(t) \in T^*_{z(t)}M$, $t_1 \le t \le t_2$, — соответствующая экстремаль. Тогда $\xi(t_1)D_0\mathcal{F}_t = 0,\ t_1 \le t < t_2$, где произведение $\xi(t_1)D_0\mathcal{F}_t$ есть композиция линейных отображений $D_0\mathcal{F}_t : \mathbb{R}^k \to T_{z_1}M$ и $\xi(t_1) : T_{z_1}M \to \mathbb{R}$. Другими словами, 0 является критической точкой отображения $\mathcal{F}_t$ и $\xi(t_1)$ — соответствующий множитель Лагранжа. Важным числовым инвариантом исходной управляющей функции $u(\cdot)$ является ее коранг:

$$\operatorname{corank}(u) = \min\{\operatorname{codim} \operatorname{im} D_0\mathcal{F}_t : F \in \mathcal{V},\, t \in [t_0, t_1)\}.$$

Пусть $\mathcal{L}(\mathcal{F}_t)$ — $\mathcal{L}$-производная отображения $\mathcal{F}_t$ в $(\xi(t_1), 0)$. Вспомним, что $\mathcal{L}$-производная $\mathcal{L}(\mathcal{F}_t)$ есть лагранжево подпространство симплектического пространства $T_{z(t_1)}(T^*M)$, полученное линеаризацией уравнения $\lambda D_x\mathcal{F}_t = 0$ (с неизвестной $\lambda \in T^*M$ и параметром $x \in \mathbb{R}^k$) в точке $\lambda = \xi(t_1),\ x = 0$; точное определение см. в [5]. Все лагранжевы подпространства симплектического пространства Σ образуют *лагранжев грассманиан* $L(\Sigma)$, компактное $\dim\Sigma(\dim\Sigma + 1)/8$-мерное многообразие. В частности, $\mathcal{L}(\mathcal{F}_t) \in L\left(T_{\xi(t_1)}(T^*M)\right)$.

Мы говорим, что экстремаль $\zeta(\cdot)$ допускает якобиеву кривую, если для любого $t \in [t_1, t_2)$ существует предел

$$J_\xi(t) = \mathcal{V}\text{-}\lim_{F \in \mathcal{V}} \mathcal{L}(\mathcal{F}_t).$$

Кривая $t \mapsto J_\xi(t)$ в лагранжевом грассманиане $L\left(T_{\xi(t_1)}(T^*M)\right)$ называется *якобиевой кривой, отвечающей экстремали* $\xi(t),\ t_1 \le t \le t_2$. Симплектическое пространство $T_{\xi(t_1)}(T^*M)$ содержит также фиксированное "вертикальное" лагранжево подпространство $\Pi_\xi \overset{def}{=} T_{\xi(t_1)}\left(T^*_{z_1}M\right)$.

Наша ближайшая цель — определение индекса (не обязательно непрерывной) кривой $\Lambda(t)$, $t_0 \le t < t_2$, в лагранжевом грассманиане $L(\Sigma)$ по отношению к фиксированному лагранжеву подпространству $\Pi \in L(\Sigma)$. Сначала определим индекс $\operatorname{ind}_\Pi(\Lambda_0, \Lambda_1)$ пары $\Lambda_0, \Lambda_1 \in L(\Sigma)$ по отношению к Π.

Пусть $\eta \in (\Lambda_0 + \Lambda_1) \cap \Pi$, так что $\eta = \eta_0 + \eta_1$, где $\eta_i \in \Lambda_i,\ i = 0, 1$. Положим $\mathfrak{q}(\eta) = \sigma(\eta_0, \eta_1)$, где σ — симплектическая форма в Σ. Если $\Lambda_0 \cap \Lambda_1 = 0$, то $\Lambda_0 + \Lambda_1 = \Sigma$, η — произвольный элемент в Π и η_0, η_1 однозначно определены элементом η. Это неверно, если $\Lambda_0 \cap \Lambda_1 \ne 0$, тем не менее, число $\mathfrak{q}(x)$ корректно определено: $\sigma(\eta_1, \eta_2)$ зависит только от $\eta_0 + \eta_1$, ибо σ обращается в нуль на $\Lambda_i,\ i = 0, 1$.

Таким образом, $\mathfrak{q}$ — действительная квадратичная форма на $(\Lambda_0 + \Lambda_1) \cap \Pi$; обозначим через $\operatorname{ind}\mathfrak{q}$ ее отрицательный индекс инерции (число отрицательных членов в произвольной диагонализации квадратичной формы $\mathfrak{q}$). Мы положим

$$\operatorname{ind}_\Pi(\Lambda_0, \Lambda_1) = \operatorname{ind}\mathfrak{q} + \frac{1}{2}(\dim(\Pi \cap \Lambda_0) + \dim(\Pi \cap \Lambda_1)) - \dim(\Pi \cap \Lambda_0 \cap \Lambda_1).$$

Важным свойством введенного индекса является неравенство треугольника:

$$\operatorname{ind}_\Pi(\Lambda_0, \Lambda_2) \le \operatorname{ind}_\Pi(\Lambda_0, \Lambda_1) + \operatorname{ind}_\Pi(\Lambda_1, \Lambda_2).$$

Рассмотрим теперь кривую $\Lambda(\cdot)$ (произвольное отображение из $[t_0, t_1]$ в $L(\Sigma)$). Для всякого конечного подмножества $\mathcal{T} = \{\tau_1, \ldots, \tau_k\} \subset [t_0, t_1)$, где $t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_l < t_1$, мы вычисляем сумму

$$I_\Pi^{\mathcal{T}} = \sum_{i=1}^{l} \operatorname{ind}_\Pi(\Lambda(\tau_{i-1}), \Lambda(\tau_i))$$

и полагаем $I_\Pi(\Lambda(\cdot)) = \sup\limits_{\mathcal{T}} I_\Pi^{\mathcal{T}}$, где супремум берется по всем конечным множествам $\mathcal{T}$. Величина $I_\Pi(\Lambda(\cdot))$ называется индексом кривой $\Lambda(\cdot)$ по отношению к Π и является неотрицательным полуцелым числом или $+\infty$.

Можно показать, что кривые с конечным I_Π обладают аналитическими свойствами, аналогичными свойствам действительных монотонных функций: множества их точек разрыва не более чем счетны, они имеют правые и левые пределы в каждой точке и почти всюду дифференцируемы. Индекс I_Π тесно связан с индексом Маслова непрерывных кривых в лагранжевом грассманиане, см. [4, 7] по этому поводу и по поводу аналогии между кривыми с конечным индексом и монотонными функциями.

Теорема 4.1. *Предположим, что пара* $u(t)$, $z(t)$, $t_1 \le t \le t_2$, $z(t_1) = z_1$, *является решением задачи быстродействия, определенной управляемой системой* $X(u)$, $u \in U$. *Тогда существует экстремаль* $\xi(t)$, $t_1 \le t \le t_2$, *удовлетворяющая условиям* (3.1)–(3.3), *допускающая якобиеву кривую* $J_\xi(t)$, $t_1 \le t < t_2$, *и, более того, выполняется неравенство*

$$I_{\Pi_\xi}(J_\xi(\cdot)) + \dim \bigcap_{t_1 \le t < t_2} J_\xi(t) - \frac{1}{2}\dim(J_\xi(t_2 - 0) \cap \Pi_\xi) < \frac{n}{2} + \operatorname{corank}(u). \tag{4.1}$$

Следует отметить, что уже одно существование кривой Якоби конечного индекса влечет все известные поточечные условия оптимальности для особых экстремалей, а неравенство (4.1) влечет условия, содержащие сопряженные точки (для экстремалей всех типов).

Поступила 12.01.06

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Понтрягин Л.С.** К теории оптимальных процессов// Докл. АН СССР. 1956. Т. 110, № 1. С. 7–10.
2. **Болтянский В.Г.** Принцип максимума в теории оптимальных процессов// Докл. АН СССР. 1958. Т. 119, № 6. С. 1070–1073.
3. **Gamkrelidze R.V.** Principles of Optimal Control Theory. Plenum Press, 1978.
4. **Аграчев А.А., Гамкрелидзе Р.В.** Симплектическая геометрия и необходимые условия оптимальности// Матем. сборник. 1991. Т. 182, № 1. С. 36–54.
5. **Agrachev A.A., Gamkrelidze R.V.** Feedback-invariant optimal control theory and differential geometry, I. Regular extremals// J. Dynamical and Control Systems. 1997. Vol. 3. P. 343–389.
6. **Agrachev A.A.** Feedback-invariant optimal control theory and differential geometry, II. Jacobi curves for singular extremals// J. Dynamical and Control Systems. 1998. Vol. 4. P. 583–604.
7. **Agrachev A.A.** Geometry of optimal control problems and Hamiltonian systems// Lect. Notes in Math. Springer-Verlag, to appear.