

Общероссийский математический портал

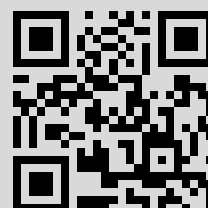
А. А. Аграчев, П. Дзедза, Ж. Стефани, Сильные минимумы в оптимальном управлении, *Тр. МИАН*, 1998, том 220, 8–26

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 95.129.140.250

17 ноября 2015 г., 14:29:47



УДК 519.6

Сильные минимумы в оптимальном управлении¹

©1998 г. А. А. Аграчев, П. Дзедза, Ж. Стефани

Поступило в июне 1997 г.

В работе установлены достаточные условия оптимальности, гарантирующие локальную оптимальность выделенной траектории в топологии C^0 без ограничений на управления. Эти условия получены путем усиления обычных необходимых условий: принципа максимума Понтрягина и неотрицательности второй вариации. Предполагаются коэрцитивность второй вариации и гладкость максимизированного гамильтониана.

Классический метод Каратеодори—Вейерштрасса, использующий теорию полей экстремалей, распространяется на класс задач оптимального управления, включающий задачи с подвижными концами и неголономными ограничениями.

1. ВВЕДЕНИЕ

В этой статье мы рассматриваем следующую задачу оптимального управления на заданном отрезке $I = [t_0, t_1]$:

$$\text{Минимизировать } I(\xi, v) = c(\xi(t_0), \xi(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} f_0(t, \xi(t), v(t)) dt$$

по всем ξ и $v \in L^\infty(I, \mathbb{R}^m)$, удовлетворяющим следующей управляемой системе и граничным условиям:

$$\dot{\xi}(t) = f(t, \xi(t), v(t)) \quad \text{п. в. } t \in I, \quad (1)$$

$$a(\xi(t_0), \xi(t_1)) = 0, \quad (2)$$

где $a : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^r$ — функция класса C^2 , а данные

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad f_0 : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$$

— равномерно квази- C^2 (см. определение 2.1).

Наша цель — установить достаточные условия оптимальности, гарантирующие, что выделенная траектория реализует локальный минимум в топологии C^0 без ограничений на управления. Мы получаем это, усиливая обычные необходимые условия: принцип максимума Понтрягина и неотрицательность второй вариации. К ним добавляются предположения о коэрцитивности второй вариации и гладкости максимизированного гамильтониана.

¹Работа выполнена при поддержке CNR, Италия (грант “Condizioni necessarie e sufficienti di ottimalità per un problema di Bolza in controllo ottimo”) и Российского фонда фундаментальных исследований (проект 95-01-0031).

В настоящей статье классическая теория полей экстремалей распространяется на класс задач оптимального управления. В этом контексте предположение о регулярности максимизированного гамильтониана является ключевым: оно позволяет построить поле экстремалей, начинающихся на лагранжевом подмногообразии, определенном условиями трансверсальности.

Тот же подход можно использовать для того, чтобы установить бескоординатные достаточные условия, использующие лишь геометрические свойства гамильтонова потока в случае, когда состояния и управляющие параметры принадлежат гладким многообразиям².

В одномерном вариационном исчислении проекция поля экстремалей на пространство состояний, заданная в “правой” окрестности I_δ точки t_0 , вырождается только в начальной точке и классический метод состоит в рассмотрении поля с началом в момент $t = t_0 - \epsilon$, так что проекция не вырождена для $t \in I_\delta$. В задачах оптимального управления из-за отсутствия управляемости может случиться, что проекция поля является особой для всех $t \in I_\delta$ и классический подход не работает. Для того чтобы преодолеть эту трудность, вводится точный штраф и рассматривается задача, эквивалентная исходной, но со свободным левым концом. В этом случае начальное лагранжево многообразие горизонтально, что позволяет избежать вырождения проекции на I_δ . Коэрцитивность второй вариации гарантирует невырожденность на всем интервале I . Используя симплектические свойства поля экстремалей, вариационную задачу удастся свести к конечномерной для присоединенной функции. Условиями экстремума для этой функции являются условия трансверсальности (первый порядок) и коэрцитивность второй вариации (второй порядок).

В работе [7] показано, что коэрцитивность второй вариации эквивалентна отсутствию полусопряженных точек на временном интервале I , а также существованию решения ассоциированного дифференциального уравнения Риккати с подходящими краевыми условиями. В настоящей статье мы используем этот результат и даем геометрическую интерпретацию решения уравнения Риккати, объединяя классический геометрический подход (см. [3]) и аналитический подход, использующий неравенство Гамильтона–Якоби [8].

Гладкость максимизированного гамильтониана получается следующим образом: благодаря коэрцитивности второй вариации мы знаем, что выполнено усиленное условие Лежандра (см. (19)), следовательно, используя условие экстремума первого порядка (см. (7)) и теорему о неявной функции, получаем гладкий *локально* максимизированный гамильтониан. Условие 2.2 гарантирует, что он совпадает с *глобально* максимизированным гамильтонианом. Заметим, что, используя *локально* максимизированный гамильтониан, можно дать геометрическое доказательство достаточного условия слабого локального минимума.

Главная теорема (теорема 2.3) соответствует классическому результату одномерного вариационного исчисления, который был установлен только для случая, когда одна из концевых точек фиксирована. Здесь мы включаем также краевые условия общего типа, в том числе и смешанные.

Другое важное усовершенствование относится к условию управляемости линеаризованной системы, которое обычно предполагалось выполненным. Мы полностью отбрасываем это условие, получая таким образом более широко применимый результат; более того, мы включаем и так называемый аномальный случай. В этом случае мы получаем, что траектория, удовлетворяющая достаточным условиям, изолирована среди соседних допустимых траекторий и, следовательно, локально оптимальна.

План статьи следующий. В разд. 2 сформулирован главный результат (теорема 2.3) и

²Готовится к печати: Agrachev A., Stefani G., Zezza P. Coordinate free sufficient conditions for strong minima.

приведены примеры, показывающие, что принципа максимума Понтрягина и коэрцитивности второй вариации недостаточно для сильного локального минимума. В разд. 3 установлены свойства полей экстремалей. В разд. 4 доказана главная теорема. В приложении для удобства читателей приведены доказательства некоторых технических результатов, использованных в статье.

2. ФОРМУЛИРОВКА РЕЗУЛЬТАТОВ

Мы говорим, что пара (ξ, ν) допустима, если она удовлетворяет управляемой системе (1) и ограничениям (2). Наша цель — сформулировать условия, при которых выделенная допустимая пара $(\hat{\xi}, \hat{\nu})$ реализует строгий локальный минимум, т.е. для некоторого $\epsilon > 0$ $(\hat{\xi}, \hat{\nu})$ реализует минимум функционала по отношению ко всем таким допустимым парам (ξ, ν) , что

$$\|\xi - \hat{\xi}\|_{C^0} = \max_{t \in I} \|\xi(t) - \hat{\xi}(t)\| \leq \epsilon.$$

Мы предполагаем, что $(\hat{\xi}(t_0), \hat{\xi}(t_1))$ является регулярной точкой вектор-функции a . Начнем с напоминания определения квази- C^p -функций, используемого для описания регулярности данных.

Определение 2.1. Пусть X, Y — конечномерные векторные пространства. Функция $G : \Omega \subseteq I \times X \rightarrow Y$ есть квази- C^p , если для любого $t \in I$ отображение $G_t : X \rightarrow Y$ принадлежит классу C^p , а функция $(t, \nu) \mapsto D^k G_t(\nu)$ принадлежит $L^\infty(I \times X^k, Y)$ для $k = 0, \dots, p$. Функция G есть равномерно квази- C^p , если $(t, \nu) \mapsto D^p G_t(\nu)$ непрерывно в ν равномерно по t . Если функция есть квази- C^p , то она равномерно квази- C^{p-1} .

Мы сопоставляем задаче оптимизации гамильтониан h , зависящий от параметра $\lambda_0 \in \{0, 1\}$. Положим $T^*\mathbb{R}^n = (\mathbb{R}^n)^* \times \mathbb{R}^n$, тогда $\ell \in T^*\mathbb{R}^n$ есть пара $\ell = (p, q)$, где p — вектор-строка, а q — столбец, так что $p q \in \mathbb{R}$. Положим

$$\begin{aligned} h &: I \times T^*\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}, \\ h &: (t, \ell, u) \mapsto p f(t, q, u) - \lambda_0 f_0(t, q, u). \end{aligned}$$

Мы будем предполагать, что выделенная пара $(\hat{\xi}, \hat{\nu})$ удовлетворяет принципу максимума Понтрягина, который является необходимым условием оптимальности и утверждает существование таких $\lambda_0 \in \{0, 1\}$, $\sigma \in (\mathbb{R}^r)^*$ и решения $\hat{\mu} : I \rightarrow (\mathbb{R}^n)^*$ уравнения

$$\dot{\mu}(t) = -\partial_q h(t, \mu(t), \hat{\xi}(t), \hat{\nu}(t)), \quad (3)$$

$$(\mu(t_0), -\mu(t_1)) = \lambda_0 dc(\hat{\xi}(t_0), \hat{\xi}(t_1)) + \sigma da(\hat{\xi}(t_0), \hat{\xi}(t_1)), \quad (4)$$

что

$$\lambda_0 + \|\hat{\mu}\|_{C^0} > 0, \quad (5)$$

$$h(t, \hat{\mu}(t), \hat{\xi}(t), \hat{\nu}(t)) = \max_{u \in \mathbb{R}^m} h(t, \hat{\mu}(t), \hat{\xi}(t), u). \quad (6)$$

Пара $(\hat{\xi}, \hat{\nu})$ будет называться нормальной, если $\lambda_0 = 1$, а в противном случае — аномальной. Таким образом, в любом случае гамильтониан h определен однозначно. Из (1) и (3) следует, что $\hat{\lambda} = (\hat{\mu}, \hat{\xi})$ есть решение гамильтоновой системы

$$\dot{\lambda}(t) = J \partial_t h(t, \lambda(t), \hat{\nu}(t)),$$

где $J(p, q) = (-q^T, p^T)$; более того, поскольку нет ограничений на управляющие параметры, то из (6) следует, что

$$\partial_u h(t, \hat{\lambda}(t), \hat{v}(t)) = 0. \quad (7)$$

В дальнейшем мы будем называть *понтрягинской экстремалью* любое такое решение (ξ, v) системы (1), вдоль которого выполняются соотношения (3) и (6) при подходящем $\hat{\mu}$.

Как обычно, мы обозначаем крышечкой ($\hat{\cdot}$) значения вдоль выделенных объектов и T — знак транспонирования. Когда позволяет контекст, мы будем использовать один и тот же символ для билинейной формы Γ и для ассоциированной с ней квадратичной формы, так что мы будем писать $\Gamma(x)$ вместо $\Gamma(x, x)$.

Прежде чем давать условия сильной локальной минимальности, приведем условия, обеспечивающие слабую локальную минимальность. Нашу задачу можно рассматривать как абстрактную оптимизационную задачу в банаховом пространстве $\mathbb{R}^n \times L^\infty(I, \mathbb{R}^m)$ пар (*начальное состояние, управление*) с ограничениями (1), (2). Необходимое условие первого порядка (правило множителей Лагранжа) состоит в существовании $\lambda_0, \sigma, \hat{\mu}$, удовлетворяющих (3)–(5), (7). Для формулировки достаточного условия второго порядка нужна вторая вариация задачи, описываемая следующей квадратичной формой (с ограничениями):

$$I''(\delta q, \delta v) = \Gamma(\delta \xi(t_0), \delta \xi(t_1)) - \int_{t_0}^{t_1} \partial_{(q,u)^2}^2 \hat{h}(t)(\delta \xi(t), \delta v(t)) dt$$

для всех $(\delta q, \delta v) \in \mathbb{R}^n \times L^2(I, \mathbb{R}^m)$, удовлетворяющих

$$\frac{d}{dt} \delta \xi(t) = \partial_{(q,u)} \hat{f}(t)(\delta \xi(t), \delta v(t)), \quad \delta \xi(t_0) = \delta q, \quad (8)$$

$$(\delta \xi(t_0), \delta \xi(t_1)) \in \ker Da(\hat{\xi}(t_0), \hat{\xi}(t_1)), \quad (9)$$

где Γ есть следующая квадратичная форма:

$$\Gamma = \sigma D^2 a(\hat{\xi}(t_0), \hat{\xi}(t_1)) + \lambda_0 D^2 c(\hat{\xi}(t_0), \hat{\xi}(t_1)).$$

Достаточное условие второго порядка гласит, что если $(\hat{\xi}, \hat{v})$ удовлетворяет необходимому условию первого порядка и

$$I''(\delta q, \delta v) \geq K(\|\delta q\|^2 + \|\delta v\|^2)$$

на подпространстве, определенном условиями (8), (9) (т.е. I'' коэрцитивна на этом подпространстве), то $(\hat{\xi}, \hat{v})$ реализует локальный минимум в $\mathbb{R}^n \times L^\infty(I, \mathbb{R}^m)$ и, следовательно, слабый минимум (см. [6]).

Первый шаг в усилении необходимых условий состоит в требовании того, чтобы выделенная пара удовлетворяла также условию максимума (6). К сожалению, как показывают примеры 2 и 3, этого недостаточно; требуется существование *достаточно гладкого* максимизированного гамильтониана.

Для того чтобы точно описать исходные предположения, введем некоторые дополнительные обозначения. Для любого нормированного пространства X символом $B_\epsilon(x)$ обозначается

шар радиуса ϵ с центром в x , а для $\xi \in L^\infty(I, X)$ мы рассматриваем трубку вокруг ξ радиуса ϵ , определяемую следующим образом:

$$\mathcal{U}_\epsilon(\xi) = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times X : \|x - \xi(t)\| < \epsilon\}.$$

Сформулируем теперь главное условие на максимизированный гамильтониан.

Условие 2.2. Для любого $\epsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех $(t, \ell) \in \mathcal{U}_\delta(\hat{\lambda})$

$$\max_{u \in B_\epsilon(\hat{v}(t))} h(t, \ell, u) = \max_{u \in \mathbb{R}^m} h(t, \ell, u).$$

Из приведенного условия следует существование такого $\bar{\delta} > 0$, что

$$(t, \ell) \mapsto \max_{u \in \mathbb{R}^m} h(t, \ell, u)$$

определяет отображение

$$H : \mathcal{U}_{\bar{\delta}}(\hat{\lambda}) \subset I \times T^*\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R};$$

иными словами, вблизи $\hat{\lambda}$ максимизированный гамильтониан конечен.

Из условия 2.2 вместе с коэрцитивностью второй вариации следует, что максимизированный гамильтониан H есть квази- C^2 -функция (см. лемму 4.1). В этом случае функции $\lambda = (\mu, \xi)$, отвечающие понтрягинским экстремалам, являются решениями гамильтоновой системы, ассоциированной с H ,

$$\dot{\lambda}(t) = \vec{H}(t, \lambda(t)), \quad (10)$$

где $\vec{H}(t, \ell) = J \partial_\ell H(t, \ell)$. Поскольку обратное также верно, мы будем называть экстремалами решения уравнения (10). Теперь мы можем сформулировать главный результат.

Теорема 2.3. Предположим, что $(\hat{\xi}, \hat{v})$ удовлетворяет принципу максимума Понтрягина. Если выполнено условие 2.2 и вторая вариация коэрцитивна, то $(\hat{\xi}, \hat{v})$ реализует сильный локальный минимум при $\lambda_0 = 1$, а при $\lambda_0 = 0$ траектория $\hat{\xi}$ изолирована в топологии C^0 среди всех допустимых траекторий (удовлетворяющих краевым условиям).

Поскольку в аномальном случае функционал не играет никакой роли, эту теорему можно использовать для изучения вопросов существования допустимых траекторий в пространстве состояний, изолированных в топологии C^0 (см. примеры 4 и 5).

В имеющейся литературе по достаточным условиям сильного минимума обычно предполагается существование управления обратной связи u , непрерывного по x равномерно по t , при котором гамильтониан h достигает максимума (см., например, [8]). Это предположение эквивалентно условию 2.2 (см. предложение A.1). Мы предпочитаем это последнее условие из-за его очевидного геометрического смысла. Условие 2.2 выполняется для обширного класса гамильтонианов.

Следствие 2.4. Предположим, что $(\hat{\xi}, \hat{v})$ удовлетворяет принципу максимума Понтрягина. Если h вогнут по u , а вторая вариация коэрцитивна, то $(\hat{\xi}, \hat{v})$ реализует сильный локальный минимум при $\lambda_0 = 1$, а при $\lambda_0 = 0$ траектория $\hat{\xi}$ изолирована в топологии C^0 среди всех допустимых траекторий (удовлетворяющих краевым условиям).

Пример 1. Предыдущее следствие 2.4 приложимо, например, к аффинным по управлению системам с квадратичным функционалом, т.е. к задачам вида

$$\begin{aligned}\dot{\xi}(t) &= f_0(t, \xi(t)) + \sum_{i=1}^m v_i(t) f_i(t, \xi(t)), \\ \mathcal{I}(\xi, v) &= c(\xi(t_0), \xi(t_1)) + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \int_{t_0}^{t_1} v_i(t) v_j(t) g_{ij}(t, \xi(t)) dt.\end{aligned}$$

Проиллюстрируем на некоторых примерах роль условия, наложенного на гамильтониан. Первые два примера относятся к задаче вариационного исчисления с фиксированными концами, причем нулевая траектория удовлетворяет принципу максимума Понтрягина и обладает коэрцитивной второй вариацией. Следовательно, нулевая траектория реализует слабый минимум, однако гамильтониан не удовлетворяет нашим условиям и эта траектория не реализует сильный минимум.

Пример 2. Рассмотрим следующую задачу:

$$\text{Минимизировать } \mathcal{I}(\xi, v) = \int_0^1 v^2(s) \left(\frac{1}{v^4(s) + 1} + \xi(s) \right) ds$$

среди всех таких (ξ, v) , что

$$\dot{\xi}(t) = v(t), \quad \xi(0) = \xi(1) = 0.$$

Легко проверить, что нулевая пара $\hat{\lambda} = 0$ удовлетворяет условиям трансверсальности и максимальной. Вторая вариация имеет вид

$$\mathcal{I}''(\delta v) = \int_0^1 (\delta v(s))^2 ds,$$

где

$$\frac{d \delta \xi(t)}{dt} = \delta v(t), \quad \delta \xi(0) = \delta \xi(1) = 0,$$

и является коэрцитивной. Нуль не реализует ни сильный минимум, ни локальный минимум в топологии L^p , если $1 \leq p < \infty$. Действительно, достаточно рассмотреть управления

$$v_n(t) = \begin{cases} -\sqrt{n}, & \text{если } 0 \leq t \leq \frac{1}{2n}, \\ +\sqrt{n}, & \text{если } \frac{1}{2n} < t \leq \frac{1}{n}, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Соответствующая траектория в пространстве состояний ξ_n допустима, а значение функционала

$$\mathcal{I}(v_n) = \frac{1}{4} \frac{-1 - n^2 + 4\sqrt{n}}{\sqrt{n}(1 + n^2)},$$

отрицательно для больших n . Поскольку $\|\xi_n\| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$, мы получаем сходящуюся к нулю в топологии C^0 последовательность траекторий с отрицательным значением функционала. Проверим, что ассоциированный гамильтониан

$$h(p, q, u) = p u - \frac{u^2}{1 + u^4} + u^2 q$$

не удовлетворяет нашим условиям. При “малых” p, q максимум конечен, только если $q \leq 0$, и, таким образом, максимизированный гамильтониан не определен в окрестности выделенной нулевой траектории.

Этот первый пример показывает, что недостаточно усилить необходимые условия, предположив, что вторая вариация коэрцитивна и максимум гамильтониана h в (6) строгий.

Пример 3. Рассмотрим следующую задачу:

$$\text{Минимизировать } \mathcal{I}(\xi, v) = \int_0^1 v^2(s)(v^4(s) - 2v^2(s) + 1 + \xi(s)) ds$$

среди всех таких (ξ, v) , что

$$\dot{\xi}(t) = v(t), \quad \xi(0) = \xi(1) = 0.$$

Легко проверить, что нулевая пара $\hat{\lambda} = 0$ удовлетворяет условиям трансверсальности и максимума. Вторая вариация имеет вид

$$\mathcal{I}''(\delta v) = \int_0^1 (\delta v(s))^2 ds,$$

где

$$\frac{d \delta \xi(t)}{dt} = \delta v(t), \quad \delta \xi(0) = \delta \xi(1) = 0,$$

и является коэрцитивной. Нуль не реализует ни сильный минимум, ни локальный минимум в топологии L^p , если $1 \leq p < \infty$. Действительно, достаточно рассмотреть управления

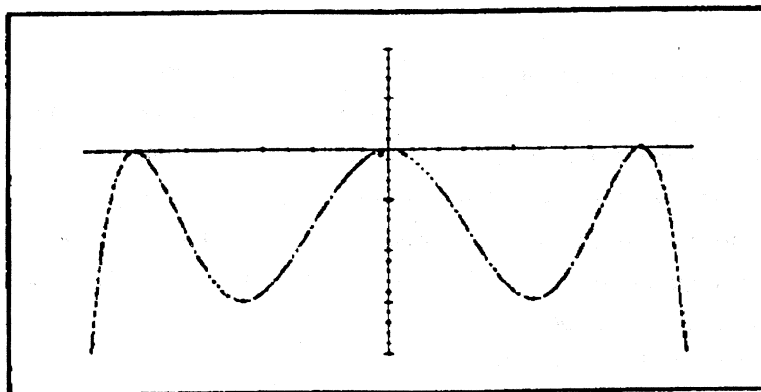
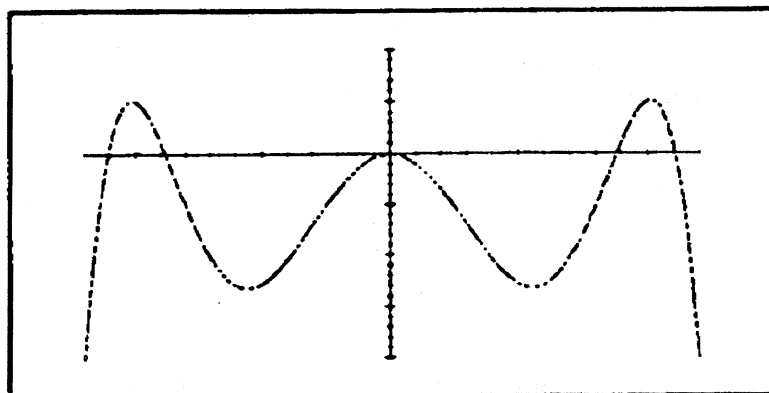
$$v_\varepsilon(t) = \begin{cases} -1, & \text{если } 0 \leq t \leq \varepsilon, \\ 1, & \text{если } \varepsilon < t \leq 2\varepsilon, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Соответствующая траектория в пространстве состояний ξ_ε допустима, причем $\mathcal{I}(v_\varepsilon) = -\varepsilon^2$. Проверим, что ассоциированный гамильтониан

$$h(p, q, u) = p u - u^6 + 2 u^4 - u^2 - u^2 q$$

не удовлетворяет нашему условию. Рассмотрим его ограничение на подпространство $p = 0$. Максимизирующая обратная связь имеет вид

$$v(q) = \begin{cases} \frac{1}{3} \sqrt{6 + 3 \sqrt{1 - 3q}}, & \text{если } q < 0, \\ 0, & \text{если } q \geq 0, \end{cases}$$

Рис. 1. График $h(0, 0, u)$ Рис. 2. График $h(0, -1/20, u)$

и разрывна при $q = 0$ (см. рис. 1 и 2). Максимизированный гамильтониан имеет вид

$$H(0, q) = \begin{cases} -\frac{2}{27} (1 + 9q - (1 - 3q)^{3/2}), & \text{если } q < 0 \\ 0, & \text{если } q \geq 0; \end{cases}$$

он непрерывен, но не дифференцируем при $q = 0$.

Первые три примера относятся к нормальному случаю. Теперь мы покажем, как можно построить широкий класс примеров аномальных ситуаций с различным поведением. Как отмечалось выше, в этом случае задача состоит в изучении существования изолированных допустимых траекторий. По этой причине мы просто анализируем поведение решений управляемой системы, не обращая внимания на функционал, который может быть любым.

Пример 4. Рассмотрим управляемую систему

$$\dot{\xi}_1(t) = v(t),$$

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_2(t) &= \xi_1^k(t) + v^2(t)(v^2(t) - 1)^2, \\ \xi(0) &= \xi(T) = 0,\end{aligned}$$

где $k \geq 2$.

Нулевая траектория является понтрягинской экстремалью с присоединенным ковектором $(0, -1)$. Простые вычисления показывают коэрцитивность второй вариации и, следовательно, $W_{1,\infty}$ -изолированность выделенной траектории. Максимизированный гамильтониан негладкий, как и в предыдущем примере, но мы получаем разную картину при разных значениях k . Ясно, что для четного k траектория изолирована в топологии C^0 , в то время как для нечетного k она не изолирована: взяв управления со значениями в $\{-1, 1\}$, мы получаем систему, локально управляемую для любого T .

Интересно отметить, что система

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_1(t) &= v(t), \\ \dot{\xi}_2(t) &= \xi_1^3(t) + v^2(t), \\ \xi(0) &= \xi(T) = 0,\end{aligned}$$

удовлетворяет условиям следствия 2.4 и поэтому нулевая траектория C^0 -изолирована, хотя управляемая система совпадает с предыдущей при $u = 0$ вплоть до членов второго порядка.

В последнем примере мы показываем, как построить изолированную траекторию, отталкиваясь от нормальной задачи со строгим сильным минимумом.

Пример 5. Рассмотрим задачу управления

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_1(t) &= v(t), \\ \dot{\xi}_2(t) &= -\xi_1^2(t) + v^2(t), \\ \xi(0) &= \xi(T) = 0.\end{aligned}$$

При $T < \pi$ нулевая траектория изолирована. Этот факт можно получить прямо из нашей теоремы или рассматривая задачу минимизации $\xi_2(T)$ при ограничениях $\xi_1(0) = \xi_1(T) = \xi_2(0) = 0$. Это стандартный линейно квадратичный пример с первой сопряженной точкой $T = \pi$.

3. СИМПЛЕКТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И ОПТИМАЛЬНОСТЬ

Общее введение в симплектическую геометрию и ее приложение к вариационным задачам см. в [2], а приложения к оптимальному управлению — в [1].

На протяжении этого раздела мы предполагаем, что H есть квази- C^2 . Рассмотрим поток гамильтоновой системы (10) как квази- C^1 -вектор-функцию

$$\mathcal{H} : I \times T^*\mathbb{R}^n \rightarrow I \times T^*\mathbb{R}^n, \quad \mathcal{H} : (t, \ell) \mapsto (t, \lambda(t, \ell)),$$

где $\lambda = (\mu, \xi)$ — решение системы (10) с начальными условиями $\lambda(t_0) = \ell$. Из компактности временного интервала следует существование такой окрестности $\mathcal{O}$ точки $\hat{\lambda}(t_0)$, что $\mathcal{H}$ определен на $I \times \mathcal{O}$.

Пусть $p dq = \sum_{i=1}^n p_i dq^i$ — каноническая форма в $T^*\mathbb{R}^n$, $s = p dq - H dt$ — форма Картана на $I \times T^*\mathbb{R}^n$, а символ π обозначает проекцию на $\mathbb{R}^n$ как $T^*\mathbb{R}^n$, так и $I \times T^*\mathbb{R}^n$. Поскольку гамильтониан H получен путем максимизации, имеется следующая связь формы Картана и задачи оптимизации. Если (ξ, v) — решение управляемой системы (1), а λ — произвольное липшицево поднятие кривой ξ в $T^*\mathbb{R}^n$ (т.е. $\pi\lambda = \xi$), то

$$\lambda_0 \int_{t_0}^{t_1} f_0(t, \xi(t), v(t)) dt \geq \int_{(\text{Id}, \lambda)} s. \quad (11)$$

Более того, если (ξ, v) — понтрягинская экстремаль и $\lambda = (\mu, \xi)$ — соответствующее поднятие, то неравенство обращается в равенство.

Форма Картана определяет функцию ψ , играющую в дальнейшем ключевую роль:

$$\psi : I \times \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \psi : (t, \ell) \mapsto \int_{\mathcal{H}_t} s. \quad (12)$$

Эта функция совпадает с интегральным функционалом на соответствующей понтрягинской экстремали, если $\lambda_0 = 1$, и равна нулю, если $\lambda_0 = 0$.

Пусть L_0 — C^1 -гладкое связное точное лагранжево подмногообразие в $T^*\mathbb{R}^n$, содержащееся в $\mathcal{O}$, тогда это подмногообразие n -мерно и существует такая вещественная функция φ , что

$$p dq|_{L_0} = d\varphi.$$

Лемма 3.1. *Дифференциальная форма*

$$\omega = \mathcal{H}^* s$$

точна на $I \times L_0$, и

$$\omega = d(\varphi + \psi). \quad (13)$$

Доказательство. Пусть $\gamma = (\tau, \lambda) : [0, 1] \rightarrow I \times L_0$ — липшицева кривая. Мы хотим доказать, что $\int_\gamma \omega$ зависит только от концов

$$\gamma(0) = (\theta_0, \ell_0) \quad \text{и} \quad \gamma(1) = (\theta_1, \ell_1).$$

Рассмотрим симплекс $\Delta = \{(\theta, \theta') : 0 \leq \theta \leq \theta' \leq 1\}$ и отображение $\phi : (\theta, \theta') \mapsto \mathcal{H}(\tau(\theta), \lambda(\theta'))$. Теорема Стокса справедлива и в липшицевом случае (см. предложение А.3), следовательно,

$$\begin{aligned} \int_\gamma \mathcal{H}^* p dq &= \int_{\phi|_{\theta=\theta'}} p dq = - \int_\phi dp \wedge dq + \int_{\phi|_{\theta'=1}} p dq + \int_{\phi|_{\theta=0}} p dq = \\ &= - \int_\phi dp \wedge dq + \int_{\mathcal{H}_{\ell_1} \circ \tau} p dq + \int_\lambda p dq. \end{aligned}$$

Рассмотрим отдельно первое слагаемое:

$$\begin{aligned} \int_{\phi} dp \wedge dq &= \int_0^1 \left(\int_{\theta}^1 dp \wedge dq \left(\frac{\partial \phi}{\partial \theta}, \frac{\partial \phi}{\partial \theta'} \right) d\theta' \right) d\theta = \\ &= \int_0^1 \dot{\tau}(\theta) \left(\int_{\theta}^1 dp \wedge dq \left(\vec{H}, \frac{\partial \phi}{\partial \theta'} \right) d\theta' \right) d\theta = \int_0^1 \dot{\tau}(\theta) \left(\int_{\theta}^1 \left\langle \partial_t H, \frac{\partial \phi}{\partial \theta'} \right\rangle d\theta' \right) d\theta = \\ &= \int_0^1 \dot{\tau}(\theta) \left(H(\mathcal{H}(\tau(\theta), \ell_1)) - H(\mathcal{H}(\tau(\theta), \lambda(\theta))) \right) d\theta = \int_{\theta_0}^{\theta_1} H(\mathcal{H}(t, \ell_1)) dt - \int_{\gamma} H(\mathcal{H}(t, \ell)) dt. \end{aligned}$$

Подставляя полученное выражение для $\int_{\phi} dp \wedge dq$, получаем

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\mathcal{H}_{\ell_1} \circ \tau} s + \int_{\lambda} p dq = \psi(\theta_1, \ell_1) - \psi(\theta_0, \ell_0) + \varphi(\ell_1) - \varphi(\ell_0).$$

Таким образом, ω — точная форма. $\square$

Следствие 3.2. $L_t := \mathcal{H}_t(L_0)$ — точное лагранжево подмногообразие для всех $t \in I$, и

$$p dq|_{L_t} = d\varphi_t, \quad (14)$$

где

$$\varphi_t(\ell) := \varphi(\mathcal{H}^{-1}(t, \ell)) + \psi(\mathcal{H}^{-1}(t, \ell)), \quad \varphi_{t_0} = \varphi. \quad (15)$$

Если $\pi_t := \pi|_{L_t}$ и $D\pi_t$ обратимы при $t \in I_1 \subseteq I$, то π_t^{-1} — точное сечение, причем

$$d(\varphi_t \circ \pi_t^{-1}) = \pi_t^{-1}, \quad t \in I_1. \quad (16)$$

Доказательство. Равенство (14) проверяется непосредственно, поскольку ограничение ω на подмногообразие $t = \text{const}$ есть $\mathcal{H}_t^* p dq$. Пусть γ — липшицева кривая в $\mathbb{R}^n$, тогда

$$\int_{\gamma} \pi_t^{-1} = \int_{\pi_t^{-1} \circ \gamma} p dq = \int_{\pi_t^{-1} \circ \gamma} d\varphi_t = \int_{\gamma} d(\varphi_t \circ \pi_t^{-1}).$$

Первое и последнее равенства выполняются по определению, а среднее вытекает из (14). $\square$

Лемма 3.3. Предположим, что π_t и $D\pi_t$ обратимы для всех $t \in I$. Пусть ξ — допустимая траектория, отвечающая управлению v , причем $\xi(t) \in \pi(L_t)$, $t \in I$ и $\{(t, \lambda(t))\} = \pi_t^{-1}(\xi(t)) = (t, \mu(t), \xi(t))$. Если

$$H(t, \lambda(t)) = \mu(t) f(t, \xi(t), v(t)) - \lambda_0 f_0(t, \xi(t), v(t)), \quad t \in I, \quad (17)$$

то λ — решение гамильтоновой системы (10).

Доказательство. Поскольку для всех $t \in I$ и всех $p \in \mathbb{R}^{n*}$ справедливо неравенство

$$H(t, p, \xi(t)) \geq p f(t, \xi(t), v(t)) - \lambda_0 f_0(t, \xi(t), v(t)),$$

которое превращается в равенство при $p = \mu(t)$, то

$$f(t, \xi(t), v(t)) = \partial_p H(t, \lambda(t)) = \pi \vec{H}(t, \lambda(t)).$$

С другой стороны, дифференцируя тождество $\pi_t^{-1} = \mathcal{H}_t \circ (\pi \circ \mathcal{H}_t)^{-1}$, получаем

$$\frac{d}{dt} \pi_t^{-1}(q) = -D\pi_t^{-1}(q) \pi \vec{H}(\pi_t^{-1}(q)) + \vec{H}(\pi_t^{-1}(q)).$$

Доказываемое утверждение теперь получается прямым дифференцированием λ . $\square$

Теорема 3.4. *Предположим, что π_t и $D\pi_t$ обратимы для всех $t \in I$. Пусть ξ — допустимая траектория, отвечающая управлению v , причем $\xi(t) \in \pi(L_t)$, $t \in I$, и $\{(t, \lambda(t))\} = \pi_t^{-1}(\xi(t))$. Тогда*

$$\begin{aligned} & \lambda_0 \left(\int_{t_0}^{t_1} f_0(t, \xi(t), v(t)) dt - \int_{t_0}^{t_1} f_0(t, \hat{\xi}(t), \hat{v}(t)) dt \right) \geq \\ & \geq (\varphi_{t_1}(\lambda(t_1)) - \varphi_{t_1}(\hat{\lambda}(t_1))) - (\varphi(\lambda(t_0)) - \varphi(\hat{\lambda}(t_0))). \end{aligned}$$

Более того, это неравенство в том и только том случае обращается в равенство, когда λ — решение гамильтоновой системы (10).

Доказательство. Поскольку $(\hat{\xi}, \hat{v})$ — понтрягинская экстремаль, а λ — поднятие кривой ξ , то мы можем воспользоваться неравенством (11) и первое утверждение легко следует из леммы 3.1 и определения φ_t . Наконец, из-за того, что наш гамильтониан есть максимум, обращение неравенства (11) в равенство влечет равенство (17). Следовательно, из леммы 3.3 вытекает, что (11) обращается в равенство в том и только том случае, когда λ — решение гамильтоновой системы (10). $\square$

Для наших целей будет достаточным рассмотреть случай свободного левого конца и функционала, “раздельно” зависящего от левого и правого концов. Иными словами, главная теорема настоящего раздела формулируется при условиях

$$a(\xi(t_0), \xi(t_1)) := a_1(\xi(t_1)), \quad c(\xi(t_0), \xi(t_1)) := c_0(\xi(t_0)) + c_1(\xi(t_1)).$$

В этом случае все понтрягинские экстремали нормальны, а точное лагранжево подмногообразие начальных условий трансверсальности есть

$$L_0 = d c_0, \tag{18}$$

т.е. $p dq|_{L_0} = d(c_0 \circ \pi)$ и $\hat{\lambda}(t_0) = d c_0(\hat{\xi}(t_0)) \in L_0$.

Теорема 3.5. *Предположим, что $D\pi_t$ обратимо в $\hat{\lambda}(t)$ при всех $t \in I$. Если $\hat{\xi}(t_1)$ реализует локальный минимум функции*

$$\varphi_{t_1} \circ \pi_{t_1}^{-1} + c_1 \quad \text{при условии} \quad a_1 = 0,$$

то $(\hat{\xi}, \hat{v})$ реализует строгий локальный минимум в задаче оптимального управления. Более того, если $\hat{\xi}(t_1)$ — единственная точка с таким свойством, то $(\hat{\xi}, \hat{v})$ также единственна.

Доказательство. Прежде всего заметим, что если $D\pi_t$ обратимо в точке $\hat{\lambda}(t)$ для всех $t \in I$, то существует трубка $\mathcal{U}$ вокруг $\hat{\xi}$, на которой π_t^{-1} определено и дифференцируемо. Пусть ξ — допустимая траектория, график которой содержится в $\mathcal{U}$. Из теоремы 3.4 следует, что

$$\mathcal{I}(\xi, v) - \mathcal{I}(\hat{\xi}, \hat{v}) \geq \varphi_{t_1}(\pi_{t_1}^{-1}(\xi(t_1)) + c_1(\xi(t_1))) - \varphi_{t_1}(\pi_{t_1}^{-1}(\hat{\xi}(t_1)) - c_1(\hat{\xi}(t_1))) \geq 0$$

и что $(\hat{\xi}, \hat{v})$ реализует строгий локальный минимум.

Предположим, что $\hat{\xi}(t_1)$ — единственная точка, реализующая локальный минимум. Если $\xi(t_1) \neq \hat{\xi}(t_1)$, то последнее неравенство является строгим. Если $\xi(t_1) = \hat{\xi}(t_1)$ и $\mathcal{I}(\xi, v) = \mathcal{I}(\hat{\xi}, \hat{v})$, то, применяя теорему 3.4, получаем, что λ — решение системы (10). Поскольку $\lambda(t_1) = \hat{\lambda}(t_1)$, то и $\xi = \hat{\xi}$, откуда следует требуемое утверждение.

Замечание 1. В условиях теоремы 3.5, используя (16), можно показать, что хотя функция φ_{t_1} всего лишь C^1 -гладкая, тем не менее функция $\varphi_{t_1} \circ \pi_{t_1}^{-1}$ принадлежит классу C^2 и предположения предыдущей теоремы можно проверять, используя условия второго порядка.

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.3

Прежде всего мы докажем, что в условиях теоремы 2.3 гамильтониан H есть квази- C^2 . Напомним, что если вторая вариация коэрцитивна, то выполняется усиленное условие Лежандра, т.е. существует такое $k > 0$, что

$$h_{uu}(t, \hat{\lambda}(t), \hat{v}(t)) \leq -k \text{Id}. \quad (19)$$

Лемма 4.1. *Предположим, что выполняются условие 2.2 и усиленное условие Лежандра (19), тогда существуют такие $\epsilon > 0$ и квази- C^1 -отображение*

$$u : \mathcal{U}_\epsilon(\hat{\lambda}) \rightarrow \mathbb{R}^m,$$

что

- 1) $u(t, \hat{\lambda}(t)) = \hat{v}(t)$;
- 2) $h(t, \ell, u(t, \ell)) = H(t, \ell)$;
- 3) H есть квази- C^2 -отображение на $\mathcal{U}_\epsilon(\hat{\lambda})$.

Доказательство. Заметим, что для достаточно малого ϵ при помощи отображения

$$(t, \ell, u) \mapsto (t, x, y) = (t, \ell - \hat{\lambda}(t), u - \hat{v}(t))$$

можно отождествить трубку $\mathcal{U}_\epsilon(\hat{\lambda}, \hat{v})$ с “полосой” $I \times B_\epsilon(0) \times B_\epsilon(0)$. Следовательно, можно рассматривать h как равномерно квази- C^2 -вещественную функцию на $I \times B_\epsilon(0) \times B_\epsilon(0)$, а $\hat{\lambda}$ и $\hat{v}$ считать нулевыми. Определим $\phi : I \times B_\epsilon(0) \times B_\epsilon(0) \rightarrow \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^m$ равенством

$$\phi(t, x, y) = (x, \partial_y h(t, x, y)).$$

Из соотношений (7) и (19) следует, что $\partial_y h(t, 0, 0) = 0$ и $\partial_{yy}^2 h(t, 0, 0) \leq -k \text{Id}$, так что ϕ удовлетворяет всем условиям предложения А.2 (см. приложение). Квази- C^1 -функция $u : I \times$

$\times B_\epsilon(0) \rightarrow \mathbb{R}^m$, $u(t, x) = \pi_2 \phi_t^{-1}(x, 0)$ определяется как неявная функция уравнением $\partial_y h(t, x, y) = 0$. Утверждение 1) доказано.

Неравенство (19) и регулярность функции h влекут неравенство $\partial_{yy}^2 h \leq -\frac{k}{2} \text{Id}$ в достаточно узкой полосе, следовательно, $u(t, x)$ есть локальный максимум. Теперь из условия 2.2 следует, что это глобальный максимум. Утверждение 2) также доказано.

Поскольку $\partial_x H(t, x) = \partial_x h(t, x, u(t, x))$ есть композиция двух квази- C^1 отображений, то H обладает требуемыми свойствами гладкости. $\square$

Рассмотрим два квадратичных гамильтониана

$$h''(t, \ell, u) = p \partial_{(q, u)} \hat{f}(t)(q, u) + \frac{1}{2} \partial_{(q, u)^2}^2 \hat{h}(t)(q, u)$$

и

$$H''(t, \ell) = \max_{u \in \mathbb{R}^m} h''(t, \ell, u),$$

связанных со второй вариацией нашей нелинейной задачи.

Лемма 4.2. *Предположим, что выполняются условие 2.2 и усиленное условие Лежандра (19). Тогда*

$$2H_t'' = D^2 H_t'' = D^2 H_t(\hat{\lambda}(t)).$$

Доказательство. Согласно лемме 4.1 имеем

$$H_t(\ell) = h_t(\ell, u(t, \ell)), \quad (20)$$

где $u(t, \ell)$ определяется из уравнения

$$\partial_u h(t, \ell, u(t, \ell)) \equiv 0; \quad (21)$$

более того,

$$H_t''(\ell) = h_t''(\ell, u_t''(\ell)), \quad (22)$$

где $u_t''(\ell)$ — линейная функция, определенная уравнением

$$\partial_u h''(t, \ell, u''(t, \ell)) \equiv 0. \quad (23)$$

С другой стороны, простые вычисления показывают, что

$$2h_t'' = D^2 h'' = D^2 h_t(\hat{\lambda}(t), \hat{v}(t)). \quad (24)$$

Вычисляя $D^2 H_t(\hat{\lambda}(t))$ через (20) и (21), а $D^2 H_t''$ через (22) и (23), с учетом (24) получаем требуемое равенство. $\square$

Теперь мы переформулируем нашу задачу, удвоив размерность, но разделив зависимость от левого и правого концов в функционале и в ограничениях. Обозначим $Q^\Gamma = (q^0, q)$ переменную в $\mathbb{R}^{2n}$ и $P = (p^0, p)$ переменную в $\mathbb{R}^{2n*}$. Положим

$$F^\Gamma(t, Q, u) = (0, f^\Gamma(t, q, u)) \quad \text{и} \quad F_0(t, Q, u) = f_0(t, q, u).$$

Обозначив $\Xi^\Gamma = (\xi^0, \xi^\Gamma)$, получаем, что исходная задача эквивалентна следующей:

$$\text{Минимизировать } \mathcal{I}_{2n}(\Xi, v) = c(\Xi(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} F_0(t, \Xi(t), v(t)) dt$$

среди всех (Ξ, v) , удовлетворяющих условиям

$$\dot{\Xi}(t) = F(t, \Xi(t), v(t)), \quad (25)$$

$$(\text{Id}, -\text{Id}) \Xi(t_0) = 0, \quad (26)$$

$$a(\Xi(t_1)) = 0. \quad (27)$$

Согласно определению вторая компонента решения системы (25), (26) является решением системы (1), в то время как первая компонента — константа, равная начальному условию для второй.

Пара $(\hat{\Xi}, \hat{v})$ с сопряженным ковектором $(\hat{\mu}(t_0), -\hat{\mu}(t))$ удовлетворяет принципу максимума Понтрягина для новой задачи. Максимизированный гамильтониан K , ассоциированный с новой задачей, корректно определен и не зависит от $\ell^0 = (p^0, q^0)$; точнее, $K(t, \ell^0, \ell) = H(t, \ell)$. Соответствующий гамильтонов поток имеет вид

$$\mathcal{K}_t^\Gamma(\ell^0, \ell) = (\ell^0, \mathcal{H}_t(\ell)),$$

а вторая вариация новой системы имеет следующий вид:

$$\mathcal{I}_{2n}''(\delta Q, \delta v) = \Gamma(\delta \Xi(t_1)) - \int_{t_0}^{t_1} \partial_{(q,u)^2}^2 \hat{h}(t)(\delta \xi(t), \delta v(t)) dt$$

для всех $\delta \Xi$, удовлетворяющих соотношениям

$$\frac{d}{dt} \delta \Xi(t) = \partial_{(q,u)} \hat{F}(t)(\delta \Xi(t), \delta v(t)), \quad \delta \Xi(t_0) = \delta Q, \quad (28)$$

$$(\text{Id}, -\text{Id}) \delta \Xi(t_0) = 0, \quad (29)$$

$$\delta \Xi(t_1) \in \ker Da(\hat{\Xi}(t_1)). \quad (30)$$

Ясно, что структура решений системы (28), (29) аналогична структуре решений системы (25), (26) и что форма $\mathcal{I}_{2n}''$ есть по существу форма $\mathcal{I}''$, переписанная для фазового пространства удвоенной размерности аналогично тому, как это делалось для нелинейной задачи. Поэтому из предположений теоремы 2.3 следует, что форма $\mathcal{I}_{2n}''$ коэрцитивна на подпространстве, определенном соотношениями (28)–(30).

Из работы [4] следует, что в случае коэрцитивности второй вариации $\mathcal{I}_{2n}''$ существует такое $\rho > 0$, что форма

$$\mathcal{I}_{2n}''(\delta Q, v) + \frac{1}{2} \rho \|(\text{Id}, -\text{Id}) \delta \Xi(t_0)\|^2 \quad (31)$$

коэрцитивна на пространстве пар $(\delta Q, \delta v)$, удовлетворяющих равенствам (28) и (30) со свободной начальной точкой.

Мы применим некоторые результаты работы [7] к этой возмущенной линейно квадратичной задаче в $\mathbb{R}^{2n}$. Используя результаты указанной работы, следует учитывать разницу в знаке при определении гамильтониана там и здесь.

Пусть L_0 — лагранжево подпространство начальных условий трансверсальности в задаче (31). Движение подмногообразия L_0 под воздействием линейного гамильтонова потока $\mathcal{K}''$ описывается с помощью решения Y_0, Z_0 линейной матричной системы Якоби, отвечающей квадратичному гамильтониану K_t'' , с начальными условиями

$$Y_0(t_0) = \rho \begin{pmatrix} \text{Id} & -\text{Id} \\ -\text{Id} & \text{Id} \end{pmatrix}, \quad Z_0(t_0) = \text{Id}.$$

Получаем

$$\mathcal{K}_t''(P, Q) = (Q^T Y_0(t), Z_0(t) Q)$$

для любого $(P, Q) \in L_0$. Из [7] следует

Лемма 4.3. В условиях теоремы 2.3 матрица Z_0 обратима на всем интервале I , а симметричная матрица $W = Y_0^T Z_0^{-1}$ является решением соответствующего уравнения Риккати, удовлетворяющим условиям

$$W(t_0) = \rho \begin{pmatrix} \text{Id} & -\text{Id} \\ -\text{Id} & \text{Id} \end{pmatrix},$$

$$W(t_1) + \Gamma > 0 \quad \text{на} \quad \ker Da(\Xi(t_1)).$$

Рассмотрим задачу, в которой интегральная часть функционала есть $\lambda_0 F_0$, а начальное и терминальное слагаемые имеют вид

$$c_0(\Xi(t_0)) := \hat{\mu}(t_0)(\xi^0(t_0) - \xi(t_0)) + \frac{1}{2}\rho\|\xi^0(t_0) - \xi(t_0)\|^2,$$

$$c_1(\Xi(t_1)) := \lambda_0 c(\Xi(t_1))$$

при свободной начальной точке и ограничении $a(\Xi(t_1)) = 0$ на конечную точку.

Для того чтобы применить теорему 3.5, заметим, что пара $(\hat{\Xi}, \hat{\nu})$ удовлетворяет принципу максимума для новой задачи с присоединенным ковектором $\hat{M} = (\hat{\mu}(t_0), -\hat{\mu})$ и к тому же нормальна. Рассмотрим лагранжево подмногообразие начальных условий трансверсальности для последней задачи

$$\tilde{L}_0 = \{(Q, P) : P = dc_0(Q)\}.$$

Получаем, что $\hat{\Lambda}(t_0) = (\hat{M}(t_0), \hat{\Xi}(t_0)) \in \tilde{L}_0$ и $T_{\hat{\Lambda}(t_0)} \tilde{L}_0 = L_0$. Из леммы 4.2 следует, что

$$D(\pi \circ \mathcal{K}_t)(\hat{\Lambda}(t_0))|_{L_0} = \pi D(\mathcal{K}_t'')|_{L_0} = Z_0(t);$$

поэтому из леммы 4.3 вытекают обратимость матрицы $D(\pi \circ \mathcal{K}_t)(\hat{\Lambda}(t_0))|_{L_0}$ и равенство

$$(D\pi_t(\hat{\Lambda}(t_0)))^{-1}(Q) = (Q^T W(t), Q).$$

Из следствия 3.2 получаем

$$\begin{aligned} D^2(\varphi_{t_1} \circ \pi_{t_1}^{-1} + c_1)(\widehat{\Xi}(t_1)) &= (D\pi_{t_1}^{-1} + D^2c_1)(\widehat{\Xi}(t_1)) = \\ &= W(t_1) + D^2c_1(\widehat{\Xi}(t_1)) = W(t_1) + \Gamma. \end{aligned}$$

Согласно лемме 4.3 $\widehat{\Xi}(t_1)$ реализует строгий локальный минимум функции $\varphi_{t_1} \circ \pi_{t_1}^{-1} + c_1$ при условии $a = 0$.

При $p_0 = 1$ требуемое утверждение следует из теоремы 3.5, поскольку добавленный нами штраф обращается в нуль на допустимых траекториях исходной задачи.

При $p_0 = 0$ задача сводится к минимизации

$$\mathcal{I}_{2n}(\Xi, v) = c_0(\Xi(t_0)),$$

так что функционал обращается в нуль на любой допустимой траектории, удовлетворяющей краевым условиям. Поскольку минимум строгий, то траектория в пространстве состояний единственна.

А. ПРИЛОЖЕНИЕ

В приложении доказываются некоторые технические результаты, использованные в предыдущих разделах.

Предложение А.1. *Если выполнено усиленное условие Лежандра (19), то условие 2.2 эквивалентно следующему.*

Существуют такие $\delta > 0$ и равномерно квази- C -отображение $u : \mathcal{U}_\delta(\widehat{\lambda}) \rightarrow \mathbb{R}^m$, что

- 1) $u(t, \widehat{\lambda}(t)) = \widehat{v}(t)$;
- 2) $h(t, \ell, u(t, \ell)) = H(t, \ell)$.

Доказательство. Первое равенство следует из леммы 4.1, остается доказать второе. Из свойств регулярности отображения u вытекает, что для $\epsilon > 0$ найдется такое $0 < \delta_1 \leq \delta$, что

$$\ell \in B_{\delta_1}(\widehat{\lambda}(t)) \text{ влечет } u(t, \ell) \in B_\epsilon(\widehat{v}(t)),$$

следовательно, для $(t, \ell) \in \mathcal{U}_{\delta_1}(\widehat{\lambda})$ получаем

$$\max_{u \in B_\epsilon(\widehat{v}(t))} h(t, \ell, u) \geq h(t, \ell, u(t, \ell)) = H(t, \ell). \quad \square$$

Из леммы 4.1 вытекает большая регулярность обратной связи $u(t, \ell)$, а именно ее принадлежность классу квази- C^1 .

Нам необходим вариант теоремы об обратной функции для равномерно квази- C^p -отображений. Следующий результат — модификация теоремы 5.4 из [5].

Предложение А.2. *Пусть $\alpha : I \times \mathbb{R}^h \rightarrow \mathbb{R}^h$ — такое равномерно квази- C^p -отображение, что*

- 1) $\alpha_t(0) = 0$;
- 2) $|\det D\alpha_t(0)| \geq k > 0$.

Тогда существуют такие открытые окрестности нуля U, V , что отображение $\alpha_t : U \rightarrow \mathbb{R}^h$ обратимо на V для почти всех $t \in I$, а отображение $\beta : (t, y) \in I \times V \mapsto \alpha_t^{-1}(y)$ лежит в классе квази- C^p .

Доказательство. Положим $N_t = [D\alpha_t(0)]^{-1}$ и

$$\gamma_t = N_t \circ \alpha_t - \text{Id}.$$

Поскольку α есть равномерно квази- C^1 -отображение, то для данного $\varkappa \in (0, 1)$ существует такое $\epsilon > 0$, что

$$\|N_t \circ D\alpha_t(x) - \text{Id}\| \leq \varkappa \quad \text{для всех } (t, x) \in I \times B_\epsilon(0).$$

Легко проверить, что γ_t — равномерно сжимающее отображение на $B_\epsilon(0)$ с константой $\varkappa$. Поэтому, рассуждая так же, как при доказательстве теоремы 5.4 в [5], устанавливаем существование таких открытых ограниченных окрестностей нуля U, V , что $\alpha_t : U \rightarrow V$ — диффеоморфизм и

$$D\alpha_t^{-1}(y) = [D\alpha_t(\alpha_t^{-1}(y))]^{-1}.$$

Отображение β ограничено и измеримо, поскольку его график — это содержащееся в $I \times V \times U$ нулевое множество уровня отображения $(t, y, x) \mapsto \alpha(t, x) - y$. Аналогично доказывается измеримость по t дифференциала, в то время как его ограниченность, возможно для меньших окрестностей U, V , следует из равномерной оценки

$$|\det D\alpha_t(\alpha_t^{-1}(y))| > k/2,$$

вытекающей из условия 2.2 и равномерной по t непрерывности производной $D\alpha_t$. То же для высших производных вплоть до порядка p . $\square$

Следующее предложение дает интегральную формулу Стокса для липшицевых цепей, доказательство приведено для полноты.

Предложение А.3. Пусть M — гладкое m -мерное многообразие, B — единичный шар в $\mathbb{R}^n$, $\Phi : B \rightarrow M$ — липшицево отображение и $\phi = \Phi|_{\partial B}$. Тогда

$$\int_{\partial B} \phi^* \omega = \int_B \Phi^* d\omega$$

для любой гладкой дифференциальной $(n-1)$ -формы ω на M .

Доказательство. Достаточно доказать предложение в случае, когда $\Phi(B)$ содержится в координатной окрестности многообразия M . Таким образом, можно предположить, что $M = \mathbb{R}^m$.

Возьмем $\epsilon > 0$ и воспользуемся стандартным методом сглаживания *отдельно* для Φ и для ϕ : сверткой с колоколообразной функцией от n переменных для Φ ; локализацией с помощью разбиения единицы и сверткой с колоколообразной функцией от $n-1$ переменных для ϕ . Мы получим такие гладкие вектор-функции $\Phi_\epsilon, \phi_\epsilon$, что

$$\|\Phi_\epsilon - \Phi\|_{W_{1,1}(B)} < \epsilon, \quad \|\phi_\epsilon - \phi\|_{W_{1,1}(\partial B)} < \epsilon,$$

где Φ_ϵ и ϕ_ϵ имеют те же константы Липшица, что Φ и ϕ .

Пусть $\alpha(t)$, $t \in \mathbb{R}$, — такая гладкая неубывающая функция, что

$$\alpha(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t \leq -1, \\ 1, & \text{если } t \geq 0. \end{cases}$$

Положим $\alpha_\varepsilon(x) = \alpha\left(\frac{|x|-1}{\varepsilon}\right)$; тогда $\left|\frac{d}{dx}\alpha_\varepsilon\right| \leq \frac{c_1}{\varepsilon}$, где c_1 зависит от α , но не зависит от ε .

Положим $\bar{\phi}_\varepsilon(x) = \phi_\varepsilon\left(\frac{x}{|x|}\right) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Тогда

$$\sup_{1-\varepsilon \leq |x| \leq 1} |\bar{\phi}_\varepsilon(x) - \Phi_\varepsilon(x)| \leq c_2 \varepsilon,$$

$$\begin{aligned} \int_{\partial B} \phi_\varepsilon^* \omega &= \int_{\partial B} (\alpha_\varepsilon \bar{\phi}_\varepsilon + (1 - \alpha_\varepsilon) \Phi_\varepsilon)^* \omega = \int (\alpha_\varepsilon \bar{\phi}_\varepsilon + (1 - \alpha_\varepsilon) \Phi_\varepsilon)^* d\omega = \\ &= \int_{(1-\varepsilon)B} \Phi_\varepsilon^* d\omega + \int_{B \setminus (1-\varepsilon)B} (\alpha_\varepsilon \bar{\phi}_\varepsilon + (1 - \alpha_\varepsilon) \Phi_\varepsilon)^* d\omega, \end{aligned}$$

$$\left| \frac{d}{dx} (\alpha_\varepsilon \bar{\phi}_\varepsilon + (1 - \alpha_\varepsilon) \Phi_\varepsilon) \right| \leq \left| \frac{d\alpha_\varepsilon}{dx} (\bar{\phi}_\varepsilon - \Phi_\varepsilon) \right| + \left| \frac{d\bar{\phi}_\varepsilon}{dx} \right| + \left| \frac{d\Phi_\varepsilon}{dx} \right| \leq c_3.$$

Следовательно, $|\int_{\partial B} \phi_\varepsilon^* \omega - \int_B \Phi_\varepsilon^* d\omega| \leq c\varepsilon$.

Последняя оценка завершает доказательство, поскольку

$$\int_{\partial B} \phi_\varepsilon^* \omega \longrightarrow \int_{\partial B} \phi^* \omega, \quad \int_B \Phi_\varepsilon^* d\omega \longrightarrow \int_B \Phi^* d\omega$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$. $\square$

Замечание 2. Утверждение предложения остается справедливым при замене шара B его образом при любом липшицево обратимом отображении. Например, можно заменить B любым выпуклым многогранником.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Agrachev A. A., Gamkrelidze R. V. Symplectic methods for optimization and controls // Geometry of feedback and optimal control / Eds Jacubczyk B., Respondek W. N. Y.: M. Dekker, 1997. (Pure and Appl. Math).
2. Арнольд В. И. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1989.
3. Giaquinta M., Hildebrandt S. Calculus of variations. Berlin etc.: Springer, 1996. V. 2.
4. Hestenes M. R. Applications of the theory of quadratic forms in Hilbert space to calculus of variations // Pacif. J. Math. 1951. V. 1. P. 525–581.
5. Prodi G., Ambrosetti A. Analisi non lineare, i quaderno: Preprint. Scuola Norm. Super. Pisa, 1973.
6. Stefani G., Zezza P. Optimality conditions for a constrained optimal control problem // SIAM J. Contr. and Optim. 1996. V. 34. P. 635–659.
7. Stefani G., Zezza P. Constrained regular LQ-control problems // SIAM J. Contr. and Optim. 1997. V. 35. P. 876–900.
8. Zeidan V. The Riccati equation for optimal control problems with mixed state-control constraints: necessity and sufficiency // SIAM J. Contr. and Optim. 1994. V. 32. P. 1297–1321.