

Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Аграчев, Р. В. Гамквелидзе, Ряды Вольтерра
и группы подстановок, *Итоги науки и техн. Сер.
Соврем. пробл. мат. Нов. достиж.*, 1991, том 39, 3–
40

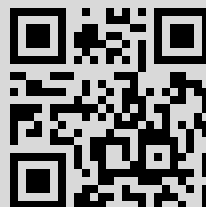
Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru
подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским согла-
шением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 95.129.140.250

17 ноября 2015 г., 14:03:30



РЯДЫ ВОЛЬТЕРРА И ГРУППЫ ПОДСТАНОВОК

А. А. Аграчев, Р. В. ГамкRELИдзе

§ 1. ВВЕДЕНИЕ. ВАРИАЦИИ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

1. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f_t(x), \quad x \in M,$$

на многообразии M класса C^∞ с фиксированным начальным условием $x(0) = x_0$ и затем возмутим эту систему, добавив к правой части векторное поле $\varepsilon g_t(x)$, где ε — малый параметр. Получаем систему

$$\dot{x} = f_t(x) + \varepsilon g_t(x), \quad x(0) = x_0. \quad (1.1)$$

Пусть $x_\varepsilon(t)$, $0 \leq t \leq 1$, — решение системы (1.1). Зададимся классическим вопросом: как найти касательную к кривой $\varepsilon \mapsto x_\varepsilon(1)$ при $\varepsilon = 0$. Ответ можно найти в любом учебнике по обыкновенным дифференциальным уравнениям: надо решить линейную систему уравнений в вариациях

$$\dot{\xi} = \frac{\partial f_t}{\partial x} \Big|_{x_0(t)} \xi + g_t(x_0(t)), \quad \xi(0) = 0.$$

Тогда $\xi(1)$ и есть искомым касательный вектор в том случае, когда $\xi(1) \neq 0$. Нас, однако, интересуют те наиболее интересные случаи, когда $\xi(1) = 0$. В этом случае требуется рассматривать высшие члены в разложении Тейлора кривой $\varepsilon \mapsto x_\varepsilon(1)$ (высшие вариации системы (1)). Однако, как известно, высшие члены разложения Тейлора не имеют инвариантного смысла: они корректно определены только в фиксированных локальных координатах. При нелинейных заменах координат различные члены ряда перемешиваются и могут возникать и исчезать в зависимости от выбора координат. В самом деле, очевидно всегда существуют локальные координаты, в которых отрезок данной гладкой кривой при $\varepsilon \geq 0$ представляется отрезком прямой.

Данный n -й член разложения Тейлора является корректно определенным касательным вектором лишь в том случае, когда все члены с меньшими номерами равны нулю.

Таким образом, мы должны сделать следующий вывод: n -й вариацией системы (1.1) является то, что остается от n -го члена разложения Тейлора кривой $\varepsilon \mapsto x_\varepsilon(1)$ в случае, когда все предыдущие члены равны нулю. Естественно, если начальная точка x_0 и поля f_t, g_t заданы, то вычислить первый ненулевой член разложения Тейлора — не проблема. Однако с изменением исходных данных номер первого ненулевого члена меняется. В то же время в теории важно иметь высшие вариации как некоторые универсальные формы, в которые можно подставлять исходные данные, не зная заранее, сколько членов разложения равны нулю.

Иными словами, n -я вариация — это то новое, что содержит n -й член разложения по сравнению с предыдущими. Одна из задач настоящей статьи — вычленив это новое так, чтобы высшие вариации могли, наконец, быть описаны в терминах конкретных математических структур. Дальнейшее исследование определяется характером этих структур.

2. Чтобы двигаться дальше, нам нужны некоторые обозначения и формулы хронологического исчисления. Они кратко описываются в настоящем пункте. Подробности см. в [1], [2]. Хронологическое исчисление — это вариант операционного исчисления, позволяющий, по крайней мере, при формальных вычислениях, работать с нелинейными динамическими системами как с линейными.

Пусть $C^\infty(M)$ — алгебра всех вещественных бесконечно дифференцируемых функций на M . Произвольную точку $x \in M$ отождествим с гомоморфизмом $\varphi \mapsto \varphi(x)$, $\varphi \in C^\infty(M)$, алгебры $C^\infty(M)$ в $\mathbb{R}$; диффеоморфизм $p: M \rightarrow M$ отождествляем с автоморфизмом алгебры $C^\infty(M)$, который получается, если произвольной функции на M сопоставить суперпозицию этой функции и p :

$$\varphi(\cdot) \mapsto \varphi(p(\cdot)) \quad \forall \varphi \in C^\infty(M).$$

Значение диффеоморфизма p в точке x обозначается $x \circ p$ — как композиция автоморфизма алгебры $C^\infty(M)$ и гомоморфизма этой алгебры в $\mathbb{R}$ (которая снова является гомоморфизмом $C^\infty(M)$ в $\mathbb{R}$).

Гладкие векторные поля на M отождествляются с дифференцированиями алгебры $C^\infty(M)$, т. е. $\mathbb{R}$ -линейными отображениями $f: C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$, удовлетворяющими правилу Лейбница: $f(\varphi_1 \varphi_2) = (f\varphi_1)\varphi_2 + \varphi_1(f\varphi_2)$. Скобка Ли $[f, g] = f \circ g - g \circ f$ определяет структуру алгебры Ли на пространстве всех гладких векторных полей $\text{Vect}(M)$. В локальных координатах $x = (x_1, \dots, x_n)$, в которых векторные поля имеют вид

$$f = \sum_{i=1}^m f^i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad g = \sum_{i=1}^n g^i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

скобки Ли вычисляются следующим образом:

$$[f, g] = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial g^i}{\partial x_j} f_j - \frac{\partial f^i}{\partial x_j} g_j \right) \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Касательные векторы $\xi \in T_x M$ — это $\mathbf{R}$ -линейные отображения $\xi: C^\infty(M) \rightarrow \mathbf{R}$, удовлетворяющие условию: $\xi(\varphi_1 \varphi_2) = (\xi \varphi_1) \varphi_2(x) + \varphi_1(x) (\xi \varphi_2)$. Значение поля f в точке x обозначается $x \cdot f$ — композиция оператора f и функционала x , являющаяся касательным вектором в точке x .

Всякий диффеоморфизм p (рассматриваемый как автоморфизм алгебры $C^\infty(M)$) определяет присоединенный автоморфизм $\text{Ad } p$ алгебры Ли $\text{Vect}(M)$, действующий по правилу $(\text{Ad } p)f = p \cdot f \cdot p^{-1}$. Заметим, что $\text{Ad } p^{-1}$ есть не что иное, как дифференциал p ; в более традиционных обозначениях $p_* = \text{Ad } p^{-1}$.

Наконец, для всякого $f \in \text{Vect}(M)$ через $\text{ad } f: \text{Vect}(M) \rightarrow \text{Vect}(M)$ обозначается, как обычно, операция лиевского умножения слева: $(\text{ad } f)g = [f, g]$.

В описанной системе обозначений диффеоморфизм, обозначаемый одним и тем же символом p , может рассматриваться и как гладкое преобразование многообразия и как линейный оператор на $C^\infty(M)$. Это, однако, не может привести к недоразумениям, т. к. в каждой формуле смысл символа однозначно восстанавливается по тому справа или слева от p ставится точка многообразия.

Алгебра $C^\infty(M)$ рассматривается со стандартной топологией сходимости всех производных на компактах. Эта топология определяется системой полунорм $\|\cdot\|_{N,K}$, $N \geq 0$, $K \subseteq M$, причем сходимость $\|f_n\|_{N,K} \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) означает равномерное на K стремление к нулю всех производных функции f до порядка N . Полунормы $\|\cdot\|_{N,K}$, в отличие от задаваемой ими топологии, не определены однозначно и могут быть выбраны разными способами. Будем, однако, считать, что выбор осуществлен и полунормы фиксированы раз и навсегда.

Для векторного поля $f \in \text{Vect}(M)$ определим полунормы

$$\|f\|_{N,K} = \sup \{ \|f\varphi\|_{N,K} \mid \|\varphi\|_{N+1,K} = 1 \}.$$

Нам постоянно приходится иметь дело с однопараметрическими семействами линейных операторов и функционалов на $C^\infty(M)$ или на $\text{Vect}(M)$.

Понятия непрерывности, суммируемости, дифференцируемости, абсолютной непрерывности и т. д. определяются «поточечно»: мы говорим, что семейство $A_t: C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ линейных операторов (или $A_t: C^\infty(M) \rightarrow \mathbf{R}$ линейных функционалов) обладает одним из перечисленных свойств, если этим свойством обладают семейства $t \mapsto A_t \varphi$ для любого $\varphi \in C^\infty(M)$ (под-

робности см. в [1], [2]). То же для семейств операторов и функционалов на $\text{Vect}(M)$.

Локально интегрируемые по $t \in \mathbb{R}$ семейства $f_t \in \text{Vect}(M)$ называются нестационарными векторными полями на M , а абсолютно непрерывные по t семейства диффеоморфизмов $p_t \in \text{Diff}(M)$ — (нестационарными) потоками на M .

Нестационарное векторное поле f_t , $t \in \mathbb{R}$ определяет обыкновенное дифференциальное уравнение $\frac{dx}{dt}(t) = x(t) \circ f_t$, $x \in M$.

Поле f_t называется полным, если все решения этого уравнения определены при всех $t \in \mathbb{R}$. Всякое полное поле f_t порождает поток p_t , $t \in \mathbb{R}$, — единственное абсолютно непрерывное решение операторного уравнения

$$\frac{d}{dt} p_t = p_t \circ f_t, \quad p_0 = \text{id}, \quad (1.2)$$

где id — тождественный оператор (тождественный диффеоморфизм M). Этот поток мы называем правой хронологической экспонентой от f_t и обозначаем его $p_t = \exp \int_0^t f_\tau d\tau$. Имеется асимптотическое представление хронологической экспоненты в виде т. н. ядра Вольтерра:

$$\exp \int_0^t f_\tau d\tau \approx \text{id} + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Delta^n(t)} \dots \int f_{\tau_n} \circ \dots \circ f_{\tau_1} d\tau_1 \dots d\tau_n, \quad (1.3)$$

где $\Delta^n(t) = \{(\tau_1, \dots, \tau_n) | 0 \leq \tau_n \leq \dots \leq \tau_1 \leq t\}$ (при $t=1$ ниже будет использоваться сокращенное обозначение $\Delta^n(1) = \Delta^n$).

Остаточный член в асимптотическом разложении (1.3) оценивается следующим образом:

$$\left\| \left(\exp \int_0^t f_\tau d\tau - \text{id} - \sum_{i=1}^{n-1} \int_{\Delta^i(t)} \dots \int f_{\tau_i} \circ \dots \circ f_{\tau_1} d\tau_1 \dots d\tau_i \right) \varphi \right\|_{N,K} \leq c_1 e^{c_2 \int_0^t \|f_\tau\|_{N,K'} d\tau} \left(\int_0^t \|f_\tau\|_{N+n-1,K'} d\tau \right)^n \|\varphi\|_{n+N,K'}, \quad (1.4)$$

где K' — некоторая (компактная) окрестность компакта K , а c_1, c_2 не зависят ни от f_τ , ни от $\varphi \in C^\infty(M)$.

Если $p_t = \exp \int_0^t f_\tau d\tau$, то p_t^{-1} удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{dt} p_t^{-1} = -f_t \circ p_t^{-1}, \quad p_0^{-1} = \text{id}.$$

Более того, поток p_t^{-1} , $t \in \mathbb{R}$, является единственным абсолютно непрерывным по t решением операторного уравне-

ния $\frac{d}{dt} Q_t = -f_t \circ Q_t$ с начальным условием $Q_0 = \text{id}$. Мы называем этот поток левой хронологической экспонентой от $(-f_t)$ и обозначаем его $p_t^{-1} = \overleftarrow{\exp} \int_0^t -f_\tau d\tau$. Имеется асимптотическое разложение

$$\overleftarrow{\exp} \int_0^t -f_\tau d\tau \approx \text{id} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \int_{\Delta^n(t)} \dots \int f_{t_1} \circ \dots \circ f_{t_n} dt_1 \dots dt_n$$

с

оценкой остаточного члена, аналогичной (1.4).

Далее, семейство операторов $\text{Ad } p_t: \text{Vect}(M) \rightarrow \text{Vect}(M)$, $t \in \mathbb{R}$, удовлетворяет уравнению $\frac{d}{dt} \text{Ad } p_t = \text{Ad } p_t \circ \text{ad } f_t$.

В самом деле,

$$\frac{d}{dt} (\text{Ad } p_t) g = \frac{d}{dt} (p_t \circ g \circ p_t^{-1}) = p_t (f_t \circ g - g \circ f_t) p_t^{-1} = \text{Ad } p_t [f_t, g].$$

Более того, семейство $\text{Ad } p_t$ является единственным решением операторного уравнения $\frac{d}{dt} \mathcal{P}_t = \mathcal{P}_t \circ \text{ad } f_t$ с начальным условием $\mathcal{P}_0 = \text{Id}$, и потому является естественным следующее обозначение:

$$\text{Ad} \left(\overrightarrow{\exp} \int_0^t f_\tau d\tau \right) = \overrightarrow{\exp} \int_0^t \text{ad } f_\tau d\tau.$$

Имеется асимптотическое разложение

$$\text{Ad} \left(\overrightarrow{\exp} \int_0^t f_\tau d\tau \right) \approx \text{Id} + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Delta^n(t)} \dots \int \text{ad } f_{\tau_n} \circ \dots \circ \text{ad } f_{\tau_1} d\tau_1 \dots d\tau_n \quad (1.5)$$

с оценкой остаточного члена, аналогичной (1.4). Для стационарного поля $f_t \equiv f$ используется традиционное обозначение

$$\overrightarrow{\exp} \int_0^t f d\tau = \overleftarrow{\exp} \int_0^t f d\tau = e^{tf}.$$

Пусть $f_t, f_t + g_t$ — полные нестационарные поля. Справедлива следующая «формула вариации» (которая является прямым обобщением формулы вариации постоянной Лагранжа)

$$\overrightarrow{\exp} \int_0^t (f_\tau + g_\tau) d\tau = \overrightarrow{\exp} \int_0^t \left(\overrightarrow{\exp} \int_0^\tau \text{ad } f_\theta d\theta g_\tau \right) d\tau \overrightarrow{\exp} \int_0^t f_\tau d\tau. \quad (1.6)$$

В самом деле, положим

$$\begin{aligned} C_t &= \overrightarrow{\exp} \int_0^t f_\tau + g_\tau d\tau \circ \left(\overrightarrow{\exp} \int_0^t f_\tau d\tau \right)^{-1} = \\ &= \overrightarrow{\exp} \int_0^t f_\tau + g_\tau d\tau \circ \overleftarrow{\exp} \int_0^t -f_\tau d\tau. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} C_t &= \overrightarrow{\exp} \int_0^t (f_\tau + g_\tau) d\tau \circ g_t \circ \overleftarrow{\exp} \int_0^t -f_\tau d\tau = C_t \circ \text{Ad} \left(\overrightarrow{\exp} \int_0^t f_\tau d\tau \right) g_t = \\ &= C_t \overrightarrow{\exp} \int_0^t \text{ad } f_\tau d\tau g_t, \quad C_0 = \text{id}. \end{aligned}$$

Следовательно, $C_t = \overrightarrow{\exp} \int_0^t \left(\overrightarrow{\exp} \int_0^\tau \text{ad } f_\theta d\theta g_\tau \right) d\tau$. Используя формулу вариаций, легко найти производные по направлениям отображения $\overrightarrow{\exp}$, сопоставляющего нестационарному полю поток на M . Именно, пусть $p_t(\varepsilon) = \overrightarrow{\exp} \int_0^t (f_\tau + \varepsilon g_\tau) d\tau$, $\varepsilon \in \mathbf{R}$. Тогда

$$\begin{aligned} p_t(\varepsilon + \varepsilon') &= \overrightarrow{\exp} \int_0^t \varepsilon' (\text{Ad } p_\tau(\varepsilon)) g_\tau d\tau \circ p_t(\varepsilon) = \\ &= \left(\text{id} + \varepsilon' \int_0^t (\text{Ad } p_\tau(\varepsilon)) g_\tau d\tau + \dots \right) \circ p_t(\varepsilon). \end{aligned}$$

Соответственно,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} p_t(\varepsilon) &= \int_0^t (\text{Ad } p_\tau(\varepsilon)) g_\tau d\tau \circ p_t(\varepsilon) = \\ &= \int_0^t \overrightarrow{\exp} \int_0^\tau \text{ad } (f_\theta + \varepsilon g_\theta) d\theta g_\tau d\tau \circ p_t(\varepsilon) = \\ &= p_t(\varepsilon) \circ \int_0^t (\text{Ad } p_\tau^{-1}(\varepsilon) \circ p_\tau(\varepsilon)) g_\tau d\tau = \\ &= p_t(\varepsilon) \circ \int_0^t \overleftarrow{\exp} \int_\tau^t -\text{ad } (f_\theta + \varepsilon g_\theta) d\theta g_\tau d\tau. \end{aligned} \tag{1.7}$$

3. Вернемся к системе (1.1). В соответствии с формулой вариаций получаем

$$x_\varepsilon(1) = x_0 \circ \overrightarrow{\exp} \int_0^1 (f_t + \varepsilon g_t) dt = x_0 \circ \overrightarrow{\exp} \int_0^1 \varepsilon h_t dt \circ \overrightarrow{\exp} \int_0^1 f_t dt,$$

где

$$h_t = \left(\text{Ad} \overrightarrow{\exp} \int_0^t f_\tau d\tau \right) g_t = \overrightarrow{\exp} \int_0^t \text{ad } f_\tau d\tau g_t.$$

Положим $q(\varepsilon) = x_0 \circ \overrightarrow{\exp} \int_0^1 \varepsilon h_t dt$, тогда $x_\varepsilon(1) = q(\varepsilon) \circ \overrightarrow{\exp} \int_0^1 f_t dt$.

Поскольку диффеоморфизм $\overrightarrow{\exp} \int_0^1 f_t dt$ не зависит от ε , мы вправе не обращать на него внимание и вместо кривой $x_\varepsilon(1)$ изучать кривую $q(\varepsilon)$, отвечающую однородной по ε системе

$$\dot{x} = \varepsilon x \circ h_t, \quad x(0) = x_0. \quad (1.8)$$

Имеем

$$q(\varepsilon) = x_0 \left(\text{id} + \varepsilon \int_0^1 h_t dt + \varepsilon^2 \int_{\Delta^2} h_{t_2} \circ h_{t_1} dt_1 dt_2 + \dots \right). \quad (1.9)$$

Следовательно, первой вариацией системы (1.8) является касательный вектор $x_0 \circ \int_0^1 h_t dt$.

Коэффициент при ε^2 в разложении (1.9) есть композиция x_0 с дифференциальным оператором второго порядка, т. е. никак не касательный вектор. Однако в соответствии с общим законом, этот коэффициент должен совпадать с некоторым касательным вектором в точке x_0 в случае, когда $x_0 \circ \int_0^1 h_t dt = 0$. Легко найти явное выражение этого касательного вектора через h_t . В самом деле,

$$\begin{aligned} \int_{\Delta^2} h_{t_2} \circ h_{t_1} dt_1 dt_2 &= \int_{\Delta^2} (h_{t_2} \circ h_{t_1} + h_{t_1} \circ h_{t_2}) dt_1 dt_2 + \\ &+ \int_{\Delta^2} [h_{t_2}, h_{t_1}] dt_1 dt_2 = \\ &= \left(\int_0^1 h_t dt \right) \circ \left(\int_0^1 h_t dt \right) + \int_{\Delta^2} [h_{t_2}, h_{t_1}] dt_1 dt_2. \end{aligned}$$

Коммутатор векторных полей $[h_{t_2}, h_{t_1}]$ — снова векторное поле. Следовательно, искомым касательный вектор имеет вид

$$\frac{1}{2} x^0_0 \int_{\Delta^2} [h_{t_2}, h_{t_1}] dt_1 dt_2. \quad (1.10)$$

Заметим, что выражение (1.10) — вторая вариация системы (1.8) — есть корректно определенный касательный вектор независимо от того, равна ли нулю первая вариация.

Естественно предположить, что в любом случае векторное поле $\int_{\Delta^2} [h_{t_2}, h_{t_1}] dt_1 dt_2 = \int_0^1 \left[\int_0^t h_\tau d\tau, h_t \right] dt$ несет важную информацию, если не о кривой $q(\varepsilon)$ в M , то, по крайней мере, о кривой $\varepsilon \mapsto Q(\varepsilon) = \exp \int_0^1 \varepsilon h_t dt$ в группе диффеоморфизмов $\text{Diff}(M)$. Именно наличие групповой структуры в $\text{Diff } M$ приводит к дополнительным инвариантам, отличным от касательного вектора к кривой.

Рассмотрим логическую цепочку:

$$\left[\int_0^t h_\tau d\tau, h_t \right] = 0, 0 \leq t \leq 1, \Rightarrow$$

$\varepsilon \mapsto \exp \int_0^1 \varepsilon h_t dt$ — однопараметрическая подгруппа в $\text{Diff } M \Leftrightarrow$

$\exp \int_0^1 \varepsilon h_t dt = e^{\int_0^1 \varepsilon h_t dt}, \varepsilon \in \mathbb{R}$, и никаких вариаций, кроме первой, нет

(если первая вариация равна нулю, то и все остальные тоже).

Первую импликацию обратить нельзя. Условие

$\left[\int_0^t h_\tau d\tau, h_t \right] \equiv 0, 0 \leq t \leq 1$, очень жесткое, из него следует,

что все кривые $\varepsilon \mapsto \exp \int_0^t \varepsilon h_\tau d\tau, t \in [0, 1]$, являются однопараметрическими подгруппами. Ее можно обратить лишь частично:

$$\exp \int_0^1 \varepsilon h_t dt = e^{\int_0^1 \varepsilon h_t dt}, \varepsilon \in \mathbb{R}, \Rightarrow \int_0^1 \left[\int_0^t h_\tau d\tau, h_t \right] dt = 0.$$

Таким образом, вторая вариация является первым препятствием к тому, чтобы кривая $\varepsilon \mapsto \exp \int_0^1 \varepsilon h_t dt$ была однопараметрической подгруппой.

4. Способ представления и интерпретация второй вариации может быть распространен и на высшие вариации. Именно, третий член ряда Вольтерра может быть представлен в виде некоторого коммутаторного выражения от исходного нестационарного поля h_t плюс полином от первых двух членов. Естественно, это коммутаторное выражение, вычисленное в точке x_0 , представляет третью вариацию. Кроме того, соответствующее векторное поле является препятствием к тому, чтобы кривая

$\varepsilon \mapsto \exp \int_0^1 \varepsilon h_t dt$ лежала в подгруппе, порожденной однопарамет-

рическими группами $e^{\int_0^1 \varepsilon_1 h_t dt}$, $e^{\int_0^1 \left[\int_0^t h_\tau d\tau, h_t \right] dt}$.

Так же и произвольный n -й член ряда Вольтерра представляется в виде суммы векторного поля — коммутаторного выражения степени n от h_t — и полинома от первых $n-1$ членов ряда. Это векторное поле является препятствием к тому, чтобы кривая

$$\varepsilon \mapsto Q(\varepsilon) = \exp \int_0^1 \varepsilon h_t dt$$

лежала в группе, порожденной однопараметрическими подгруппами отвечающими предыдущим $n-1$ полям.

Самый простой способ найти нужные коммутаторные выражения — это, используя формулу вариаций, представить $Q(\varepsilon)$ в виде хронологической экспоненты по ε (т. е. взяв параметр ε в качестве нового «времени»), от некоторого «нестационарного» (т. е. зависящего от ε) векторного поля.

В самом деле,

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} Q(\varepsilon) = \overleftarrow{\omega}(\varepsilon) \circ Q(\varepsilon) = Q(\varepsilon) \circ \overrightarrow{\omega}(\varepsilon),$$

где

$$\overleftarrow{\omega}(\varepsilon) = \int_0^1 \exp \int_0^t \varepsilon \operatorname{ad} h_\tau d\tau h_t dt \quad (\text{см. (1.7)}),$$

$$\overrightarrow{\omega}(\varepsilon) = \operatorname{Ad} Q^{-1}(\varepsilon) \overleftarrow{\omega}(\varepsilon) = \int_0^1 \exp \int_t^1 -\varepsilon \operatorname{ad} h_\tau d\tau h_t dt.$$

Пусть

$$\overleftarrow{\omega}(\varepsilon) \approx \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^{n-1} \overleftarrow{\omega}^n, \quad \overrightarrow{\omega}(\varepsilon) \approx \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^{n-1} \overrightarrow{\omega}^n$$

— разложения $\overleftarrow{\omega}(\varepsilon)$ и $\overrightarrow{\omega}(\varepsilon)$ в ряд по степеням ε . Имеем

$$\overleftarrow{\omega}_n = \int_{\Delta^n} \dots \int \text{ad } h_{t_n} \dots \text{ad } h_{t_2} h_{t_1} dt_1 \dots dt_n,$$

$$\overrightarrow{\omega}_n = (-1)^{n-1} \int_{\Delta^n} \dots \int \text{ad } h_{t_1} \dots \text{ad } h_{t_{n-1}} h_{t_n} dt_1 \dots dt_n.$$

Поскольку

$$Q(\varepsilon) = \exp \int_0^\varepsilon \overleftarrow{\omega}(\varepsilon') d\varepsilon' = \exp \int_0^\varepsilon \overrightarrow{\omega}(\varepsilon') d\varepsilon',$$

то, согласно (1.3), n -й член разложения $Q(\varepsilon)$ в ряд по степеням ε равен $\frac{1}{n} \overrightarrow{\omega}_n$ плюс некоторый полином от $\overrightarrow{\omega}_1, \dots, \overrightarrow{\omega}_{n-1}$, а также $\frac{1}{n} \overleftarrow{\omega}_n$ плюс (вообще говоря, другой) полином от $\overleftarrow{\omega}_1, \dots, \overleftarrow{\omega}_{n-1}$. Таким образом, и векторное поле $\frac{1}{n} \overrightarrow{\omega}_n$, и поле $\frac{1}{n} \overleftarrow{\omega}_n$ представляют n -ю вариацию системы (1.8).

При $n=1, 2$ векторные поля $\overrightarrow{\omega}_n$ и $\overleftarrow{\omega}_n$ совпадают, однако при $n \geq 3$ это не так, и мы имеем два разных представлений n -й вариации. В этом нет ничего странного, в действительности, допустимых представлений очень много: если к одному представлению n -й вариации добавить произвольный коммутаторный полином от каких-нибудь представлений первых $n-1$ вариаций, то мы снова получим коммутаторное выражение, представляющее n -ю вариацию. Например,

$$\overrightarrow{\omega}_3 = \overleftarrow{\omega}_3 + \frac{1}{2} [\overleftarrow{\omega}_2, \overleftarrow{\omega}_1].$$

Иными словами, получается целая алгебра Ли вариаций и остается еще задача вычленить то общее, что есть у различных коммутаторных представлений одной и той же вариации. Глухой намек на то, что здесь возможна содержательная теория, дает сравнение $\overleftarrow{\omega}_n$ с $\overrightarrow{\omega}_n$. Одно представление n -й вариации получается из другого инверсией переменных у подынтегрального выражения и умножением на $(-1)^{n-1}$. Одной из главных целей настоящей статьи является описание всех симметрий, преобразующих представления n -й вариации снова в (вообще говоря, другие) представления n -й вариации.

5. Выше уже отмечалось, что наличию инфинитезимальных инвариантов кривой $Q(\varepsilon)$, отличных от касательного вектора к этой кривой, мы обязаны тем, что $Q(\varepsilon)$ — кривая на группе (группе диффеоморфизмов). В настоящем пункте вводятся основные для данной работы понятия вариационной группы и алгебры Ли вариаций произвольной кривой на группе диф-

феоморфизмов и дается точное определение высших вариаций такой кривой.

Пусть $R(\varepsilon)$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$, — гладкая кривая на группе диффеоморфизмов, $R(\varepsilon) \in \text{Diff}(M)$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $R(0) = \text{id}$. Напомним, что диффеоморфизмы для нас — это автоморфизмы алгебры $C^\infty(M)$ (см. п. 2). Тогда $\frac{d^n}{d\varepsilon^n} R(0)$ есть дифференциальный оператор порядка $\leq n$ на M , действующий по правилу

$$\varphi \mapsto \frac{d^n}{d\varepsilon^n} (R(\varepsilon)\varphi)|_{\varepsilon=0} \quad \forall \varphi \in C^\infty(M).$$

В дальнейшем используется сокращенное обозначение $R^{(n)} = \frac{d^n}{d\varepsilon^n} R(0)$.

Пусть $n_0 > 0$ — наименьшее среди таких n , что $R^{(n)} \neq 0$.

Легко видеть, что в этом случае $R^{(n_0)}$ — векторное поле (оператор, удовлетворяющий правилу Лейбница дифференцирования произведения). Векторное поле $\frac{1}{n_0!} R^{(n_0)}$ называется касательным к кривой $R(\varepsilon)$ при $\varepsilon=0$ и обозначается

$$TR(0) = \frac{1}{n_0!} R^{(n_0)}.$$

Тогда $R(\varepsilon) \approx \text{id} + \varepsilon n_0 TR(0) + O(\varepsilon^{n_0+1})$. Число n_0 называется порядком касания поля $TR(0)$ кривой $R(\varepsilon)$,

$$n_0 = \text{ord}(TR(0)).$$

Далее положим

$$\rho(\varepsilon) = \left(\frac{d}{d\varepsilon} R(\varepsilon) \right) \circ R(\varepsilon)^{-1} \in \text{Vect}(M)$$

и

$$\rho^{(n)} = \frac{d^n}{d\varepsilon^n} \rho(0) \frac{1}{n!}, \quad n \geq 0.$$

Совокупность всех кривых в группе $\text{Diff}(M)$ сама является группой, если произведение кривых определять поточечно:

$$(R' \circ R'')(\varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} R'(\varepsilon) \circ R''(\varepsilon).$$

Обозначим через $\mathcal{R}$ подгруппу в группе кривых на $\text{Diff}(M)$, порожденную кривыми $\varepsilon \mapsto R(\alpha\varepsilon^n)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $n=1, 2, \dots$

Предложение 1. Следующие два множества совпадают:

- 1) $\{TS(0) \mid S(\cdot) \in \mathcal{R}\}$;
- 2) $\{\text{Lie}\{\rho^{(n)}; n \geq 0\}\}$ — подалгебра Ли в $\text{Vect}(M)$, порожденная полями $\rho^{(n)}$.

Доказательство. Сначала докажем, что

$$\{TS(0) \mid S(\cdot) \in \mathcal{R}\} \subset \text{Lie}\{\rho^{(n)}, n \geq 0\}. \quad (1.11)$$

Положим

$$\widetilde{\text{In}} S(\varepsilon) = \left(\frac{d}{d\varepsilon} S(\varepsilon) \right) \circ S(\varepsilon)^{-1} \in \text{Vect}(M).$$

Тогда

$$S(\varepsilon) \leftarrow \exp \int_0^\varepsilon \overleftarrow{\ln} S(\tau) d\tau \quad \forall S(\varepsilon)$$

и

$$\overleftarrow{\ln} R(\alpha\varepsilon) = \alpha\rho(\alpha\varepsilon).$$

Включение (1.11) вытекает из следующих двух утверждений, первое из которых является следствием разложения Вольтерра (1.3), а второе — следствием формулы вариации (1.6) и разложения (1.5).

i) $\frac{\varepsilon}{n} \overleftarrow{\ln} S(\varepsilon) - \varepsilon^n TS(0) = O(\varepsilon^{n+1})$, где $n = \text{ord } TS(0)$ для любой гладкой кривой $S(\varepsilon)$.

$$\text{ii) } \overleftarrow{\ln}(S_1(\varepsilon) \circ S_2^{-1}(\varepsilon)) = \overleftarrow{\ln} S_1(\varepsilon) - \exp \int_0^\varepsilon -\text{ad } \overleftarrow{\ln} S_1(\tau) d\tau \overleftarrow{\ln} S_2(\varepsilon).$$

Перейдем к доказательству включения

$$\text{Lie}\{\rho^{(n)}, n \geq 0\} \subset \{TS(0) \mid S(\cdot) \in \mathcal{R}\}.$$

Прежде всего, покажем, что множество, стоящее в правой части этого включения, является подалгеброй Ли в $\text{Vect}(M)$. Последнее является следствием того, что $\mathcal{R}$ — некоторая группа кривых. В самом деле,

$$T(S_1 \circ S_2)(0) = TS_1(0) + TS_2(0), \quad TS^{-1}(0) = -TS(0), \\ TS(\alpha \cdot 0) = \alpha^{\text{ord } TS(0)} TS(0),$$

где через $TS(\alpha \cdot 0)$ условно обозначается касательное поле к кривой $\varepsilon \mapsto S(\alpha\varepsilon)$; наконец, если $\text{ord } TS_1(0) = \text{ord } TS_2(0) = n$, то

$$T(S_1 \circ S_2 \circ S_1^{-1} \circ S_2^{-1})(0) = [TS_1(0), TS_2(0)], \\ \text{ord } T(S_1 \circ S_2 \circ S_1^{-1} \circ S_2^{-1})(0) = 2n.$$

Осталось доказать, что $\rho^{(n)} \in \{TS(0) \mid S(\cdot) \in \mathcal{R}\}$, зная уже, что $\{TS(0) \mid S(\cdot) \in \mathcal{R}\}$ есть подалгебра Ли в $\text{Vect}(M)$.

Имеем $\rho^{(0)} = TR(0)$. Далее,

$$\overleftarrow{\ln}\left(R\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \circ R^{-1}(\varepsilon) \circ R\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\right) = \sum_{k=1}^{\infty} ((2^{-k} - 1)\rho_k + \pi_k^1(\rho_0, \dots, \rho_{k-1}))\varepsilon^k,$$

где π_k^1 — некоторый коммутаторный полином от $\rho_0, \dots, \rho_{k-1}$, $k = 1, 2, \dots$. Это легко следует из формулы вариаций и разложения (1.5). Следовательно, касательное поле к кривой $\varepsilon \mapsto R\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \circ R^{-1}(\varepsilon) \circ R\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ равно $-\frac{1}{4}\rho_1$ (см. i)). Далее продолжаем в том же духе, используя индукцию по порядку касания. Пусть

$S(\cdot) \in \mathcal{R}$ — такая кривая, что $\overleftarrow{\text{In}} S(\varepsilon) = \sum_{k=n-1}^{\infty} \varepsilon^k \vartheta_k$. Тогда

$$\begin{aligned} & \overleftarrow{\text{In}} \left(S \left(2^{-\frac{1}{n}} \varepsilon \right) \circ S^{-1}(\varepsilon) \circ S \left(2^{-\frac{1}{n}} \varepsilon \right) \right) = \\ & = \sum_{k=n}^{\infty} \left(\left(2^{\frac{n-k-1}{n}} - 1 \right) \vartheta_k + \pi_k^n(\vartheta_{n-1}, \dots, \vartheta_{k-1}) \varepsilon^k, \right. \end{aligned}$$

где π_k^n — коммутаторные полиномы от $\vartheta_{n-1}, \dots, \vartheta_{k-1}$. В частности, касательное поле к кривой $\varepsilon \mapsto S \left(2^{-\frac{1}{n}} \varepsilon \right) \circ S^{-1}(\varepsilon) \circ S \left(2^{-\frac{1}{n}} \varepsilon \right)$ равно $\frac{2^{-\frac{1}{n}} - 1}{n+1} \vartheta_n$ (см. *l*). ■

Определение. Вариационной группой кривой $\varepsilon \mapsto R(\varepsilon)$ в $\text{Diff}(M)$ называется подгруппа в $\text{Diff}(M)$, порожденная диффеоморфизмами $R(\varepsilon)$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$, — «точками» кривой $R(\cdot)$.

Заметим, что вариационная группа кривой $R(\cdot)$ совпадает с $\{S(\varepsilon) \mid S(\cdot) \in \mathcal{R}\}$ для любого $\varepsilon \in \mathbb{R}$.

Определение. Алгеброй Ли вариаций кривой $\varepsilon \mapsto R(\varepsilon)$ называется подалгебра Ли $\{TS(0) \mid S(\cdot) \in \mathcal{R}\}$ в $\text{Vect}(M)$.

Замечание. В том случае, когда кривая $R(\cdot)$ такова, что ее вариационная группа — конечномерная группа Ли, а сама $R(\cdot)$ — аналитическая кривая на этой группе, алгебра Ли вариаций есть, по-просту, алгебра Ли вариационной группы.

Между тем, алгебра Ли вариаций корректно определена и в общей бесконечномерной ситуации, когда стандартная теория Ли не действует.

Заметим также, что вариационные группы и алгебры Ли вариаций могут быть естественным образом определены и удовлетворительно описаны не только для кривых в $\text{Diff}(M)$, но и для отображений $\mathbb{R}^k$ в $\text{Diff}(M)$, $k > 1$. Однако в настоящей работе эти объекты не используются, и мы отложим их описание до последующих публикаций.

Учитывая не только касательные поля к кривым из $\mathcal{R}$, но и порядки касания, получаем естественную неубывающую фильтрацию алгебры Ли вариаций подалгебрами Ли, порожденными, полями, имеющими порядок касания не больше n , $n = 1, 2, \dots$. Анализ доказательства предложения 1 показывает, что справедливо следующее

Предложение 2. Для любого $n \geq 1$ справедливо равенство

$$\text{Lie}\{TS(0) \mid S(\cdot) \in \mathcal{R}, \text{ord} TS(0) \leq n\} = \text{Lie}\{\rho^{(0)}, \dots, \rho^{(n-1)}\}.$$

Теперь мы готовы, наконец, дать точное определение высших вариаций кривой $R(\cdot)$.

Определение. Вариацией порядка $n > 0$ кривой $\varepsilon \mapsto R(\varepsilon)$ в $\text{Diff}(M)$ называется образ векторного поля $\frac{1}{n} \rho^{(n-1)}$ при канонической факторизации

$$\{TS(0) | S(\cdot) \in \mathcal{R}\} \rightarrow \{TS(0) | S(\cdot) \in \mathcal{R}\} / \text{Lie}\{TS(0) | S(\cdot) \in \mathcal{R}, \text{ord } TS(0) > n\}.$$

Пусть $x \in M$, и $n(x)$ — наименьшее такое n , что $\frac{d^n}{d\varepsilon^n} x \circ R(0) \neq 0$. Тогда

$$x \circ R(\varepsilon) = x + \frac{\varepsilon^n}{n(x)} \rho^{(n(x)-1)} + O(\varepsilon^{n+1}).$$

В то же время, $x \circ \rho^{(k)} = 0$ при $k < n - 1$ и, следовательно,

$$\begin{aligned} 0 &= x \circ \text{Lie}\{\rho^{(0)}, \dots, \rho^{(n(x)-2)}\} = \\ &= x \circ \text{Lie}\{TS(0) | S(\cdot) \in \mathcal{R}, \text{ord } TS(0) < n(x)\}. \end{aligned}$$

Эти соотношения объясняют определение высших вариаций.

На этом мы заканчиваем рассмотрение произвольной кривой в группе диффеоморфизмов и возвращаемся к возмущениям динамических систем и порождаемым ими асимптотическим разложениям (см. (1.1), (1.8), (1.9)). Вариационной группой, алгеброй Ли вариаций и вариациями системы (1.8) (а также системы (1.1)) мы называем соответствующие объекты для кривой

$$\varepsilon \mapsto \exp \int_0^1 \varepsilon h_t dt \text{ в } \text{Diff}(M)$$

§ 2. ТАСОВОЧНАЯ АЛГЕБРА. АБСТРАКТНЫЕ ВАРИАЦИОННАЯ ГРУППА И АЛГЕБРА ЛИ ВАРИАЦИЙ

1. При изучении вариационной группы и алгебры Ли вариаций волей неволей приходится иметь дело с произведениями нескольких рядов Вольтерра вида (1.3). Для работы с этими объектами используется так называемое тасовое умножение.

Пусть $p_n : (t_1, \dots, t_n) \mapsto p_n(t_1, \dots, t_n)$, $n = 0, 1, 2, \dots$ — локально суммируемые отображения из $\mathbb{R}^n$ в ассоциативную алгебру дифференциальных операторов на M . Формальный степенной ряд от переменной s

$$p_0 + \sum_{n=1}^{\infty} s^n \int_{\Delta^n} \dots \int p_n(t_1, \dots, t_n) dt_1 \dots dt_n$$

называется хронологическим рядом (определяемым последовательностью p_n).

Произведение нескольких хронологических рядов содержит уже интегралы по произведениям симплексов:

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{n=0}^{\infty} s^n \int_{\Delta^n} \dots \int p_n^l(t_1, \dots, t_n) dt_1 \dots dt_n \right) \circ \dots \\ & \dots \circ \left(\sum_{n=0}^{\infty} s^n \int_{\Delta^n} \dots \int p_n^l(t_1, \dots, t_n) dt_1 \dots dt_n \right) = \\ & = \sum_{n=0}^{\infty} s^n \sum_{k_1 + \dots + k_l = n} \int_{\Delta^{k_1} \times \dots \times \Delta^{k_l}} \dots \int_{k_l}^l \bigotimes_{i=1}^l p_{k_i}^l(t_1, \dots, t_n) dt_1 \dots dt_n, \end{aligned}$$

где

$$\bigotimes_{i=1}^l p_{k_i}^l(t_1, \dots, t_n) = p_{k_1}^l(t_1, \dots, t_{k_1}) \circ \dots \circ p_{k_l}^l(t_{n-k_{l-1}}, \dots, t_n).$$

Для того, чтобы представить такой ряд в виде хронологического ряда, достаточно взять триангуляции произведений нескольких симплексов, не добавляя новых вершин, а затем линейно отобразить каждый симплекс триангуляции на стандартный симплекс, сделав подходящую подстановку переменных интегрирования.

Пусть Σ_n — группа всех подстановок n -элементного множества и $T \subset \{1, \dots, n\}$. Введем обозначение

$$S_n(T) = \{ \sigma \in \Sigma_n \mid \sigma(i) < \sigma(i+1) \ \forall i \in \{1, \dots, n\} \setminus T \}.$$

Будет использоваться также упрощенное обозначение

$$S_n(k_1, \dots, k_l) = S_n(\{k_1, k_1 + k_2, \dots, n - k_l\}),$$

где $n = \sum_{i=1}^l k_i$.

Наконец, для любой подстановки $\sigma \in \Sigma_n$ и вектор-функции $q(t_1, \dots, t_n)$ положим $\sigma q(t_1, \dots, t_n) = q(t_{\sigma(1)}, \dots, t_{\sigma(n)})$. Легко видеть, что $(\nu \circ \sigma)q = \nu(\sigma q)$, где $\nu \circ \sigma$ — произведение (композиция) подстановок.

Можно показать, что

$$\begin{aligned} & \int_{\Delta^{k_l} \times \dots \times \Delta^{k_l}} \dots \int q(t_1, \dots, t_n) dt_1 \dots dt_n = \\ & = \int_{\Delta^n} \dots \int \sum_{\sigma \in S_n(k_1, \dots, k_l)} \sigma q(t_1, \dots, t_n) dt_1 \dots dt_n \end{aligned}$$

для любой суммируемой q .

Определение. Тасующим произведением вектор-функций $p'_k(t_1, \dots, t_k)$ и $p''_{n-k}(t_1, \dots, t_{n-k})$ называется вектор-функция

$$p'_k \text{ ш } p''_{n-k}(t_1, \dots, t_n) = \sum_{\sigma \in S_n(k)} \sigma(p'_k \otimes p''_{n-k})(t_1, \dots, t_n).$$

Нетрудно показать, что тасующее умножение является ассоциативной операцией, при этом

$$p^i_{k_1} \text{ ш } \dots \text{ ш } p^i_{k_l} = \sum_{\sigma \in S_n(k_1, \dots, k_l)} \sigma(\bigotimes_{i=1}^l p^i_{k_i})$$

$\forall k_1, \dots, k_l$ таких, что $\sum_{i=1}^l k_i = n$.

2. Различные варианты тасующего умножения встречались, начиная с 50-х годов, по разным поводам и у многих авторов (в том числе, у авторов настоящей статьи [1]). Некоторые ссылки можно найти в недавней статье [5]. Обозначение «ш» принадлежит, по-видимому, М. Флиссу [6]. Важнейшие свойства тасующего умножения определяются, естественно, линейными комбинациями подстановок, участвующих в его определении, а не вектор-функциями p_n . В основе всего лежит «абстрактное тасующее умножение», к определению которого мы переходим.

Пусть $\mathfrak{S}_n$ — групповая алгебра симметрической группы Σ_n над R , $n = 1, 2, \dots$, $\mathfrak{S}_0 = R$ и $\mathfrak{S} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathfrak{S}_n$. Абстрактным тасующим произведением подстановок $v \in \Sigma_k$ и $v' \in \Sigma_{k'}$ называется элемент из $\mathfrak{S}_{k+k'}$

$$v \text{ ш } v' = \sum_{\sigma \in S_{k+k'}(k)} \sigma(v \otimes v'), \text{ где } (v \otimes v')(i) = \begin{cases} v(i), & i \leq k, \\ v'(i-k) + k, & i > k. \end{cases}$$

Поскольку подстановки образуют аддитивный базис пространства $\mathfrak{S}$, то тасующее умножение однозначно доопределяется «по линейности» для любой пары элементов из $\mathfrak{S}$ и задает в $\mathfrak{S} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathfrak{S}_n$ структуру градуированной ассоциативной алгебры. Более того, тасующее умножение однозначно продолжается «по непрерывности» до ассоциативного умножения в пополнении $\bar{\mathfrak{S}}$ градуированного пространства $\mathfrak{S}$. Пополнением градуированного пространства мы, как обычно, называем пространство формальных рядов вида $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$, $a_n \in \mathfrak{S}_n$, а умножение производится по Коши:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \text{ ш } \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k \text{ ш } b_{n-k} \right).$$

Алгебра $\mathfrak{S}$, как и другие алгебры формальных рядов рассматривается со стандартной топологией почленной сходимости. Алгебра $\bar{\mathfrak{S}}$ действительно является замыканием $\mathfrak{S}$ в этой топологии, а умножение «по Коши» продолжением по непрерывности тасующего умножения в $\mathfrak{S}$.

В дальнейшем везде, где не оговорено противное, под ассоциативной алгеброй понимается ассоциативная алгебра с единицей над $\mathbb{R}$. Для всякой ассоциативной алгебры $\mathfrak{A}$ через $[\mathfrak{A}]$ обозначается ассоциированная с ней алгебра Ли с лиевским умножением $[a, b] = ab - ba$, $a, b \in \mathfrak{A}$.

3. Вспомним про нестационарное векторное поле h_t , которым мы так интересовались в первом параграфе. Отображение

$$h_*: v \mapsto s^n \int_{\Delta^n} \dots \int h_{t_{v(n)}} \circ \dots \circ h_{t_{v(1)}} dt_1 \dots dt_n, \quad v \in \Sigma_n, \quad n > 0,$$

однозначно продолжается до непрерывного гомоморфизма $\bar{h}_*$ алгебры $\bar{\mathfrak{S}}$ с тасующим умножением в алгебру хронологических рядов.

Для $n=1, 2, \dots$ обозначим через 1_n единичный элемент в группе Σ_n , $1_0 = 1 \in \mathbb{R}$. Имеем

$$\bar{h}_* \left(\sum_{n=0}^{\infty} 1_n \right) = \text{id} + \sum_{n=1}^{\infty} s^n \int_{\Delta^n} \dots \int f_{t_n} \circ \dots \circ h_{t_1} dt_1 \dots dt_n$$

— асимптотическое разложение правой хронологической экспоненты. Введем обозначение $\vec{\text{exp}}(\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n 1_n$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$. Элементы

$\vec{\text{exp}}(\varepsilon)$ обратимы в $\bar{\mathfrak{S}}$ как любые формальные ряды с обратимыми нулевыми членами.

Определение. Группа $\mathscr{V}$, порожденная элементами $\vec{\text{exp}}(\varepsilon)$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$, с операцией умножения «ш», называется абстрактной вариационной группой.

Согласно определению, $\mathscr{V} \subset \bar{\mathfrak{S}}$. Кривые со значениями в группе $\mathscr{V}$ (как и в любой другой группе) сами образуют группу с поточечным умножением. Обозначим через $\mathcal{E}$ подгруппу в группе кривых на $\mathscr{V}$, порожденную кривыми

$$\varepsilon \mapsto \vec{\text{exp}}(\alpha^k \varepsilon), \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad k=1, 2, \dots \text{ (ср. п. 1.5)}.$$

Произвольная кривая $a(\cdot) \in \mathcal{E}$ имеет вид $a(\varepsilon) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n a_n$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$, где $a_n \in \bar{\mathfrak{S}}$, $n=1, 2, \dots$.

Пусть n_0 — наименьшее такое n , что $a_n \neq 0$. Обозначим $a_{n_0} = T a(0)$ — это абстрактный аналог касательного поля к кривой на группе диффеоморфизмов. В согласии с обозначе-

ниями § 1, положим

$$\overleftarrow{\omega}(\varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^{n-1} \overleftarrow{\omega}_n = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} (\overrightarrow{\exp}(\varepsilon)) \operatorname{ш} (\overrightarrow{\exp}(\varepsilon))^{-1}.$$

Точно также, как предложение 1, доказываемое следующее
Предложение. Следующие два подмножества в $\mathfrak{S}$ совпадают:

- 1) $\{Ta(0) | a(\cdot) \in \mathcal{E}\}$;
- 2) $\operatorname{Lie}\{\overleftarrow{\omega}_n | n \geq 1\}$ — подалгебра Ли в $[\mathfrak{S}]$, порожденная элементами $\overleftarrow{\omega}_n \in \mathfrak{S}_n$, $n=1, 2, \dots$ ■

Определение. Подалгебра Ли

$$V = \{Ta(0) | a(\cdot) \in \mathcal{E}\} \text{ в } [\mathfrak{S}]$$

называется абстрактной алгеброй Ли вариаций.

Абстрактная вариационная группа и алгебра Ли вариаций лежат в замкнутой ассоциативной подалгебре $\bar{\mathfrak{S}}$, порожденной элементами 1_n , $n \geq 0$.

Определение. Ассоциативная подалгебра в $\mathfrak{S}$, порожденная элементами 1_n , $n \geq 0$, называется тасовочной алгеброй и обозначается символом $\operatorname{Ш}$, а ее замыкание в $\bar{\mathfrak{S}}$ — символом $\overline{\operatorname{Ш}}$.

$\operatorname{Ш}$ — градуированная подалгебра в $\mathfrak{S}$, $\overline{\operatorname{Ш}} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \operatorname{Ш}_n$, где $\operatorname{Ш}_n = \operatorname{Ш} \cap \mathfrak{S}_n$.

4. При работе с тасовочной алгеброй оказывается полезным следующее понятие, относящееся к комбинаторике подстановок.

Определение. Типом монотонности произвольной подстановки $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ называется слово $S(\sigma)$ длины $n-1$, $S(\sigma) = s_1 \dots s_{n-1}$, в алфавите из двух букв α, β , определяемое следующим правилом

$$s_i = \begin{cases} \alpha, & \text{если } \sigma(i) < \sigma(i+1), \\ \beta, & \text{если } \sigma(i) > \sigma(i+1). \end{cases}$$

Например, $S(1_n) = \underbrace{\alpha \dots \alpha}_{n-1} = \alpha^{n-1}$, а типом монотонности инверсии

$i \mapsto n-i+1$, $i=1, \dots, n$, является слово $\underbrace{\beta \dots \beta}_{n-1} = \beta^{n-1}$; при

$n=1$ в обоих случаях получаем пустое слово.

Сумму всех подстановок, имеющих один и тот же тип монотонности a , обозначим iaj . Если a — слово длины $n-1$, то $iaj \in \mathfrak{S}_n$. Обозначение iaj кажется на первый взгляд странным, но немного позже оно получит свое объяснение.

Предложение 3. Пусть a — слово длины $n-1$ в алфавите из букв α, β , и $T_a \subset \{1, \dots, n-1\}$ — подмножество, состоящее из номеров «мест» в слове a , на которых стоит буква β ,

$\#T_a = m$. Тогда

$$iaj = \sum_{k=0}^m (-1)^{m-k} \sum_{\{i_1, \dots, i_k\} \subset T_a} 1_{i_1} \sqcup 1_{i_2-i_1} \sqcup \dots \sqcup 1_{i_k-i_{k-1}} \sqcup 1_{n-i_k}. \quad (2.1)$$

Доказательство. Согласно определению,

$$1_{i_1} \sqcup 1_{i_2-i_1} \sqcup \dots \sqcup 1_{i_k-i_{k-1}} \sqcup 1_{n-i_k} = \sum_{\sigma \in S_k(\{i_1, \dots, i_k\})} \sigma. \quad (2.2)$$

Следовательно, элемент (2.1) есть сумма всех подстановок, тип монотонности которых содержит буквы α на всех местах, кроме $i_1, \dots, i_k$, а на местах $i_1, \dots, i_k$ могут стоять как буквы α , так и β . Таким образом, в сумму (2.1) каждая подстановка, имеющая тип монотонности a , входит с коэффициентом 1, а подстановка, содержащая буквы β в точности на местах $j_1, \dots, j_l$ где $\{j_1, \dots, j_l\}$ строго содержится в T_a , — с коэффициентом

$$\sum_{k=1}^m (-1)^{m-k} C_{m-l}^{k-l} = 0.$$

В самом деле, $\{j_1, \dots, j_l\}$ содержится ровно в C_{m-l}^{k-l} подмножествах T_a мощности k .

Следствие. $\mathcal{H}$ — свободная ассоциативная градуированная алгебра, имеющая по одной образующей каждой степени $n > 0$. Элементы вида iaj , где a — произвольное слово в алфавите α, β , образуют аддитивный базис алгебры $\mathcal{H}$.

Доказательство. Из предложения 1 следует, что $iaj \in \mathcal{H}_n$ для любого слова a длины $n-1$. Элементы iaj для различных слов a , очевидно, линейно независимы. Поскольку всего имеется 2^{n-1} слов длины $n-1$, то $\dim \mathcal{H}_n \geq 2^{n-1}$. С другой стороны, алгебра $\mathcal{H}$ порождается элементами 1_n , $n \geq 0$, следовательно, имеет не более одной образующей каждой положительной степени. Остается заметить, что размерность компоненты n -й степени у свободной ассоциативной алгебры, имеющей по одной образующей в каждой положительной размерности, равна как раз 2^{n-1} .

Теорема 1. Абстрактная алгебра Ли вариаций V является свободной алгеброй Ли с образующими $\omega_n \in \mathcal{H}_n$, $n=1, 2, \dots$

Доказательство. Имеем

$$\vec{\exp}(e) = 1 + \int_0^e \overleftarrow{\omega}(\tau) \sqcup \vec{\exp}(\tau) d\tau.$$

Следовательно,

$$1_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \overleftarrow{\omega}_k \sqcup 1_{n-k}, \quad n=1, 2, \dots \quad (2.3)$$

Из формулы (2.3) индукцией по n выводим, что элементы $\omega_n \in \overleftarrow{Ш}_n$, $n=1, 2, \dots$ порождают алгебру $\overleftarrow{Ш}$. Поскольку $\overleftarrow{Ш}$ является свободной алгеброй, имеющей по одной образующей в каждой из однородных компонент $\overleftarrow{Ш}_n$, то ω_n , $n \geq 1$ являются свободными образующими ассоциативной алгебры $\overleftarrow{Ш}$. Из стандартных результатов теории алгебр Ли вытекает, что ω_n , $n \geq 1$, есть свободные образующие порождаемой этими элементами подалгебры Ли в $\overleftarrow{Ш}$.

Следствие. Вложение $V \subset \overleftarrow{Ш}$ индуцирует изоморфизм универсальной обертывающей алгебры UV алгебры Ли V на алгебру $\overleftarrow{Ш}$, т. е. $UV \approx \overleftarrow{Ш}$.

В самом деле, универсальной обертывающей алгеброй свободной алгебры Ли является свободная ассоциативная алгебра с тем же набором образующих.

Замечание. Последовательность ω_n , $n \geq 1$, не является, конечно, единственной системой однородных образующих алгебры Ли V . В качестве другой системы однородных образующих той же алгебры Ли можно взять, например, $\vec{\omega}_n$, $n \geq 1$, где $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^{n-1} \vec{\omega}_n = \vec{\omega}(\varepsilon) = (\exp(\varepsilon))^{-1} \text{ш} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} (\exp(\varepsilon))$. В следующем параграфе будет дано явное описание всех возможных систем образующих.

5. Итак, $\overleftarrow{Ш}$ — подалгебра в $\mathfrak{S}$, состоящая из всех таких линейных комбинаций подстановок, что подстановки с одинаковым типом монотонности имеют одинаковые коэффициенты.

Предложение 4. Для любых слов a, b в алфавите α, β справедливо равенство

$$(iaj) \text{ш} (ibj) = ia\alpha mj + ia\beta bj.$$

Доказательство. Пусть $iaj \in \overleftarrow{Ш}_n$, $ibj \in \overleftarrow{Ш}_m$. Тогда

$$(iaj) \text{ш} (ibj) = \sum_{\sigma \in S_{n+m}(n)} \sigma(iaj \otimes ibj).$$

Поскольку любая подстановка $\sigma \in S_{n+m}(n)$ монотонно возрастает на отрезке $1, \dots, n$ и, отдельно, на отрезке $n+1, \dots, n+m$, то $\forall \mu \in \Sigma_n, \forall \nu \in \Sigma_m$ — тип монотонности $S(\sigma(\mu \otimes \nu))$ подстановки $\sigma(\mu \otimes \nu)$ равен либо $S(\mu) \alpha S(\nu)$, либо $S(\mu) \beta S(\nu)$. Следовательно,

$$(iaj) \text{ш} (ibj) = k_1 (ia\alpha bj) + k_2 (ia\beta bj),$$

где k_1, k_2 — целые неотрицательные числа. Далее, если $\sigma \in S_{n+m}(n)$ и $\sigma(\mu_1 \otimes \nu_1) = \mu_2 \otimes \nu_2$, то $\sigma = \mu_1^{-1} \circ \mu_2 \otimes \nu_1^{-1} \circ \nu_2 = 1_{n+m}$ т. к. $S_{n+m}(n) \cap (\Sigma_n \otimes \Sigma_m) = 1_{n+m}$. Следовательно, коэффициенты k_1, k_2 равны либо нулю, либо единице. Для окончания доказательства остается заметить, что

$$S(1_{n+m}(\mu \otimes \nu)) = S(\mu \otimes \nu) = S(\mu) \alpha S(\nu),$$

$$S((1, \dots, n-1, n+1, n, n+2, \dots, n+m)(\mu \otimes \nu)) = S(\mu) \beta S(\nu).$$

Обозначим символом $\mathfrak{A}$ ассоциативную алгебру с образующими α, β, i, j , но не свободную, а определяемую соотношениями

$$ji = \alpha + \beta, \quad i^2 = j^2 = \alpha i = \beta i = j\alpha = j\beta = 0.$$

Зададим в алгебре $\mathfrak{A}$ градуировку полуцелыми числами $\mathfrak{A} = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathfrak{A}_k$, приписывая переменным следующие степени: $\deg \alpha = \deg \beta = 1, \deg i = \deg j = \frac{1}{2}$. Из предложения 4 следует,

что $\mathcal{H} \approx \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathfrak{A}_n$, т. е. градуированная алгебра $\mathcal{H}$ естественным образом отождествляется с подалгеброй в $\mathfrak{A}$, состоящей из линейных комбинаций однородных элементов целой степени. До конца настоящего параграфа мы будем использовать это отождествление без специальных оговорок, т. е. считать, что $\mathcal{H} \subset \mathfrak{A}$ ($\mathfrak{A} \mathcal{H} \subset \mathfrak{A}$) и опускать символ $\mathcal{H}$ при умножении элементов тасовочной алгебры, представленных в виде полиномов от (некоммутирующих) переменных α, β, i, j .

Напомним, что

$$\vec{\text{exp}}(\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n i_n = 1 + \varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n i \alpha^n j = 1 + \varepsilon i (1 - \varepsilon \alpha)^{-1} j,$$

$$\overleftarrow{\omega}(\varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^{n-1} \overleftarrow{\omega}_n = \left(\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \vec{\text{exp}}(\varepsilon) \right) \mathcal{H} (\vec{\text{exp}}(\varepsilon))^{-1},$$

$$\overrightarrow{\omega}(\varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^{n-1} \overrightarrow{\omega}_n = (\vec{\text{exp}}(\varepsilon))^{-1} \mathcal{H} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \vec{\text{exp}}(\varepsilon).$$

Предложение 5. Справедливы тождества

$$1) (\vec{\text{exp}}(\varepsilon))^{-1} = 1 - \varepsilon i (1 + \varepsilon \beta)^{-1} j = 1 - \varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} (-\varepsilon)^n i \beta^n j;$$

$$2) \overleftarrow{\omega}(\varepsilon) = i (1 - \varepsilon \alpha)^{-1} (1 + \varepsilon \beta)^{-1} j;$$

$$3) \overrightarrow{\omega}(\varepsilon) = i (1 + \varepsilon \beta)^{-1} (1 - \varepsilon \alpha)^{-1} j.$$

Доказательство.

$$1) (1 + \varepsilon i (1 - \varepsilon \alpha)^{-1} j) (1 - \varepsilon i (1 + \varepsilon \beta)^{-1} j) = 1 + \varepsilon i ((1 - \varepsilon \alpha)^{-1} - (1 + \varepsilon \beta)^{-1}) j - \varepsilon i (1 - \varepsilon \alpha)^{-1} (\varepsilon \alpha + \varepsilon \beta) (1 + \varepsilon \beta)^{-1} j = 1.$$

$$2) \overleftarrow{\omega}(\varepsilon) = \left(\frac{\partial}{\partial \varepsilon} (\varepsilon i (1 - \varepsilon \alpha)^{-1} j) \right) (1 - \varepsilon i (1 + \varepsilon \beta)^{-1} j) = i (1 - \varepsilon \alpha)^{-2} j \times (1 - \varepsilon i (1 + \varepsilon \beta)^{-1} j) = i (1 - \varepsilon \alpha)^{-2} (1 - (\varepsilon \alpha + \varepsilon \beta) (1 + \varepsilon \beta)^{-1}) j = i (1 - \varepsilon \alpha)^{-1} (1 + \varepsilon \beta)^{-1} j.$$

Аналогично доказывается и тождество 3).

Следствие.

$$\overleftarrow{\omega}_{n+1} = \sum_{k=0}^n (-1)^k i \alpha^{n-k} \beta^k j; \quad \overrightarrow{\omega}_{n+1} = \sum_{k=0}^n (-1)^k i \beta^k \alpha^{n-k} j, \quad n \geq 0.$$

6. Напомним, что дифференцированием произвольной алгебры называется любой линейный оператор D в этой алгебре, удовлетворяющий «правилу дифференцирования Лейбница»: $D(xy) = (Dx)y + x(Dy)$. Определим два однородных дифференцирования u, v степени 1 градуированной ассоциативной алгебры $\mathfrak{A}$, задав их значения на образующих формулами

$$\begin{aligned} u(\alpha) &= \alpha^2, & u(\beta) &= -\beta^2, \\ u(i) &= i\alpha, & u(j) &= -\beta j; \\ v(\alpha) &= -\alpha^2, & v(\beta) &= \beta^2, \\ v(i) &= i\beta, & v(j) &= -\alpha j. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Прямое вычисление показывает, что формулы (2.4) согласованы с тождествами, определяющими алгебру $\mathfrak{A}$. Например: $u(ji) = u(j)i + ju(i) = -\beta ji + j\alpha = -\beta(\alpha + \beta) + (\alpha + \beta)\alpha = \alpha^2 - \beta^2 = u(\alpha + \beta)$ и т. д. Поэтому формулы (2.4) корректно определяют дифференцирования $\mathfrak{A}$. Кроме того, поскольку операторы u, v однородны и имеют целую степень, они переводят подалгебру $\mathcal{H} \subset \mathfrak{A}$ в себя.

Предложение 6. Справедливы тождества

$$\overleftarrow{\omega}(\varepsilon) = e^{\varepsilon u}(ij), \quad \overrightarrow{\omega}(\varepsilon) = e^{-\varepsilon v}(ij).$$

Доказательство. $\omega_1 = ij$,

$$\begin{aligned} \overleftarrow{u}\omega_{n+1} &= u \sum_{k=0}^n (-1)^k i \alpha^{n-k} \beta^k j = \sum_{k=0}^n (-1)^k (u(i \alpha^{n-k}) \beta^k j + i \alpha^{n-k} u(\beta^k j)) = \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^k (n+1-k) i \alpha^{n+1-k} \beta^k j - \sum_{k=0}^n (-1)^k (k+1) i \alpha^{n-k} \beta^{k+1} j = \\ &= (n+1) \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k i \alpha^{n+1-k} \beta^k j = (n+1) \overleftarrow{\omega}_{n+2}. \end{aligned}$$

Итак, $\overleftarrow{u}\omega_n = n \overleftarrow{\omega}_{n+1} \quad \forall n > 1$, следовательно,

$$\overleftarrow{\omega}_{n+1} = \frac{u^n}{n!} \overleftarrow{\omega}_1, \quad e^{\varepsilon u} \overleftarrow{\omega}_1 = \overleftarrow{\omega}(\varepsilon).$$

Аналогичное вычисление доказывает и второе тождество.

Следующее предложение показывает, что дифференцирования u, v тесно связаны с внутренними дифференцированиями $\text{ad } x : a \mapsto xa - ax$ алгебры $\mathfrak{A}$ при $x \in V \subset \mathfrak{A}$.

Предложение 7. Справедливы тождества

$$\operatorname{ad} \overleftarrow{\omega}(\varepsilon) = e^{\operatorname{ad} u} v + u, \quad \operatorname{ad} \overrightarrow{\omega}(\varepsilon) = e^{-\operatorname{ad} v} u + v.$$

Доказательство. При $\varepsilon=0$ оба тождества сводятся к равенству $\operatorname{ad}(ij) = u+v$. Это равенство проверяется прямым вычислением: поскольку и правая, и левая части равенства являются дифференцированиями алгебры $\mathcal{H}$, достаточно проверить их совпадение на образующих. Остальное следует из предложения 4 и универсального тождества $[D, \operatorname{ad} x] = \operatorname{ad}(Dx)$, верного для любого дифференцирования D и любого элемента x произвольной алгебры.

Следствие. Алгебра Ли, порожденная u и v свободна, и отображение

$$\operatorname{ad} : V \rightarrow \operatorname{Der} \mathcal{H}, \text{ где } \operatorname{ad} : x \mapsto \operatorname{ad} x \quad \forall x \in V \subset \mathcal{H},$$

является изоморфизмом алгебры Ли V на идеал коразмерности 1 в $\operatorname{Lie}(u, v)$ вида $\mathbf{R}(u+v) + [\operatorname{Lie}(u, v), \operatorname{Lie}(u, v)]$.

Доказательство. Из стандартных результатов о свободных алгебрах Ли (см. [4]) следует, что подалгебра в $\operatorname{Lie}(u, v)$, порожденная элементами $u+v$, $(\operatorname{ad} u)^n v$, $n \geq 1$, содержит все коммутаторные мономы от u, v степени не ниже двух. Остальное следует из предложения 7 и теоремы 1.

Начиная с этого места, мы отвлечёмся от операторного происхождения элементов u, v . Отныне буквы u, v обозначают образующие (алфавит) свободной ассоциативной алгебры (алгебры слов). Имеем

$$V \approx (\mathbf{R}(u+v) + [\operatorname{Lie}(u, v), \operatorname{Lie}(u, v)]) \subset \operatorname{Lie}(u, v) \subset \operatorname{Ass}(u, v). \quad (2.5)$$

Следовательно.

$$\mathcal{H} = UV \approx \operatorname{Ass}((\operatorname{ad} u)^n(u+v); n \geq 0) \subset \operatorname{Ass}(u, v),$$

т. к. элементы $(\operatorname{ad} u)^n(u+v)$ являются (свободными) образующими алгебры Ли $\mathbf{R}(u+v) + [\operatorname{Lie}(u, v), \operatorname{Lie}(u, v)]$; UV обозначает универсальную обертывающую алгебру алгебры Ли V . Положим $u+v=w$. Имеется простая алгебраическая характеристика элементов подалгебры $\operatorname{Ass}((\operatorname{ad} u)^n w, n \geq 0)$ в алгебре

$$\operatorname{Ass}(u, w) = \operatorname{Ass}(u, v).$$

Предложение 8. Рассмотрим представление θ алгебры $\operatorname{Ass}(u, w)$ линейными операторами в $\operatorname{Ass}(u, w)$, определив его на образующих формулами

$$\theta(u)x = [u, x], \quad \theta(w)x = wx \quad \forall x \in \operatorname{Ass}(u, w).$$

Тогда отображение $x \mapsto \theta(x)1$ является проекцией $\operatorname{Ass}(u, w)$ на подалгебру, порожденную $(\operatorname{ad} u)^n w$, $n \geq 0$.

Доказательство. Прежде всего поскольку $\theta(u) = \operatorname{ad} u$ — дифференцирование алгебры $\operatorname{Ass}(u, w)$, то отображение

$x \mapsto \theta(x)$ переводит $\text{Ass}(u, w)$ в $\text{Ass}((\text{adu})^n w, n \geq 0)$. Остается показать, что это отображение тождественно на $\text{Ass}((\text{ad } u)^n w, n \geq 1)$. Это вытекает из следующего утверждения.

Лемма. Пусть L_x — оператор умножения слева на $x \in \text{Ass}(u, w)$. Тогда, если x таково, что $\theta(x) = L_x$, то $\theta([u, x]) = L_{[u, x]}$.

Доказательство. $\theta([u, x])y = \theta(u)\theta(x)y - \theta(x)\theta(u)y = [u, xy] - x[u, y] = [u, x]y = L_{[u, x]}y$. ■

Теорема 2. Пусть $I: \overline{W} \rightarrow \overline{\text{Ass}(u, v)}$ — непрерывный гомоморфизм (и мономорфизм), однозначно определяемый своими значениями на образующих $I(\overleftarrow{\omega}_n) = \frac{1}{n!}(\text{ad } u)^n v + u$. Тогда

$$1) I(\overrightarrow{\exp}(\varepsilon)) = e^{\varepsilon u} e^{\varepsilon v}.$$

2) $I|_{\mathcal{V}}$ есть изоморфизм абстрактной вариационной группы $\mathcal{V}$ на подгруппу в $\overline{\text{Ass}(u, v)}$, состоящую из всех элементов вида

$$e^{t_1 u} e^{s_1 v} \dots e^{t_k u} e^{s_k v}, \quad k > 0, \quad \sum_{i=1}^k t_i = \sum_{i=1}^k s_i.$$

$$3) I(V) = \mathbb{R}(u + v) + [\text{Lie}(u, v), \text{Lie}(u, v)].$$

Доказательство.

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^{n-1} \overleftarrow{\omega}_n = \left(\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \overrightarrow{\exp}(\varepsilon) \right) \text{ш}(\overrightarrow{\exp}(\varepsilon))^{-1}. \text{ Следовательно,}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\exp}(\varepsilon) &= \overleftarrow{\exp} \int_0^\varepsilon \omega(\varepsilon') d\varepsilon', \quad I(\overrightarrow{\exp}(\varepsilon)) = \\ &= \overleftarrow{\exp} \int_0^\varepsilon I(\omega(\varepsilon')) d\varepsilon' = \overleftarrow{\exp} \int_0^\varepsilon (e^{\varepsilon' \text{ad } u} v + u) d\varepsilon' = e^{\varepsilon u} e^{\varepsilon v}. \end{aligned}$$

Мы воспользовались формулой вариаций.

2) Утверждение 2) прямо следует из 1) и определения абстрактной вариационной группы.

3) Утверждение 3) уже было доказано выше и, независимо может быть без труда выведено из 1) и определения V .

Следствие. Экспоненциальное отображение $x \mapsto e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$ взаимно однозначно отображает $\overline{V}$ на $\overline{\mathcal{V}}$.

Доказательство. Известно, что экспоненциальное отображение взаимно однозначно отображает $\text{Lie}(u, v)$ на замкнутую подгруппу $\overline{\Gamma}$ в $\text{Ass}(u, v)$, порожденную однопараметрическими подгруппами $t \mapsto e^{tu}$ и $t \mapsto e^{tv}$ (см. [4]). Из теоремы 2 следует, что $I(\mathcal{V})$ есть нормальный делитель в $\overline{\Gamma}$, состоящий из всех таких элементов, однородные компоненты степени 1 которых имеют вид $\alpha(u+v)$, $\alpha \in \mathbb{R}$. ■

§ 3. ТАСОВКИ И СИММЕТРИИ

1. В предыдущем параграфе была выяснена структура тасовочной алгебры $\mathcal{H}$, а также содержащихся в $\mathcal{H}$ вариационной группы $\mathcal{V}$ и алгебры Ли вариаций V . Теперь напомним, что градуированная алгебра $\mathcal{H} \subset \mathfrak{S} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathfrak{S}_n$, где $\mathfrak{S}_n$ — групповая алгебра симметрической группы Σ_n (группы подстановок n -элементного множества). Элементами $\mathfrak{S}_n$ являются линейные комбинации подстановок, а умножение в групповой алгебре определяется групповым умножением, т. е. композицией подстановок: если $\sigma, \nu \in \Sigma_n$, то и $\sigma \circ \nu \in \Sigma_n$. Классическое умножение « $\circ$ » мы будем называть симметричным, чтобы не путать его с тасующим умножением « $\sharp$ ». Кроме того, продолжим симметричное умножение на все $\mathfrak{S}$, положив $\mu \circ \nu = 0$ для $\forall \mu \in \Sigma_m, \nu \in \Sigma_n, m \neq n$. Оказывается, имеется глубокая связь между двумя ассоциативным умножениями: тасующим « $\sharp$ » и симметричным « $\circ$ ».

Фундаментальная лемма. Для любого $x \in \mathcal{V}$ и любых $\mu, \nu \in \mathfrak{S}$ справедливо равенство

$$x \circ (\mu \sharp \nu) = (x \circ \mu) \sharp (x \circ \nu).$$

Доказательство. Пусть $x = \sum_{k=0}^{\infty} x_k \in \mathcal{V}$, где $x_k \in \mathcal{H}_k \subset \mathfrak{S}_k$, $\forall k \geq 0, \mu \in \Sigma_m, \nu \in \Sigma_n$. Требуется доказать, что

$$x_{n+m} \circ (\mu \sharp \nu) = (x_m \circ \mu) \sharp (x_n \circ \nu).$$

Прежде всего, достаточно доказать это равенство для случая $\mu = 1_m, \nu = 1_n$, поскольку

$$x_{n+m} \circ (\mu \sharp \nu) = x_{n+m} \circ (1_m \sharp 1_n) \circ (\mu \otimes \nu)$$

и

$$\begin{aligned} (x_m \circ \mu) \sharp (x_n \circ \nu) &= (1_m \sharp 1_n) \circ (x_m \circ \mu \otimes x_n \circ \nu) = \\ &= (1_m \sharp 1_n) \circ (x_m \otimes x_n) \circ (\mu \otimes \nu) = (x_m \sharp x_n) \circ (\mu \otimes \nu). \end{aligned}$$

Итак, фундаментальная лемма эквивалентна равенствам

$$x_{n+m} \circ (1_m \sharp 1_n) = x_m \sharp x_n \quad \forall m, n \geq 0, \sum_{k=0}^{\infty} x_k \in \mathcal{V}. \quad (3.1)$$

Пусть $J_n \in \Sigma_n$ — инверсия: $J_n(k) = n - k + 1, k = 1, \dots, n, J_n = i \beta^{n-1} j$. Напомним, что

$$\vec{\exp}(\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n 1_n, (\vec{\exp}(\varepsilon))^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-\varepsilon)^n J_n,$$

если считать, что $J_0 = 1$.

Произвольный элемент $x = \sum_{n=0}^{\infty} x_n \in \mathcal{V}$ имеет вид

$$x = \left(\sum_{n=0}^{\infty} t_0^n a_0^n \right) \text{ш} \left(\sum_{i=1}^{\infty} t_1^i a_1^i \right) \text{ш} \dots \text{ш} \left(\sum_{i=0}^{\infty} t_k^i a_i^k \right), \quad (3.2)$$

где для любого $j=0, 1, \dots, k$ последовательность $a_i^j, i \geq 0$, либо совпадает с $1_i, i \geq 0$, либо с $J_i, i \geq 0$; $t_j, j=0, 1, \dots, k$ — произвольные вещественные числа, k — произвольное неотрицательное целое.

Доказываемая формула (3.1) имеет чисто комбинаторный характер. Нам, однако, не известно ее прямое доказательство, и мы вынуждены использовать довольно искусственную вспомогательную конструкцию.

Пусть Λ — ассоциативная алгебра с $n+m$ образующими $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+m}$, определяемая следующими соотношениями: любой (некоммутативный) моном от $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+m}$, имеющий степень не менее двух хотя бы по одной переменной, равен нулю.

Для всякого $k \geq 0$ определено правое действие группы Σ_k на полиномы степени k от $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+m}$ правилом

$$\sigma \lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_k} = \lambda_{i_{\sigma(1)}} \dots \lambda_{i_{\sigma(k)}} \quad \forall \sigma \in \Sigma_k.$$

Имеем $(\sigma \circ \nu) \lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_k} = \nu(\sigma \lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_k})$.

Пусть $\eta = \{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n, \dots\}$ — последовательность мономов первой степени алгебры Λ , лишь конечное число элементов которой отлично от нуля. Положим

$$\Delta_k(\eta) = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \eta_{i_1} \dots \eta_{i_k}.$$

Буквой λ обозначим стандартную последовательность $\lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_{n+m}, 0, 0, \dots\}$; таким образом, $\lambda_k = 0$ при $k > n+m$. Имеем, в частности, $\Delta_{n+m}(\lambda) = \lambda_1 \dots \lambda_{n+m}$.

Легко проверяется следующее тождество, справедливое для любой последовательности и любых $k, l \geq 0$,

$$\Delta_k(\eta) \Delta_l(\eta) = (1_k \text{ш} 1_l) \Delta_{k+l}(\eta). \quad (3.3)$$

В самом деле,

$$\begin{aligned} \Delta_k(\eta) \Delta_l(\eta) &= \sum_{\substack{i_1 < \dots < i_k \\ j_{k+1} < \dots < j_{k+l}}} \eta_{i_1} \dots \eta_{i_k} \eta_{j_{k+1}} \dots \eta_{j_{k+l}} = \\ &= \sum_{\sigma \in S_{k+l}(k)} \sum_{j_1 < \dots < j_{k+l}} \eta_{j_{\sigma(1)}} \dots \eta_{j_{\sigma(k+l)}} \end{aligned}$$

(мы воспользовались тем, что $\eta_{i_1} \dots \eta_{i_{k+l}} = 0$, если $i_{j_1} = i_{j_2}$ для некоторых $j_1 \neq j_2$).

Пусть x — элемент из $\mathcal{V}$ вида (3.2). Тогда

$$x_{n+m} = \sum_{i_0 + \dots + i_k = n+m} t_0^{i_0} a_{i_0}^0 \text{ш} t_1^{i_1} a_{i_1}^1 \text{ш} \dots \text{ш} t_k^{i_k} a_{i_k}^k.$$

По элементу x построим специальную последовательность $\eta = \eta(x)$, положив

$$\eta_{j(n+m)+l} = t_j \lambda a_{n+m}^j(\lambda), \quad j=0, 1, \dots, k, \quad i=1, \dots, n+m, \\ \eta_l = 0 \quad \text{при } l > (k+1)(n+m).$$

Справедливо тождество

$$\Delta_l(\eta) = x_l \Delta_l(\lambda) \quad \forall l > 0. \quad (3.4)$$

В самом деле

$$\begin{aligned} \Delta_l(\eta) &= \sum_{j_1 < \dots < j_l} \eta_{j_1} \dots \eta_{j_l} = \\ &= \sum_{i_0 + \dots + i_k = l} (t_0^{i_0} a_{i_0}^0 \Delta_{i_0}(\lambda)) (t_1^{i_1} a_{i_1}^1 \Delta_{i_1}(\lambda)) \dots (t_k^{i_k} a_{i_k}^k \Delta_{i_k}(\lambda)) = \\ &= \sum_{i_0 + \dots + i_k = l} t_0^{i_0} \dots t_k^{i_k} (a_{i_0}^0 \otimes \dots \otimes a_{i_k}^k) \Delta_{i_0}(\lambda) \dots \Delta_{i_k}(\lambda). \end{aligned}$$

В то же время, согласно (3.3),

$$\begin{aligned} &(a_{i_0}^0 \otimes \dots \otimes a_{i_k}^k) \Delta_{i_0}(\lambda) \dots \Delta_{i_k}(\lambda) = \\ &= (a_{i_0}^0 \otimes \dots \otimes a_{i_k}^k) ((1_{i_0} \text{ш} \dots \text{ш} 1_{i_k}) \Delta_i(\lambda)) = \\ &= ((1_{i_0} \text{ш} \dots \text{ш} 1_{i_k}) (a_{i_0}^0 \otimes \dots \otimes a_{i_k}^k)) \Delta_i(\lambda) = (a_{i_0}^0 \text{ш} \dots \text{ш} a_{i_k}^k) \Delta_i(\lambda). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\Delta_l(\eta) = \sum_{i_0 + \dots + i_k = l} t_0^{i_0} \dots t_k^{i_k} (a_{i_0}^0 \text{ш} \dots \text{ш} a_{i_k}^k) \Delta_i(\lambda) = x_l \Delta_l(\lambda).$$

Используя равенства (3.3), (3.4), уже нетрудно доказать равенство (3.1). Применим левую часть доказываемого тождества к $\lambda_1 \dots \lambda_{n+m} = \Delta_{n+m}(\lambda)$:

$$\begin{aligned} &(x_{n+m} \circ (1_m \text{ш} 1_n)) \Delta_{n+m}(\lambda) = (1_m \text{ш} 1_n) (x_{n+m} \Delta_{n+m}(\lambda)) = \\ &= (1_m \text{ш} 1_n) \Delta_{n+m}(\eta) = \Delta_m(\eta) \cdot \Delta_n(\eta) = (x_m \Delta_m(\lambda)) (x_n \Delta_n(\lambda)) = \\ &= (x_m \otimes x_n) \Delta_m(\lambda) \Delta_n(\lambda) = (x_m \otimes x_n) ((1_m \text{ш} 1_n) \Delta_{n+m}(\lambda)) = \\ &= ((x_m \otimes x_n) \circ (1_m \text{ш} 1_n)) \Delta_{n+m}(\lambda) = (x_m \text{ш} x_n) \Delta_{n+m}(\lambda). \end{aligned}$$

Следовательно, $x_{n+m} \circ (1_m \text{ш} 1_n) = x_m \text{ш} x_n$. ■

2. Удивительным следствием фундаментальной леммы является тот факт, что симметричное произведение двух элементов тасовой алгебры снова является элементом тасовой

алгебры. Более того, эта лемма позволяет полностью описать таблицу симметричного умножения элементов аддитивного базиса тасовочной алгебры.

Предложение 9. Для любых $n, m > 0$ и положительных целых чисел $i_1, \dots, i_n, j_1, \dots, j_m$ справедливо равенство

$$(I_{i_1} \text{ш} \dots \text{ш} I_{i_n}) \circ (I_{j_1} \text{ш} \dots \text{ш} I_{j_m}) = \\ = \sum_K I_{k_{11}} \text{ш} \dots \text{ш} I_{k_{n1}} \text{ш} I_{k_{12}} \text{ш} \dots \text{ш} I_{k_{n2}} \text{ш} \dots \text{ш} I_{k_{1m}} \text{ш} \dots \text{ш} I_{k_{nm}},$$

где сумма берется по всем матрицам

$$K = \begin{pmatrix} k_{11} & \dots & k_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ k_{n1} & \dots & k_{nm} \end{pmatrix},$$

удовлетворяющим условиям:

$$\sum_{l=1}^n k_{li} = j_l, \quad l = 1, \dots, m; \\ \sum_{j=1}^m k_{lj} = i_l, \quad l = 1, \dots, n.$$

Доказательство. Из фундаментальной леммы вытекает, что

$$(\vec{\text{ex}}(t_1) \text{ш} \dots \text{ш} \vec{\text{ex}}(t_n)) \circ (I_{j_1} \text{ш} \dots \text{ш} I_{j_m}) = \\ = ((\vec{\text{ex}}(t_1) \text{ш} \dots \text{ш} \vec{\text{ex}}(t_n)) \circ I_{j_1}) \text{ш} \dots \text{ш} ((\vec{\text{ex}}(t_1) \text{ш} \dots \text{ш} \vec{\text{ex}}(t_n)) \circ I_{j_m}).$$

Приравнявая коэффициенты при $t_1^{i_1} \dots t_n^{i_n}$ в правой и левой частях, получаем искомое равенство.

Итак, $\forall n > 0$ пространство $\mathcal{H}_n$ является алгеброй относительно симметричного умножения «ш» — подалгеброй в групповой алгебре симметрической группы Σ_n . Пространство $\mathcal{H}_n$ с симметричным умножением обозначим $\mathcal{H}_n^\circ$, а пространство $\mathcal{H}_+ = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}_n$ с тем же умножением — символом $\mathcal{H}_+^\circ$. Заметим, что $\mathcal{H}_n^\circ \circ \mathcal{H}_m^\circ = 0$ при $n \neq m$.

Кружки над $\mathcal{H}_n$ и $\mathcal{H}_+^\circ$ пишутся для того, чтобы отличать симметричное умножение от тасующего. Везде ниже (как и выше) символ $\mathcal{H}$ без кружка обозначает тасовочную алгебру, символ $\mathcal{H}_+$ — ее максимальный идеал, а $\mathcal{H}_+^k = \underbrace{\mathcal{H}_+ \text{ш} \dots \text{ш} \mathcal{H}_+}_{k \text{ раз}}$ — k -ю степень максимального идеала.

Следствие. Подпространство $\mathcal{H}_+^k$ является двусторонним идеалом в $\mathcal{H}_+^\circ$, т. е. $\mathcal{H}_+^\circ \mathcal{H}_+^k \subset \mathcal{H}_+^k$, $\mathcal{H}_+^k \mathcal{H}_+^\circ \subset \mathcal{H}_+^k$, $\forall k > 0$.

Это прямо следует из предложения 9.

Заметим, что 1_n является единичным элементом в $\dot{L}I_n$, а подпространство $L\dot{I}_n \cap L\dot{I}_+^2$ — идеал коразмерности 1 в $\dot{L}I_n$.

Определение. Обозначим через $\rho: \dot{L}I \rightarrow \mathbb{R}$ гомоморфизм алгебры $\dot{L}I$ в $\mathbb{R}$, определяемый следующим образом: если $x \in \dot{L}I_n$, $x = c1_n + y$, где $y \in L\dot{I}_+^2$, то $\rho(x) = c$.

Приведем значения гомоморфизма ρ на элементах iaj , образующих естественный аддитивный базис $\dot{L}I$; здесь a — слово в алфавите $\{\alpha, \beta\}$.

Предложение 10. Пусть $\deg_\beta a$ — количество букв β в слове a . Тогда $\rho(a) = (-1)^{\deg_\beta a}$.

Доказательство. Нужно равенство прямо следует из определения ρ и формулы (2.1).

Замечание. Функционал ρ на алгебре «типов монотонности подстановок» $\dot{L}I_n$ играет роль, аналогичную роли чётности для отдельных подстановок. Напомним, что буквой β обозначаются места, где убывают (т. е. имеют беспорядок!) подстановки данного типа монотонности. В то же время, ρ вовсе не совпадает с чётностью: например, для инверсии $J_n = i\beta^{n-1}j$, имеющей чётность $(-1)^{\frac{n-1}{2}}$, получаем $\rho(J_n) = (-1)^{n-1}$. Дело в том, что при вычислении ρ учитываются не все беспорядки, а лишь отвечающие соседним значениям аргумента.

Инфинитезимальным вариантом фундаментальной леммы является следующее

Предложение 11. Для любых $n > 0$, $\vartheta \in V_n$, $x \in \dot{L}I_n$ справедливо равенство $\vartheta \circ x = \rho(x)\vartheta$.

Доказательство. Прежде всего, $\vartheta \circ 1_n = \vartheta$. Поэтому доказываемое утверждение эквивалентно соотношению $\vartheta \circ L\dot{I}_+^2 = 0$. Имеем $e^{\varepsilon\vartheta} \in \bar{\mathcal{U}} \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}$, где экспоненциальный ряд рассматривается относительно тасующего умножения:

$$e^{\varepsilon\vartheta} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} \underbrace{\vartheta \text{ ш } \dots \text{ ш } \vartheta}_{n \text{ раз}}.$$

Из фундаментальной леммы следует, что $e^{\varepsilon\vartheta}(x_1 \text{ ш } x_2) = (e^{\varepsilon\vartheta_0} x_1) \text{ ш } (e^{\varepsilon\vartheta_0} x_2)$, $\forall x_1, x_2 \in \dot{L}I_7$. Дифференцируя это тождество по ε при $\varepsilon = 0$, получим

$$\vartheta_0(x_1 \text{ ш } x_2) = (\vartheta_0 x_1) \text{ ш } (e^{\vartheta_0} x_2) + (e^{\vartheta_0} x_2) \text{ ш } (\vartheta_0 x_2) = 0. \blacksquare$$

Напомним, что ассоциативная алгебра $\dot{L}I$ есть универсальная обертывающая алгебра алгебры Ли V . В частности, подпространства V^n образуют возрастающую фильтрацию в $\dot{L}I_+$.

Теорема 3. 1) $V^n = \{x \in \dot{L}I \mid x \circ L\dot{I}_+^{n+1} = 0, \forall n > 0\}$. 2) Пусть $\vartheta_1, \dots, \vartheta_n \in V$ — однородные элементы. Для произвольного непус-

того подмножества $T \subset \{1, \dots, n\}$, $T = \{i_1, \dots, i_k\}$, $i_1 < \dots < i_k$ положим $\vartheta_T = \vartheta_{i_1} \text{ш} \dots \text{ш} \vartheta_{i_k}$. Тогда

$$(\vartheta_{i_1} \text{ш} \dots \text{ш} \vartheta_{i_n})(1_{i_1} \text{ш} \dots \text{ш} 1_{i_k}) = \sum \vartheta_{T_1} \text{ш} \dots \text{ш} \vartheta_{T_k}, \quad (3.5)$$

где сумма берется по всем разбиениям $\{1, \dots, n\}$ на k подмножеств T_j таких, что $\vartheta_{T_j} \in \mathcal{H}_{i_j}$, $j = 1, \dots, k$.

Доказательство. Начнем с утверждения 2). Равенство (3.5)—прямое обобщение предложения 11. То же можно сказать о доказательстве. Для любых $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}$ элемент $e^{t_1 \vartheta_{i_1}} \text{ш} \dots \text{ш} e^{t_n \vartheta_{i_n}}$ лежит в $\mathcal{F}$. Следовательно,

$$\begin{aligned} & (e^{t_1 \vartheta_{i_1}} \text{ш} \dots \text{ш} e^{t_n \vartheta_{i_n}}) \circ (1_{i_1} \text{ш} \dots \text{ш} 1_{i_k}) = \\ & = ((e^{t_1 \vartheta_{i_1}} \text{ш} \dots \text{ш} e^{t_n \vartheta_{i_n}}) \circ 1_{i_1}) \text{ш} \dots \text{ш} ((e^{t_1 \vartheta_{i_1}} \text{ш} \dots \text{ш} e^{t_n \vartheta_{i_n}}) \circ 1_{i_k}). \end{aligned}$$

Приравнявая коэффициенты при $t_1 \dots t_n$ в правой и левой частях последнего равенства, получаем (3.5).

Перейдем к доказательству утверждения 1). Прежде всего, из (3.5) следует, что $V^n \circ \mathcal{H}_+^{n+1} = 0$. Остается доказать, что $x \circ \mathcal{H}_+^{n+1} \neq 0$, если $x \notin V^n$.

Пусть $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots$ — аддитивный базис V , состоящий из однородных элементов, линейно упорядоченный так, что степени элементов монотонно не убывают. Из теоремы Пуанкаре—Биркгофа—Витта следует, что элементы $\vartheta_{i_1} \text{ш} \dots \text{ш} \vartheta_{i_m}$, $i_1 \leq \dots \leq i_m$, $m \leq k$ образуют базис пространства $V^k \ \forall k > 0$. Объединение по всем k дает аддитивный базис пространства $\mathcal{H}$. Для всякого $x \in \mathcal{H}$ через $x_{i_1, \dots, i_m}$ обозначим коэффициент при $\vartheta_{i_1} \text{ш} \dots \text{ш} \vartheta_{i_m}$ в разложении x по этому базису.

Пусть $x \in V^k \setminus V^{k-1}$, главным членом разложения x по данному базису называется элемент

$$x_{j_1, \dots, j_k} \vartheta_{j_1} \text{ш} \dots \text{ш} \vartheta_{j_k},$$

где $j_1, \dots, j_k$ — лексикографически минимальная среди всех таких последовательностей $i_1, \dots, i_k$, что $x_{i_1, \dots, i_k} \neq 0$.

Пусть $\vartheta_{i_\iota} \in \mathcal{H}_{d_\iota}$, $\iota = 1, \dots, k$, тогда, согласно формуле (3.5), главный член элемента $x \circ (1_{d_1} \text{ш} \dots \text{ш} 1_{d_k})$ равен

$$x_{j_1, \dots, j_k} \cdot l_1! \cdot \dots \cdot l_m! \vartheta_{j_1} \text{ш} \dots \text{ш} \vartheta_{j_k} \neq 0,$$

где $l_1, \dots, l_m$ — длины интервалов постоянства неубывающей целочисленной функции $i \mapsto d_i$, $i = 1, \dots, k$ ■

Следствие. Подпространства V^n являются двусторонними идеалами в $\mathcal{H}_+ : V^n \circ \mathcal{H}_+ = \mathcal{H}_+ \circ V^n = V^n$ ■

3. Теперь мы выйдем ненадолго за пределы тасовочной алгебры $\mathcal{H}$, чтобы привести некоторые следствия теоремы 3, относящиеся к групповым алгебрам $\mathcal{G}_n$ симметрических групп Σ_n .

Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ — независимые образующие (алфавит) свободной ассоциативной алгебры. Сопоставив каждой подстановке $\sigma \in \Sigma_n$ моном $\lambda_\sigma = \lambda_{\sigma(1)} \cdot \dots \cdot \lambda_{\sigma(n)}$, а линейной комбинации подстановок $x = \sum_i c_i \sigma_i$ полином $\lambda_x = \sum_i c_i \lambda_{\sigma_i}$, отождествляем групповую алгебру $\mathfrak{S}_n$ с подпространством в $\text{Ass}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, состоящим из элементов, однородных степени 1 по каждой переменной. Положим

$$\text{Lie}_n = \{x \in \mathfrak{S}_n \mid \lambda_x \in \text{Lie}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)\}.$$

Нетрудно видеть, что Lie_n является левым идеалом в групповой алгебре $\mathfrak{S}_n$, т. к. перестановка переменных в коммутаторном полиноме от $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ оставляет полином коммутаторным.

Теорема 4. Для любого $n > 0$ справедливы соотношения:

$$1) V_n = \text{Lie}_n \cap W_n;$$

$$2) \text{ пусть } \vartheta \in V_n, \rho(\vartheta) \neq 0, \text{ тогда } \mathfrak{S}_n \circ \vartheta = \text{Lie}_n.$$

Доказательство. Пусть

$$\pi: \text{Ass}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \rightarrow \text{Lie}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

— линейное отображение, действующее по правилу

$$\pi(\lambda_{i_1} \cdot \dots \cdot \lambda_{i_k}) = \frac{1}{k} \text{ad } \lambda_{i_1} \dots \text{ad } \lambda_{i_{k-1}} \lambda_{i_k}.$$

Хорошо известно, что π является проектором $\text{Ass}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ на $\text{Lie}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ (см. [4]). Теперь заметим, что $\pi(\lambda_x) = \frac{1}{n} \lambda_{x \circ \bar{\omega}_n} \forall x \in \mathfrak{S}_n$ (ср. с п. 1.4). Следовательно, $\bar{\omega}_n$ порождает левый идеал Lie_n , т. е. $\mathfrak{S}_n \circ \bar{\omega}_n = \text{Lie}_n$. Напомним, что $\rho(\bar{\omega}_n) = n$ и положим $\pi_n = \frac{1}{n} \bar{\omega}_n$. Элемент $\pi_n \in V_n$ является идемпотентом согласно предложению 9: $\pi_n \pi_n = \pi_n$. Следовательно,

$$x \in \mathfrak{S}_n \pi_n = \text{Lie}_n \Leftrightarrow x \circ \pi_n = x.$$

Из предложения 9 следует, что $\vartheta \circ \pi_n = \vartheta \forall \vartheta \in V_n$, а из следствия теоремы 3 следует, что $x \circ \pi_n \in V_n \forall x \in W_n$.

Таким образом, утверждение 1) теоремы доказано.

Далее, если $\vartheta \in V_n, \rho(\vartheta) \neq 0$, то $\pi_n = \frac{1}{\rho(\vartheta)} \pi_n \circ \vartheta$. Следовательно, $\mathfrak{S}_n \circ \vartheta = \mathfrak{S}_n \circ \pi_n = \text{Lie}_n$.

Пусть $\text{Ass}(S) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \text{Ass}_n(S)$ — свободная ассоциативная алгебра с некоторым множеством образующих S , градуированная обычным образом. Определим правое действие θ_n алгебры $\mathfrak{S}_n$ на пространстве $\text{Ass}_n(S)$, положив для любого $x = \sum_i c_i \sigma_i \in \mathfrak{S}_n$

$$\theta_n(x): s_1 \cdot \dots \cdot s_n \mapsto \sum_i c_i s_{\sigma(1)} \cdot \dots \cdot s_{\sigma(n)},$$

где $s_i \in S$, $i=1, \dots, n$ — произвольные переменные, не обязательно различные.

Следствие. Пусть $\vartheta_k \in V_k$, $\rho(\vartheta_k)=1$, $k=1, 2, \dots$. Тогда отображение

$$\bigoplus_{k=1}^{\infty} \vartheta_k(\vartheta_k): \text{Ass}(S) \rightarrow \text{Ass}(S)$$

является проектором $\text{Ass}(S)$ на $\text{Lie}(S)$. ■

4. Результаты двух предыдущих пунктов содержат решение исходных задач настоящей работы, поставленных в пункте 1.4: описать все коммутаторные представления n -й вариации и найти симметрии, преобразующие произвольное представление n -й вариации снова в некоторое представление n -й вариации. При этом, как выяснилось, решение второй задачи, по существу, включает в себя решение первой.

Пусть h_t — нестационарное поле. Все коммутаторные представления n -й вариации системы (1.8) имеют вид

$$h_*\vartheta, \vartheta \in V_n \cap \rho^{-1}(1).$$

Применение к $h_*\vartheta$ симметрии $x \in \mathcal{H}_n$ дает выражение $h_*(x \circ \vartheta)$. Таким образом, множество симметрий из $\mathcal{H}_n$, переводящих представления n -й вариации снова в представления n -й вариации есть $\mathcal{H}_n \cap \rho^{-1}(1)$. Кроме того, для любых $\vartheta_1, \vartheta_2 \in V_n \cap \rho^{-1}(1)$ имеем $\vartheta_1 \circ \vartheta_2 = \vartheta_1$.

Таким образом, применением симметрий к произвольному коммутаторному представлению легко получить любое другое коммутаторное представление, и привилегированных коммутаторных представлений нет.

§ 4. РАСШИРЕНИЯ

1. До сих пор мы изучали алгебраические структуры, связанные с асимптотическим разложением потоков, порождаемых фиксированной системой вида (1.8). В приложениях часто встречается ситуация, когда на правые части рассматриваемых систем действует некоторая группа Γ , и приходится сравнивать и комбинировать асимптотические разложения для систем, получающихся из данной под воздействием различных элементов группы. Иными словами, приходится специальным образом расширять вариационную группу с помощью группы Γ .

Простой и важный пример действия группы на правую часть мы получаем, исходя прямо из нестационарной системы (1.8) без каких бы то ни было дополнительных структур. Это — действие группы аффинных преобразований оси времени: $h_t \rightarrow h_{c_1 t + c_2}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, $c_1 \neq 0$. Если правая часть зависит от параметров, дискретных или непрерывных, как это бывает в теории управления, то действует группа преобразований про-

странства параметров. Например, при изучении взаимодействия l систем с правыми частями $h_i^1, \dots, h_i^l$ используется симметрическая группа $\Gamma = \Sigma_l$, элементы которой переставляют поля h_i^i .

2. Приступим к описанию расширения тасовочной алгебры с помощью группы Γ . Пусть

$$\Gamma^n = \{\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) \mid \gamma_i \in \Gamma, i=1, \dots, n\}$$

— декартово произведение n экземпляров группы Γ ,

$$\gamma \cdot \gamma' \stackrel{\text{def}}{=} (\gamma_1 \cdot \gamma'_1, \dots, \gamma_n \cdot \gamma'_n).$$

Пусть $\sigma \in \Sigma_n$, соответствие

$$\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) \mapsto \gamma_\sigma = (\gamma_{\sigma(1)}, \dots, \gamma_{\sigma(n)})$$

определяет правое действие Σ_n на Γ^n .

Определение. Символом Σ_n^Γ обозначается следующее полупрямое произведение Σ_n на Γ^n :

$$\begin{aligned} \Sigma_n^\Gamma &= \{(\gamma, \sigma) \mid \gamma \in \Gamma^n, \sigma \in \Sigma_n\}, \\ (\gamma', \sigma') \circ (\gamma, \sigma) &= (\gamma' \cdot \gamma_\sigma, \sigma' \circ \sigma). \end{aligned} \quad (4.1)$$

Исходными объектами при построении тасовочной алгебры являлись группы Σ_n ; при построении расширенной тасовочной алгебры исходными объектами являются группы Σ_n^Γ , а умножение в этих группах играет ту же роль, что и обычное симметричное умножение.

Пусть на некотором множестве U определено левое действие группы Γ . Результат применения элемента $\gamma \in \Gamma$ к $u \in U$ будем обозначать просто γu . Пусть $\Phi: U \xrightarrow{n} \mathcal{D}$ — отображение U^n в некоторое множество $\mathcal{D}$ (выбор букв оправдывается тем, что в важных для нас приложениях U — множество управляющих параметров, а $\mathcal{D}$ — алгебра дифференциальных операторов на M).

Для $(\gamma, \sigma) \in \Sigma_n^\Gamma$ положим

$$(\gamma, \sigma) \Phi(u_1, \dots, u_n) = \Phi(\gamma_1 u_{\sigma(1)}, \dots, \gamma_n u_{\sigma(n)}).$$

Умножение (4.1) определено так, что соответствие $\Phi \mapsto (\gamma, \sigma) \Phi$ есть левое действие группы Σ_n^Γ , т. е.

$$(\gamma', \sigma')((\gamma, \sigma) \Phi) = (\gamma', \sigma') \circ (\gamma, \sigma) \Phi.$$

Обозначим через $\mathfrak{S}_n^\Gamma$ групповую алгебру над $\mathbb{R}$ группы Σ_n^Γ , $\mathfrak{S}_0^\Gamma = \mathbb{R}$ и $\mathfrak{S}^\Gamma = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathfrak{S}_n^\Gamma$.

Определим тасующее произведение произвольных $(\gamma, \sigma) \in \Sigma^n$ и $(\gamma', \sigma') \in \Sigma_m^\Gamma$ формулой

$$(\gamma, \sigma) \# (\gamma', \sigma') = ((\gamma, \gamma'), \sigma \sigma') \in \Sigma_{n+m}^\Gamma,$$

где $(\gamma, \gamma') = (\gamma_1, \dots, \gamma_n, \gamma'_1, \dots, \gamma'_m) \in \Gamma^{n+m}$.

Тасующее произведение доопределяется по линейности для любой пары элементов $\mathfrak{S}^\Gamma$ и задает в $\mathfrak{S}^\Gamma$ структуру ассоциативной градуированной алгебры.

Пусть $U \subset \mathbb{R}^N$, $\mathcal{D}$ — пространство Фреше, отображения $u \mapsto \gamma u$, $u \in U$ непрерывны $\forall \gamma \in \Gamma$, отображение $\Phi: U^n \rightarrow \mathcal{D}$ также непрерывно, и $u(\cdot): [0, 1] \rightarrow U$ — измеримая ограниченная вектор-функция. Легко проверяется тождество

$$\begin{aligned} \int_{\Delta^k \times \Delta^{n-k}} \Phi(\gamma_1 u(t_1), \dots, \gamma_k u(t_k), \gamma'_1 u(t_{k+1}), \dots, \gamma'_{n-k} u(t_n)) dt_1 \dots dt_n = \\ = \int_{\Delta^n} ((\gamma, 1_k) \# (\gamma', 1_{n-k})) \Phi(u(t_1), \dots, u(t_n)) dt_1 \dots dt_n \quad (4.2) \end{aligned}$$

для любых

$$k = 0, 1, \dots, n, \quad \gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_k) \in \Gamma^k, \quad \gamma' = (\gamma'_1, \dots, \gamma'_{n-k}) \in \Gamma^{n-k}.$$

Пусть $u \mapsto h(u)$ — некоторое непрерывное отображение U в $\text{Vect}(M)$. Положим $H^k(u_1, \dots, u_k) = h(u_1) \circ \dots \circ h(u_k)$. Важный частный случай тождества (4.2) получим, взяв в качестве Φ отображение

$$(u_1, \dots, u_n) \mapsto H^k(u_{\sigma(1)}, \dots, u_{\sigma(k)}) \circ H^{n-k}(u_{\sigma'(1)}, \dots, u_{\sigma'(n-k)}),$$

где $\sigma \in \Sigma_k$, $\sigma' \in \Sigma_{n-k}$.

В этом случае (4.2) сводится к равенству:

$$\begin{aligned} \int_{\Delta^k} (\gamma, \sigma) H^k(u(t_1), \dots, u(t_k)) dt_1 \dots dt_k \circ \\ \circ \int_{\Delta^{n-k}} (\gamma', \sigma') H^{n-k}(u(t_1), \dots, u(t_{n-k})) dt_1 \dots dt_{n-k} = \\ = \int_{\Delta^n} ((\gamma, \sigma) \# (\gamma', \sigma')) H^n(u(t_1), \dots, u(t_n)) dt_1 \dots dt_n. \quad (4.3) \end{aligned}$$

Таким образом, отображение

$$(\gamma, \sigma) \mapsto \int_{\Delta^k} (\gamma, \sigma) H^k(u(t_1), \dots, u(t_k)) dt_1 \dots dt_k,$$

$$(\gamma, \sigma) \in \Sigma_k^\Gamma, \quad k = 1, 2, \dots$$

определяет гомоморфизм алгебры $\mathfrak{S}^\Gamma$ в алгебру дифференциальных операторов на M .

3. Подгруппа в $\text{Diff}(M)$, порожденная диффеоморфизмами

$$\overrightarrow{\exp} \int_0^1 \varepsilon h(\gamma u(t)) dt, \quad \varepsilon \in \mathbb{R}, \quad \gamma \in \Gamma,$$

называется Γ -расширением вариационной группы системы

$$\dot{x} = x \circ h(u(t)). \quad (4.4)$$

Соответственно, Γ -расширением алгебры Ли вариаций системы (4.4) называется подалгебра Ли в $\text{Vect}(M)$, порожденная алгебрами Ли вариаций систем

$$\dot{x} = x \circ h(\gamma u(t)), \quad \gamma \in \Gamma.$$

Абстрактные аналоги этих вещей определим, следуя той же схеме, что и в § 2. Прежде всего, пусть $\bar{\mathfrak{S}}^\Gamma$ — пополнение градуированной алгебры $\mathfrak{S}^\Gamma = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathfrak{S}_n^\Gamma$ в стандартной топологии сходимости однородных компонент.

Пусть $\gamma \in \Gamma$, введем обозначения:

$$(\gamma)_n = ((\underbrace{\gamma, \dots, \gamma}_{n \text{ раз}}, 1_n), \quad (\gamma)_n \in \Sigma_n^\Gamma, \quad (\gamma)_0 = 1 \in \mathbb{R};$$

$$\overrightarrow{\exp}(\varepsilon, \gamma) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n (\gamma)_n, \quad \overrightarrow{\exp}(\varepsilon, \gamma) \in \bar{\mathfrak{S}}^\Gamma;$$

$$\overleftarrow{\omega}(\varepsilon, \gamma) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^{n-1} \overleftarrow{\omega}_n(\gamma) = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} (\overrightarrow{\exp}(\varepsilon, \gamma)) \psi (\overrightarrow{\exp}(\varepsilon, \gamma))^{-1}.$$

Определение. Подгруппа $\mathcal{V}^\Gamma$ в мультипликативной полугруппе алгебры $\bar{\mathfrak{S}}^\Gamma$, порожденная элементами $\overrightarrow{\exp}(\varepsilon, \gamma)$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\gamma \in \Gamma$, называется Γ -расширением абстрактной вариационной группы.

Подалгебра Ли V^Γ в $[\mathfrak{S}^\Gamma]$, порожденная элементами $\overleftarrow{\omega}_n(\gamma)$, $n=1, 2, \dots$, $\gamma \in \Gamma$ называется Γ -расширением абстрактной алгебры Ли вариаций.

Γ -расширение абстрактной алгебры Ли вариаций содержится в (ассоциативной) подалгебре алгебры $\mathfrak{S}^\Gamma$, порожденной элементами $(\gamma)_n$, $\gamma \in \Gamma$, $n=0, 1, \dots$, а Γ -расширение абстрактной вариационной группы лежит в замыкании этой подалгебры в $\bar{\mathfrak{S}}^\Gamma$.

Определение. Подалгебра (ассоциативная) в $\mathfrak{S}^\Gamma$, порожденная элементами $(\gamma)_n$, $\gamma \in \Gamma$, $n=0, 1, \dots$, называется Γ -расширением тасовочной алгебры и обозначается символом $\mathcal{H}^\Gamma$, а ее замыкание в $\bar{\mathfrak{S}}^\Gamma$ — символом $\bar{\mathcal{H}}^\Gamma$.

Ясно, что $\bar{\mathcal{H}}^\Gamma$ — градуированная подалгебра в $\bar{\mathfrak{S}}^\Gamma$, $\bar{\mathcal{H}}^\Gamma = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \bar{\mathcal{H}}_n^\Gamma$, где $\bar{\mathcal{H}}_n^\Gamma = \mathcal{H}^\Gamma \cap \mathfrak{S}_n^\Gamma$.

Пусть $e \in \Gamma$ — единичный элемент группы Γ . Отождествляя $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ с элементом $((e, \dots, e), \sigma) \in \mathfrak{S}_n^\Gamma$, получаем естественное

вложение алгебры $\mathfrak{S}$ в $\mathfrak{S}^\Gamma$, при котором $\mathcal{H}$ вкладывается в $\mathcal{H}^\Gamma$. Из определения $\mathcal{H}^\Gamma$ и того факта, что $\mathcal{H}$ — свободная алгебра с образующими $1_n, n=1, 2, \dots$ (см. следствие предложения 3) вытекает, что $\mathcal{H}^\Gamma$ — свободная ассоциативная алгебра с образующими $(\gamma)_n, \gamma \in \Gamma, n=1, 2, \dots$. Простым обобщением теоремы 1 является

Теорема 1 $^\Gamma$. Γ -расширение абстрактной алгебры Ли вариаций V^Γ является свободной алгеброй Ли с образующими $\omega_n(\gamma) \in \mathcal{H}^\Gamma$. ■

4. Кратко описанные в предыдущем пункте расширения вариационной группы и тасовочной алгебры стоили бы немного, если бы на них не распространялась фундаментальная лемма, связывающая симметричное умножение «о» с тасующим умножением «ш».

Как и в §3, распространим симметричное умножение (первоначально заданное отдельно на каждой из однородных компонент $\mathfrak{S}_n^\Gamma$) на все $\mathfrak{S}^\Gamma$, положив $a \circ b = 0$ при $a \in \mathfrak{S}_n^\Gamma, b \in \mathfrak{S}_m^\Gamma, n \neq m$.

Фундаментальная лемма для Γ -расширений. Для любого $x \in \mathcal{V}^\Gamma$ и любых $a, b \in \mathfrak{S}^\Gamma$ справедливо равенство

$$x \circ (a \text{ ш } b) = (x \circ a) \text{ ш } (x \circ b).$$

Доказательство следует той же схеме, что и доказательство фундаментальной леммы в § 3, если подходящим образом обобщить использованную там конструкцию алгебры Λ . Имено, пусть Λ^Γ — ассоциативная алгебра с образующими $(\gamma, \lambda_i),$

$$\gamma \in \Gamma, i=1, \dots, n+m,$$

определяемая следующими соотношениями: произвольный моном $(\gamma_1, \lambda_{i_1}) \cdot \dots \cdot (\gamma_k, \lambda_{i_k})$, в котором $i_j = i_{j'}$ для некоторых $j \neq j'$, равен нулю.

Вместо правого действия группы Σ_k на полиномах степени k из алгебры Λ , использованного в § 3, следует рассматривать правое действие группы Σ_k^Γ на полиномах степени k из алгебры Λ^Γ , определяемое следующим образом:

$$(\gamma, \sigma): (\gamma'_1, \lambda_{i_1}) \cdot \dots \cdot (\gamma'_k, \lambda_{i_k}) \mapsto (\gamma_1 \cdot \gamma'_{\sigma(1)}, \lambda_{i_{\sigma(1)}}) \cdot \dots \cdot (\gamma_k \cdot \gamma'_{\sigma(k)}, \lambda_{i_{\sigma(k)}}),$$

$$\forall \gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_k) \in \Gamma^k, \sigma \in \Sigma_k.$$

Остальные рассуждения мало чем отличаются от доказательства фундаментальной леммы в § 3, и мы их опустим.

Как и в случае обычной тасовочной алгебры, фундаментальная лемма позволяет полностью описать «таблицу симметричного умножения» в Γ -расширении тасовочной алгебры.

Предложение 12. Для любых $n, m > 0$, элементов $\gamma_1, \dots, \gamma_n, \gamma'_1, \dots, \gamma'_m \in \Gamma$, а также положительных целых чисел $i_1, \dots, i_n, j_1, \dots, j_m$ справедливо равенство

$$\begin{aligned} & ((\gamma_1)_{i_1} \text{ ш } \dots \text{ ш } (\gamma_n)_{i_n}) \circ ((\gamma'_1)_{j_1} \text{ ш } \dots \text{ ш } (\gamma'_m)_{j_m}) = \\ &= \sum_K (\gamma'_1 \cdot \gamma_1)_{k_{11}} \text{ ш } \dots \text{ ш } (\gamma'_1 \cdot \gamma_n)_{k_{n1}} \text{ ш } (\gamma'_2 \cdot \gamma_1)_{k_{12}} \text{ ш } \dots \text{ ш } (\gamma'_2 \cdot \gamma_n)_{k_{n2}} \text{ ш } \\ & \dots \text{ ш } (\gamma'_m \cdot \gamma_1)_{k_{1m}} \text{ ш } \dots \text{ ш } (\gamma'_m \cdot \gamma_n)_{k_{nm}}, \end{aligned}$$

где сумма берется по всем матрицам

$$K = \begin{pmatrix} k_{11} & \dots & k_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ k_{n1} & \dots & k_{nm} \end{pmatrix},$$

удовлетворяющим условиям:

$$\sum_{l=1}^n k_{il} = j_i, \quad i=1, \dots, m; \quad \sum_{j=1}^m k_{lj} = i_l, \quad l=1, \dots, n.$$

Это утверждение доказывается точно так же, как предложение 7 в § 3.

Из него следует, что для всякого $n > 0$ пространство $\dot{W}_n \Gamma$ является алгеброй относительно симметричного умножения «о» — подалгеброй в групповой алгебре группы $\Sigma_n \Gamma$. Эту «симметричную» алгебру $\dot{W}_n \Gamma$ обозначим $\dot{W}_n \Gamma$, чтобы отличать ее от тасовочной.

Пусть $\dot{W}_+^\Gamma = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \dot{W}_n^\Gamma$; из предложения 12 следует, что $\dot{W}_+^\Gamma \text{ ш } \dot{W}_+^\Gamma \cap \dot{W}_n^\Gamma$ есть двусторонний идеал в $\dot{W}_n^\Gamma$. Любой элемент $x \in \dot{W}_n^\Gamma$ имеет вид

$$x = \sum_i c_i (\gamma_i)_n + y, \quad \text{где } y \in \dot{W}_+^\Gamma \text{ ш } \dot{W}_+^\Gamma, \quad c_i \in \mathbb{R}, \quad \gamma_i \in \Gamma.$$

Отображение $\rho^\Gamma: x \mapsto \sum_i c_i (\gamma_i)_n$ есть антигомоморфизм $\dot{W}_n^\Gamma$ в групповую алгебру группы Γ .

Следующее утверждение — инфинитезимальный вариант фундаментальной леммы — доказывается также, как предложение 11.

Предложение 13. Для любых $n > 0, \theta \in V^\Gamma \cap \dot{W}_n^\Gamma, x \in \dot{W}_n^\Gamma$ справедливо равенство

$$\theta \circ x = \theta \circ (\rho^\Gamma(x))_n.$$

Заканчивая параграф, а вместе с ним и статью, заметим, что изучение Γ -расширений тасовочной алгебры и абстрактной алгебры Ли вариаций здесь лишь намечено. Более подробные сведения об этих объектах и приложения будут приведены в последующих публикациях.

ЛИТЕРАТУРА

1. Агрacheв А. А., Гамкрелидзе Р. В. Экспоненциальное представление потоков и хронологическое исчисление // Мат. сб.— 1978.— 107, № 4.— С. 467—532 (РЖМат, 1979, 4Б583)
 2. Гамкрелидзе Р. В., Агрacheв А. А., Вахрамеев С. А. Обыкновенные дифференциальные уравнения на векторных расслоениях и хронологическое исчисление // Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. матем. Новейшие достижения / ВИНТИ, 1989.— 35.— С. 3—107 (РЖМат, 1989, 12А703)
 3. Agrachev A. A., Gamkrelidze R. V., Sarychev A. V. Local invariants of smooth control systems // Acta Appl. Math.— 1989.— 14.— С. 191—237 (РЖМат, 1989, 10Б 716)
 4. Bourbaki N. Groupes et algèbres de Lie. Chapter II // Paris: Hermann, 1972 (Русск. перевод: Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли. Гл. II.— М., Мир, 1976)
 5. Crouch P. E., Lamnabhi-Lagarrigue F. Algebraic and multiple integral identities // Acta Appl. Math.— 1989.— 15, № 3.— С. 235—274 (РЖМат, 1980, 3Б590)
 6. Fliess M. Fonctionnelles causales non linéaires et indéterminées, non commutatives // Bull. Soc. Math. France.— 1981.— 109.— С. 3—4 (РЖМат, 1981, 9Б830)
-