А. А. Аграчев, Р. В. Гамкрелидзе, Об орбитах групп диффеоморфизмов и потоков, *Тр. МИАН*, 1995, том 209, 3–13

Труды Математического института РАН
1995, том 209

УДК 517.9

А.А. Аграчев, Р.В. Гамкрелидзе

Об орбитах групп диффеоморфизмов и потоков

1. Пусть M — вещественно-аналитическое многообразие, $\operatorname{Diff} M$ — группа аналитических диффеоморфизмов M, $\operatorname{Vect} M$ — алгебра Ли аналитических векторных полей. Пусть $G \subset \operatorname{Diff} M$ — некоторая подгруппа в $\operatorname{Diff} M$. Если G порождается своими однопараметрическими подгруппами, то согласно хорошо известной теореме Нагано–Суссмана орбиты группы G являются иммерсированными аналитическими подмногообразиями в M. Более того, если некоторое семейство однопараметрических групп порождает G, то алгебра Ли в $\operatorname{Vect} M$, порожденная инфинитезимальными генераторами этих подгрупп, определяет касательные пространства к орбитам.

Мы покажем, что условия на группу G можно значительно ослабить: достаточно, чтобы любые две точки G соединялись кусочно-аналитической кривой, лежащей в G. Вместо семейства однопараметрических подгрупп, порождающих G, можно рассмотреть произвольное семейство аналитических кривых, содержащих единичный элемент и порождающих G.

Кривые в группе сами образуют группу при поточечном умножении. Группа кривых в $\operatorname{Diff} M$, содержащих единичный элемент, называется группой потоков. Группа $\operatorname{Diff} M$ действует естественным образом на M, а группа потоков — на пространстве кривых в M. Мы рассматриваем подгруппы, порожденные семействами аналитических потоков, и изучаем локальную структуру их орбит в пространстве кривых на M.

2. В статье используются операторные обозначения, удобные тем, что они, по крайней мере формально, позволяют работать с нелинейными преобразованиями как с линейными. В частности, векторное поле $f \in \operatorname{Vect} M$ есть дифференциальный оператор первого порядка на алгебре вещественных гладких функций $C^\infty(M)$, удовлетворяющий правилу дифференцирования произведения

$$f(\varphi_1\varphi_2) = (f\varphi_1)\varphi_2 + \varphi_1(f\varphi_2).$$

Диффеоморфизм $p: M \to M$ отождествляется с автоморфизмом алгебры $C^\infty(M)$. При этом p преобразует функцию φ в функцию $p\varphi$, определяемую правилом

$$(p\varphi)(x) = \varphi(p(x)) \qquad \forall\, x \in M.$$

Точка $x \in M$ отождествляется с соответствующим гомоморфизмом $x : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$, определяемым правилом $x : \varphi \mapsto \varphi(x)$. При этом точка $p(x)$ оказывается отождествленной с композицией автоморфизма $p : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ и гомоморфизма $x : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$, что является формальным оправданием используемого ниже обозначения: значение диффеоморфизма p в точке x обозначается $x \circ p$.

Касательный вектор $\zeta \in T_x M$ есть линейный функционал: $\zeta : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$, удовлетворяющий условию

$$\zeta(\varphi_1\varphi_2) = (\zeta\varphi_1)(x\varphi_2) + (x\varphi_1)(\zeta\varphi_2) \qquad \forall \varphi_1, \varphi_2 \in C^\infty(M).$$

В таком случае значение поля f в точке x есть композиция оператора f и функционала x, что записывается в виде $x \circ f$.

Наконец, скобки Ли векторных полей есть просто коммутатор операторов: $[f_1, f_2] = f_1 \circ f_2 - f_2 \circ f_1$.

3. Пусть $\mathcal{P}$ — некоторое множество аналитических кривых $s \mapsto p(s)$ в группе диффеоморфизмов: $p(s) \in \mathrm{Diff}\, M$ $\forall s \in \mathbb{R}$. Кривая называется аналитической, если вещественно-аналитично отображение $(x, s) \mapsto x \circ p(s)$ из $M \times \mathbb{R}$ в M. Предположим, что $\forall p \in \mathcal{P}$ $p(0) = \mathrm{id}$ — тождественный диффеоморфизм, являющийся единичным элементом группы $\mathrm{Diff}\, M$. Такие кривые в $\mathrm{Diff}\, M$ называются (нестационарными) аналитическими потоками.

Зафиксируем раз и навсегда точку $x_0 \in M$ и будем изучать проходящую через эту точку орбиту группы, порожденной диффеоморфизмами $p(s)$.

Определение. Множество

$$\mathcal{O}(\mathcal{P}) = \{x_0 \circ q_1(s_1) \circ \ldots \circ q_k(s_k) |\ q_i \in \mathcal{P} \cup \mathcal{P}^{-1},\ s_i \in \mathbb{R},\ i = 1, \ldots, k;\ k > 0\},$$

где $\mathcal{P}^{-1} = \{s \mapsto p(s)^{-1} |\ p(\cdot) \in \mathcal{P}\}$ называется орбитой семейства $\mathcal{P}$ (проходящей через точку x_0).

Наряду с группой, порожденной диффеоморфизмами $p(s)$, $p \in \mathcal{P}$, $s \in \mathbb{R}$, мы будем рассматривать также группу потоков, порожденную потоками, принадлежащими $\mathcal{P}$, и теми, что получаются из них полиномиальной заменой параметра.

Пусть A — пространство всех вещественных полиномов с нулевым свободным членом, так что $a(0) = 0$ $\forall a \in A$. Положим

$$\mathrm{Gr}\,(\mathcal{P}) = \{s \mapsto q_1(a_1(s)) \circ \ldots \circ q_k(a_k(s)) |\ q_i \in \mathcal{P} \cup \mathcal{P}^{-1},\ a_i \in A,\ i = 1, \ldots, k;\ k > 0\}. \quad (1)$$

Ясно, что $x_0 \circ q(s) \in \mathcal{O}(\mathcal{P})$ для любых $q(\cdot) \in \mathrm{Gr}\,(\mathcal{P})$ и, более того, $\mathcal{O}(\mathcal{P}) = \{x_0 \circ q(s) |\ q \in \mathrm{Gr}\,(\mathcal{P})\}$ $\forall s \in \mathbb{R}$.

4. Поскольку диффеоморфизмы и векторные поля являются линейными операторами на $C^\infty(M)$, то их можно беспрепятственно перемножать, складывать и умножать на гладкие функции. В результате снова получаются линейные операторы на $C^\infty(M)$, не являющиеся, вообще говоря, ни диффеоморфизмами, ни векторными полями.

Нам придется также дифференцировать и интегрировать по $s \in \mathbb{R}$ однопараметрические семейства линейных операторов на $C^\infty(M)$. Производная и интеграл всегда понимаются в слабом операторном смысле, например:

$$x \circ \left(\frac{d}{ds}p(s)\right)\varphi \overset{\text{def}}{=} \frac{d}{ds}(x \circ p(s)\varphi) \qquad \forall\,\varphi \in C^\infty(M),\ x \in M.$$

Законность стандартных правил дифференцирования произведения, интегрирования по частям и т.д. в тех ситуациях, в которых они используются в настоящей статье, не должна вызывать сомнений. Общее обоснование этих правил см. в работе [1].

Пусть $s \mapsto q(s)$ — поток, т.е. гладкая кривая в $\operatorname{Diff} M$, удовлетворяющая условию $q(0) = \mathrm{id}$. Положим

$$\operatorname{ord} q = \min\left\{k > 0 \,\middle|\, \frac{d^k}{ds^k}q(s)\big|_{s=0} \neq 0\right\}$$

и назовем число $\operatorname{ord} q$ порядком кривой q. Пусть $\operatorname{ord} q = n$, тогда оператор $\frac{d^n}{ds^n}q(s)\big|_{s=0}$ является векторным полем. В самом деле,

$$\frac{d^n}{ds^n}q(s)\big|_{s=0}(\varphi_1\varphi_2) = \frac{d^n}{ds^n}((q(s)\varphi_1)(q(s)\varphi_2))\big|_{s=0} =$$

$$= \left(\frac{d^n}{ds^n}q(s)\big|_{s=0}\varphi_1\right)\varphi_2 + \varphi_1\left(\frac{d^n}{ds^n}q(s)\big|_{s=0}\varphi_2\right).$$

Положим $T_0 q = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{ds^n}q(s)\big|_{s=0}$ — касательное поле к потоку q в точке $q(0) = \mathrm{id}$.

Пусть, наконец,

$$\operatorname{Gr}(\mathcal{P})_n = \{q \in \operatorname{Gr}(\mathcal{P}) \mid \operatorname{ord} q = n\}, \qquad \operatorname{Gr}(\mathcal{P}) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \operatorname{Gr}(\mathcal{P})_n.$$

Наша ближайшая цель — описать все поля, являющиеся касательными к потокам из $\operatorname{Gr}(\mathcal{P})_n$ в начальной точке id.

5. Сопоставим каждому $p \in \mathcal{P}$ аналитическую кривую $s \mapsto \omega_p(s)$ в $\operatorname{Vect} M$, определяемую правилом

$$\omega_p(s) = p(s)^{-1} \circ \frac{d}{ds}p(s). \tag{2}$$

Легко видеть, что оператор $\omega_p(s)$ действительно является векторным полем. В самом деле, если $\omega_p(s) \neq 0$, то это касательное поле к потоку $t \mapsto p(s)^{-1} \circ p(s+t)$.

Соотношение (2) можно переписать следующим образом:

$$\frac{d}{ds}x \circ p(s) = x \circ p(s) \circ \omega(s) \qquad \forall\, x \in M.$$

В традиционных неоператорных обозначениях это означает: кривые $s \mapsto x \circ p(s)$ в M удовлетворяют обыкновенному дифференциальному уравнению на M, в правой части которого стоит нестационарное поле $(x, s) \mapsto (x \circ \omega_p(s)) \in T_x M$. Таким образом, $s \mapsto p(s)$ есть поток в M, порожденный нестационарным векторным полем ω_p.

Операторные обозначения сразу приводят к асимптотическому представлению $p(s)$ в виде ряда Вольтерра:

$$p(s) = \mathrm{id} + \int_0^s p(\tau) \circ \omega_p(\tau)\, d\tau = \mathrm{id} + \int_0^s \omega_p(\tau)\, d\tau +$$

$$+ \iint\limits_{\{0 \le \tau_2 \le \tau_1 \le s\}} p(\tau_2) \circ \omega(\tau_2) \circ \omega(\tau_1)\, d\tau_1 d\tau_2 = \dots$$

$$\dots \approx \mathrm{id} + \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{\Delta_s^n}\!\!\dots\!\!\int \omega_p(\tau_n) \circ \dots \circ \omega_p(\tau_1)\, d\tau_1 \dots d\tau_n, \tag{3}$$

где

$$\Delta_s^n = \{(\tau_1, \dots, \tau_n) |\, 0 \le \tau_n \le \dots \le \tau_1 \le s\}. \tag{4}$$

Операторный ряд (4) расходится, однако для любого $x_0 \in M$ и любой вещественной функции φ, аналитической в некоторой точке x_0, ряд

$$x\varphi + \sum_{n=1}^{\infty} x \circ \int\limits_{\Delta_s^n}\!\!\dots\!\!\int \omega_p(\tau_n) \circ \dots \circ \omega_p(\tau_1)\, d\tau_1 \dots d\tau_n\, \varphi$$

сходится к $x \circ p(s)\varphi$ при (x, s), близких к $(x_0, 0)$.

Поток p, удовлетворяющий соотношениям (3), (4), называется правой хронологической экспонентой от ω_p, что обозначается следующим образом:

$$p(s) = \overrightarrow{\exp} \int_0^s \omega_p(\tau)\, d\tau.$$

Формальные свойства хронологических экспонент см. в работах [1, 2].

6. Пусть

$$\omega_p(s) = \sum_{n=1}^{\infty} s^{n-1} \omega_p^n, \qquad \omega_p^n \in \mathrm{Vect}\, M$$

— разложение Тейлора аналитической кривой $s \mapsto \omega_p(s)$. Положим

$$\Omega_n = \mathrm{span} \left\{ [\omega_{p_k}^{i_k}, \dots [\omega_{p_1}^{i_1}, \omega_{p_0}^{i_0}] \dots] \,\Big|\, \sum_{j=0}^{k} i_j \le n,\ p_j \in \mathcal{P},\ 1 \le k \le n \right\}, \qquad \Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n.$$

Легко видеть, что $\Omega = \mathrm{Lie}\,\{\omega_p^n |\, p \in \mathcal{P},\ n = 1, 2, \dots\}$ — подалгебра Ли в $\mathrm{Vect}\, M$, порожденная полями ω_p^n, а подпространства Ω_n образуют возрастающую фильтрацию этой алгебры Ли.

Т е о р е м а 1. *Для любого целого $n > 0$ справедливо равенство*

$$\Omega_n = \{T_o q |\, q \in \mathrm{Gr}\,(\mathcal{P})_n\}.$$

Доказательство. Пусть $s \mapsto q(s)$ — аналитический поток. Положим

$$\overrightarrow{\ln}\ q(s) = q(s)^{-1} \circ \frac{d}{ds} q(s).$$

Легко видеть, что

$$\int\limits_0^s \overrightarrow{\ln}\ q(\tau)\, d\tau = s^{\operatorname{ord} q} T_0 q + O(s^{\operatorname{ord} q + 1}). \tag{5}$$

Кроме того, для любых потоков q_1, q_2 справедливо следующее соотношение, являющееся прямым следствием так называемой формулы вариаций (см. [1, 2]):

$$\overrightarrow{\ln}\ ((q_1 \circ q_2^{-1})(s)) = \overrightarrow{\exp} \int\limits_0^s \operatorname{ad}\ \overrightarrow{\ln}\ q_2(\tau)\, d\tau (\overrightarrow{\ln}\ q_1(s) - \overrightarrow{\ln}\ q_2(s)), \tag{6}$$

где, по определению,

$$\overrightarrow{\exp} \int\limits_0^s \operatorname{ad} v(\tau)\, d\tau w(s) \approx w(s) + \sum_{n=1}^{\infty} \int \cdots \int\limits_{\Delta_s^n} [v(\tau_n), \ldots [v(\tau_1), w(s)] \ldots]\, d\tau_1 \ldots d\tau_n$$

для любых кривых v, w в $\operatorname{Vect} M$.

Из равенств (5) и (6) нетрудно вывести включение

$$\Omega_n \supset \{T_0 q |\ q \in \operatorname{Gr}(\mathcal{P})_n\}.$$

Доказательство обратного включения требует несколько большей работы. Следующие три утверждения доказываются прямым вычислением.

Лемма 1. *Для любого потока q и вещественного полинома $a(s) = \sum_{i=1}^k \alpha_i s^i$, $\alpha_1 \neq 0$, справедливы равенства*

$$\operatorname{ord} q = \operatorname{ord} q^{-1} = \operatorname{ord} q(a(\cdot)), \qquad T_0 q^{-1} = -T_0 q,\ \ T_0 q(a(\cdot)) = \alpha_1^{\operatorname{ord} q} T_0 q.$$

Лемма 2. *Пусть q_1, q_2 — такие потоки, что $\operatorname{ord} q_1 = \operatorname{ord} q_2 = n$, $T_0 q_1 + T_0 q_2 \neq 0$. Тогда $\operatorname{ord}(q_1 \circ q_2) = n$, $T_0(q_1 \circ q_2) = T_0 q_1 + T_0 q_2$.*

Лемма 3. *Для любых потоков q_1, q_2 справедливы равенства*

$$\operatorname{ord}(q_1 \circ q_2 \circ q_1^{-1} \circ q_2^{-1}) = \operatorname{ord} q_1 + \operatorname{ord} q_2,$$

$$T_0(q_1 \circ q_2 \circ q_1^{-1} \circ q_2^{-1}) = [T_0 q_1, T_0 q_2].$$

Из лемм 1–3 следует, что для доказательства включения $\Omega_n \subset \{T_0 q |\ q \in \operatorname{Gr}(\mathcal{P})_n\}$ достаточно установить соотношения

$$\omega_p^k \in \{T_0 q |\ q \in \operatorname{Gr}(\mathcal{P})_n\}, \qquad k = 1, \ldots, n, \quad p \in \mathcal{P}. \tag{7}$$

Докажем сначала, что $\omega_p^n = T_0 q$ для некоторого $q \in \mathrm{Gr}(\mathcal{P})_n$. Сделаем это индукцией по n. При $n = 1$ утверждение очевидно. Применяя леммы 1–3 и предположение индукции, получаем, что достаточно найти $q \in \mathrm{Gr}(\mathcal{P})_n$, для которого

$$T_0 q = \alpha\omega_p^n + \pi(\omega_p^1, \ldots, \omega_p^{n-1}), \qquad \alpha \neq 0, \tag{8}$$

где π — некоторый коммутаторный полином от $\omega_p^1, \ldots, \omega_p^{n-1}$ веса n, если принять вес переменной ω_p^i равным i, $\forall\, i > 0$.

Мы выведем (8) из несколько более общего утверждения. Именно, индукцией по n докажем существование такого $q \in \mathrm{Gr}(\mathcal{P})$, что

$$\overrightarrow{\ln}\; q(s) = \sum_{k=n}^{\infty} s^{k-1}(\alpha_k \omega_p^k + \pi_k(\omega_1, \ldots, \omega_{k-1})),$$

где $\alpha_k \neq 0$, π_k — коммутаторный полином веса k, $k = n, n+1, \ldots$

Шаг индукции: пусть $q \in \mathrm{Gr}(\mathcal{P})$ таково, что $\overrightarrow{\ln}\; q(s) = \sum_{k=n-1}^{\infty} s^{k-1} v_k$. Положим

$$\hat{q}(s) = q(2^{-\frac{1}{n-1}} s) \circ q(s)^{-1} \circ q(2^{-\frac{1}{n-1}} s).$$

Из (6) следует, что

$$\overrightarrow{\ln}\; \hat{q}(s) = \sum_{k=n}^{\infty} s^{k-1}((1 - 2^{\frac{n-k-1}{n-1}})v_k + \hat{\pi}_k(v_1, \ldots, v_{k-1})),$$

где $\hat{\pi}_k$ — коммутаторный полином веса k от переменных $v_1, \ldots, v_{k-1}$, если принять вес $v_i = i$, $i > 0$.

Итак, индукция проведена и включение

$$\omega_p^n \in \{T_0 q \mid q \in \mathrm{Gr}(\mathcal{P})_n\}$$

доказано.

Еще одно обозначение: для потока q и вещественного полинома a обозначим через

$$q_a : s \mapsto q(a(s)) \tag{9}$$

поток, получающийся из q заменой параметра.

Л е м м а 4. *Пусть q — поток, $\overrightarrow{\ln}\; q(s) \approx \sum_{n=1}^{\infty} s^{n-1} v_n$. Тогда для любого $n >$ > 0 и любого $w \in \operatorname{span}\{v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ найдется такой полином $a(s) = s + \sum_{k=2}^{n} \alpha_k s^k$, что*

$$\frac{1}{(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}}\; \overrightarrow{\ln}\; q_a(s)\Big|_{s=0} = v_n + w.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем

$$\overrightarrow{\ln}\; q_a(s) = \frac{d}{ds}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(a(s))^k}{k} v_k = \sum_{n=1}^{\infty} s^{n-1}\left(\omega_n + n\sum_{i=1}^{n-1}(r_i^n(\alpha_2, \ldots, \alpha_i) + \alpha_{i+1})\omega_{n-i}\right),$$

где r_i^n — полином от $i-1$ переменных.

Пусть $w = \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i v_{n-i}$. Для доказательства леммы достаточно найти решение "треугольной" системы $n-1$ уравнений относительно переменных $\alpha_2, \dots, \alpha_n$:

$$r_i^n(\alpha_2, \dots, \alpha_i) + \alpha_{i+1} = \beta_i/n, \qquad i = 1, \dots, n-1.$$

Решение такой системы очевидно существует (и единственно).

Применим лемму 4 к потоку $p \in \mathcal{P}$. Получаем, что для любых $n > k > 0$ найдется такой полином a, что в тейлоровском разложении вектор-функции $\overrightarrow{\ln}\ p_a(s)$ коэффициент при s^{n-1} равен $\omega_p^n + \omega_p^k$. Заметим, что $p_a \in \mathrm{Gr}\,(\mathcal{P})$. Тогда согласно доказанному выше существует такой поток $\tilde{q} \in \mathrm{Gr}\,(\mathcal{P})$, что $T_0\tilde{q} = \omega_p^n + \omega_p^k$, $\operatorname{ord}\tilde{q} = n$. С другой стороны, как мы знаем, существует такой $q \in \mathrm{Gr}\,(\mathcal{P})$, что $T_0 q = \omega_p^n$, $\operatorname{ord} q = n$. Из лемм 1, 2 следует, что

$$T_0(\tilde{q} \circ q^{-1}) = \omega_p^k, \qquad \operatorname{ord}\,(\tilde{q} \circ q^{-1}) = n.$$

7. Теорема 2. *Орбита $\mathcal{O}(\mathcal{P})$ является иммерсированным аналитическим подмногообразием M, при этом*

$$T_x\mathcal{O}(\mathcal{P}) = x \circ \Omega \qquad \forall x \in \mathcal{O}(\mathcal{P}),$$

где $x \circ \Omega \stackrel{\text{def}}{=} \{x \circ v |\ v \in \Omega\} \subset T_x M$.

Доказательство. Напомним, что Ω — подалгебра Ли в $\mathrm{Vect}\,M$. Следовательно, распределение $x \circ \Omega$, $x \in M$, порождено аналитическими полями и инволютивно. Согласно результатам Нагано [4], это распределение вполне интегрируемо. Пусть $N \subset M$ — максимальное интегральное многообразие рассматриваемого распределения, содержащее точку x_0. Достаточно доказать, что $\mathcal{O}(\mathcal{P})$ является открытым подмногообразием N.

Прежде всего, для любых $p \in \mathcal{P}$, $y \in M$, $s \in \mathbb{R}$ имеем

$$\frac{d}{ds} y \circ p(s) = y \circ p(s) \circ \omega_p(s) \subset y \circ p(s) \circ \operatorname{span}\{\omega_p^n |\ n \geq 1\}.$$

Следовательно, кривая $x \circ p(s)$, $s \in \mathbb{R}$, содержится в орбите распределения $x \circ \Omega$, $x \in M$, проходящей через точку y. Отсюда и из связности интегральных многообразий нетрудно вывести, что $\mathcal{O}(\mathcal{P}) \subset N$.

Далее, пусть $x \in \mathcal{O}(\mathcal{P})$ и $v_1, \dots, v_m \in \Omega$ таковы, что выпуклый конус, натянутый на $x \circ v_1, \dots, x \circ v_m$, совпадает с $T_x N$. Пусть $v_i \in \Omega_{n_i}$, $i = 1, \dots, m$. Согласно теореме 1 существуют такие $q_i \in \mathrm{Gr}\,(\mathcal{P})$, $\operatorname{ord} q_i = n_i$, что $T_0 q_i = v_i$. Рассмотрим отображение

$$F:\ (s_1, \dots, s_m) \mapsto x \circ q_1(s_1^{\frac{1}{n_1}}) \circ \dots \circ q_m(s^{\frac{1}{n_m}}), \qquad s_i \geq 0,\ \ i = 1, \dots, m.$$

Образ отображения F очевидно содержится в $\mathcal{O}(\mathcal{P})$. С другой стороны,

$$F(s_1, \dots, s_m) = x + \sum_{i=1}^{m} s_i x \circ v_i + o\Bigl(\sum_{i=1}^{m} s_i\Bigr),$$

и с помощью обычной аналитической рутины получаем, что образ F содержит некоторую окрестность точки x_0 в N.

8. Разобравшись с орбитами группы диффеоморфизмов, перейдем к изучению орбит группы потоков $\mathrm{Gr}\,(\mathcal{P})$.

Групповая операция в $\mathrm{Gr}\,(\mathcal{P})$ — "поточечное" умножение:

$$(q_1 \circ q_2)(s) \stackrel{\text{def}}{=} q_1(s) \circ q_2(s), \qquad s \in \mathbb{R}.$$

Пусть $s \mapsto \gamma(s) \in M$ — представитель ростка аналитической кривой в M, $\gamma(0) = x_0$, s принадлежит некоторой окрестности нуля в $\mathbb{R}$. Положим $(\gamma \circ q)(s) = \gamma(s) \circ q(s)$ $\forall\, q \in \mathrm{Gr}\,(\mathcal{P})$. Соответствие

$$q : \gamma \mapsto \gamma \circ q \tag{10}$$

определяет действие группы $\mathrm{Gr}\,(\mathcal{P})$ на ростках в точке x_0 аналитических кривых в M.

Мы не будем изучать орбиты группы $\mathrm{Gr}\,(\mathcal{P})$ в бесконечномерном пространстве ростков кривых, вместо этого рассмотрим орбиты той же группы в пространствах n-струй кривых для $n = 1, 2, \ldots$ Напомним, что n-струей ростка $s \mapsto \gamma(s) \in M$, $\gamma(0) = x_0$, называется класс эквивалентности кривых, касающихся кривой γ при $s = 0$ с порядком касания не менее n. Для обозначения n-струи ростка γ используется символ $J^n\gamma$. В любых локальных координатах росток кривой на M отождествляется с ростком вектор-функции размерности $\dim M$, а n-струя — с отрезком ряда Тейлора длины n.

Параметризуя струи полиномами Тейлора, получаем естественную структуру $n \dim M$-мерного многообразия на пространстве всех n-струй кривых в точке x_0. Полученное многообразие n-струй кривых обозначим символом $C^n_{x_0}$, а символом

$$\mathrm{pr}_n : C^n_{x_0} \to C^{n-1}_{x_0}$$

обозначим каноническую проекцию многообразия n-струй на многообразие $(n-1)$-струй.

Многообразие $C^n_{x_0}$ диффеоморфно $n \dim M$-мерному линейному пространству, однако оно не обладает инвариантно определенной (т.е. не зависящей от выбора локальных координат в M) линейной структурой. Тем не менее некоторое подобие линейной структуры имеется и весьма полезное.

Пусть $c \in C^n_{x_0}$, $\xi \in T_{x_0}M$. Пусть, далее, росток кривой $s \mapsto \gamma(s) \in M$ и поток $s \mapsto q(s) \in \mathrm{Diff}\, M$ таковы, что

$$J^n\gamma = c, \qquad \mathrm{ord}\, q = n, \qquad x_0 \circ T_0 q = \xi.$$

Положим

$$c + \xi \stackrel{\text{def}}{=} J^n(\gamma \circ q) \in C^n_{x_0}.$$

Нетрудно видеть, что струя $c + \xi$ действительно зависит лишь от c и ξ, но не от выбора кривой γ и потока q. Кроме того, $\forall\, c \in C^n_{x_0}$ справедливы следующие соотношения:

(i) $(c+\xi_1)+\xi_2 = c+(\xi_1+\xi_2)\ \forall \xi_1,\xi_2 \in T_{x_0}M$;

(ii) $\mathrm{pr}_n(c) = \mathrm{pr}_n(c') \Leftrightarrow c' = c+\xi$ для некоторого $\xi \in T_{x_0}M$;

(iii) $c+\xi = c \Leftrightarrow \xi = 0$.

Соотношения (i)–(iii), как и тот факт, что $c+\xi$ гладко зависит от (c,ξ), доказываются выписыванием этих соотношений в произвольных локальных координатах. Подытоживая, получаем

П р е д л о ж е н и е 1. *Отображение*

$$(c,\xi) \mapsto c+\xi, \qquad c \in C^n_{x_0}, \qquad \xi \in T_{x_0}M$$

определяет структуру аффинного расслоения на многообразии $C^n_{x_0}$ со слоем $T_{x_0}M$, базой $C^{n-1}_{x_0}$ и отображением проекции

$$\mathrm{pr}_n : C^n_{x_0} \to C^{n-1}_{x_0}.$$

Подчеркнем, что определена лишь структура аффинного, а не линейного расслоения, т.е. начала координат в аффинных пространствах $c+T_{x_0}M$, $c \in C^n_{x_0}$, не фиксированы.

9. Рассмотрим действие группы потоков на $C^n_{x_0}$, индуцированное действием (10) этой группы на пространстве ростков кривых. Пусть $c \in C^n_{x_0}$, $s \mapsto q(s)$ — поток. Положим $c \circ q \overset{\mathrm{def}}{=} J^n(\gamma \circ q)$, где $s \mapsto \gamma(s)$, — кривая, удовлетворяющая условию $J^n\gamma = c$. Легко видеть, что $c \circ q$ зависит лишь от c и q, а не от выбора кривой γ.

Следующая теорема описывает структуру орбит группы $\mathrm{Gr}\,(\mathcal{P})$ в $C^n_{x_0}$ и является, таким образом, "струйным уточнением" теоремы 2. В пространстве $C^n_{x_0}$ есть выделенная точка — n-струя постоянной кривой $\gamma(s) \equiv x_0$. Заметим, что орбита этой выделенной струи совпадает с множеством

$$\{J^n(x_0 \circ q)|\ q \in \mathrm{Gr}\,(\mathcal{P})\}.$$

Орбита произвольной струи $c \in C^n_{x_0}$ обозначается $c \circ \mathrm{Gr}\,(\mathcal{P})$. Таким образом,

$$c \circ \mathrm{Gr}\,(\mathcal{P}) = \{c \circ q|\ q \in \mathrm{Gr}\,(\mathcal{P})\}.$$

Согласно определению отображение $\mathrm{pr}_n : C^n_{x_0} \to C^{n-1}_{x_0}$ эквивариантно: $\mathrm{pr}_n(c \circ q) = \mathrm{pr}_n(c) \circ q$.

Таким образом,

$$\mathrm{pr}_n(c \circ \mathrm{Gr}\,(\mathcal{P})) = \mathrm{pr}_n(c) \circ \mathrm{Gr}\,(\mathcal{P}).$$

Обозначим символом $\mathfrak{C}^n$ аффинное расслоение $\mathrm{pr}_n : C^n_{x_0} \to C^{n-1}_{x_0}$ со слоем $T_{x_0}M$ (см. предложение 1).

Т е о р е м а 3. *Пусть n — целое положительное число, $c \in C^n_{x_0}$,*

$$\mathcal{O}^n_c = c \circ \mathrm{Gr}\,(\mathcal{P}) \subset C^n_{x_0}, \qquad \mathcal{O}^{n-1}_c = \mathrm{pr}_n(c) \circ \mathrm{Gr}\,(\mathcal{P}) \subset C^{n-1}_{x_0};$$

$\mathfrak{C}^n|\mathcal{O}_c^{n-1}$ — сужение расслоения $\mathfrak{C}^n$ на подмногообразие $\mathcal{O}_c^{n-1}$ его базы. Тогда $\mathcal{O}_c^n$ есть тотальное пространство аффинного подрасслоения в $\mathfrak{C}^n|\mathcal{O}_c^{n-1}$ со слоем

$$x_0 \circ \Omega_n = \{x_0 \circ v |\ v \in \Omega_n\}.$$

Доказательство. Требуется доказать, что для любого $c' \in \mathcal{O}_c^n$ справедливо утверждение

$$(c' + \xi) \in \mathcal{O}_c^n \Leftrightarrow \xi \in x_0 \circ \Omega_n. \tag{11}$$

Пусть $\xi = x_0 \circ v$ для некоторого $v \in \Omega_n$. Согласно теореме 1 существует такой поток $q \in \mathrm{Gr}\,(\mathcal{P})$, что $\mathrm{ord}\, q = n$ и $T_0 q = v$. Непосредственно из определений получаем, что $c' \circ q = c + \xi$. Следовательно, $(c + \xi) \in \mathcal{O}_c^n$.

Обратно, предположим, что $(c' + \xi) \in \mathcal{O}_c^n$ для некоторого $\xi \in T_{x_0}M$. Тогда $c' + \xi = c' \circ q$ для некоторого $q \in \mathrm{Gr}\,(\mathcal{P})$. Поскольку $\mathrm{pr}_n(c' + \xi) = \mathrm{pr}_n(c')$, получаем, что

$$x_0 \circ q(s) = x_0 + s^n \xi + O(s^{n+1}).$$

Далее,

$$x_0 \circ q(s) = x_0 + \int_0^s x_0 \circ q(\tau) \circ \overrightarrow{\ln}\ q(\tau)\, d\tau.$$

Следовательно,

$$x_0 \circ \int_0^s \overrightarrow{\ln}\ q(\tau)\, d\tau = s^n \xi + O(s^{n+1}). \tag{12}$$

Лемма 5. *Для любого целого $n > 0$ справедливо равенство*

$$\Omega_n = \left\{ \frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}}\ \overrightarrow{\ln}\ q(s)\Big|_{s=0} \Big|\ q \in \mathrm{Gr}\,(\mathcal{P}) \right\}.$$

Доказательство. Включение Ω_n в множество, стоящее в правой части доказываемого равенства, следует из тождества (6), позволяющего вычислять $\overrightarrow{\ln}$ произведения потоков через $\overrightarrow{\ln}$ сомножителей. Обратное включение вытекает из теоремы 1.

Из равенства (12) и леммы 5 следует, что $\xi = x_0 \circ v$ для некоторого $v \in \Omega_n$.

Следствие. *В условиях теоремы* 3

$$\dim \mathcal{O}_c^n = \sum_{k=1}^n \dim (x_0 \circ \Omega_k).$$

Доказательство: индукция по n.

Поступило в январе 1994 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Аграчев А.А., Гамкрелидзе Р.В.* Экспоненциальное представление потоков и хронологическое исчисление //Мат. сб. 1978. Т. 208, № 4. С. 467–532.
2. *Agrachev A.A., Gamkrelidze R.V., Sarychev A.V.* Local invariants of smooth control systems //Acta appl. math. 1989. Vol. 14. P. 191–237.
3. *Agrachev A.A., Gamkrelidze R.V.* Local controlability for families of diffeomorphisms //System and Control Lett. 1992. Vol. 72. N 1. P. 29–45.
4. *Nagano T.* Linear differential systems with singularities and an application to transitive Lie algebras //J. Math. Soc. Jap. 1966. Vol. 18. P. 398–404.
5. *Sussmann H.T.* Orbits of families of vector fields and integrability of distributions //Trans. Amer. Math. Soc. 1973. Vol. 180. P. 171–188.