А. А. Аграчев, Е. Ф. Мищенко, Вместо введения. О работах Р. В. Гамкрелидзе, *Тр. МИАН*, 1998, том 220, 5–7

ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА ИМ. В.А. СТЕКЛОВА, 1998, т. 220, с. 5–7

Вместо введения. О работах Р. В. Гамкрелидзе

Настоящий том посвящен 70-летию со дня рождения Реваза Валериановича Гамкрелидзе. На наш взгляд, лучшим введением к тому будет напоминание о некоторых результатах, полученных этим замечательным математиком. Мы напомним о достаточно давних работах, считая это уместным в том числе и потому, что многие результаты Р. В. Гамкрелидзе, отличаясь естественностью и элегантностью, быстро вошли в математический обиход и после ряда переложений и обобщений потеряли имя автора.

Среди ранних результатов следует упомянуть выражение классов Черна комплексных проективных многообразий через проективные инварианты (см. [1]). В работе получены красивые многомерные обобщения классической формулы Плюккера для рода плоской проективной кривой. Здесь важны не только явные формулы: принципиальным являлось представление циклов, двойственных когомологическим классам Черна, в виде линейных комбинаций алгебраических многообразий.

Р. В. Гамкрелидзе — один из создателей математической теории оптимального управления. Как известно, в основе этой теории лежит принцип максимума Л. С. Понтрягина, высказанный первоначально в виде гипотезы. Р. В. Гамкрелидзе доказал принцип максимума для линейных систем управления и построил полную теорию линейных систем (см. [2, 4]). В этой теории, ставшей со временем классической, уже были выявлены важнейшие родовые черты теории оптимального управления: роль выпуклости, значение релейных управлений, характер оптимального синтеза, вид условий регулярности. Иными словами, линейная теория, построенная Р. В. Гамкрелидзе, надолго определила само лицо предмета, а ее прозрачность и полнота до сих пор остаются образцами для специалистов, исследующих более сложные нелинейные системы.

Удивительная судьба ожидала "условие общности положения" — основное условие регулярности в линейной теории Р. В. Гамкрелидзе. Его несколько упрощенная версия под именем условия "полной управляемости" стала визитной карточкой структурной теории линейных систем, развитой позднее Р. Калманом. Следует отметить, что структурная теория Калмана, будучи технически проще и ближе сердцу инженера, чем оптимальное управление, приобрела чрезвычайно широкое распространение и в настоящее время число специалистов разных областей, знакомых с условием "полной управляемости", должно многократно превосходить число людей с серьезным математическим образованием, не говоря уж о тех, кто когда-либо слышал о Р. В. Гамкрелидзе.

Переходя к нелинейным задачам, отметим, что Р. В. Гамкрелидзе принадлежит первый вариант принципа максимума для задач с фазовыми ограничениями (см. [3, 4]). Интересно, что, несмотря на обширную литературу, посвященную задачам с фазовыми ограничениями, и на полученные позднее далекие обобщения результата Р. В. Гамкрелидзе, его теорема до сих пор не потеряла актуальности. Дело здесь в следующем. Явным недостатком результата Гамкрелидзе для задачи с фазовыми ограничениями были очень сильные требования регулярности, накладываемые на задачу. Дальнейшее развитие событий, однако, показало, что эти требования отнюдь не случайны: отказ от них приводит к такому усложнению ситуации, что делает формулируемые там не менее общие условия оптимальности почти непригодными для использования в конкретных задачах. Довольно поучительная история и, надо признать, довольно характерная для современной теории оптимизации.

Нельзя не упомянуть теорию скользящих режимов Р.В. Гамкрелидзе, описывающую пополнение управляемой системы в смысле, аналогичном тому, как вещественная прямая является пополнением множества рациональных чисел (см. [5, 8]). От близких идей Янга и Варги теорию Гамкрелидзе выгодно отличает так называемая аппроксимационная лемма, гласящая, что не только любая траектория пополненной системы может быть аппроксимирована траекторией исходной, но и любое семейство траекторий пополненной системы, непрерывно зависящее от параметра, пробегающего произвольный компакт, может быть равномерно аппроксимировано аналогичным семейством исходной системы. Судя по всему, сила этого результата еще не была использована в полной мере и он должен занять весьма важное место в медленно, но верно складывающейся теории оптимального управления "в целом".

Наряду с перечисленными большими работами появлялись статьи Р.В. Гамкрелидзе, посвященные условиям оптимальности для некоторых классов задач, не укладывающихся в стандартную схему, таких, как задачи с неограниченными управлениями или с запаздываниями. В этих статьях постепенно нащупывались естественные рамки условий типа принципа максимума, что в конечном счете привело к построению Р.В. Гамкрелидзе общей теории условий первого порядка для абстрактных экстремальных задач (см. [6, 7]).

Следующей важной темой стали особые экстремали в задачах оптимального управления, т.е. те экстремали, для которых вырождается принцип максимума. Поначалу наличие особых экстремалей казалось одним из тех досадных вырождений, которые интересны лишь постольку, поскольку требуется указывать условия, позволяющие от них избавиться: особые экстремали по существу игнорировались в классическом вариационном исчислении и не играют существенной роли в линейных задачах. Действительность оказалась, однако, намного сложней и увлекательней. Прежде всего, все новые экстремали, возникающие при пополнении системы, автоматически являются особыми. Кроме того, выяснилось, что эти экстремали играют ключевую роль при построении оптимального синтеза для нелинейных систем с неголономными связями. В результате инженеры, строящие конкретные синтезы, стали исследовать особые экстремали, не дожидаясь математиков, причем исследовать довольно успешно, хотя и на эвристическом уровне, чреватом серьезными ошибками.

Работа [9] содержит основательное исследование "поточечных" условий оптимальности, которые следует добавить к принципу максимума, если он вырождается. Эти условия по необходимости выходят за рамки теории первого порядка и используют высшие вариации. Включение в дело высших вариаций ознаменовало собой важный поворот в тематике и даже идеологии исследований. В принципе не так уж трудно выписывать все новые и новые условия оптимальности, варьируя управления все более хитроумным образом. В результате получаются условия, включающие ужасающие нагромождения частных производных, причем как сравнивать эти условия между собой, так и понять их связь с динамикой систем управления бывает крайне затруднительно. Стало ясно, что для дальнейшего исследования нелинейных систем нужен инвариантный относительно гладких замен переменных бескоординатный подход. Это и послужило естественной причиной обращения к дифференциально-геометрическому языку. Однако стандартных средств дифференциальной геометрии оказалось недостаточно для исследования задач оптимального управления, ведь эти средства вырабатывались для несколько иных целей.

Пришлось разработать специальное "хронологическое исчисление", связывающее динамику с коммутационными свойствами векторных полей, определяющих систему. Основы этого исчисления изложены в работе [10]. С тех пор хронологическое исчисление и привлеченные позднее методы симплектической геометрии исправно трудятся, открывая одну за другой двери в увлекательный мир нелинейных систем и выявляя глубинные связи теории управления с другими разделами математики. Впрочем описание более поздних работ Р. В. Гамкрелидзе и его школы выходит за рамки настоящей заметки; для их объективной оценки, видимо, нужны другие авторы.

В заключение напомним только об одном замечательном вкладе Р.В. Гамкрелидзе в математику, выходящем за рамки собственно исследований. Мы имеем в виду грандиозный издательский проект: созданную и редактируемую Р.В. Гамкрелидзе монументальную энциклопедическую серию "Современные проблемы математики. Фундаментальные направления", которая навсегда останется памятником Московской математической школе периода ее расцвета. Публикуемая на английском языке под названием "Encyclopaedia of Mathematical Sciences" издательством "Springer Verlag", эта серия способствует распространению и утверждению идей нашей школы в мировом математическом сообществе — идей, влияние которых сегодня ощущает почти каждый активно работающий математик.

А. А. Аграчев, Е. Ф. Мищенко

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гамкрелидзе Р. В.* Циклы Черна комплексных алгебраических многообразий //Изв. АН СССР. Сер. мат. 1956. Т. 20. С. 685–706.
2. *Гамкрелидзе Р. В.* Теория оптимальных по быстродействию процессов в линейных системах //Изв. АН СССР. Сер. мат. 1958. Т. 22. С. 449–474.
3. *Гамкрелидзе Р. В.* Оптимальные процессы управления при ограниченных фазовых координатах //Изв. АН СССР. Сер. мат. 1960. Т. 24. С. 315–356.
4. *Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматгиз, 1961.
5. *Гамкрелидзе Р. В.* О скользящих оптимальных режимах //ДАН СССР. 1962. Т. 134, № 6. С. 106–128.
6. *Gamkrelidze R. V.* On some extremal problems in the theory of differential equations //J. SIAM Contr. 1965. N 3. P. 106–128.
7. *Гамкрелидзе Р. В.* Необходимые условия первого порядка и аксиоматика экстремальных задач //Тр. МИАН. 1971. Т. 112. С. 152–180.
8. *Гамкрелидзе Р. В.* Основы оптимального управления. Тбилиси: Изд-во Тбил. гос. ун-та, 1977.
9. *Аграчев А. А., Гамкрелидзе Р. В.* Принцип оптимальности второго порядка для задачи быстродействия //Мат. сб. 1976. Т. 100. С. 610–643.
10. *Аграчев А. А., Гамкрелидзе Р. В.* Экспоненциальное представление потоков и хронологическое исчисление //Мат. сб. 1978. Т. 107. С. 467–532.