

Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Аграчев, Ж. П. А. Готье, Субримановы метрики и изопериметрические задачи в контактном случае, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 1999, том 64, 5–48

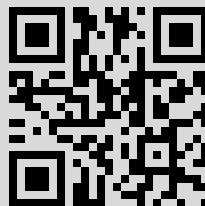
Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 95.129.140.250

17 ноября 2015 г., 14:38:15



УДК 517.974; 517.972.9

I. СУБРИМАНОВЫ МЕТРИКИ И ИЗОПЕРИМЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ В КОНТАКТНОМ СЛУЧАЕ

А. А. Аграчев, Ж. П. А. Готье

Посвящается памяти Л. С. Понтрягина

СОДЕРЖАНИЕ

Глава 1. Введение	6
§ 1. Инварианты	6
§ 2. Изопериметрические задачи	7
§ 3. Уравнение геодезических и экспоненциальное отображение	11
§ 4. Содержание статьи	13
Глава 2. Нормальные формы и инварианты	14
§ 5. Нормальные координаты	14
§ 6. (Субриманова) нормальная форма	17
§ 7. Инварианты	25
Глава 3. Вычисление экспоненциального отображения	29
§ 8. Параметризация геодезических	30
§ 9. Снова о волновых фронтах, сферах, сопряженных множествах и геометрических местах разрезов	33
§ 10. Экспоненциальное отображение как надстройка	34
Глава 4. Каустики	36
§ 11. Невырожденный случай	36
§ 12. Вырожденный случай	37
§ 13. Символы для сопряженного множества	39
Глава 5. Волновые фронты и сферы	41
Глава 6. Дополнения	45

Авторизованный перевод на русский язык С. А. Вахрамеева.

§ 14. Связность Румина	45
§ 15. Большое число каспов	46
Литература	47

Глава 1

ВВЕДЕНИЕ

§ 1. Инварианты

Контактная субриманова метрика определяется заданием набора (X, Δ, g) , состоящего из $(2n + 1)$ -мерного многообразия X , распределения Δ на X (контактной структуры) и метрики g на Δ . Она определяет метрику на X : с помощью g измеряются длины гладких кривых, касающихся Δ . Все рассмотрения данной статьи локальны, поэтому изучаются только ростки $(X, \Delta, g)_{q_0}$ в фиксированной точке q_0 .

Существуют два канонических объекта, связанных с (X, Δ, g) по модулю их знака: “определяющая” 1-форма ω и “характеристическое” векторное поле ν :

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \text{Ker } \omega &= \Delta, \quad (d\omega)|_{\Delta} = \text{Volume}, \\ \text{(ii)} \quad \omega(\nu) &= 1, \quad i_{\nu} d\omega = 0, \end{aligned} \tag{1.1}$$

или эквивалентно

$$\text{(ii')} \quad i_{\nu}(\omega \wedge d\omega) = d\omega.$$

Если n нечетно и если знаки противоположны, то форма $\omega \wedge (d\omega)^n$ не изменится; поэтому она определяет ориентацию на X . В этом случае задание векторного поля Z , трансверсального Δ , эквивалентно выбору ориентации на Δ : форма объема на Δ определяется $\text{sgn}(\omega(Z))(d\omega)|_{\Delta}^n$.

В противном случае, если n четно, то $(d\omega)|_{\Delta}^n$ определяет ориентацию на Δ и ориентация на X задается любым полем Z , трансверсальным Δ ; возьмем $\omega(Z) > 0$.

Сначала рассмотрим нормальные формы и инварианты такой структуры. Получим вполне приведенную нормальную форму для любого n . Эти результаты сформулированы и доказаны в главе 2 данной статьи.

В трехмерном случае возникают некоторые симметричные тензорные поля на Δ , являющиеся инвариантами субримановой структуры. Два из них, обозначаемые через Q_2 и V_3 , наиболее важны и их степень ковариантности соответственно равна 2 и 3. Они неприводимы при действии $SO(2)$.

Вообще говоря, Q_2 не обращается в нуль вне гладкой кривой C и V_3 также не обращается в нуль на этой кривой. Они называются, соответственно, "главным" и "вторым" инвариантами структуры и отражают наиболее важные локальные свойства субримановой метрики.

§ 2. Изопериметрические задачи

Рассмотрим также общие изопериметрические задачи на 2-мерном ориентированном римановом многообразии (M, g) следующего типа: заданы две формы $\eta = \psi(\text{Volume})$, фиксированы две точки $q_0, q_1 \in M$ и кривая $\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow M$, $\tilde{\gamma}(0) = q_0$, $\tilde{\gamma}(1) = q_1$; требуется найти кривые $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$, $\gamma(0) = q_1$, $\gamma(1) = q_0$ минимальной римановой длины такие, чтобы достигалось заданное значение A интеграла $\int_{\Omega} \eta$, где Ω — область, заключенная

внутри γ и $\tilde{\gamma}$.

Задача Дидоны является частным случаем этой задачи при $\psi = 1$, т.е. когда минимизируется периметр при заданной площади. (На самом деле, классическая задача Дидоны формулируется двойственным образом.) Иногда она называется *задачей Паппуса* в честь греческого математика, решившего ее в специальном случае плоской метрики на плоскости (см. Каратеодори [10, с. 366–370]).

Сформулируем рассматриваемые изопериметрические задачи в следующих двух эквивалентных формах:

(1) Такая изопериметрическая задача (M, g, η) может быть локально сформулирована в терминах субримановой геометрии следующим образом: ростку $(M, g, \eta)_{q_0}$ можно сопоставить росток *ориентированной* трехмерной субримановой структуры с симметрией: $(X, \Delta, g)_{p_0}$, где $X = M \times R = \{z, w\}$, $\pi : X \rightarrow M$, $p_0 = (q_0, 0)$, и если α — данная первообразная формы η , а $\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow X$, $\tilde{\gamma}(0) = (q_0, 0)$, $\tilde{\gamma}(1) = (q_1, w^*)$ — гладкая кривая, касающаяся Δ , то:

(а) субриманова длина $\tilde{\gamma}$ равна римановой длине ее проекции $\gamma = \pi \tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow M$,

$$(b) w^* = \int_0^1 \alpha(\dot{\gamma}) d\tau.$$

Эта субриманова метрика $(X, g, \Delta)_{p_0}$ обладает симметрией $\xi = \frac{\partial}{\partial w}$ и форма α , единственная с точностью до замкнутой формы dn , может быть единственным образом нормирована следующим образом: рассмотрим все субримановы геодезические, проходящие через p_0 , проекции которых — римановы геодезические на M . Если потребуем, чтобы все такие кривые лежали бы на поверхности $\{w = 0\} \subset X$, то α определяется единственным образом.

Значит, исходя из изопериметрической задачи $(M, g, \eta)_{q_0}$, построена единственная субриманова метрика с симметрией $(X, \Delta, g, \xi)_{p_0}$.

Эта субриманова структура контактна в том и только том случае, если ψ не обращается в нуль, и она соответствует задаче Дидоны на (M, g) в том и только том случае, если $\xi = \nu$ — характеристическому векторному полю.

(2) Если теперь задан росток субримановой структуры с симметрией $(X, \Delta, g, \xi)_{p_0}$, где симметрия ξ трансверсальна Δ , то факторпространство $M = X/\xi$ наследует риманову структуру g . С точностью до некоторого тривиального продолжения вдоль симметрии X может быть снабжено структурой (тривиально-го) главного линейного расслоения над римановым многообразием (M, g) со связностью, горизонтальным пространством которой является Δ . Обратно, если (X, M, g, π, ∇) — (окружностное или линейное) главное расслоение $\pi: X \rightarrow M$ со связностью ∇ над римановым многообразием (M, g) , то получаем субриманову структуру над X , определяемую лифтом римановой метрики на горизонтальное пространство Δ этой связности. По построению эта субриманова структура допускает симметрию, трансверсальную Δ . Кроме того, форма кривизны этой связности определяет изопериметрическую задачу на M .

Поскольку рассмотрения этой статьи локальны, то нет никакой разницы, рассматриваем ли мы расслоение окружностей или линейное расслоение.

Субриманова структура контактна в том и только том случае, если форма кривизны связности не обращается в нуль; она является дидоновой в том и только том случае, если форма кривизны совпадает с лифтом формы объема.

В зависимости от контекста, мы будем использовать обе эти эквивалентные переформулировки изопериметрической задачи и использовать оба обозначения $(X, M, g, \xi)_{p_0}$ и $(X, M, g, \pi, \nabla)_{p_0}$.

Заметим, что эти новые определения изопериметрических субримановых метрик и метрик Дидоны пригодны только при $n = 1$.

Одна из наших задач состоит в нахождении (локального) "*optimal synthesis*" синтеза для изопериметрических задач, т.е. для фиксированного q_0 , для всех достаточно близких q_1 и для всех достаточно малых значений w предписанного интеграла требуется найти все кривые минимальной длины, соединяющие q_0 с q_1 .

Эквивалентная задача состоит в вычислении формы всех ассоциированных субримановых сфер малого радиуса (являющихся множествами уровня функции субриманова расстояния до q_0) в пространстве $\{(z, w)\}$.

Эта задача и будет решаться в данной статье как следствие трактовки общего случая малых субримановых сфер:

(а) Для контактной задачи общего положения два указанных выше основных инварианта Q_2, V_3 не должны одновременно обращаться в нуль. В точности как и в неизопериметрическом случае, Q_2 не обращается в нуль вне изолированных гладких кривых (которые являются слоями проекции $(z, w) \rightarrow z$ в этом случае) и V_3 не обращается в нуль на этих слоях. Как следствие мы увидим, что имеется небольшая разница во всех дальнейших результатах между изопериметрическими метриками и общими субримановыми метриками. В частности, никакой разницы нет для оптимального синтеза.

(b) Напротив, в задаче Дидоны инвариант Q_2 обращается в тождественный нуль. Поэтому результаты случая общего положения не применимы.

В качестве иллюстрации результатов этой статьи сформулируем теорему, устанавливающую форму (локального) оптимального синтеза в случае Дидоны.

Пусть снова $q_0 \in M$ — полюс. Тогда ∇ — связность Леви-Чивита на M , а $k(q)$ — гауссова кривизна на M .

Пусть A обозначает (малое) заданное значение интеграла $\int_0^1 \alpha(\dot{\gamma}(\tau)) d\tau$, где α — первообразная объема, описанная выше. Мы будем рассматривать только случай $A > 0$, случай $A < 0$ аналогичен и получается сменой ориентации.

$$\text{Положим } h = \sqrt{\frac{A}{\pi}}.$$

Последовательные ковариантные производные $\nabla^j k$ являются ковариантными симметричными тензорными полями степени j на M и они могут быть разложены при действии структурной группы $SO(2)$ расслоения TM на слоях соответствующих векторных расслоений на изотипические компоненты относительно последовательных степеней $e^{li\rho}$ основного характера $e^{i\rho}$, $i = \sqrt{-1}$:

$$\nabla^j k(q_0) = \sum_{l=0}^j (\nabla_l^j k(q_0)). \quad (2.1)$$

В частности, $\nabla^2 k(q_0)$ — квадратичная форма, $\nabla^2 k(q_0) = \nabla_0^2 k(q_0) + \nabla_2^2 k(q_0)$, где $\nabla_0^2 k(q_0) = \frac{1}{2} \text{trace}_g(\nabla^2 k(q_0))g(q_0)$, и $\nabla_2^2 k(q_0) = 0$ в том и только том случае, если $\text{discr } g(\nabla^2 k(q_0)) = 0$. $\nabla^3 k(q_0)$ — кубика, $\nabla^3 k(q_0) = \nabla_1^3 k(q_0) + \nabla_3^3 k(q_0)$.

Рассмотрим векторы $V_1, V_2^1, V_2^2, V_3^1, V_3^2, V_3^3$ в $T_{q_0}M$:

1. V_1 — вектор, нормальный градиенту k в q_0 длины $\frac{\pi}{4} |\text{grad } k|_{q_0}$, а репер $(\text{grad } k, V_1)_{q_0}$ — прямой;

2. V_2^i — векторы в направлении, в котором квадратичная

Диаграмма D1

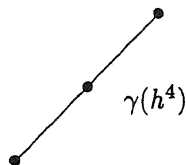


Диаграмма D2

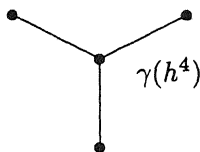


Рис. 1. Геометрические места разрезв общего положения.

форма $\nabla_2^2 k(q_0)$ достигает максимума $\tilde{r}_2$ на единичной окружности длины $\frac{\pi}{2} \tilde{r}_2$;

3. V_3^j — векторы, нормальные направлениям I_1, I_2, I_3 , в которых кубическая форма $\nabla_3^3 k(q_0)$ достигает максимума $\tilde{r}_{32}$ на единичной окружности длины $\frac{3\pi}{8} \tilde{r}_{32}$, а реперы (I_j, V_3^j) — прямые, $j = 1, 2, 3$.

“Геометрическое место разрезв” $\text{Cut } L(h)$, соответствующее предписанному значению h , определяется как подмножество M , образованное точками q_1 , которые соединяются с q_0 несколькими (не единственными) траекториями минимальной длины.

Теорема 2.1. Для роста римановой метрики в q_0 и для достаточно малого h справедливы следующие утверждения.

Существует росток гладкой кривой $\gamma(t)$ в q_0 такой, что $\frac{d\gamma(t)}{dt}(q_0) = V_1$:

(1) если $\nabla_2^2 k(q_0) \neq 0$, то $\text{Cut } L(h)$ — древовидный граф, образованный двумя полуоткрытыми отрезками гладкой кривой, исходящей из точки $\gamma(h^4)$. Направление этих отрезков равно V_2^i , а их длина допускает асимптотику $h^5 |V_2^i|$;

(2) если $\nabla_2^2 k(q_0) = 0$, но $\nabla_3^3 k(q_0) \neq 0$, то $\text{Cut } L(h)$ — древовидный граф, образованный тремя полуоткрытыми отрезками гладкой кривой, исходящей из той же точки $\gamma(h^4)$. Направления этих отрезков равны V_3^i , а их длины имеют асимптотику $h^6 |V_3^i|$.

На рис. 1 изображены две диаграммы D_1 и D_2 , дающие форму геометрических мест разрезв общего положения. Следовательно, справедливо

Следствие 2.2 (для метрик g на M общего положения). Существуют два типа точек $q_0 \in M$: $q_1 \in M$ обозначает любую точку, достаточно близкую к q_0 , $\gamma: [0, 1] \rightarrow M$, $\gamma(0) = q_0$,

$\gamma(1) = q_1$, обозначает любую кривую, исходящую из q_0 , с заданным значением A интеграла $\int_0^1 \alpha(\dot{\gamma}(\tau)) d\tau$, где $|A|$ достаточно мало. Тогда:

1. если $\nabla_2^2 k(q_0) \neq 0$ (точки общего положения), то имеются в точности одна или две оптимальные кривые γ ;
2. если $\nabla_2^2 k(q_0) = 0$ (изолированные точки), то существуют точки q_1 с тремя оптимальными кривыми γ , идущими из q_0 в q_1 . (Оптимальность означает минимальную длину.)

Тройная точка случая 2 — это точка $\gamma(h^4)$, а все остальные точки полуоткрытых отрезков кривой — двойные.

Замечание 1. Из теории характеристических классов следует (см., например, [20, гл. 40, с. 204]), что если M — компактное многообразие и эйлерова характеристика $\kappa(M)$ нулевая, то всегда существуют изолированные точки второго типа: $\nabla_2^2 k$ определяет поле квадратичных форм сигнатуры 1 на дополнении в M множества этих изолированных точек, и сумма индексов ассоциированного “поля линейных элементов” равна $2\kappa(M)$.

§ 3. Уравнение геодезических и экспоненциальное отображение

Прежде чем двигаться дальше, нужно сказать несколько слов о геодезических и экспоненциальном отображении. Здесь будем использовать гамильтонов формализм. Существует ряд других возможных способов записи уравнения субримановых геодезических. В частности, в случае изопериметрических задач легко находится, что уравнение проекций γ на M субримановых геодезических $\tilde{\gamma}$, $\gamma = \pi\tilde{\gamma}$ имеет вид

$$k_g(\gamma(s)) = c\psi(\gamma(s)), \quad (3.1)$$

где $k_{g(\cdot)}$ — геодезическая кривизна на M , а c — постоянная.

Это уравнение является также уравнением движения заряженной частицы в магнитном поле, ψ — величина магнитного поля на M . (См. препринт авторов [8] и статью [18] по поводу дальнейших подробностей относительно этого.)

Кроме того, существует естественная связность (называемая связностью Румина, см. [11], [19]), ассоциированная с контактной субримановой метрикой, и уравнения геодезических могут быть записаны очень простым образом в терминах этой связности.

Немного больше об этом (связности Румина) будет сказано в последней главе 6 данной статьи.

Здесь рассматривается гамильтониан H задачи

$$H(p) = \frac{1}{2} \sup_{v \in \Delta \setminus \{0\}} \left(\frac{p(v)}{\|v\|} \right)^2, \quad (3.2)$$

$H(p)$ — неотрицательно определенная квадратичная форма на слоях $\pi_X : T^*X \rightarrow X$, ядро которой — аннулятор Δ .

Поскольку рассматривается только контактный случай, то не существует абнормальных геодезических и все геодезические (т.е. локально C^0 -минимизирующие кривые) являются проекциями на X траекторий гамильтонова векторного поля $\vec{H}$, ассоциированного с H . (По поводу нескольких неконтактных случаев см. статьи [5], [12].)

Пусть $H_{\frac{1}{2}} = H^{-1}(\frac{1}{2})$ — поверхность уровня H , соответствующая геодезическим, параметризованным длиной дуги. Так как гамильтониан (3.2) однороден по p , то каноническая контактная структура проективного кокасательного расслоения PT^*X связана с $H_{\frac{1}{2}}$. Пусть $\bar{C}_0 \subset T^*X$, $\bar{C}_0 = \pi_X^{-1}(q_0)$, $\pi_X : T^*X \rightarrow X$ и пусть C_0 — цилиндр $C_0 = \bar{C}_0 \cap H_{\frac{1}{2}}$. C_0 является лежандровым многообразием этой контактной структуры и гамильтонов поток сохраняет эту контактную структуру.

Экспоненциальное отображение — это отображение

$$\varepsilon : C_0 \times R^+ \rightarrow X, \quad (p, s) \rightarrow \pi_X \circ \exp(s\vec{H}(p)). \quad (3.3)$$

Волновой фронт радиуса s — это $W_s = \varepsilon(C_0, s)$, а *сфера* радиуса s — множество $S_s = \{q \in E | d(q, q_0) = s\}$.

Стандартные рассуждения (например, типа Филиппова) показывают, что для достаточно малого s , если $d(q, q_0) = s$, то существует, по крайней мере, геодезический сегмент длины s , соединяющий q_0 с q . Следовательно, $S_s \subset W_s$.

Ввиду однородности H , $\varepsilon(c, \lambda s) = \varepsilon(\lambda c, s)$. Следовательно, можно также рассмотреть ε как отображение $\varepsilon : \bar{C}_0 \rightarrow X$, $\varepsilon(p) = \pi_X \circ \exp \vec{H}(p)$. В этом случае обозначим это через $\bar{\varepsilon}$.

Наконец, мы увидим, что всегда можно рассматривать экспоненциальное отображение как *надстройку отображения двумерных многообразий* (§ 10, глава 3).

Таким образом, существует три способа изучения экспоненциального отображения: если s — параметр длины дуги, то (1) можно рассматривать $\bar{\varepsilon}$ как лагранжево отображение или (2) для фиксированного s можно рассматривать ε_s как лежандрово отображение. Как уже говорилось, можно и удобно (3) рассматривать ε как надстройку обычного гладкого отображения 2-мерных многообразий. В таком случае обозначим его через ε^S .

§ 4. Содержание статьи

Следующая глава 2 посвящена нормальным формам и инвариантам контактных субримановых метрик и изопериметрических задач.

Глава 3 посвящена эффективному вычислению экспоненциального отображения во всех рассмотренных 3-мерных случаях, т.е. для *контактных* общих субримановых метрик, изопериметрических метрик и, наконец, в случае Дидоны.

Вычисления в общем случае уже были проделаны в статьях [4], [11] и, более детально, в [6]. Мы только сформулируем необходимые результаты. Даже формулировки не просты, поскольку формулы так громоздки, что их не разумно выписывать полностью. На практике некоторые из этих вычислений в серии работ авторов были проделаны с использованием формальной вычислительной программы. В статьях [4], [11] они были проделаны вручную.

Мы отсылаем читателя за всеми подробностями к этим статьям. По поводу детального вычисления в случае Дидоны см. препринт [8].

Одна из целей данной статьи состоит в изучении особенностей ε_s , $\bar{\varepsilon}$ и ε^S , т.е. особенностей ε как лежандрова или лагранжева, или (надстройки) обычного отображения.

Как следствие этого изучения мы можем описать сферы и волновые фронты вместе с их особенностями и каустики с их особенностями. Эти результаты не являются новыми: они, в основном, являются результатами, полученными в статьях [4], [6], [11].

Как уже отмечалось, новым является аналогичное изучение случая Дидоны.

Глава 4 посвящена изучению субримановых каустик, т.е. множества особых значений $\bar{\varepsilon}$ и ε^S . Изучается устойчивость обоих отображений в смысле Лагранжа и Тома—Мазера соответственно. В этом состоит цель статьи [6]. Мы только переформулируем результаты и приведем дополнения для изопериметрических задач.

Глава 5 связана с изучением малых сфер и волновых фронтов, а также с лежандровой устойчивостью ε_s .

Теорема 2.1 и следствие 2.2, приведенные выше, являются следствиями этих результатов.

НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ И ИНВАРИАНТЫ

§ 5. Нормальные координаты

Эта работа уже была проделана в трехмерном случае в статье авторов [6].

Начнем с общей $2n + 1$ -мерной гладкой контактной субримановой метрики $(X, \Delta, g)_{q_0}$. Предположим, что задан росток кривой $\Gamma :] - \varepsilon, \varepsilon[\rightarrow X$, $\Gamma(0) = q_0$, транверсальной распределению. Определим специальные координаты, "приспособленные к этой кривой".

Положим

$$A_\Gamma = \bigcup_{t \in]-\varepsilon, \varepsilon[} \left\{ p \in T_{\Gamma(t)}^* X \mid p \left(\frac{d\Gamma(t)}{dt} \right) = 0 \right\}.$$

A_Γ — это в точности объединение кокасательных векторов вдоль Γ , удовлетворяющих условию транверсальности Понтрягина относительно Γ .

Существуют гладкие координаты (z, w) в окрестности q_0 , обладающие следующими свойствами:

- (1) $\Gamma(t) = (0, t)$;
- (2) геодезические, проходящие через $\Gamma(t)$ и удовлетворяющие условиям транверсальности Понтрягина относительно Γ (т.е. геодезические вида $\{\pi_X \circ \exp_s \tilde{H}(p)\}$, $p \in A_\Gamma$), являются прямыми линиями, лежащими в плоскостях $\{w = t\}$;

- (3) для достаточно малого s цилиндры $C_s = \left\{ \sum_{i=1}^{2n} z_i^2 = s^2 \right\}$ являются в точности следующими множествами:

$$C_s = \{q \mid d(q, \Gamma) = s\},$$

где d обозначает субриманово расстояние.

(Эти свойства — простые следствия принципа максимума Понтрягина.)

Указанные координаты, называемые "приспособленными к Γ координатами", единственны с точностью до замены координат вида

$$\tilde{z} = U(w)z, \quad \tilde{w} = w,$$

где $U(w) \in O(2n)$. Если потребовать совместимость этих координат с данной ориентацией Δ (или X), то они будут единственны с точностью до $U(w) \in SO(2n)$.

Теперь мы в состоянии определить "изопериметрические нормальные координаты в q_0 " для (ориентированной) изопериметрической субримановой метрики $(X, \Delta, g, \xi)_{q_0}$.

Определение 5.1. “Изопериметрические нормальные координаты” (z, w) или “изопериметрические координаты” (соответственно, *координаты Дидоны*) соответствуют выбору $\Gamma(t) = \exp t\xi(q_0)$ и выбору $U(w)$ такому, что $\xi = \frac{\partial}{\partial w}$ (соответственно $\nu = \frac{\partial}{\partial w}$). Координаты z — стандартные нормальные римановы координаты на M (согласованные с данной ориентацией M). Этот выбор $U(w)$ вдоль Γ единствен с точностью до выбора $U(0) \in SO(2n)$.

В общем случае остается проделать некоторую работу по нормализации $U(w)$ вдоль Γ , хотя *ясен канонический выбор* Γ с точностью до знака: возьмем $\Gamma(t) = \exp t\nu(q_0)$.

5.1. Нормализация $U(w)$ в общем контактном случае. Сначала рассмотрим точки Γ , т.е. $q_w = (0, w)$.

Пусть задана ориентация (на Δ , если n нечетно, и на X , если n — четно, т.е. в обоих случаях имеем векторное поле Z , трансверсальное Δ). Этим полностью определены ω и ν . В силу контактности, 2-форма $d\omega|_{\Delta}$ невырождена. В только что определенных координатах z в точке q_w $d\omega|_{\Delta}$ имеет (кососимметричную) матрицу A_w . Предположим следующее: субриманова метрика “*сильно невырождена*” в q_0 в том смысле, что все собственные значения A_w различны при $w \in]-\varepsilon, \varepsilon[$. Для контактной субримановой метрики общего положения *это справедливо в точках q_0 на открытом плотном множестве в X* . Кроме того, если $n = 1$, то не делается никакого предположения. Заметим также, что произведение собственных значений должно быть в

точности равно $(\frac{1}{n!})^2$, поскольку $(d\omega)|_{\Delta}^n = \text{Volume}$. Эквивалентно, n положительных мнимых частей α_i этих собственных значений должны удовлетворять соотношению $\prod_{i=1}^n \alpha_i = \frac{1}{n!}$. Эти α_i

— инварианты субримановой структуры в q_0 . Если $n = 1$, то они тривиальны. Они также только инварианты нильпотенизации метрики в точке q_0 . По построению, они остаются инвариантными при смене ориентации.

Упорядоченная последовательность собственных подпространств V_i^w , соответствующая упорядоченному в порядке возрастания множеству мнимых частей этих собственных значений $\alpha_i(w)$, — подпространства $\Delta(q_w)$.

Вернемся теперь к нашей заданной кривой Γ . Первое, что можно сделать, — это редуцировать действие $U(w)$ к действию максимального тора $T^n(w)$ в $SO(2n)(w)$. (Одновременная нормализация нильпотенизаций вдоль Γ .)

Поэтому разобьем координаты z на координаты (x, y) такие, что в точке $V_i^w = V_i = \text{Span} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial y_i} \right\}$, $i = 1, \dots, n$, причем теперь координаты определены единственным образом с точностью до вращений $U(w)$ из данного максимального тора T^n группы $SO(2n)$. В этих координатах в точках Γ имеем $dw = \sum_{i=1}^n \alpha_i(w) dx_i \wedge dy_i$.

Определение 5.2. Определенные выше координаты называются Γ -редуцированными координатами.

Рассмотрим теперь произвольную точку $q = (x, y, w)$ из достаточно малой окрестности U точки q_0 . Рассмотрим плоскости $S_{w_0} = \{q \mid w = w_0\}$. Дифференциал проекции $\Pi_{w_0} : U \rightarrow S_{w_0}$, $\Pi_{w_0}(x, y, w) = (x, y, w_0)$ равен $T\Pi_{w_0}$. При $q = (z, w)$ Π_w линейно и биективно отображает $\Delta(q)$ на $T_q S_w$. Образ $g(q)$ при отображении $T\Pi_w$ определяет риманову метрику на S_w , обозначаемую через g_w .

Подпространства $V_i^w = V_i$ могут рассматриваться либо как 2-мерные подпространства S_w , либо как 3-мерные подпространства R^{2n+1} .

Справедлива

Теорема 5.1. Координаты (x, y) — (римановы) нормальные координаты в $(0, 0, w)$ при всех (S_w, g_w) .

Доказательство состоит в непосредственной проверке, которая предоставляется читателю.

В окрестности точки q_0 можно рассмотреть произвольное поле прямых ортонормальных реперов $\mathcal{F}$ для этой метрики $\mathcal{F}(F_1, G_1, \dots, F_n, G_n)$, которое записывается тривиально сокращенным способом в Γ -редуцированных координатах $(x, y, w) = (z, w)$ как $\mathcal{F} = Q \frac{\partial}{\partial z} + L \frac{\partial}{\partial w}$. Можно выбрать репер так, чтобы $Q_{i,j} = Q_{j,i}$: начнем с произвольного поля ортогональных реперов $\mathcal{F} = Q \frac{\partial}{\partial z} + L \frac{\partial}{\partial w}$. Используя далее калибровочное преобразование (т.е. вращение репера $U(z, w) \in SO(2n)$, зависящее от (z, w)), возьмем полярное разложение Q . $U(z, w)$ единственно. Таким образом, можно считать, что Q симметрична. На самом деле получаем даже большее: полученный репер не зависит от репера, с которого мы начали, по следующим соображениям:

1) в наших координатах $Q_w(z) = Q(z, w)$ по построению есть квадратный корень обратной матрицы к матрице римановой метрики g_w на S_w , которая корректно определена;

2) если ω — определяющая форма, то ω записывается в виде $\omega = f(z, w)(dw - \mu(z, w)dz)$, $f > 0$, единственным образом и,

поскольку ω — определяющая, то имеем: $L(z, w) = \mu Q$.

Поэтому этот ортонормальный репер полностью определен Γ -редуцированными координатами.

Определение 5.3. Построенный репер называется *нормальным репером, подчиненным Γ -редуцированным координатам*.

Единственная остающаяся возможность зафиксировать все (координаты и репер) состоит, следовательно, в выборе кривой $\tilde{\Gamma} :] - \varepsilon, \varepsilon[\rightarrow T^n, w \rightarrow U(w)$.

Докажем следующую теорему.

Теорема 5.2. *С точностью до $U(0) \in T^n$, существует единственный способ выбора кривой $\tilde{\Gamma}$, при котором секционные кривизны относительно подпространств $V_i = V_i^w$ в $(0, w)$ всех метрик (S_w, g_w) равны нулю.*

Это может показаться неожиданным. Однако существует не только вращение координат (которое, конечно, не меняет секционных кривизн), но также и воздействие $\frac{\partial U}{\partial w}$ на метрики g_w .

Доказательство этой теоремы откладывается до следующего параграфа.

Определение 5.4. Полученные координаты (x, y, w) , $(x, y) = (x_i, y_i)$, $1 \leq i \leq n$, упорядоченные с помощью α_i и которые единственны с точностью до $U(0) \in T^n$, называются *субримановыми нормальными координатами*. Подчиненный нормальный репер называется теперь (*субримановой*) *нормальной формой* в q_0 метрики (которая предполагается сильно невырожденной).

§ 6. (Субриманова) нормальная форма

Выберем произвольную Γ -редуцированную систему координат (x, y, w) . Пусть (F_i, G_i) , $i = 1, \dots, n$, — упорядоченное поле реперов для метрики такое, что $(F_i, G_i)(0, 0, w) = \left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial y_i} \right)$ (порядок задан с помощью α_i). $(2n+1) \times 2n$ -матрица, образованная этим полем реперов, распадается на матрицы $Q(q)$ и $L(q)$ размерностей $2n \times 2n$ и $1 \times 2n$ соответственно; можно считать, что Q симметрична. (Сокращенными обозначениями для поля реперов снова будут $Q \frac{\partial}{\partial z} + L \frac{\partial}{\partial w}$.)

Теорема 6.1. (i) $Q(z, w)z = z$, $L(z, w)z = 0$.

(ii) *Обратно, если $Q \frac{\partial}{\partial z} + L \frac{\partial}{\partial w}$ — ортонормальное поле реперов, удовлетворяющее (i), то, полагая $\Gamma(t) = (0, t)$, имеем, что (z, w) — «приспособленная к Γ система координат».*

Доказательство. (i). Пусть снова (p, r) обозначают двойственные координаты в T^*X , а s — длина дуги. Наряду с нашими специальными субримановыми геодезическими, сопряженный вектор должен удовлетворять условиям $r(s) = 0$ и $p^t(s) = \dot{z}(s)$: по принципу максимума Понтрягина, $p(s)$ удовлетворяет условиям трансверсальности относительно цилиндров C_s и, следовательно, $r(s) = 0$, $p^t(s) = \mu(s)\dot{z}(s)$, $\mu(s) \neq 0$. Кроме того, $H = \frac{1}{2}$ и, следовательно, $\|pQ\| = 1$. В противном случае, $\dot{z} = Q(pQ)^t$, $p^t = \mu Q(pQ)^t$, $pp^t = \mu(pQ)(pQ)^t = \mu = \mu^2 \|\dot{z}\|^2 = \mu^2$. Следовательно, $\mu = 1$.

Тогда $\frac{p^t}{\mu} = \dot{z} = Q^2 p^t$ (Q симметрична), $p^t = Q^2 p^t$. Однако также $\lambda(s)p^t(s) = z(s)$, $\lambda(0) = 0$, $\lambda(s) \neq 0$ при $s \neq 0$. Поэтому $z(s) = Q^2 z(s)$ при всех s . $(\text{Id} + Q(s))(\text{Id} - Q(s))z(s) = 0$. Однако $\text{Id} + Q(0)$ обратима: $Q(0) = \text{Id}$. Следовательно, $(\text{Id} + Q(s))$ обратимо для малых s и $Q(s)z(s) = z(s)$. Это справедливо вдоль всех наших геодезических, так что $Q(z, w)z = z$.

Вдоль этих геодезических $r(s) = 0$, но также и $\dot{w}(s) = 0 = -\frac{\partial H}{\partial r} = L(pQ)^t \cdot 0 = LQp^t = \frac{1}{\lambda(s)} LQz(s)$ при $s \neq 0$. По непрерывности вновь из рассмотрения вдоль всех наших геодезических получаем $L(z, w)Q(z, w)z = L(z, w)z = 0$ при всех (z, w) .

(ii) Легко проверяется, что траектории $z(s) = s \frac{z_0}{\|z_0\|}$, $p^t(s) = \frac{z_0}{\|z_0\|}$, $r(s) = 0$, $w(s) = \text{cte}$ являются решениями сопряженных уравнений, если выполнено (i). Кроме того, по (i) находим, что вдоль этих траекторий s — длина дуги. (Здесь нужно воспользоваться очевидным соображением непрерывности в $s = 0$.)

Предложение 6.2. Условия (i) теоремы 6.1 инвариантны относительно замен координат вида $\tilde{z} = U(w)z$, $\tilde{w} = w$ при $U(w) \in SO(2n)$.

Доказательство. Покажем сначала, что если выполнено (i), то Q обратима.

Запишем $Q(z, w)$ в виде степенного ряда от z : $Q = Q^0(w) + Q^1(z, w) + \dots + Q^n(z, w) + \dots$; тогда $Q(z, w)z = z = Q^0(w)z + Q^1(z, w)z + \dots$. Это показывает, что $Q^0(w) = \text{Id}$. В частности, для достаточного малого z матрица $Q(z, w)$ обратима.

Формулы для этих замен координат легко найти. Имеем

$$\begin{aligned}\tilde{Q} &= U[(Q + AzL)(Q - L^t z^t A)]^{\frac{1}{2}} U^t, \\ \tilde{L} &= L(Q - L^t z^t A) U^t \tilde{Q}^{-1},\end{aligned}\tag{6.1}$$

где $A(w) = \frac{dU(w)}{dw}$ ($A(w)$ кососимметрична).

Тогда $\tilde{Q}^2 \tilde{z} = U(Q + AzL)(Q - L^t z^t A)z = U(Q + AzL)(z + L^t z^t Az)$. Но $z^t Az = 0$, поскольку A кососимметрична, следовательно, $\tilde{Q}^2 \tilde{z} = Uz = \tilde{z}$. $Q(0) = \text{Id}$, $(\text{Id} + \tilde{Q})$ обратима, $\tilde{Q} \tilde{z} = \tilde{z}$.

Для доказательства второго утверждения имеем $\tilde{L} \tilde{z} = L(Q - L^t z^t A)U^t \tilde{Q}^{-1} \tilde{z} = L(Q - L^t z^t A)z = Lz = 0$.

Следующее замечание интересно и полезно.

Предложение 6.3. *Запишем снова $Q(z, w)$ в виде степенного ряда от z , $Q = \text{Id} + Q^1(w, z) + \dots$; тогда $Q^1 = 0$.*

Доказательство. Во-первых, для любого $1 \leq i \leq j \leq 2n$ имеем $Q_{i,j}^1(z, w) = \sum_{k=1}^n Q_{i,j}^{1,k}(w)z_k$, а $Q(z)z = z$ дает

$$\sum_{j,k=1}^n Q_{i,j}^{1,k}(w)z_k z_j = 0;$$

это показывает, что $Q_{i,j}^{1,k}(w) = -Q_{i,k}^{1,j}(w)$. Значит, Q^1 симметрична и, следовательно, $Q_{j,i}^{1,k}(w) = Q_{i,j}^{1,k}(w) = -Q_{i,k}^{1,j}(w) = -Q_{k,i}^{1,j}(w) = Q_{k,j}^{1,i}(w) = Q_{j,k}^{1,i}(w) = -Q_{j,i}^{1,k}(w) = 0$.

Исследуем теперь, каким должен быть такой репер при $n = 1$. Возьмем репер Γ -приспособленных координат в q_0 . В таком случае автоматически получаем, что он Γ -редуцирован. Мы знаем, что $Q(0, w) = \text{Id}$. Положим

$$Q = \begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 \\ Q_2 & Q_3 \end{pmatrix}$$

и пусть $\beta(z, w) = -\frac{1}{xy}Q_2(z, w)$, если $x, y \neq 0$. Используя $Qz = z$, находим $Q_1 = 1 + y^2\beta$, $Q_3 = 1 + x^2\beta$. Тогда βxy , $x^2\beta$, $y^2\beta$ — гладкие функции. Применяя дважды следующую лемму, мы видим, что на самом деле β гладка даже в $x = 0$ или $y = 0$.

Лемма 6.4 (о десингуляризации). *Если $f(x, y, w)$ — произвольная гладкая функция на R^{p+2} , а xf и yf гладки, то f гладка. (Можно заменить гладкость на C^∞ или на C^ω .)*

Доказательство предоставляется читателю.

Поэтому мы видим, что

$$Q(z, w) = \begin{pmatrix} 1 + y^2\beta(x, y, w) & -xy\beta(x, y, w) \\ -xy\beta(x, y, w) & 1 + x^2\beta(x, y, w) \end{pmatrix}. \quad (6.2)$$

Положим, кроме того, $L(x, y, w) = (L^1, L^2)$ и $\gamma(x, y, w) = \frac{2}{y}L^1$.

Тогда, используя соотношение $Lz = 0$, получаем, что $L^2 = -\frac{x}{2}\gamma$ вне $\{y = 0\}$, а γx и γy — гладкие функции. С помощью леммы о десингуляризации получаем, что γ гладка.

Кроме того, поскольку $n = 1$, то имеем $\alpha_1 = \alpha = 1$. Записывая снова $\omega = f(dw + \mu dz)$ для определяющей формы, имеем $f > 0$; так как $\omega(\nu) = 1$, то заключаем, что $f(0, 0, w) = 1$; это показывает (после небольших вычислений), что $\gamma(0, 0, w) = 1$. Таким образом, в размерности 3 имеем следующее:

$$\begin{aligned} F &= (1 + y^2\beta(x, y, w))\frac{\partial}{\partial x} - xy\beta(x, y, w)\frac{\partial}{\partial y} + \frac{y}{2}\gamma(x, y, w)\frac{\partial}{\partial w}, \\ G &= -xy\beta(x, y, w)\frac{\partial}{\partial x} + (1 + x^2\beta(x, y, w))\frac{\partial}{\partial y} - \frac{x}{2}\gamma(x, y, w)\frac{\partial}{\partial w}, \\ &\gamma(0, 0, w) = 1. \end{aligned} \quad (6.3)$$

По определению матрица $Q(x, y, w)$ такова, что $Q\frac{\partial}{\partial z}$ — поле ортонормированных реперов для метрики g_w на плоскости S_w . Непосредственное вычисление показывает, что гауссова кривизна (которая также является секционной кривизной в точке $(0, 0, w)$ относительно подпространства $V_1 = V_1^w$ в этом случае) равна

$$k_{g_w}(0, 0) = 6\beta(0, 0, w). \quad (6.4)$$

Поэтому, по нашей нормализации координат в теореме 5.2, она должна быть нулевой.

Теперь пришло время доказать теорему 5.2 предыдущего параграфа. Для этого нам понадобится следующая техническая лемма.

Лемма 6.5. *Секционная кривизна $\text{Sec}_0(V_i^w)$ в точке $(0, 0, w)$ относительно 2-мерных подпространств V_i^w для (S^w, g_w) удовлетворяет следующему соотношению:*

$$\text{Sec}_0(V_i^w) = \left(\frac{\partial^2 Q_{2,2}^{i,i}}{(\partial x_i)^2} + \frac{\partial^2 Q_{1,1}^{i,i}}{(\partial y_i)^2} - 2 \frac{\partial^2 Q_{1,2}^{i,i}}{\partial y_i \partial x_i} \right) (0, 0, w),$$

где Q — 2×2 -блок, $Q = \text{Block}(Q^{i,j})$.

Доказательство. Для римановой метрики g в нормальных координатах имеем $g = Q^{-2}$, где Q симметрична, есть матрица поля ортонормированных реперов и $g(0) = \text{Id}$. Доказательство теоремы 6.1 также пригодно для римановых метрик для того, чтобы показать, что $Q(z)z = z$. Если $Q(z) = \text{Id} + Q_1(z) + Q_2(z) + \dots$, где Q_i имеет порядок i по z , то $Q_1(z) = 0$ (предложение 6.3).

Следовательно, $g(z) = \text{Id} - 2Q_2(z) + O^3(z)$. Тогда вычисления в нормальных координатах показывают, что

$$2 \text{Sec}_0 \left(\text{Span} \left\{ \frac{\partial}{\partial z_k}, \frac{\partial}{\partial z_l} \right\} \right) = - \left(\frac{\partial^2 g_{l,l}}{(\partial z_k)^2} + \frac{\partial^2 g_{k,k}}{(\partial z_l)^2} - 2 \frac{\partial^2 g_{k,l}}{\partial z_l \partial z_k} \right).$$

Отсюда и вытекает утверждение.

Обозначения. Ниже для любой функции $\varphi(z)$ обозначение $\varphi(\hat{z}_i)$ означает, что $\varphi(0, \dots, 0, z_i, 0, \dots, 0)$, т.е. φ , для которой все компоненты (x_j, y_j) , кроме (x_i, y_i) , равны нулю.

Доказательство теоремы 5.2. Из соотношения $Q(z, w)z = z$ следует, что $Q^{i,i}(\hat{z}_i, w)z_i = z_i$, $1 \leq i \leq n$. Как следствие $Q^{i,i}(\hat{z}_i, w)$ имеет вид (6.2). Аналогичным образом, если $L(z, w) = \text{Block}(L^i)$, то L^i удовлетворяет следующим соотношениям:

$$L^i(\hat{z}_i, w) = \left(\frac{y_i}{2}, -\frac{x_i}{2} \right) \gamma_i(\hat{z}_i, w), \quad 1 \leq i \leq n. \quad (6.5)$$

Кроме того, $\gamma_i(0, w) \neq 0$: $\gamma_i(0, w)$ есть в точности собственное значение $\alpha_i(w)$, рассмотренное выше.

По той же причине имеем $Q^{j,i}(\hat{z}_i, w)z_i = 0$, следовательно, $Q^{i,j}(\hat{z}_i, w)Q^{j,i}(\hat{z}_i, w)z_i = 0$. Рассуждая как и выше, получаем

$$\begin{aligned} & Q^{i,j}(\hat{z}_i, w)Q^{j,i}(\hat{z}_i, w) = \\ & = \begin{pmatrix} y_i^2 \beta_{i,j}(z_i, w) & -x_i y_i \beta_{i,j}(z_i, w) \\ -x_i y_i \beta_{i,j}(z_i, w) & x_i^2 \beta_{i,j}(z_i, w) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (6.6)$$

В противном случае, замены координат $\tilde{z} = U(w)z$, $U(w) = \text{Block}(e^{J\delta_i(w)})$, $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in T^n$ действуют, как указано в формуле (6.1).

Применение этой формулы позволяет вычислить $\tilde{Q}^{i,i}(\hat{z}_i)$. Будем вычислять ее только до членов порядка 3, поскольку мы хотим применить лемму 6.5:

$$\begin{aligned} \tilde{Q}^{i,i}(\hat{z}_i) &= e^{J\delta_i(w)} \left((Q^{i,i} + A_i z_i L^i)(Q^{i,i} - L^{it} z_i^t A_i) + \right. \\ & \left. + \sum_{j \neq i} Q^{i,j} Q^{j,i} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-J\delta_i(w)} + O^3(z_i) \quad \text{с } A_i = J \frac{d\delta_i}{dw}. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Используя специальную форму $Q^{i,i}(\hat{z}_i)$, $L^i(\hat{z}_i)$, A_i , $Q^{i,i}(\hat{z}_i)$ и проделав немного вычислений, получим:

$$\bar{Q}^{i,i}(\hat{z}_i) = e^{J\delta_i(w)} \begin{pmatrix} 1 + y_i^2 \hat{\beta}(z_i, w) & -x_i y_i \hat{\beta}(z_i, w) \\ -x_i y_i \hat{\beta}(z_i, w) & 1 + x_i^2 \hat{\beta}(z_i, w) \end{pmatrix}^{\frac{1}{2}} e^{-J\delta_i(w)} + O^3(z_i)$$

$$\text{с } \hat{\beta}(0, w) = \sum_{j \neq i} \beta^{i,j}(0, w) + 2 \left(\beta_i(0, w) - \frac{d\delta_i}{dw}(0, w) \frac{\gamma_i}{2}(0, w) \right).$$

Это показывает, что можно независимо и единственным образом найти $\delta_i(w)$ с точностью до $\delta_i(0)$ при $\hat{\beta}(0, w) = 0$ для всех достаточно малых w . Следовательно, после замены переменных $\tilde{z} = U(w)z$ получим

$$\bar{Q}^{i,i}(\hat{\tilde{z}}_i) = \begin{pmatrix} 1 + \tilde{y}_i^2 \hat{\beta}(\tilde{z}_i, w) & -\tilde{x}_i \tilde{y}_i \hat{\beta}(\tilde{z}_i, w) \\ -\tilde{x}_i \tilde{y}_i \hat{\beta}(\tilde{z}_i, w) & 1 + \tilde{x}_i^2 \hat{\beta}(\tilde{z}_i, w) \end{pmatrix} + O^3(\tilde{z}_i)$$

$$\text{с } \hat{\beta}(0, w) = 0.$$

По лемме 6.5 это и доказывает утверждение.

Можно снова воспользоваться тем фактом, что кривая Γ есть в точности $\{\exp(t\nu)(q_0)\}$ для того, чтобы получить дополнительные условия на L .

Взяв разложение Тейлора для L относительно $z = (x, y)$, запишем $L(z, w) = L^1(w, z) + L^2(w, z) + \dots$, где L^1 линейно, а L^2 квадратично по z . Мы уже знаем, что

$$L_i^1(w) = \alpha_i(w) \left(\frac{y_i}{2}, -\frac{x_i}{2} \right). \quad (6.8)$$

Полагая $L^2 dz = \sum_{i=1}^{2n} L_i^2 dz_i$, запишем $d(L^2 dz)$ в виде $d(L^2 dz) = \sum_{j=1}^n \tilde{L}_j^2(x, y, w) dx_j \wedge dy_j + \text{другие члены}$, где $\tilde{L}_j^2(x, y, w) = \tilde{L}_j^2(z, w)$ линейно по z .

Вычисления показывают, что $i_\nu(dw) = 0$ эквивалентно соотношениям

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial y_k} (\tilde{L}_j^2(z, w))|_{z=0} \prod_{i=1}^n \{\alpha_i(w)\}_{i \neq j} = 0, \quad (6.9)$$

$$= \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} (\tilde{L}_j^2(z, w))|_{z=0} \prod_{i=1}^n \{\alpha_i(w)\}_{i \neq j} = 0, \quad 1 \leq k \leq n. \quad (6.10)$$

Мы доказали следующую теорему.

Теорема 6.6 (нормальная форма). Допустим, что $(X, \Delta, g)_{g_0}$ — сильно невырожденный росток контактной субримановой метрики. Тогда с точностью до знака определяющей формы ω и характеристического векторного поля ν существует система координат (x, y, w) , $z = (x, y)$ (единственная с точностью до элемента максимального тора T^n группы $SO(2n)$, определенного с помощью $d\omega$) и поля ортонормированных реперов $Q \frac{\partial}{\partial z} + L \frac{\partial}{\partial w}$ (единственного как только выбраны координаты) такие, что имеют место следующие свойства:

0) Q симметрична;

1) $Q(z, w)z = z$, $L(z, w)z = 0$, $Q = \text{Block}(Q_{i,j})$, $L = \text{Block}(L_i)$, $1 \leq i \leq j \leq n$;

2) (i) $Q_{ii}(\hat{z}_i, w) = \begin{pmatrix} 1 + y_i^2 \beta_i(z_i, w) & -x_i y_i \beta_i(z_i, w) \\ -x_i y_i \beta_i(z_i, w) & 1 + x_i^2 \beta_i(z_i, w) \end{pmatrix}$;

(ii) $\beta_i(0, w) = 0$;

3) $L_i(z, w) = L_i^1(w, z) + L_i^2(w, z) +$ члены высшего порядка по z ,

$$L_i^1 = \alpha_i(w) \left(\frac{y_i}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{x_i}{2} \frac{\partial}{\partial y_i} \right),$$

L_i^2 имеет порядок 2 по z , $d(\sum L_i^2 dz_i) = \sum \tilde{L}_i dx_i \wedge dy_i +$ остальные члены;

(i) $L^i(\hat{z}_i, w) = \alpha_i(z_i, w) \left(\frac{y_i}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{x_i}{2} \frac{\partial}{\partial y_i} \right)$;

(ii) $\frac{1}{n!} = \prod_{i=1}^n \alpha_i(0, w)$,

(iii) для всех $1 \leq k \leq n$

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial \tilde{L}_i}{\partial y_k}(0, w) \prod_{i=1}^n \{\alpha_i(0, w)\}_{i \neq j} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \tilde{L}_i}{\partial x_k}(0, w) \prod_{i=1}^n \{\alpha_i(0, w)\}_{i \neq j} = 0,$$

Если (x, y, w) и $Q \frac{\partial}{\partial z} + L \frac{\partial}{\partial w}$ — координаты и поле реперов такие, что выполнены условия 0), 1), 2), 3), то (x, y, w) — нормальные координаты и $Q \frac{\partial}{\partial z} + L \frac{\partial}{\partial w}$ — соответствующее поле нормальных реперов.

Из наших рассуждений также следует

Теорема 6.7 (об инвариантности нормальной формы). Нормальная форма инвариантна относительно действия T^n на $\Delta(0)$. Более точно, если z изменяется для $U\tilde{z}$, то Q изменяется для $U^t Q(U\tilde{z}, w)U$, а L изменяется для $L(U\tilde{z}, w)U$.

Переформулируем эти теоремы в специальном случае $n = 1$ (это не ново, см. [6]).

Теорема 6.8 (о трехмерной нормальной форме). *В нормальных координатах поле нормальных реперов записывается в следующем виде:*

$$\begin{aligned} F &= (1 + y^2 \beta(x, y, w)) \frac{\partial}{\partial x} - xy \beta(x, y, w) \frac{\partial}{\partial y} + \\ &+ \frac{y}{2} \gamma(x, y, w) \frac{\partial}{\partial w}, \\ G &= -xy \beta(x, y, w) \frac{\partial}{\partial x} + (1 + x^2 \beta(x, y, w)) \frac{\partial}{\partial y} - \\ &- \frac{x}{2} \gamma(x, y, w) \frac{\partial}{\partial w}, \end{aligned} \quad (6.11)$$

с "краевыми условиями"

$$\begin{aligned} \beta(0, 0, w) &= 0, \quad \gamma(0, 0, w) = 1, \\ \frac{\partial \gamma}{\partial x}(0, 0, w) &= \frac{\partial \gamma}{\partial y}(0, 0, w) = 0. \end{aligned} \quad (6.12)$$

Эти нормальные координаты единственны с точностью до вращения из $SO(2)$ в $\Delta(0)$ (и изменение ориентации на Δ изменяет w на $-w$). Как только нормальные координаты будут выбраны, то нормальный репер будет единствен и нормальная форма инвариантна относительно действия $SO(2)$: если $U \in SO(2)$ выбрано и если положить $z = Uz = z$, то β и γ заменяются на $\beta \circ U$, $\gamma \circ U$ соответственно.

В заключение переформулируем наши результаты об изопериметрических нормальных формах. Сделаем это только в 3-мерном случае, заметив, однако, что можно проделать ту же работу и для $n > 1$ (т.е. редуцировать действие максимального тора в $SO(2n)$).

Замечание 6.1. Можно проверить, что на этом пути получаются нормальные формы и полные инварианты для "риманово-симплектических" структур.

Теорема 6.9 (о трехмерной изопериметрической нормальной форме). Пусть $(X, \Delta, g, \xi)_{q_0}$ — изопериметрическая структура. В изопериметрических координатах (единственных с точностью до вращения в $T_{p_0}M$, $M = X \setminus \xi$, $\Pi: X \rightarrow M$, $\Pi(q_0) = p_0$)

существует единственное поле ортонормальных реперов вида

$$\begin{aligned} F &= (1 + y^2 \beta(x, y)) \frac{\partial}{\partial x} - xy \beta(x, y) \frac{\partial}{\partial y} + \frac{y}{2} \gamma(x, y) \frac{\partial}{\partial w}, \\ G &= -xy \beta(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + (1 + x^2 \beta(x, y)) \frac{\partial}{\partial y} - \frac{x}{2} \gamma(x, y) \frac{\partial}{\partial w}, \end{aligned} \quad (6.13)$$

без начальных условий, но с $\xi = \frac{\partial}{\partial w}$. Эта нормальная форма, инвариантная относительно действия $SO(2)$: $U \in SO(2)$, меняет β и γ на $\beta \circ U$ и $\gamma \circ U$.

Теорема 6.10 (о трехмерной нормальной форме Дидоны). Пусть $(X, \Delta, g)_{p_0}$ — метрика Дидоны. Тогда справедливо заключение теоремы 6.9 и, кроме того,

$$\gamma(x, y) = (1 + (x^2 + y^2) \beta(x, y)) \int_0^1 \frac{2t \, dt}{1 + t^2 (x^2 + y^2) \beta(tx, ty)}. \quad (6.14)$$

Кроме того, $\beta(0, 0) = \frac{1}{6} k(p_0)$, $k(p_0)$ — гауссова кривизна M в точке p_0 .

Доказательство (непосредственное вычисление с использованием того, что $\xi = \nu$) предоставляется читателю.

§ 7. Инварианты

Все нормальные формы в предыдущей серии теорем позволяют определить тензорные поля, являющиеся инвариантами субримановой или изопериметрической структур, или структуры Дидоны (в силу инвариантности нормальных форм).

7.1. Общий случай. Начнем с общего случая произвольного n . Воспользуемся следующими отождествлениями:

$$TX = \Delta \oplus_X R\nu, \quad T^*X = \Delta^* \oplus_X \Delta_0,$$

где Δ^* — двойственное к Δ , а Δ_0 — аннулятор Δ в T^*M ($\Delta_0 = R\omega$).

Если V — векторное пространство, то через $S^k V^*$ обозначим множество ковариантных симметричных тензоров степени k над V , которое канонически отождествляется с однородными полиномами степени k над V^* .

Пусть задана ориентация (на Δ , если n нечетно, и на X , если n четно) вместе с системой нормальных координат в точке q_0 .

Рассмотрим $Q \frac{\partial}{\partial z} + L \frac{\partial}{\partial w}$ — нормальную форму нашей метрики.

Для любых двух векторов V_1, V_2 в Δ_{q_0} можно рассмотреть величины $A_1(z, w, V_1, V_2) = V_1^t Q(z, w) V_2$, $A_2(z, w, V_1) = L(z, w) V_1$ (отождествляя V_1 и V_2 с их представлениями в нормальных

координатах). Для каждого $k > 0$ рассмотрим $A_k^i(z, V_1, V_2) = \frac{\partial^k A^i}{\partial w^k}|_{w=0}$ и $B_{k,l}^i(V_1) = D^l A_k^i(z)|_{z=0}$ — k -ю производную по z в точке 0 из $A_k^i(z)$. $B_{k,l}^1$ является элементом $S^k \Delta_{q_0}^* \otimes S^2 \Delta_{q_0}^*$, а $B_{k,l}^2$ — элементом $S^k \Delta_{q_0}^* \otimes \Delta_{q_0}^*$. Для определяющей формы ω положим:

$$\tilde{B}_{k,l}^i = \begin{cases} B_{k,l}^i, & \text{если } k \text{ четно,} \\ B_{k,l}^i \otimes \omega, & \text{если } k \text{ нечетно.} \end{cases}$$

Тогда $\tilde{B}_{k,l}^i$, $i = 1, 2$, не зависит от выбора U в T^n и от ориентации. Первое обстоятельство следует из теоремы 6.7. Кроме того, при изменении ориентации w заменяется на $-w$, но ω заменяется на $-\omega$.

Тогда, перемещая базовую точку q_0 в этом построении, получаем тензорные поля, также обозначаемые через $\tilde{B}_{k,l}^i$, которые являются инвариантом субримановой структуры.

Если теперь J — произвольное подрасслоение тензорного расслоения $\otimes^{p,q} \Delta$ (p раз контравариантного и q раз ковариантного), то абелева группа T^n действует на его типичный слой $J(0)$. $J(0)$ как T^n -модуль может быть разложен на (1-или 2-мерные) вещественные неприводимые компоненты: $J(0) = \bigoplus \{J_k(0) | k \in \mathbb{Z}^n, k \text{ не обязательно различны}\}$, $J_k(0)$ соответствуют характерам $e^{\varepsilon i(k_1 \theta_1 + \dots + k_n \theta_n)}$, $\varepsilon = +1, -1$.

В случае $n = 1$ этим рассмотрением можно придать более точную форму. В этом и заключается цель следующего пункта.

7.2. Случай $n = 1$. В этом случае более удобно определить эти инварианты другим (но эквивалентным) образом: рассмотрим функции β, γ , фигурирующие в нормальной форме (6.11). Ввиду их инвариантности и по тем же соображениям для ориентации, следующие тензорные поля являются инвариантами субримановой структуры: определим тензоры в полюсе q_0 ,

используя нормальную форму в q_0 . Положим $\beta^k = \frac{\partial^k \beta}{\partial w^k}|_{w=0}$,

$\gamma^k = \frac{\partial^k \gamma}{\partial w^k}|_{w=0}$ и возьмем l -е производные по z в точке $z = 0$,

β_l^k, γ_l^k . Если k нечетно, то возьмем тензорное произведение с ω . (Эти тензоры в рассматриваемом случае обозначаются через β_l^k, γ_l^k .)

Если k четно, то $\beta_l^k, \gamma_l^k \in S^l \Delta^*$, а если k нечетно, то они принадлежат $J_l = S^l \Delta^* \otimes T^* X$.

$T^*X = \Delta^* \oplus_X R\omega$, а структурная группа $SO(2)$ для $S^k\Delta^*$ тривиально действует на типичном слое $J_k(q_0)$ расслоения J_k . Следовательно, все тензорные расслоения, рассмотренные выше, допускают разложения на изотипические компоненты. Если N — $SO(2)$ -модуль, то обозначим через $(N)_k$ его изотипическую компоненту, соответствующую k -й степени основного характера $\chi = e^{i\theta}$ (т.е. прямую сумму вещественных неприводимых компонент, соответствующих χ^k).

Следующие разложения наиболее важны в дальнейшем:

$$S^2\Delta^* = (S^2\Delta^*)_0 \oplus (S^2\Delta^*)_2, \quad S^3\Delta^* = (S^3\Delta^*)_1 \oplus (S^3\Delta^*)_3.$$

Можно отождествить $(S^2\Delta^*)_0$ с линейным расслоением Rg , $(S^3\Delta^*)_1$ с симметричным произведением $\Delta^* \odot Rg$. Тогда $(S^2\Delta^*)_2$ (соответственно, $(S^3\Delta^*)_3$) — ортогональное дополнение $(S^2\Delta^*)_0$ (соответственно, $(S^3\Delta^*)_1$) относительно метрики, индуцированной g на $S^2\Delta^*$ (соответственно, на $S^3\Delta^*$).

Например, если $q \in S^2\Delta^*$, то $q = (q)_0 + (q)_2$, $(q)_0 = \frac{1}{2} \text{trace}_g(q)g$, и $\text{trace}_g((q)_2) = 0$.

Более общо, при $\varepsilon = 0, 1$, $S^{2p+\varepsilon}\Delta^* = \bigoplus_{k=0}^p (S^{2p+\varepsilon}\Delta^*)_{2k+\varepsilon}$, и ес-

ли $q \in S^{2p+\varepsilon}\Delta^*$, то $q = (q)_\varepsilon + \dots + (q)_{2p+\varepsilon}$. Если рассматривать q как однородный полином степени p , то при сужении на единичную окружность в $\Delta^*_{q_0}$ он является функцией $q(\theta)$ от угла θ . Предыдущие разложения — это (конечные) ряды Фурье от $q(\theta)$ и $(q)_{2p+\varepsilon}$ — “наивысшая гармоника”. При таком подходе “наивысшие гармоники” всегда играют основную роль, как это будет видно далее.

Два из этих тензоров играют особо важную роль в данной работе. Следовательно, введем для них специальные обозначения $Q = \gamma_2^0$ и $V = \gamma_3^0$. Они содержатся в $S^2\Delta^*$ и, соответственно, в $S^3\Delta^*$. Их наивысшие гармоники — это $Q_2 \in (S^2\Delta^*)_2$ и $V_3 \in (S^3\Delta^*)_3$; они названы во введении *главным и вторым инвариантами*.

Теорема 7.1 (об общности положения). Пусть задано X . Тогда существует открытое плотное (в топологии Уитни) подмножество контактных субримановых метрик на X такое, что главный инвариант Q_2 не обращается в нуль на (возможно пустой) гладкой кривой. На этой гладкой кривой второй инвариант V_3 не равен нулю.

Доказательство предоставляется читателю. Подробности можно найти в [11].

7.3. 3-мерный изопериметрический случай. Вернемся к исходной формулировке изопериметрической задачи в двумерном случае. Она заключается в тройке $(M, g, \eta)_{q_0}$. $\eta = \psi \text{ Volume}$. Субриманова постановка (X, Δ, g, ξ) контактна в том и только том случае, если ψ не обращается в нуль.

Аналогичным образом рассмотрим $S^k T^* M$ — расслоение ковариантных симметричных тензоров степени k на TM . Структурная группа $SO(2)$ касательного расслоения TM действует на типичном слое этого расслоения, и снова получается следующая декомпозиция на изотипические компоненты:

$$S^k T^* M = \bigoplus_M (S^k T^* M)_j.$$

Если $\Pi_X : X \rightarrow M$ — каноническая проекция, $q_0 \in X$ и $p_0 = \Pi_X(q_0) \in M$, то элемент $T \in S^k T^*_{p_0} M$ линейно опускается в элемент $\Pi_X^*(T) \in S^k \Delta^*_{q_0}$. Оба расслоения $S^k T^* M$ и $S^k \Delta^*$ имеют один и тот же слой и то же действие $SO(2)$ на нем. Следовательно, типичные слои обоих расслоений имеют одинаковые декомпозиции. Отображение опускания коммутирует с этими разложениями, т.е. если $T \in (S^k T^*_{p_0} M)_j$, то $\Pi_X^*(T) \in (S^k \Delta^*_{q_0})_j$.

Фиксируем $p_0 \in M$, $q_0 \in (\Pi_X)^{-1}(p_0)$. Положим $x_2 = \nabla^2 \log \psi$, $x_3 = \nabla^3 \log \psi$. $x_2 \in S^2 T^*_{p_0} M$, $x_3 \in S^3 T^*_{p_0} M$. Разложения x_2, x_3 (в частности, как элементов $S^2 \Delta^*$, $S^3 \Delta^*$) показывают, что $\Pi_X^*(x_2) = (x_2)_0 + (x_2)_2$, $\Pi_X^*(x_3) = (x_3)_1 + (x_3)_3$.

Вычисления приводят к следующему результату.

Теорема 7.2. В контактном изопериметрическом случае Q_2 является ненулевым множителем $(x_2)_2$, а V_3 — ненулевым множителем $(x_3)_3$.

Кроме того, ясно, что для открытого плотного подмножества пар (g, ψ) (в открытом множестве всех пар (g, ψ) с ненулевым ψ) на 2-мерном многообразии M $(x_2)_2$ не обращается в нуль всюду, кроме изолированных точек, в которых $(x^3)_3$ равен нулю.

Таким образом (за исключением некоторых моментов, связанных с симметрией, которые будут объяснены позднее), изучение изопериметрических задач общего положения эквивалентно изучению субримановых задач общего положения (поскольку, как будет видно далее, большинство из изучаемых свойств вполне определяется с помощью Q_2 , если он не равен нулю, или V_3 , если $Q_2 = 0$).

7.4. 3-мерный случай Дидоны. Напротив, в случае задачи вычисления по формуле (6.14) и изопериметрическая нормальная форма (6.13) показывают, что, конечно, Q_2 тождественно равен нулю.

Конечно, в случае Дидоны интересны только тензорные поля $\nabla^r k$, где k — гауссова кривизна M . Для удобства вычислений и для соответствия с общим субримановым случаем предпочтительней инварианты, определенные с помощью β в изопериметрической нормальной форме (6.13). Ясно, что β можно рассматривать либо как функцию на факторпространстве $M = X \setminus \xi$, либо как функцию на X . Различие не существенно, ввиду отождествления $S^k T_{p_0}^* M$ с $S^k \Delta_{q_0}^*$, а также их разложений в предыдущем параграфе.

Снова ввиду инвариантности нормальной формы, мы видим, что производные $D^k \beta$ по z в точке $z = 0$ определяют элементы $\beta^k \in S^k \Delta_{q_0}^*$ (или $S^k T_{p_0}^* M$). Перемещая базовые точки p_0, q_0 , получаем тензорные поля, которые являются инвариантами изопериметрической структуры (они также инвариантны относительно смены ориентации). Наиболее важные из этих β^r — это β^2, β^3 . Они связаны с $\nabla^r k$ следующим образом.

Теорема 7.3 (инварианты в случае Дидоны). *“Наивысшие гармоники” $(\nabla^r k)_r$ и $(\beta^r)_r$ являются ненулевыми постоянными множителями при $r = 2, 3$:*

$$(\nabla^2 k)_2 = 20(\beta^2)_2, \quad (\nabla^3 k)_3 = 180(\beta^3)_3.$$

По поводу подробностей см. препринт [8].

Глава 3

ВЫЧИСЛЕНИЕ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ

В этой главе мы ограничимся рассмотрением 3-мерного случая. Знаем, что субримановы геодезические являются проекциями на X траекторий гамильтонова векторного поля $\tilde{H}$. Здесь вычисления будут приведены только в общем субримановом случае и в случае Дидоны. Как уже говорилось в пункте 7.3 главы 2, для основных результатов нет необходимости производить вычисления в общем изопериметрическом случае: они являются прямым следствием соответствующих результатов в общем неизопериметрическом случае. Тем не менее, необходимо проделать вычисления для некоторых моментов, которые будут указаны в следующей главе 4. Они уже были проделаны в [9].

Рассмотрим субриманову метрику, которая является либо общей такой метрикой, либо метрикой Дидоны. В общем случае мы будем использовать нормальные координаты и нормальную форму (6.11) с краевыми условиями (6.12). В случае Дидоны используем изопериметрические нормальные координаты, изопериметрическую нормальную форму и соотношение (6.14).

В обоих случаях координаты на T^*X , двойственные к нормальным координатам (x, y, w) (изопериметрическим координатам или координатам Дидоны), будут обозначаться через $(\tilde{p}, \tilde{q}, r)$.

§ 8. Параметризация геодезических

Обозначим через s длину дуги и перепараметризуем время. Пусть t — “новое время”, определенное как $dt = r(s)ds$. В случае Дидоны r постоянно и, следовательно, $t = rs$. Положим

$$p = \frac{\tilde{p}}{r}, \quad q = \frac{\tilde{q}}{r}, \quad \rho = \frac{1}{r}. \quad (8.1)$$

Вдоль геодезической будем писать ρ для $\rho(t)$ при $t = 0$: $\rho = \rho(0)$. При использовании ρ с новым временем t оно всегда явно указывается в обозначении $\rho(t)$.

В этих координатах цилиндр есть $C_0 = \{p = \rho \cos(\varphi), q = \rho \sin(\varphi)\}$, а ε — функция переменных (ρ, φ, t) , гладкая даже в точке $\rho = 0$. Обозначим ее снова через $\varepsilon(\rho, \varphi, t)$. Для $z = (x, y)$ ε_z обозначает первые две компоненты ε , а ε_w обозначает третью. В терминах $\rho, \varepsilon_z, \varepsilon_w$ допускают следующее представление в точке $\rho = 0$:

$$\begin{aligned} \varepsilon_z &= \rho \varepsilon_1^z(t, \varphi) + \rho^3 \varepsilon_3^z(t, \varphi) + \dots + \rho^n \varepsilon_n^z(t, \varphi) + o(\rho^{n+1}) = \\ &= \tilde{\varepsilon}_n^z + o(\rho^{n+1}). \end{aligned} \quad (8.2)$$

Замечание 8.1. Важно отметить, что здесь отсутствует член порядка 2: это следует из: (i) предложения 6.3; (ii) краевых условий на γ в общем случае и специальной формы γ в случае Дидоны. Это не верно для общего изопериметрического случая для изопериметрических координат (являющихся нормальными). Однако мы условились забыть про эти координаты и использовать нормальные неизопериметрические координаты в этом случае. Это получается вследствие того, что компонента w не является в точности значением заданного интеграла, но это не изменяет общих форм сфер, волновых фронтов и геометрических мест разрезов

$$\begin{aligned} \varepsilon_w &= \rho^2 \varepsilon_2^w(t, \varphi) + \rho^4 \varepsilon_4^w(t, \varphi) + \dots + \rho^n \varepsilon_n^w(t, \varphi) + o(\rho^{n+1}) = \\ &= \tilde{\varepsilon}_n^w + o(\rho^{n+1}). \end{aligned} \quad (8.3)$$

Замечание 8.2. Член ε_3^w отсутствует. Как и в предыдущем замечании, это не верно для случая общих изопериметрических задач в изопериметрических координатах с теми же следствиями для сфер, волновых фронтов и оптимального синтеза.

Положим также

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= (\rho \varepsilon_1^z(t, \varphi), \rho^2 \varepsilon_2^w(t, \varphi)), \\ \bar{\varepsilon}_n &= (\bar{\varepsilon}_n^z(t, \varphi), \bar{\varepsilon}_{n+1}^w(t, \varphi)), \\ \hat{\varepsilon}_n &= (\hat{\varepsilon}_n^z(t, \varphi), \hat{\varepsilon}_n^w(t, \varphi)).\end{aligned}$$

Замечание 8.3. Отображение ε_1 — это экспоненциальное отображение “гейзенберговой” правоинвариантной метрики, являющейся основной моделью. Все вычисления будут проводиться с использованием формул (8.2) и (8.3) как возмущения этого основного (и вполне невырожденного) экспоненциального отображения.

Отображение ε_1 легко вычисляется:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1(\rho, \varphi, t) &= (\rho \varepsilon_1^z(t, \varphi), \rho^2 \varepsilon_2^w(t, \varphi)), \\ \varepsilon_1^z(t, \varphi) &= (2 \cos(\varphi - t/2) \sin(t/2), 2 \sin(\varphi - t/2) \sin(t/2)), \\ \varepsilon_2^w(t, \varphi) &= (t - \sin(t))/2.\end{aligned}\quad (8.4)$$

Покажем, как вычислить остальные члены, необходимые для формул (8.2) и (8.3).

Положим $\sigma = (x, y, p, q)$. Тогда рассматриваемые геодезические допускают представление

$$\begin{aligned}\sigma(\rho, \varphi, t) &= \sigma^n(\rho, \varphi, t) + o(\rho^{n+1}), \\ \sigma^n(\rho, \varphi, t) &= \rho \sigma_1(\varphi, t) + \rho^3 \sigma_3(\varphi, t) + \dots + \rho^n \sigma_n(\varphi, t),\end{aligned}\quad (8.5)$$

$\sigma_1(\rho, \varphi, t)$ — это “гейзенбергов член”, две первые компоненты которого определены в (8.4). Пусть $\vec{B}^1$ обозначает компоненты $(x, y, \tilde{p}, \tilde{q})$ векторного поля $\vec{H}$, в котором $r = 1$, $\tilde{p} = p$, $\tilde{q} = q$. Пусть $\vec{B}^2 = \left(0, 0, p \frac{\partial H}{\partial w}, q \frac{\partial H}{\partial w}\right)$, где также $r = 1$, $\tilde{p} = p$, $\tilde{q} = q$; пусть $\vec{B} = \vec{B}^1 + \vec{B}^2$. Обозначим через $\vec{B}_n$ n -джет $\vec{B}$ по (x, y, p, q, w) относительно градуировки $\deg(x) = \deg(y) = \deg(p) = \deg(q) = 1$, $\deg(w) = 2$. Пусть $\vec{C}$ — w -компонента $\vec{H}$ (где $r = 1$, $\tilde{p} = p$, $\tilde{q} = q$), $\vec{C} = \frac{\partial H}{\partial r}(\sigma, w)|_{r=1}$, и пусть $\vec{C}_n$ — n -джет $\vec{C}$ в той же градуировке. Тогда можно вычислить

$(\sigma_n(\varphi, t), \varepsilon_n^w(\varphi, t))$ по индукции в силу того, что

$$\sigma^{n+1} = \rho \sigma_1(\varphi, t) + \int_0^t e^{A(t-s)} (\vec{B}_{n+1} - \vec{B}_1) \times \\ \times (\sigma^n(\rho, \varphi, s), \tilde{\varepsilon}_n^w(\rho, \varphi, t)) ds + O(\rho^{n+2}), \quad (8.6)$$

$$\tilde{\varepsilon}_{n+1}^w = \int_0^t \vec{C}_{n+1}(\sigma^n(\rho, \varphi, s), \tilde{\varepsilon}_n^w(\rho, \varphi, t)) ds + O(\rho^{n+2}), \quad (8.7)$$

где $A(x, y, p, q) = \vec{B}_1(x, y, p, q)$ — гейзенбергов линейный оператор с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 & 1 \\ -1/4 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & -1/4 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Эти вычисления достаточно длинные. Они проделаны вручную в статье [11], а в высшем порядке — с использованием формальной программы в статье [6]. Этот высший порядок необходим для следующей главы 4. Установим выражения для ε_3^z и ε_4^w в случае Дидоны. Остальные формулы очень длинные. В последующих формулах считаем, что $\alpha_0 = 1/6 k(p_0)$. Имеем:

$$\varepsilon_3^z = \alpha_0/2(6t \cos(\varphi - t) - 6 \sin(\varphi) + 2 \sin(\varphi - 2t)) + \\ + 3 \sin(\varphi - t) + \sin(\varphi + t), \\ 6t \sin(\varphi - t) + 6 \cos(\varphi) - 2 \cos(\varphi - 2t) - \\ - 3 \cos(\varphi - t) - \cos(\varphi + t), \quad (8.8) \\ \varepsilon_4^w = 3\alpha_0/8(-2t - 4t \cos(t) + 4 \sin(t) + \sin(2t)).$$

Аналогичные выражения получены в статьях [6], [11] для общего субриманова случая.

Заметим, кроме того, что в случае Дидоны вычисления проще, поскольку первые два шага (вычисление σ_n и ε_n^w) вполне не связаны. Аналогия состоит в необходимости вычисления джетов высшего порядка.

Нам понадобится также выражение для $\rho(t)$; полагая $\mu(t, \rho, \varphi) = \frac{\partial H}{\partial w}|_{r=1}(\sigma(t, \rho, \varphi), \varepsilon_w(t, \rho, \varphi))$, получаем

$$\rho(t) = \rho \exp \left(\int_0^t \mu(\tau, \rho, \varphi) d\tau \right), \quad (8.9)$$

что имеет вид

$$\rho(t) = \rho + O(\rho^5).$$

§ 9. Снова о волновых фронтах, сферах, сопряженных множествах и геометрических местах разрезов

Малые участки всякой геодезической оптимальны. Для такой геодезической $\varepsilon(c, \cdot)$, $c \in C_0$, определим сопряженное время (плюс) $s_{\text{conj}}(c)$ (соответственно, время разреза $s_{\text{cut}}(c)$) как первый момент времени, когда геодезическая перестает быть локально оптимальной, т.е. оптимальной среди всех кривых с теми же концами, лежащими в некоторой окрестности C^0 отрезка геодезической (соответственно, глобально оптимальной).

Можно проверить, что $s_{\text{conj}}(c)$ — это первый положительный момент времени, когда экспоненциальное отображение перестает быть отображением полного ранга.

Сопряженное множество CL — это объединение

$$\bigcup_{c \in C_0} \varepsilon(c, s_{\text{conj}}(c)),$$

т.е. множество (*первых*) *особых значений экспоненциального отображения ε* . Геометрическое место разрезов $\text{Cut } L$ — это объединение $\bigcup_{c \in C_0} \varepsilon(c, s_{\text{cut}}(c))$.

Сопряженное множество является также частью множества особых значений $\bar{\varepsilon}$ ($\bar{\varepsilon}$ определяется как ε , рассматриваемое как лагранжево отображение: $\bar{\varepsilon} : \bar{C}_0 \rightarrow X$). $\bar{C}_0$ — лагранжево подмногообразие в T^*E , а $\bar{\varepsilon}$ — лагранжево отображение (в смысле [1]), причем сопряженное множество — это часть ассоциированной “каустики”.

В то же время, $\varepsilon_s = \varepsilon(s, \cdot) : C_0 \rightarrow E$ — лежандрово отображение (в том же смысле) и его образ — волновой фронт W_s .

Поэтому все изучаемые объекты (сферы, сопряженные множества и геометрические места разрезов) на локальном уровне являются элементарными объектами теории лагранжевых и лежандровых особенностей в размерности 3. Конечно, на этом уровне мы не получим ничего нового.

Простое вычисление показывает, что сопряженное время для гейзенберговой аппроксимации $\bar{\varepsilon}_1(\rho, \varphi, t)$ равно $t_H = 2\pi$. Следовательно, все важные явления возникают при t , близком к 2π .

Проводимое далее исследование локально: во-первых, рассматриваем окрестность базовой точки q_0 в X , во-вторых, ограничиваемся рассмотрением только таких моментов времени, которые близки к 2π , т.е. *ограничиваемся рассмотрением окрестности первой сопряженной точки*. Причина этого в том, что, с точки зрения оптимальности, важен только этот случай.

Однако наши рассмотрения носят “глобальный” характер: мы рассматриваем экспоненциальное отображение как отображение, суженное на окрестность U^S первой сопряженной точки, и изучаем это сужение в целом.

Новое здесь будет в том, что элементарные особенности, возникающие при этом исследовании, состоят в *нетривиальных распределениях классических лагранжевых и лежандровых особенностей* (общего положения и, следовательно, устойчивых, поскольку размерность равна 3). Эти наборы элементарных устойчивых особенностей *не организованы произвольным образом*.

§ 10. Экспоненциальное отображение как надстройка

Как только будет вычислено представление для ε , можно (и это очень удобно для наших целей) выбрать координаты в области, отображаемой экспоненциальным отображением, так что оно приобретет форму надстройки. Для $w > 0$ и $\rho > 0$ положим

$$h = \sqrt{w/\pi}, \quad \sigma = (s - 2\pi h)/h \quad (10.1)$$

и воспользуемся координатами (x, y, h) в образе и координатами (φ, σ, h) в прообразе.

Можно проверить, что эта замена координат справедлива в некоторой окрестности множества $\{t = 2\pi\}$ в прообразе (используя выражение (8.4) для ε_2^w и следующее выражение для

$$s: s = \int_0^t \rho(\tau) d\tau, \text{ а также } \rho(t) = \rho + O(\rho^5).$$

Замечание 10.1. Случай $w < 0$, $\rho < 0$ совершенно аналогичен и приводит к вполне аналогичным результатам при $h = \sqrt{-w/\pi}$. Кроме того, в случае Дидоны результаты при $w < 0$ могут быть получены из результатов для $w > 0$ с помощью апостериорного обращения ориентации. Начиная с этого момента, рассматривается только случай $w > 0$.

Замечание 10.2. Рассматриваемая система координат для надстроенного отображения ε^S отнесена с длине дуги. Но это не так для системы координат (в образе и прообразе), которая использовалась в наших предыдущих работах; (x, y, h) и (φ, t, h) , не связаны с длиной дуги. По этой причине далее видно, что эта новая система координат существенно лучше с точки зрения вычислений геометрических мест разрезов. Кроме того, следующая лемма показывает, что она очень удобна для вычисления сопряженного множества.

10.1. Основные свойства сопряженного множества и геометрического места разрезов. Фиксируем некоторую геодезическую $\varepsilon_{(\varphi, h)}(\sigma)$. Тогда в этих надстроенных координатах сопряженное время и время разреза являются функциями $\sigma_{\text{conj}}(\varphi, h)$, $\sigma_{\text{cut}}(\varphi, h)$. Как будет видно далее, эти функции гладки, а сопряженное множество и геометрическое место разрезов

являются (в общем положении) 2-мерными поверхностями с особенностями. Если рассечь их плоскостями $\{h = ct\}$, то получим одномерные объекты. Сопряженное множество, рассеченное плоскостью $\{h = ct\}$, будет замкнутой кривой, гладкой всюду, кроме конечного числа точек возврата. (На самом деле сопряженное множество — это поверхность, гладкая всюду, кроме конечного числа линий возврата, трансверсальных плоскостям $\{h = ct\}$.)

Лемма 10.1. *В координатах (x, y, h) в образе и в координатах (φ, σ, h) в прообразе справедливы следующие свойства:*

- (i) *сопряженное время задается с помощью уравнения*

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \varphi} = 0;$$

 (ii) *сопряженное время $\sigma_{\text{conj}}(\varphi, h)$ при постоянном h является функцией от φ , имеющей экстремумы в точках возврата φ сопряженного множества.*

Простые геометрические соображения показывают также, что в рассматриваемом контактном случае $\text{Cut } L \setminus CL$ образовано точками, которые могут быть соединены с началом координат несколькими (но не одной) геодезическими за одно и то же время-длину дуги.

В качестве следствия получаем, что $\text{Cut } L \setminus CL$ является “оптимальной частью объединения самопересечений всех волновых фронтов”.

Дополнение $\text{Cut } L \setminus CL$ в $\text{Cut } L$ называется *границей геометрического места разрезов*. Имеет место следующая

Лемма 10.2. *Граница геометрического места разрезов совпадает с линиями возврата сопряженного множества.*

Доказательства лемм 10.1 и 10.2 приведены в препринте [8]. Оба они существенно используют теорему Лиувилля.

10.2. Достаточные джеты для экспоненциального отображения. Один из результатов данного исследования состоит в том, что все особенности экспоненциального отображения являются устойчивыми: для отображения как для (надстройки) обычного отображения 2-мерных многообразий (ε^S) , или для отображения как лежандрова отображения (ε_s) , или как для лагранжева отображения $(\tilde{\varepsilon})$.

Как надстройка обычного отображения, отображение ε допускает достаточную асимптотику по h (или по ρ), по крайней мере, при ограничении на некоторую окрестность первого сопряженного множества в прообразе. Следовательно, ε определяется некоторыми джетами метрики в полюсе q_0 в общем случае и некоторыми джетами римановой метрики в ρ_0 в случае Дидоны.

Кроме того, мы увидим, что появляются не все лагранжевы особенности. Это будет доказано в следующей главе данной статьи.

Глава 4

КАУСТИКИ

Здесь исследуется сопряженное множество. Именно, изучается отображение ε как надстройка обычного отображения. Заметим, что ε устойчиво в смысле Тома—Мазера (при ограничении на окрестность его множества особенностей в прообразе). Следовательно, все возникающие особенности сопряженного множества — это линии возврата и трансверсальные самопересечения. Поскольку ласточкины хвосты не возникают как лагранжевы особенности, то не появляются и особенности $D_{+,-}^4$. В статье авторов [11] показано, что на самом деле ласточкин хвост A^4 возникает при переходе от невырожденной ситуации точек (в которых главный инвариант не равен нулю) к вырожденной ситуации (точкам, в которых он обращается в нуль). Все эти результаты общего случая справедливы и для изопериметрического случая, но они иные в случае Дидоны: достаточные асимптотики имеют более высокий порядок и размер сопряженного множества другой.

Начиная с этого момента, невырожденным случаем будет называться случай базовых точек q_0 , в которых главный инвариант $Q_2 \neq 0$. В изопериметрическом случае это эквивалентно соотношению $(\nabla^2 \log \psi)_2 \neq 0$. В случае Дидоны Q_2 всегда нуль, и тогда говорят, что базовая точка p_0 невырождена, если $(\nabla^2 k)_2 \neq 0$.

Кроме того, в случае Дидоны, который мы и хотим разоб-
ратить детально, нам понадобятся дополнительные обозначения:

$$\begin{aligned}\beta^1(p_0) &= r_1 \cos(t_1)dx - r_1 \sin(t_1)dy = 1/12 \nabla k(p_0), \\ \beta_2^2 &= r_2 R_e(e^{it_2}(dx + idy)^2), \quad \beta_0^2 = r_2(dx^2 + dy^2), \\ \beta_1^3 &= (r_{31} \cos(t_{31})dx - r_{31} \sin(t_{31})dy) \odot (dx^2 + dy^2), \\ \beta_3^3 &= r_{32} R_e(e^{it_{32}}(dx + idy)^3), \quad \alpha_0 = 1/6k(p_0),\end{aligned}\tag{10.2}$$

где $\beta_j^i = (\beta^i)_j$. $\nabla_2^2 k = 0$ в том и только том случае, если $r_2 = 0$, $\nabla_3^3 k = 0$, если $r_{32} = 0$.

§ 11. Невырожденный случай

Используя лемму 10.1, мы видим, во-первых, что сопряженное время является гладкой функцией $\sigma_{\text{conj}}(\varphi, h)$, и получаем ее

представление

$$\sigma_{\text{conj}}(\varphi, h) = h^2 \pi / 48 (-72\alpha_0 + 197(\alpha_0)^2 h^2 - 320h^2 \tau_2 - 720h^2 r_2 \cos(2\varphi)) + o^5(h). \quad (11.1)$$

Заменяя выражение сопряженного в представлении экспоненциального отображения, получаем асимптотику сопряженного множества.

В общем случае, после нормализации имеем

$$\begin{aligned} x_{\text{conj}}(\varphi, h) &= |Q_2| h^3 \cos(\varphi)^3 + O^4(h), \\ y_{\text{conj}}(\varphi, h) &= |Q_2| h^3 \sin(\varphi)^3 + O^4(h), \end{aligned} \quad (11.2)$$

а в случае Дидоны получаем

$$\begin{aligned} z_{\text{conj}}(\varphi, h) &= z_{\text{conj}}^5(\varphi, h) + o^6(h) \\ &= h^4 \pi (3r_1 \sin(t_1) - 15h \cdot r_2 \cos(\varphi) - 5h \cdot r_2 \cos(3\varphi), \\ &\quad 3r_1 \cos(t_1) + 20h r_2 \sin(\varphi)^3) + o^6(h). \end{aligned} \quad (11.3)$$

Более того, в обоих случаях справедлива

Теорема 11.1. *Для достаточно малого $h > 0$ существует окрестность U множества особенностей в прообразе такая, что экспоненциальное отображение, суженное на U , лево-право эквивалентно (с помощью h -сохраняющего диффеоморфизма) его 3-джету h (соответственно, 5-джету в случае Дидоны), который определяется 3-джетом субримановой метрики в точке q_0 (соответственно, 2-джетом кривизны в точке p_0 в случае Дидоны).*

Сечения $CL(h)$ сопряженного множества CL плоскостями $\{h = ct\}$ являются замкнутыми кривыми с 4 точками возврата и не имеющими самопересечений.

§ 12. Вырожденный случай

Ситуация здесь становится более сложной. Именно, это происходит ввиду очень странной асимптотики π : симметрия на уровне 4-джета по h экспоненциального отображения (соответственно, на уровне 6-джета в случае Дидоны).

Снова используя лемму 10.1, получаем следующую асимптотику для сопряженного времени.

В случае Дидоны

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{conj}}(\varphi, h) &= -h^2 \pi / 48 (72\alpha_0 - 197(\alpha_0)^2 h^2 + 320h^2 \tau_2 + \\ &\quad + 2880h^3 r_{32} \sin(3\varphi)) + O^6(h). \end{aligned} \quad (12.1)$$

По поводу выражения в общем случае см. [11].

Заменяя представление экспоненциального отображения в надстроечной форме, получаем следующую асимптотику сопряженных множеств:

а) в общем случае

$$\begin{aligned} z_{\text{conj}}(\varphi, h) &= z_{\text{conj}}^4(\varphi, h) + O^5(h) = \\ &= |V_3| h^4 \{2 \cos(2\varphi) + \cos(4\varphi), \\ &\quad - 2 \sin(2\varphi) + \sin(4\varphi)\} + o^5(h). \end{aligned} \quad (12.2)$$

б) В случае Дидоны

$$\begin{aligned} z_{\text{conj}}(\varphi, h) &= z_{\text{conj}}^6(\varphi, h) + o^7(h) \\ &= -h^4 \pi / 2 (-6r_1 \sin(t_1) + h^2 (31\alpha_0 r_1 \sin(t_1) + \\ &\quad + 25r_{31} \sin(t_{31})) + 45h^2 r_{32} (2 \sin(2\varphi) + \sin(4\varphi)), \\ &\quad - 6r_1 \cos(t_1) - h^2 (25r_{31} \cos(t_{31}) - 31\alpha_0 r_1 \cos(t_1)) \\ &\quad + 45h^2 r_{32} (2 \cos(2\varphi) - \cos(4\varphi)) + o^7(h). \end{aligned} \quad (12.3)$$

Можно заметить, что на уровне этих аппроксимаций в обоих случаях имеем

$$z_{\text{conj}}(\varphi, h) = z_{\text{conj}}(\varphi + \pi, h). \quad (12.4)$$

Это и есть обещанная асимптотическая симметрия.

Следовательно, аппроксимации 6 порядка по h сечений $CL(h)$ являются двойными замкнутыми кривыми с 3 точками возврата (с 6 точками, если считать их вместе с кратностью).

В силу этой симметрии, получаем теорему, устанавливающую, что эти аппроксимации только локально достаточны вдоль множества особенностей в прообразе S .

В обоих случаях справедлива следующая

Теорема 12.1. Для достаточно малого $h > 0$ существует окрестность U_x каждой точки множества особенностей в прообразе S такая, что экспоненциальное отображение, суженное на U_x , лево-право эквивалентно (с помощью h -сохраняющих диффеоморфизмов) его 4-джету в h (соответственно, 6-джету в случае Дидоны), который определяется 4-джетом субримановой метрики в точке q_0 (соответственно, 3-джетом кривизны в точке p_0 в случае Дидоны).

Особенности, возникающие на локальном уровне на каустике, те же: это только линии возврата.

Для того чтобы двигаться дальше, в соответствии с общими установками теории особенностей, нужно проанализировать самопересечения сопряженного множества на уровне джетов высшего порядка: если сопряженное множество есть множество

общего положения, то надстроенное экспоненциальное отображение должно быть устойчиво (по Тому—Мазеру).

§ 13. Символы для сопряженного множества

По поводу всех подробностей (которые весьма сложны) см. [6] в общем случае и [9] в случае Дидоны.

Мы получим, что сопряженные множества $CL(h)$ общего положения (рассеченные $\{h = ct\}$) являются замкнутыми кривыми с 6 точками возврата, находящимися в общем положении.

Для анализа их самопересечений пришлось рассматривать взаимные полиномы $P(z)$ вида

$$P_{\mu, \nu}(z) = \mu z^4 + \nu z^3 + \bar{\nu} z + \bar{\mu}. \quad (13.1)$$

Теорема 13.1. Пусть заданы субриманова метрика $(X, \Delta, g)_{q_0}$ общего положения и вырожденная точка q_0 . Пусть выбраны нормальные координаты в точке q_0 для асимптотического состояния $\varphi = \frac{2k\pi}{3}$ точек возврата сопряженного множества относительно q_0 . Тогда существуют сюръективные отображения $M, M : S^4\Delta^* \times S^4\Delta^* \rightarrow C^3$, которые “инвариантам” γ_4^1, γ_4^0 субримановой метрики в базовой точке q_0 сопоставляют (ν^+, ν^-, μ) . Асимптотические положения на единичной окружности в Δ_{q_0} при $h \rightarrow 0$ самопересечений сопряженного множества $CL(h)$ распадаются на два класса: а) совпадающие с положением точек возврата и б) остальные. Точки класса б) являются корнями на единичной окружности полинома P_{μ, ν^+} , если $h > 0$ (соответственно, P_{μ, ν^-} , если $h < 0$).

Заметим, что γ_4^1 инвариантно относительно действия $SO(2)$, но ковариантно относительно замен координат.

Теорема 13.2 (случай Дидоны). Пусть задана риманова метрика (M, g) общего положения и пусть p_0 — вырожденная точка, $p_0 = \Pi(q_0)$. Предположим, что в точке q_0 выбраны координаты Дидоны для асимптотического положения $\varphi = \frac{2k\pi}{3}$ точек возврата сопряженного множества относительно q_0 . Тогда существует сюръективное отображение $N, N : S^4T^*M \rightarrow C^2$, сопоставляющее $\nabla^4 k(p_0)$ пару (ν, μ) . Асимптотические положения на единичной окружности в TM_{p_0} при $h \rightarrow 0$ самопересечений сопряженного множества $CL(h)$ распадаются на два класса: а) совпадающие с положением точек возврата и б) остальные точки. Точки класса б) — это корни на единичной окружности полинома $P_{\mu, \nu}$.

Утверждение, аналогичное теореме 13.2, справедливо в общем изопериметрическом случае. Здесь имеется одно различие между общим субримановым случаем и изопериметрическим случаем: ввиду симметрии, в изопериметрическом случае сопряженные множества останутся теми же при обращении ориентации. Это не верно в общем случае.

Определим полусопряженное множество CL^+ или CL^- как сужение CL на $\{w > 0\}$ (соответственно, на $\{w < 0\}$).

Определение 13.1. Выберем любую точку возврата и произвольную ориентацию. Двигаясь по кривой $CL(h)$, подсчитаем число самопересечений между i -й и $(i+1)$ -й точками возврата и разделим его на 2. Полученный результат — последовательность из 6 рациональных чисел — возьмем по модулю отражений и циклических перестановок. Назовем эту последовательность “символом” $CL^{+,-}$.

Напомним, что в общем положении вырожденные точки находятся на кривой C в X . Следующая (трудная) теорема доказана в [6]. Эта теорема утверждает, что *существует 3 типа точек на C* . Во всех этих точках экспоненциальное отображение ϵ^S , суженное на окрестность полусопряженного множества, в прообразе все еще устойчиво и конечно определено.

Теорема 13.3. 1) В точках общего положения на кривой C возможные символы “полусопряженного множества” общего положения таковы:

$$S_1 = (2, 1, 1, 2, 1, 0), \quad S_2 = (2, 1, 1, 1, 1, 1), \quad S_3 = (0, 1, 1, 1, 1, 1).$$

2) В изолированных точках первого типа на C имеем

$$S_1^* = S_1 = (2, 1, 1, 2, 1, 0), \quad S_2^* = S_2 = (2, 1, 1, 1, 1, 1).$$

Однако в этом случае экспоненциальное отображение определяется джетом метрики более высокого порядка (7-джетом), чем в точках общего положения на C (5-джетом).

3) В изолированных точках второго типа возможные символы таковы:

$$S_4 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 0, 0, 1\right), \quad S_5 = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 1, 1\right),$$

$$S_6 = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 1, 1, 0, 1\right), \quad S_7 = \left(2, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2, 0, 0\right).$$

Кроме того, полусопряженное множество восстанавливается по его символу (это совсем не очевидно). Следовательно, приведенный выше список символов дает полную классификацию полусопряженных множеств относительно ростков гомеоморфизмов R^3 , сохраняющих начало координат и гладких с их обратными вне начала координат.

Задача. Найти все возможные пары символов по модулю циклической перестановки и смены ориентации для метрики общего положения. Это должно дать полную классификацию с точностью до левой-правой эквивалентности экспоненциальных отображений, суженных на их сопряженные множества. Мгновенная оценка показывает, что их сотни, но, тем не менее, эта задача не должна быть трудной при использовании результатов этой статьи.

В общем изопериметрическом случае и в случае Дидоны ситуация проще. Из нашего исследования вытекает, что возможное полное сопряженное множество восстанавливается по списку символов полусопряженных множеств и имеет место следующее утверждение.

Теорема 13.4. *Для структур Дидоны (или римановых метрик) общего положения в изолированных вырожденных точках возможные символы сопряженных множеств таковы:*

$$S_1 = (2, 1, 1, 2, 1, 0), \quad S_2 = (2, 1, 1, 1, 1, 1), \quad S_3 = (0, 1, 1, 1, 1, 1).$$

Эти символы дают полную классификацию сопряженных множеств вырожденных структур Дидоны при действии (сохраняющих начало координат) гомеоморфизмов, гладких вместе с их обратными вне начала координат.

В этих точках 8-джет по h достаточен для экспоненциального отображения относительно левой-правой эквивалентности при сужении на окрестность сопряженного множества в прообразе. Он определяется 5-джетом кривизны в точке p_0 .

Имеется утверждение, аналогичное теореме 13.4 и в общем изопериметрическом случае. Здесь достаточный джет субримановой метрики — это 5-джет.

Глава 5

ВОЛНОВЫЕ ФРОНТЫ И СФЕРЫ

Используя леммы 10.1 и 10.2, а также тот факт, что геометрическое место разрезов является оптимальной частью самопересечения всех волновых фронтов, можно все резюмировать. Но это не легкая работа. Все подробности можно найти в препринте [8].

Для вычисления самопересечений волновых фронтов нужно решить следующее уравнение в надстроенных координатах:

$$\varepsilon^S(\sigma, \varphi', h) - \varepsilon^S(\sigma, \varphi, h) = 0. \quad (13.2)$$

Очевидно, что в уравнении (13.2) член $\sin\left(\frac{\varphi' - \varphi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\delta\varphi}{2}\right)$ сокращается.

Как только это будет проделано, получим время разреза $s_{\text{cut}}(\varphi, \delta\varphi)$ с помощью теоремы о неявной функции (которая показывает, что это время — гладкая функция).

Проиллюстрируем результаты только в случае Дидоны.

а) Невырожденный случай:

$$\begin{aligned} \sigma_c = & \frac{\pi}{48} h^2 (-72\alpha_0 + 197\alpha_0^2 h^2 - 320\tau_2 h^2 \\ & - 120h^2 r_2 (\cos(2\varphi) + 4\cos(d\varphi + 2\varphi)) \\ & - 120h^2 r_2 \cos(2(d\varphi + \varphi))) + o(h^5), \end{aligned} \quad (13.3)$$

б) Вырожденный случай:

$$\begin{aligned} \sigma_c = & \frac{\pi}{48} h^2 (-72\alpha_0 + 197\alpha_0^2 h^2 - 320\tau_2 h^2 \\ & - 360h^3 r_{32} (\sin(3(d\varphi + \varphi)) + 3\sin(d\varphi + 3\varphi) \\ & + 3\sin(2d\varphi + 3\varphi) + \sin(3\varphi)) + o(h^6). \end{aligned} \quad (13.4)$$

После этого можно заменить это выражение в одном из нетривиальных уравнений (13.2) (их два). Тогда получим:

а) Невырожденный случай:

$$h^4 (\sin(d\varphi/2))^2 \sin(d\varphi + 2\varphi) + o(h^5) = 0; \quad (13.5)$$

б) Вырожденный случай:

$$h^5 (\sin(d\varphi/2))^2 \cos(d\varphi/2) \cos(3/2(d\varphi + 2\varphi)) + o(h^6) = 0. \quad (13.6)$$

Решающую роль играет

Лемма 13.5. В формулах (13.5), (13.6) член $(\sin(d\varphi/2))^2$ сокращается.

Забудем на время о доказательствах в вырожденном случае: частично ввиду асимптотической симметрии, они в действительности куда более сложные. В невырожденном случае получаем

$$d\varphi_1 = -2\varphi + o(h), \quad d\varphi_2 = -2\varphi + \pi + o(h). \quad (13.7)$$

Только одно из этих решений оптимально (это $d\varphi_1$).

Заменяя его в (13.3), получаем окончательное выражение для времени разреза:

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{cut}} = & h^2 \pi (-72\alpha_0 + 197\alpha_0^2 h^2 - 160h^2 (3r_2 + 2\tau_2) - \\ & - 240h^2 r_2 \cos(2\varphi)) / 48 + o(h^5). \end{aligned} \quad (13.8)$$

Оно гладко, как это и утверждалось.

Подставляя время разреза в экспоненциальное отображение, получаем асимптотику геометрического места разрезов:

$$z_{\text{cut}} = h^4 \pi (3r_1 \sin(t_1) - 20hr_2 \cos(\varphi), 3r_1 \cos(t_1)) + o(h^6). \quad (13.9)$$

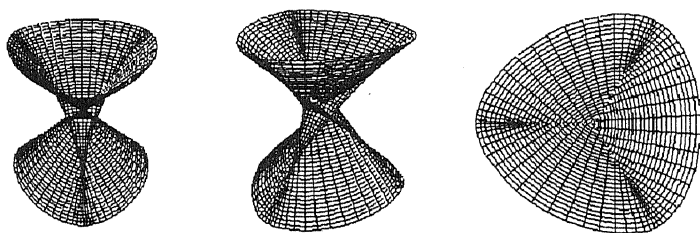


Рис. 2. Вырожденный случай, волновой фронт.

Собирая все вместе, получаем следующую теорему.

Теорема 13.6 (геометрическое место разрезом и сфера в невырожденном случае Дидоны). *Время разрезом и геометрическое место разрезом имеют гладкие асимптотики (13.8), (13.9). В частности, геометрическое место разрезом имеет размер h^5 (вместо h^3 для субримановых метрик общего положения и изопериметрических задач общего положения).*

Сечения геометрического места разрезом плоскостями $h = cst$ являются отрезками кривой, соединяющей две точки возврата из сопряженного множества.

Малые сферы гомеоморфны евклидовым сферам, но они не являются гладкими: множества, на которых они не дифференцируемы, состоят из двух отрезков кривых.

Особенности типичного малого волнового фронта распадаются на две части (верхнюю и нижнюю полусферы). Каждая из них состоит из замкнутой кривой возврата с четырьмя точками возврата. В каждой точке возврата возникают ласточкины хвосты. На каждой части имеются также два отрезка кривых (каждый из них соединяет две точки возврата), не граничные точки этих отрезков соответствуют трансверсальным самопересечениям волнового фронта. Один из этих отрезков — это (верхнее или нижнее) множество особых точек сферы.

Таким образом, в отличие от случая каустик, присутствуют все устойчивые элементы лежандровых особенностей.

Опишем теперь, что происходит в вырожденном случае.

Теорема 13.7 (геометрическое место разрезом и волновой фронт в вырожденном случае). *Геометрическое место разрезом имеет размер h^6 в случае Дидоны (вместо h^4 в случае субримановых метрик общего положения, или изопериметрических задач общего положения).*

Сечения геометрического места разрезом плоскостями $h = cst$ состоят из трех отрезков кривых с общей точкой.



Рис. 3. Вырожденный случай, 1-я (слева) и 2-я (справа) части самопересечения волнового фронта при аппроксимации 6-го порядка сопряженного множества.

- Остальные концевые точки этих трех отрезков совпадают с точками возврата сопряженного множества.

Малые сферы гомеоморфны евклидовым сферам, но они не гладкие. Множество особенностей сферы распадается на два куска (в обеих полусферах), каждый из которых состоит из трех отрезков кривых с общей концевой точкой.

Особенности волновых фронтов, близкие к соответствующим сферам, показаны на рис. 2. Они состоят из некоторых сложных самопересечений (описанных ниже) плюс замкнутая линия возврата с шестью точками возврата — концевыми точками ласточкиных хвостов.

Опишем теперь полностью эту особенность волнового фронта, близкую к особенности субримановой сферы.

Она изображена на рис. 2. На рис. 2 справа изображен вид снизу субримановой сферы.

Для анализа этой особенности проще рассмотреть только 6-джет в случае Дидоны (4-джет в общем случае) экспоненциального отображения. Здесь имеется асимптотическая симметрия, но все можно понять проще, и ясно, что случится после возмущения.

Более того, этот анализ, в соответствии с вычислениями, показывает, что на самом деле для определения субримановой сферы в общем положении достаточно этого джета.

Это уже не так для волнового фронта и для каустики, для которых существенно нарушение симметрии: как уже говорилось, каустика, рассеченная плоскостью $\{h = ct\}$, должна находиться в общем положении.

Каустика общего положения описывается одним из символов, указанных в главе 4.

Поскольку рассматривается недостаточный 4-джет, для которого имеется асимптотическая симметрия, то $CL(h)$ — двойная замкнутая кривая с 6-ю точками возврата.

Самопересечение волнового фронта (его часть, близкая к соответствующей сфере) имеет два куска (плотно прилегающие к верхней и нижней полусферам). Только один из них показан на

рис. 2.

Каждый из этих кусков распадается на две части, называемые частью 1 и частью 2.

Если разрезать объединение этих множеств самопересечений плоскостью $h = ct$, то получим то, что показано на рис. 3; там изображены эти две части при $h = ct$ вместе с их сопряженным множеством.

Первая часть содержит только те точки геометрического места разрезов, которые легко распознаются по сравнению с рис. 2, показывающим сферу снизу. Возникающая тройная точка совершенно устойчива: она соответствует трансверсальному пересечению трех поверхностей.

Все эти куски самопересечения являются *четвертными кривыми* (на рис. 3): они двойные вследствие того, что любое геометрическое место разрезов двойное и четвертное, ввиду асимптотической симметрии.

Наиболее неустойчивыми явлениями на уровне этой аппроксимации являются точки возврата части 2: они также устойчивые двойные точки, но они также и шестеричные: рассматривая рис. 2 (в центре), можно увидеть, как они разделяются. В этих точках имеется неустойчивое пересечение двойных линий волнового фронта. После возмущения они разделяются, давая две точки возврата.

На данном волновом фронте имеется замкнутая кривая возврата. Эта кривая не имеет самопересечений (на уровне аппроксимации она имеет 3 самопересечения) и 6 точек возврата. Каждая из них — базовая точка ласточкина хвоста на волновом фронте.

Глава 6

ДОПОЛНЕНИЯ

§ 14. Связность Румина

Подробное изложение можно найти в [11], [19]. Снова мы будем рассматривать только 3-мерный случай. Нам задана контактная субриманова метрика (X, Δ, g) , а $\underline{TX}$ и $\underline{\Delta}^*$ обозначают пучки сечений TX и Δ соответственно.

Теорема 14.1. *Существует единственная линейная связность такая, что если $\nabla : TM \times_M TM \rightarrow TM$ — ассоциированная ковариантная производная, то имеют место следующие утверждения:*

- (i) $\nabla : TM \times_M \underline{\Delta} \rightarrow \Delta$ (∇ имеет сужение на Δ),
- (ii) $\nabla g = 0, \nabla \omega = 0$,
- (iii) $\nabla_\nu \nu = 0$,
- (iv) *кручение ∇ равно $\nu \otimes d\omega$,*

(v) форма $II : \Delta \times_M \Delta \rightarrow R$, $II(X, Y) = \langle \nabla_X Y, Y \rangle_g$ симметрична.

Доказательство этой теоремы приведено в [11].

Все инварианты этой работы и, в частности, главный и второй инварианты могут быть вычислены в терминах этой канонической связности следующим образом.

В трехмерном случае существует естественная комплексная структура на Δ (которая уже неявно использовалась в статье), $j : \Delta \rightarrow \Delta$; определенная как $d\omega(X, Y) = \langle j(X), Y \rangle_g$. Если изменить ориентацию, то j заменяется на $-j$.

Сужение $\nabla II|_{\Delta}$ является сечением $\Delta^* \otimes S^2 \Delta^* = \oplus_{n=1,3} (\Delta^* \otimes S^2 \Delta^*)_n$. Пусть $III = \nabla II|_{\Delta}$. $(III)_3$ — компонента III в $(\Delta^* \otimes S^2 \Delta^*)_3$.

Теорема 14.2. При $u \in \Delta$ имеем

$$Q_2(u) = \frac{1}{4} II(u, j(u)), V_3(u) = \frac{1}{15} (III)_3(j(u), u, u).$$

Кроме того, гауссова кривизна ∇ равна $K = 6 \operatorname{trace}_g(Q) = 6 \operatorname{trace}_g(\gamma_2^0)$.

В терминах этой связности геодезические $\lambda(s)$ являются решениями следующих уравнений:

$$\nabla_{\dot{\lambda}} \dot{\lambda} = r j(\dot{\lambda}), \quad \dot{r} + II(\dot{\lambda}) = 0, \quad r(0) = r_0.$$

§ 15. Большое число каспов

Сосредоточим внимание на случае Дидоны. В общем положении число точек возврата сопряженного множества n_{cusp} равно удвоенному числу свободных концов точек особых отрезков на полусфере n_e и также равно числу n_{sw} ласточкиных хвостов, примыкающих к (полу)сфере на (полу)волновом фронте того же радиуса:

$$n_{\text{cusp}} = 2n_e = n_{sw}. \quad (15.1)$$

Кроме того, $\frac{1}{2} n_{\text{cusp}}$ равно первому целому числу $j > 1$ такому, что $(\nabla^j k(q_0))_j \neq 0$, где k — гауссова кривизна, q_0 — полюс. Представляется, что существует нечто большее, кроме этих фактов.

Открытый вопрос. Для любого ростка (не общего положения) в q_0 римановой метрики, которые не “плоские” в том смысле, что для некоторого целого $i > 1$, $\nabla_i^i k(q_0) \neq 0$. Пусть j — наименьшее целое > 1 такое, что $\nabla_j^j k(q_0) \neq 0$. Верно ли, что:

а) $n_{\text{cusp}} = 2j$?

б) справедлива формула (15.1)?

с) если j нечетно, то сопряженное множество асимптотически двойное?

Такая же задача имеет смысл и для общего случая (изопериметрической или неизопериметрической) субримановых метрик.

Возможно, что в соответствии со случаем общего положения этот член $\nabla_j^j k(q_0)$ доминирует над остальными членами. Вообще говоря, мы не можем это доказать. Тем не менее, можно доказать, что справедлива

Теорема 15.1. Пусть все тензоры $\nabla_k^l k(q_0)$, кроме $\nabla_j^j k(q_0)$, для некоторого j равны нулю. Тогда $n_{\text{cusp}} = 2j$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М. Особенности дифференцируемых отображений. — М.: Наука, 1984. — 335 с. (РЖМат, 1985, 4A584K)
2. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. — М.: Наука, 1976. — 392 с. (РЖМат, 1970, 1B529K)
3. Agrachev A. A. Methods of control theory in nonholonomic geometry // Proc. ICM-94, Zürich: Birkhauser, 1995
4. Agrachev A. A. Exponential mappings for contact sub-Riemannian structures // J. Dyn. and Contr. Syst. — 1996. — 2, № 3. — С. 321–358
5. Agrachev A. F., Bonnard B., Chyba M., Kupka I. Sub-Riemannian sphere in Martinet flat case (в печати)
6. Agrachev A. A., Chakir H., Gauthier J.-P. Sub-Riemannian metrics on R^3 // Proc. Canad. Math. Soc. — 1998. — 25. — С. 29–78
7. Agrachev F. A., Chakir H., Gauthier J. P., Kupka I. Generic singularities of sub-Riemannian metrics on R^3 // C. r. Acad. sci. Ser. 1. — 1996. — 322. — С. 377–384
8. Agrachev A. A., Gauthier J. P. On the Dido problem and plane isoperimetric problems // Prépublication de Laboratoire de Topologie de l'Univ. de Dijon, Mai, 1998
9. Baldé M. Remarks on some isoperimetric problems (в печати)
10. Carathéodory C. Calculus of variations and partial differential equations of the first order. — New York: Chelsea Publ. Company, 1989
11. Chakir H., Gauthier J. P., Kupka I. Small sub-Riemannian balls on R^3 // J. Dyn. Contr. Syst. — 1996. — 2, № 3. — С. 359–421
12. Chyba M. Exponential mapping, spheres and wave fronts in sub-Riemannian geometry: the Martinet case // PHD thesis, Univ. of Burgandy, 1997
13. Golubitskii M., Guillemin V. Stable mappings and their singularities. — New York e.a.: Springer. — 1973. — 211 с. (РЖМат, 1975, 5A579K)

14. *Gromov M.* Carnot—Carathéodory metrics seen from within // Preprint IHES M/94/6, 1994
15. *Kobayashi S., Nomizu K.* Foundations of differential geometry. Vol. 2// Intersc. Tracts Pure and Appl. Math., 15. — New York: John Wiley, 1969. — XVI. — 470 c. (ПЖМат, 1969, 12A761K)
16. *Kupka I.* Géométrie sous-Riemannienne // Sémin. Bourbaki, 48ème année, 1995–96. — № 817
17. *Mather J.* Stability of C^∞ -mappings. I–VI // I. Ann. Math. — 1968. — 87. — C. 89–104 (ПЖМат, 1968, 9A381); II. Infinitesimal stability implies stability // Ann. Math. — 1970. — 89, № 2. — C. 254–291 (ПЖМат, 1971, 2A490); III. Finitely determined mappings // Publ. math. Inst. hautes etudes scient. — 1968 (1969). — № 35. — C. 279–308 (ПЖМат, 1970, 9A406); IV // ibid. — 1970. — 37. — C. 223–248; V. Transfersability // Adv. Math. — 1970. — 4, № 3. — C. 301–336 (ПЖМат, 1971, 2A491); VI // Lect. Notes Math. — 1971. — 192. — C. 207–253
18. *Montgomery R.* Isotonic problems and some applications // Commun. Math. Phys. — 1990. — 128. — C. 565–592
19. *Rumin M.* Formes différentielles sur les variétés de contact // PHD Thésis, Univ. of Paris sud, 1992
20. *Steenrod N.* The topology of fiber bundles. — Princeton: Princeton Univ. Press, 1951
21. *Whitney H.* On singularities of mappings of Euclidean spaces. I. Mappings of the plane into the plane // Ann. Math. — 1956. — 62, № 3. — C. 374–410 (ПЖМат, 1957, 1276); II // Sympos. Int. Topol. Algebraica. Agosto, 1956. Mexico, 1958. — C. 285–301 (ПЖМат, 1961, 3A369)

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В. А. СТЕКЛОВА РАН,
ул. Губкина 8, Москва, ГСП-1, 117966, Россия

UNIVERSITÉ DE BOURGOGNE, LABORATOIRE DE TOPOLOGIE,
UMR CNRS 5584, BP400, 21011, DIJON CEDEX, FRANCE