Е. Р. Аваков, А. А. Аграчев, А. В. Арутюнов, Множество уровня гладкого отображения в окрестности особой точки и нули квадратичного отображения, *Матем. сб.*, 1991, том 182, номер 8, 1091–1104

УДК 517.9

Е. Р. Аваков, А. А. Аграчев, А. В. Арутюнов

Множество уровня гладкого отображения в окрестности особой точки и нули квадратичного отображения

Исследуется множество уровня M гладкого отображения F в окрестности анормальной точки. Для него введены понятия 2-регулярности. Доказано, что если рассматриваемое отображение 2-регулярно в исследуемой точке, то в ее окрестности множество M локально диффеоморфно множеству нулей второго дифференциала отображения F.

§ 1

Пусть X и Y — гильбертовы пространства, а F: $X \to Y$ — трижды непрерывно дифференцируемое отображение. Зафиксируем произвольную точку $x_0 \in X$ и введем в рассмотрение множество

$$M = \{x \in X\colon\ F(x) = F(x_0)\}.$$

Если точка x_0 нормальна, т. е. $\operatorname{Im} F'(x_0) = Y$, то по теореме о неявной функции отображение F в окрестности x_0 можно с помощью гладкой невырожденной замены координат привести к линейному и, следовательно, M — локально диффеоморфно своему касательному подпространству $\operatorname{Ker} F'(x_0)$. Предположим теперь, что точка x_0 анормальна, т. е. $\operatorname{Im} F'(x_0) \neq Y$. Тогда, вообще говоря, локальное приведение отображения F к линейному невозможно. Однако если Y — одномерно, т. е. F — вещественная функция, $F'(x_0) = 0$, а линейный оператор $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x_0)$ имеет ограниченный обратный, то по лемме Морса [7] F можно локально привести к квадратичному отображению $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x_0)[x, x]$. В этом случае множество M локально диффеоморфно квадрике $\left\{x \in X : \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x_0)[x, x] = 0\right\}$. Если же $\dim Y > 1$, то соответствующий аналог леммы Морса не имеет места. А именно, справедливо

Предложение 1. *Пусть $\dim Y \geqslant 2$, а размерность пространства X конечна и нечетна. Тогда для любого квадратичного отображения Q: $X \to Y$ существует такое гладкое отображение q: $X \to Y$, что каждая из функций q_i ($q_i(x)$ — компоненты вектора $q(x)$) является однородным многочленом от x третьей степени и при любом числе $\varepsilon \neq 0$ не существует локального диффеоморфизма, который приводил бы отображение $F_\varepsilon(x) = Q(x) + \varepsilon q(x)$ к квадратичному виду.*

Доказательство. Очевидно достаточно ограничиться рассмотрением случая $\dim Y = 2$. Положим $n = \dim X$ и пусть Q_1, Q_2 — произвольные квадратичные формы на X. Рассмотрим детерминантное уравнение $\det(\lambda_1 Q_1 + \lambda_2 Q_2) = 0$ относительно неизвестного $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$: $|\lambda| = 1$. Левая часть этого уравнения является однородным многочленом n-й степени относительно λ. Поэтому в силу нечетности n рассматриваемое уравнение имеет вещественный корень $\bar\lambda = (\bar\lambda_1, \bar\lambda_2)$, $|\bar\lambda| = 1$. Положим $Q = \bar\lambda_1 Q_1 + \bar\lambda_2 Q_2$. Используя возможность приведения симметричной вырожденной матрицы Q к диагональному виду, будем не теряя общности считать, что Q — диагональная матрица, у которой последний элемент на диагонали равен нулю. Обозначим через q_i функции $q_i(x) = \bar\lambda_i x_n^3$, $i = 1, 2$.

Покажем, что отображение $q = (q_1, q_2)$ является искомым. Действительно, предположим противное. Тогда при $\varepsilon \neq 0$ с помощью соответствующего локального диффеоморфизма к квадратичному виду может быть приведена и скалярная функция $\bar F(x) = \bar\lambda_1 F_{1,\varepsilon}(x) + \bar\lambda_2 F_{2,\varepsilon}(x)$. Но по построению $\bar F$ имеет вид $\bar F(x) = \sum\limits_{i=1}^{n-1} \gamma_i x_i^2 + \varepsilon x_n^3$ (γ_i — диагональные элементы матрицы Q) и, значит, при $\varepsilon \neq 0$ к квадратичному виду функция $\bar F$, а вместе с ней и отображение F_ε, приведены быть не могут. Предложение доказано.

Из полученного утверждения сразу же вытекает следующее

Предложение 2. *Пусть $\dim Y \geqslant 2$, размерность X конечна и нечетна, x_0 — фиксированная точка из X, а N — подпространство таких отображений $F \in C^3$, что $F'(x_0) = 0$. Тогда множество отображений $F \in N$, для которых не существует локальный диффеоморфизм, определенный в окрестности x_0 и приводящий к F к квадратичному виду, всюду плотно в N.*

Хотя, как мы показали, в случае $\dim Y \geqslant 2$ лемма Морса, вообще говоря, не имеет места, однако оказывается, что если отображение F в точке x_0 2-регулярно (в определяемом ниже смысле), то множество M локально диффеоморфно конусу

$$H = \{x \in X\colon\ F'(x_0)\, x = 0,\quad P_2 F''(x_0)\,[x, x] = 0\}.$$

Здесь P_1 и P_2 — операторы ортогонального проектирования Y на подпространство $\operatorname{Im} F'(x_0)$ и его ортогональное дополнение соответственно. Доказательство этого утверждения составляет основной результат статьи.

В заключение введения на примере управляемой динамической системы продемонстрируем, как естественным образом возникает проблема исследования анормальных ситуаций.

Пример 1. Рассмотрим матричное дифференциальное уравнение

$$\dot Z = AZ + \sum_{i=1}^{k} u^i B_i Z, \qquad t \in [0, T]; \quad Z(0) = Z_0. \tag{1}$$

Здесь число $T > 0$ фиксировано, A, B_i — квадратичные $n \times n$-матрицы, $Z(\cdot)$ — абсолютно непрерывная матрица-функция тех же размеров $n \times n$, u^i — скалярные управляющие параметры и $k < n$. В качестве допустимых управлений рассматриваются вектор-функции $u(\cdot) = (u^1(\cdot), \ldots, u^k(\cdot)) \in L_2^k[0, T]$. Матрица Z_0, задающая начальное условие, невырождена.

Рассматриваемая билинейная система определяет отображение F_T: $L_2^k [0, T] \to E^{n^2}$, ставящее в соответствие допустимому управлению $u(\cdot)$ значение соответствующего ему решения (1) в момент времени $t = T$. Как известно, отображение F_T определено на всем $L_2^k [0, T]$, аналитично, а его производная в нуле $F_T'(0)$ определяется по формуле

$$F_T'(0)\, v = e^{AT} \sum_{i=1}^{k} \int_0^T v_i(t)\, e^{-tA} B_i e^{tA}\, dt Z_0; \quad v \in L_2^k [0, T].$$

Покажем, что нулевая точка $u = 0$ является анормальной для любых $T > 0$, матриц A, B_i, определяющих правую часть, и Z_0.

Действительно, предположим вначале, что матрица A имеет простой спектр, т. е. все ее собственные значения $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ различны. Тогда, сделав невырожденное линейное преобразование, будем считать, что A диагональна. Из выражения для $F_T'(0)$ имеем

$$\operatorname{Im} F_T'(0) \subseteq e^{AT} \operatorname{Lin} \Big(\bigcup_{i=1}^{k} \bigcup_{t \in [0, T]} e^{-tA} B_i e^{tA}\Big) Z_0. \tag{2}$$

Между тем $e^{\pm tA}$ — это диагональная матрица с элементами $e^{\pm t\lambda_i}$, откуда после простых вычислений получается, что диагональные элементы каждой из матриц-функций $R_i(t) = e^{-tA} B_i e^{tA}$ от переменной t не зависят. Отсюда в силу (2) вытекает, что все матрицы $R_i(t)$ лежат в некоторой плоскости $\Pi_i \subset E^{n^2}$, для которой $\operatorname{codim} \Pi_i \geqslant n$ и, следовательно, $\operatorname{codim} (\operatorname{Im} F_T'(0)) \geqslant n - k > 0$. Остается заметить, что произвольная матрица A является пределом некоторой последовательности матриц $\{A_j\}$, имеющих простой спектр, откуда искомое неравенство $\operatorname{codim} (\operatorname{Im} F_T'(0)) \geqslant n - k > 0$ получается предельным переходом по j.

Ниже мы еще вернемся к этому примеру в связи с условиями 2-регулярности.

§ 2. Формулировка основных результатов

Введем необходимые для дальнейшего обозначения и определения. Через D_X, D_Y обозначим единичные шары из X и Y, а через S — единичную сферу в X; $O_\varepsilon x$ — ε-окрестность точки x; а O_ε — ε-окрестность нуля, $\rho(x, A)$ — расстояние от точки x до множества A, cl — замыкание множества, E^n — n-мерное арифметическое пространство.

Точку $x_0 \in X$ в дальнейшем считаем фиксированной и будем предполагать, что подпространство $\operatorname{Im} F'(x_0)$ замкнуто. Положим $H^e = H \cap S$.

Для произвольного $x \in X$ определим линейный оператор $G(x)$: $X \to Y$ формулой $G(x) = F'(x_0) + P_2 F''(x_0)\, x$. Заметим, что $H = \{x \in X : G(x)\, x = 0\}$.

Определение 1. Отображение F называется 2-регулярным в точке x_0, если

$$\operatorname{Im} G(h) = Y \quad \forall h \in H^e. \tag{3}$$

Определение 2. Отображение F называется сильно 2-регулярным в точке x_0, если существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что

$$G(h)(D_X) \supseteq \varepsilon_0 D_Y \quad \forall h \in S\colon \ |G(h)\, h| \leqslant \varepsilon_0.$$

Очевидно, что если X конечномерно, то 2-регулярность эквивалентна сильной 2-регулярности. Если же X бесконечномерно, то из сильной 2-регулярности вытекает 2-регулярность, но, вообще говоря, не наоборот.

В связи со сказанным вернемся к примеру 1. Несложно вычисляется, что

$$F_T''(0)[v, v] = e^{AT} \int_0^T \int_0^t \sum_{i,j=1}^{k} v^i(t) v^j(\tau) e^{-At} B_i e^{At} e^{-A\tau} B_j e^{A\tau} \, dt \, d\tau Z_0.$$

Поэтому квадратичное отображение $F_T''(0)$ слабо непрерывно и, следовательно, F не является сильно 2-регулярным в нуле.

Можно показать, однако, что для некоторого открытого плотного подмножества в пространстве $E^{n^2} \times E^{kn^2} \times E^1$ «исходных данных» $(A, B_1, \ldots, B_k, T)$ отображение F_T является 2-регулярным в нуле. Например, в случае $k = 1$, если элементы B_1, $[A, B_1]$, $(\mathrm{ad}\, A)^2 B_1, \ldots, (\mathrm{ad}\, A)^{n^2-n} B_1$, $[B_1, [A, B_1]]$, $[B_1, (\mathrm{ad}\, A)^2 B_1], \ldots, [B_1, (\mathrm{ad}\, A)^{n-1} B_1]$ образуют базис пространства $n \times n$-матриц, то отображение F_1 может быть не 2-регулярным лишь для изолированных значений $T \in E^1$. Здесь использованы стандартные обозначения из теории алгебр Ли:

$$\mathrm{ad}\, A \colon E^{n^2} \to E^{n^2}, \quad (\mathrm{ad}\, A) B_1 = [A_1, B_1] = AB_1 - B_1 A.$$

Поясним теперь причину введения двух условий регулярности. Если $\dim X = \infty$, то, как показывают приводимые ниже теорема 1 и пример 2, множества M и H локально диффеоморфны, вообще говоря, лишь при условии сильной 2-регулярности F. Однако если F всего лишь 2-регулярно, то, как показывает теорема 2, M и H локально диффеоморфны в более слабом смысле, т. е. относительно более сильной, чем исходная, конечномерной топологии X. А именно, подмножество $O \subseteq X$ называется конечномерно-открытым [1, с. 119], если для произвольного конечномерного подпространства $R \subseteq X$ множество $O \cap R$ открыто в топологии, наследуемой R из X [1]. Конечномерно-открытые множества образуют в X конечномерную топологию. Отметим, что в конечномерной топологии X не является линейным топологическим пространством (если $\dim X = \infty$), так как в нем операция сложения оказывается разрывной [2]. Однако конечномерная топология может оказаться полезной при исследовании необходимых условий минимума в теории экстремальных задач.

Отображение $\varphi\colon O \to X$, определенное на конечномерно-открытом множестве $O \subseteq X$, будем называть (локальным) конечномерным диффеоморфизмом, если оно гомеоморфно в конечномерной топологии отображает O на $\varphi(O)$, множество $\varphi(O)$ конечномерно-открыто и для любого конечномерного подпространства $R \subset X$ сужение φ на $R \cap O$ и φ^{-1} на $R \cap \varphi(O)$ непрерывно дифференцируемы.

Теорема 1. *Пусть отображение F сильно 2-регулярно в точке x_0. Тогда существует такая окрестность нуля O, окрестность точки x_0 $\tilde{O}$, а также диффеоморфизм $\Phi\colon O \to \tilde{O}$, что $\Phi(O) = \tilde{O}$, и*

$$\Phi(0) = x_0; \quad \Phi(H \cap O) = M \cap \Phi(O). \tag{4}$$

[1] Напомним, что для любого конечномерного подпространства топология, наследуемая им из X, эквивалентна естественной топологии R, рассматриваемого как арифметическое пространство.

Т е о р е м а 2. *Пусть отображение F 2-регулярно в точке x_0. Тогда существуют конечномерная окрестность нуля O и конечномерный диффеоморфизм Φ: $O \to X$, для которых выполняется (4).*

В следующем примере из-за отсутствия сильной 2-регулярности выполняется лишь утверждение теоремы 2, но не теоремы 1.

П р и м е р 2. Пусть $X = W^1_{2,1}[0, 1]$; $Y = E^1$, $x_0 = 0$, $F(x) = \int_0^1 t\dot{x}^2(t) - x^3(t)\,dt$. Докажем существование сходящейся к нулю последовательности $\{x_i\}$, для которой $F(x_i) = 0$. Действительно, прямым вычислением проверяется, что последовательности

$$x_{1,i}(t) = \begin{cases} t, & t \in [0, i^{-1}], \\ i^{-1}, & t > i^{-1}; \end{cases} \quad x_{2,i}(t) \equiv i^{-1},$$

сходятся к нулю и $F(x_{1,i}) > 0$, $F(x_{2,i}) < 0$. Поэтому на отрезке, соединяющем точки $x_{1,i}$, $x_{2,i}$, найдется точка x_i, для которой $F(x_i) = 0$. Последовательность $\{x_i\}$ является искомой.

Таким образом, множество M содержит сходящуюся к нулю последовательность. С другой стороны, в этом примере, очевидно, $H = \{0\}$ и, следовательно, множества M и H в окрестности нуля даже не являются локально гомеоморфными, хотя отображение F 2-регулярно в нуле.

Впервые локальная гомеоморфность (но не диффеоморфность) множеств M и H в предположении 2-регулярности в конечномерном случае была установлена в [3]. Мы не будем останавливаться на приложениях теорем 1, и 2. Отметим лишь, что локальная диффеоморфность M и H позволяет, например, использовать топологические инварианты квадратичных отображений, полученных топологическими методами для исследования анормальных экстремальных задач [3], [4]. В работе [9] приведен следующий критерий сильной 2-регулярности квадратичных отображений с конечномерным образом. Пусть A: $X \times X \to E^n$ — симметричное билинейное непрерывное отображение. Положим $Q(x) = A(x, x)$.

О п р е д е л е н и е 3. Квадратичное отображение Q называется сильно 2-регулярным, если оно сильно 2-регулярно в нуле.

Для произвольного $\lambda \in E^n$ через λQ обозначим скалярную квадратичную форму $q(x) = \langle \lambda, Q(x) \rangle$. Введем в рассмотрение множество Λ, состоящее из таких $\lambda \in E^n$, что форма λQ слабо полунепрерывна снизу. Рассмотрим также множество Leg, состоящее из таких $\lambda \in E^n$, что форма λQ лежандрова [5] (т. е. $\lambda \in \Lambda$ и из $x_i \underset{\text{сл}}{\to} 0$, $Q(x_i) \to 0$, $i \to \infty$, вытекает, что $x_i \xrightarrow[i\to\infty]{} 0$ сильно). Для произвольного $y \in E^n$ через $\Lambda(y)$ обозначим множество таких $\lambda \in E^n$, что из $x_i \underset{\text{сл}}{\to} 0$, $yA(x_i) \to 0$, $i \to \infty$, вытекает, что $\varliminf_{i\to\infty} \lambda Q(x_i) \geqslant 0$. Здесь $yA(x)$ — элемент из X^*, определяемый формулой

$$\langle yA(x), \bar{x} \rangle = \langle y, A(x, \bar{x}) \rangle \ \forall \bar{x} \in X.$$

Определим также конус

$$K = \{x \in X \colon Q(x) \in \Lambda^0\},$$

где $\Lambda^0 = \{\lambda \in E^n \colon \langle \lambda, y \rangle \leqslant 0 \quad \forall y \in \Lambda\}$ — дуальный конус к Λ.

Т е о р е м а 3 ([9]). *Пусть конус* Leg *непуст. Тогда для линейной 2-регулярности Q необходимо и достаточно, чтобы*

$$Q(x) \notin \Lambda^0(y) \quad \forall x \in K, \quad y \in E^n\colon x \neq 0, \quad y \neq 0, \quad yA(x) = 0.$$

§ 3. Доказательство теоремы 1

В силу непрерывной зависимости операторов $G(x)$ от параметра x существует такое открытое множество W, что

$$W \supset H^e; \quad |G(h)h| \leqslant \frac{\varepsilon_0}{2} \quad \forall h \in \mathrm{cl}\, W.$$

Здесь число ε_0 взято из определения 2. Выберем такое число $\varepsilon > 0$, чтобы множество W содержало ε-окрестность множества H^e. Но единичная сфера S гильбертова пространства X, как и всякое метрическое пространство, является нормальным пространством. (Топология на S индуцирована из X.) Поэтому существуют такие открытые в топологии S ее подмножества W_1 и W_2, что

$$\left\{x \in S : \rho(x, H^e) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\right\} \subset W_1; \quad \mathrm{cl}\, W_1 \subset W_2; \quad \mathrm{cl}\, W_2 \subset W. \tag{5}$$

Здесь ρ — расстояние от точки до множества. Положим

$$C_1 = \mathrm{cl}\, W_1; \quad C_2 = S \setminus W_2.$$

По построению замкнутые множества C_1 и C_2 не пересекаются. Поэтому (см. [6]) существует бесконечно дифференцируемая на X функция ξ, для которой

$$\xi(x) = \begin{cases} 1, & x \in C_1, \\ 0, & x \in C_2 \cup \{x \in X : |x| \geqslant 2\}, \end{cases} \quad 0 \leqslant \xi(x) \leqslant 1 \quad \forall x \in X. \tag{6}$$

В дальнейшем для удобства будем считать, что $x_0 = 0$, $F(x_0) = 0$.

Введем в рассмотрение семейство отображений $A(\cdot, t)\colon X \to Y$, зависящих от параметра $t \in [0, 1]$ и определяемых по формуле

$$A(x, t) = F'(x_0)x + t(P_1F(x) - F'(x_0)x) + P_2\left\{\frac{1}{2}F''(x_0)[x, x] + t\left(F(x) - \frac{1}{2}F''(x_0)[x, x]\right)\right\}.$$

Произвольное трижды непрерывно дифференцируемое отображение $f\colon X \to Y$ можно представить в окрестности x_0 в виде

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)x + \frac{1}{2}f''(x_0)[x, x] + \langle \alpha(x)x, x \rangle,$$

где $\alpha\colon X \to \mathscr{P}(X)$ — непрерывно дифференцируемое отображение, для которого $\alpha(x_0) = 0$, а $\mathscr{P}(X)$ — пространство непрерывных квадратичных отображений из X в Y. Справедливость такого представления доказывается точно так же, как и соответствующее утверждение, обычно используемое при доказательстве леммы Морса [7, с. 14].

Вычисляя производные $\frac{\partial A}{\partial x}$ и $\frac{\partial A}{\partial t}$ и применяя к ним указанное представление, получаем, что найдутся такие непрерывно дифференцируемые отображения α_i: $X \times [0, 1] \to Y$, что

$$\frac{\partial A}{\partial x}(x,t) = G(x) + \alpha_1(x,t) + |x|\,\alpha_2(x,t),$$

$$\frac{\partial A}{\partial t}(x,t) = \alpha_3(x,t) + |x|\,\alpha_4(x,t);$$

$$\alpha_1, \alpha_2 = O(|x|); \quad \alpha_3, \alpha_4 = O(|x|^2);$$

$$\alpha_1, \alpha_3 \in \operatorname{Im} F'(x_0); \quad \alpha_2, \alpha_4 \in (\operatorname{Im} F'(x_0))^{\perp}. \tag{7}$$

Для произвольных $\bar{x} \in X$: $\bar{x} \neq 0$, $\bar{t} \in [0, 1]$ определим линейное отображение $B(\bar{x}, t)$: $X \times Y^* \to Y \times X^*$ по формуле

$$\begin{cases} B(\bar{x},\bar{t})(x,y^*) = (b(\bar{x},\bar{t})\,x, b^*(\bar{x},\bar{t})\,y^* - Ix); \\ b(x,t) = G\left(\frac{x}{|x|}\right) + \alpha_1(x,t) + \alpha_2(x,t). \end{cases} \tag{8}$$

Здесь $I: X \to X^*$ — естественный изоморфизм, ставящий в соответствие вектору $x \in X$ линейный непрерывный функционал, определяемый им в силу теоремы Рисса.

Введем в рассмотрение множества

$$V_1 = \left\{x \in X : x \neq 0, \frac{x}{|x|} \in W;\ \text{оператор } B(x,t) \text{ непрерывно обратим } \forall t \in [0,1]\right\},$$

$$V_2 = \left\{x \in X : x \neq 0, \frac{x}{|x|} \notin \operatorname{cl} W_2\right\}; \quad V = V_1 \cup V_2 \cup \{0\}.$$

Множество V_2 очевидно открыто. Покажем, что V_1 также открыто. Действительно, пусть $\bar{x} \in V_1$. Тогда для любого $t \in [0, 1]$ существует такое, зависящее от него $\varepsilon(t) > 0$, что операторы $B(x, \tau)$ непрерывно обратимы для всех (x, τ), для которых

$$x \in O_{\varepsilon(t)}\bar{x}; \quad \tau \in [t - \varepsilon(t), t + \varepsilon(t)] \cap [0, 1].$$

Выбираем из открытого покрытия $\bigcup_{t \in [0,1]} (t - \varepsilon(t), t + \varepsilon(t))$ отрезка $[0, 1]$ конечное подпокрытие, определяемое, например, точками t_i, $i = \overline{1, k}$. Положим $\tilde{\varepsilon} = \min_{i=1,k} \varepsilon(t_i)$. Тогда множество V_1 содержит вместе с точкой $\bar{x}$ ее $\tilde{\varepsilon}$-окрестность и, следовательно, открыто.

Докажем, наконец, что множество V также открыто. В силу открытости V_1 и V_2 для этого достаточно показать, что точка $x = 0$ является внутренней для V. Действительно, из условия сильной 2-регулярности F, оценок (2) и формул (8) вытекает существование такого $\delta > 0$, что операторы $b(x, t)$ сюръективны для любых $t \in [0, 1]$, $x \in O_\delta$; $x \neq 0$, $\frac{x}{|x|} \in W$. Но из сюръективности оператора $b(x, t)$ и формул (8) легко следует, что $\operatorname{Ker} B(x, t) = 0$; $\operatorname{Im} B(x, t) = Y \times X^*$ для указанных (x, t) и, следовательно, по теореме об открытом отображении оператор $B(x, t)$ непрерывно обратим. Отсюда вытекает, что $\{x \in O_\delta: x \neq 0, \frac{x}{|x|} \in W\} \subset V_1 \Rightarrow O_\delta \subset V$ и, значит, множество V открыто.

Определим на множестве $V \times [0, 1]$ отображение $\tilde{D}$:

$$\tilde{D}(x,t) = \begin{cases} \xi\left(\frac{x}{|x|}\right) B^{-1}(x,t)\,(\alpha_3(x,t) + \alpha_4(x,t), 0), & x \in V_1, \\ 0, & x \in V \setminus V_1. \end{cases} \tag{9}$$

Покажем, что оно непрерывно и непрерывно дифференцируемо по x. Действительно, пусть $x \neq 0$. Если $x \in V_1$, то гладкость $\tilde{D}$ вытекает из (9) и гладкости отображений ξ, B, α_i на V_1. Если же $x \in V \setminus V_1 \setminus \{0\} = V_2$, то по построению $\frac{|x|}{|x|} \notin \mathrm{cl}\, W_2$ и, следовательно, в силу (6) функция ξ, а в силу (9) вместе с ней и отображение $\tilde{D}$, тождественно равны нулю в некоторой окрестности точки x.

Пусть теперь $x = 0$. Тогда из оценок (7) и условий сильной 2-регулярности несложно вытекает, что $| B^{-1}(x, t)(\alpha_3(x, t) + \alpha_4(x, t), 0) | = \mathcal{O}(| x |^2)$ равномерно по x: $x \neq 0$, $\frac{x}{|x|} \in W$. В силу этой оценки и формул (6), (9) существуют такие $\delta_1 > 0$ и $k > 0$, что

$$| \tilde{D}(x, t) | \leqslant k \, | x |^2 \quad \forall t \in [0, 1], \quad \forall x \in O_{\delta_1}. \tag{10}$$

Из (10), в частности, следует дифференцируемость отображения $\tilde{D}$ при $x = 0$, а также то, что $\frac{\partial \tilde{D}}{\partial x}(0, t) \equiv 0$.

Положим $Z = X \times Y^*$, $Z_1 = V \times Y^*$, $z = (x, y^*)$ и определим отображение D: $Z_1 \times [0, 1] \to Z$, положив

$$D(z, t) = \tilde{D}(x, t); \quad z = (x, y^*).$$

Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} \dot{z} = D(z, t), & t \in [0, 1], \\ z(\tau) = (x, 0), \end{cases} \tag{11}$$

в которой начальные условия $\tau \in [0, 1]$ и $x \in V$ являются параметрами.

Обозначим через O множество таких $x \in V$, для которых существует решение задачи Коши (11) $z(t; x, \tau)$, определенное на отрезке $[0, 1]$ и удовлетворяющее следующим ограничениям:

$$\begin{cases} z(t; x, \tau) \in V \quad \forall t \in [0, 1]; & (12) \\ \text{если } x \neq 0, \frac{x}{|x|} \in H^e, \text{ то } z(t; x, \tau) \neq 0; & \\ \frac{z(t; x, \tau)}{|z(t; x, \tau)|} \in W_1 \forall t, \tau \in [0, 1]. & (13) \end{cases}$$

Очевидно, что $z(t, 0, \tau) \equiv 0 \Rightarrow 0 \in O$. Покажем, что множество O открыто. Действительно, если $\bar{x} \in O$, $\bar{x} \neq 0$, то $\bar{x}$ является внутренней точкой для O в силу теоремы существования и непрерывной зависимости от начальных условий решения задачи Коши. Поэтому достаточно показать, что нуль принадлежит внутренности O. В силу указанных теорем найдется такое $\delta_2 \in (0, \delta_1)$ (число δ_1 было определено выше), что для любых $x \in O_{\delta_2}$, $\tau \in [0, 1]$ решение (9) существует и удовлетворяет (12). Осталось доказать существование такого $\delta_3 \in (0, \delta_2)$, чтобы (13) выполнялось для любых $x \in O_{\delta_3} \setminus \{0\}$.

Покажем вначале, что имеет место оценка

$$| z(t; x, \tau) - x | = \mathcal{O}(x), \quad x \in O_{\delta_2}, \tag{14}$$

равномерно по t, $\tau \in [0, 1]$.

Возьмем произвольные $\tau, x \in O_{\delta_2}$ и положим $z(t) = z(t; x, \tau)$. Для $t \in [0, 1]$, используя (10) и (11), имеем

$$z(t) = z(\tau) + \int_\tau^t D(z(\theta), \theta)\, d\theta \Rightarrow |z(t) - z(\tau)| \leqslant \int_\tau^t k\, |z(\theta)|^2\, d\theta \leqslant$$
$$\leqslant k \int_\tau^t |z(\theta) - z(\tau)|\, |z(\theta)|\, d\theta + k\, |z(\tau)| \int_\tau^t |z(\theta)|\, d\theta,$$

откуда с помощью неравенства Гронуолла [8, с. 189], учитывая, что $|z(\tau)| = |x|$, получаем

$$|z(t) - z(\tau)| \leqslant k\, |x| \int_\tau^1 |z(\theta)|\, d\theta e^{k \int_\tau^1 |z(\theta)|\, d\theta}.$$

Но $z(t; x, \tau) \to 0$ равномерно при $x \to 0$ в силу теоремы о непрерывной зависимости решения (11) от начальных условий, что завершает доказательство (14).

Пусть $x \in O_{\delta_2}$, $x \neq 0$. Из (14) сразу же заключаем, что тогда $z(t; x, \tau) \neq 0$ $\forall t \in [0, 1]$. Поэтому, используя (14), имеем

$$\left| \frac{z(t)}{|z(t)|} - \frac{x}{|x|} \right| = \frac{|(z(t) - x)\, |x| + x\, (|x| - z(t))|}{|z(t)|\, |x|} \underset{(14)}{\leqslant} \frac{o(x)\, |x| + |x|\, o(x)}{|z(t)|\, |x|} =$$
$$= \frac{o(x)}{|z(t)|} \underset{(14)}{\leqslant} \frac{o(x)}{|x| - |z(t) - x|},$$

откуда в силу того, что W_1 — это ε-окрестность H^e, вытекает существование искомого δ_3. Таким образом доказано, что множество O открыто.

Через $\varphi(t; x, \tau) \in X$ обозначим первую составляющую вектора $z(t; x, \tau)$. Пусть $x \in O$, $x \neq 0$, $\tau \in [0, 1]$. Положим $\varphi(t) = \varphi(t; x, \tau)$ и исследуем свойства этой функции. В силу (6), (9) и (13)

$$B(\varphi(t), t)\, \widetilde{D}(x(t), t) \equiv (\alpha_3(\varphi(t), t) + \alpha_4(\varphi(t), t), 0).$$

Используя это и умножая обе части дифференциального уравнения (11) на B, в силу (8) получаем

$$b(\varphi(t), t), \dot\varphi(t) = \sum_{i=3}^{4} \alpha_i(\varphi(t), t), \qquad b^*(\varphi(t), t)\, \dot\varphi(t)\, y^*(t) \equiv I\varphi(t),$$

где $y^*(t)$ — вторая координата вектора $z(t)$, т. е. $z(t) \equiv (\varphi(t), y^*(t))$. Из первого уравнения, используя (7), (8), имеем

$$\begin{cases} (F'(x_0) + \alpha_1(\varphi(t), t))\, \dot\varphi(t) \equiv \alpha_3(\varphi(t), t), \\ \left(P_2 F''(x_0) \dfrac{\varphi(t)}{|\varphi(t)|} + \alpha_2(\varphi(t), t) \right) \dot\varphi(t) \equiv \alpha_4(\varphi(t), t). \end{cases}$$

Умножая второе тождество на $|\varphi(t)|$ и складывая с первым в силу (7) и определения отображений α_1, α_2, получаем, что $\varphi(\cdot)$ удовлетворяет тождеству

$$\frac{\partial A}{\partial x}(\varphi(t), t)\, \dot\varphi(t) + \frac{\partial A}{\partial t}(\varphi(t), t) \equiv 0, \qquad t \in [0, 1].$$

Интегрируя это тождество на отрезке $[\tau, t]$, имеем

$$A(\varphi(t; x, \tau), t) \equiv A(x, \tau) \quad \forall x \in H^e, \quad \forall \tau \in [0, 1]. \tag{15}$$

Определим отображение Φ по формуле

$$\Phi(x) = \varphi(1; x, 0).$$

Тогда $\Phi(x_0) = 0$ и в силу свойств фазового потока динамической системы и теоремы об обратной функции Φ является диффеоморфизмом, отображающим открытое множество O на открытое множество $\Phi(0)$. Кроме того, $\Phi^{-1}(x) = \varphi(0; x, 1)$ $\forall x \in O$. Покажем, что

$$\Phi(H \cap O) \subseteq M; \quad \Phi^{-1}(M \cap O) \subseteq H. \tag{16}$$

Докажем первое из указанных соотношений. Действительно, из (15) при $\tau = 0$, $t = 1$ для произвольного $h \in H \cap O$ имеем

$$\Phi(h) = \varphi(1; h, 0) \underset{(15)}{\Rightarrow} A(\varphi(1; h, 0), 1) = A(h, 0) =$$
$$= F'(x_0)h + P_2F''(x_0)[h, h] = 0 \Rightarrow A(\Phi(h), 1) = 0 \Rightarrow \Phi(h) \in M.$$

Доказательство второго включения из (16) проводится аналогично. При этом следует в (15) взять $\tau = 1$, $t = 0$.

Соотношения (16) в совокупности с полученными выше свойствами Φ, завершают доказательство теоремы.

§ 4. Доказательство теоремы 2

Рассмотрение этого параграфа основано на конструкции, использованной при доказательстве теоремы 1, и следующем утверждении:

Предложение П2 ([4, с. 123]). *Если отображение F 2-регулярно, то для любого конечномерного подпространства $R \subset X$ существует такое (зависящее от него) конечномерное подпространство $\tilde{R} \subset X$, что $\tilde{R} \supseteq R$ и для любого $h \in \tilde{R} \cap H^e$ выполняется* (3).

В силу 2-регулярности отображения F существуют такие открытое множество W из X, а также открытые в топологии единичной сферы S ее подмножества W_1 и W_2, что

$$\mathrm{cl}\, W_1 \subset W_2; \quad \mathrm{cl}\, W_2 \subset W; \quad H^e \subset W; \quad \mathrm{Im}\, G(h) = Y \quad \forall h \in \mathrm{cl}\, W. \tag{17}$$

Далее построим множества C_i, V_i, V и отображения A, B, ξ, α_i так же, как и при доказательстве теоремы 1. Из приведенных там рассуждений вытекает, что множества V_1 и V_2 открыты.

Покажем, что V — конечномерно-открыто (правда необязательно открыто). Действительно, пусть R — произвольное конечномерное подпространство из X, а $\tilde{R}$ — подпространство, которое соответствует R в силу сформулированного предложения П2. Положим $\tilde{V} = V \cap \tilde{R}$. Достаточно показать, что нуль принадлежит относительной внутренности $V \cap \tilde{R}$ в $\tilde{R}$, а значит, и относительной внутренности $V \cap R$ в R.

Действительно, в силу (8), (17) и компактности множества $\mathrm{cl}\, W \cap S \tilde{R}$ существует такое, зависящее от R, число $\delta(R) > 0$, что операторы $B(x, t)$ сюръективны для любых $t \in [0, 1]$, $\forall x \in O_{\delta(R)} \cap R$: $x \neq 0$, $\frac{x}{|x|} \in W$. Затем так же, как это проделано при доказательстве теоремы 1, проверяется, что

$$\left\{x \in O_{\delta(R)} \cap \tilde{R} : x \neq 0, \frac{x}{|x|} \in W\right\} \subset V_1 \Rightarrow O_{\delta(R)} \cap \tilde{R} \subset \tilde{V}.$$

Таким образом, множество V конечномерно-открыто.

По тем же формулам, что и в § 3 (доказательство теоремы 1), построим множество O, отображения $\tilde{D}$, D, φ и Φ. Докажем, что множество O конечномерно-открыто. D и Φ конечномерно-дифференцируемы, а Φ — конечномерный диффеоморфизм и удовлетворяет утверждению теоремы.

Действительно, пусть R — произвольное конечномерное подпространство X. Выберем конечномерное подпространство $\tilde{R}$, отвечающее R в силу предложения П2. В силу конечномерной открытости множества V существует такое (зависящее от R) число $\delta > 0$, что $O_{2\delta} \cap \tilde{R} \subset V$. Далее, множество $\tilde{R} \cap \mathrm{cl}\, W_1$ компактно. Поэтому в силу условия 2-регулярности (3) существуют такие (зависящие от R) открытые относительно топологии единичной сферы S ее подмножества S_1 и S_2, что

$$\mathrm{cl}\, S_1 \subset S_2; \quad S_2 \subset W_2; \quad \tilde{R} \cap \mathrm{cl}\, W_1 \subset S_1,$$

а оценка $|B^{-1}(x, t)(\alpha_3(x, t) + \alpha_4(x, t), 0)| : \mathcal{O}(|x|^2)$ выполняется равномерно по всем $t \in [0, 1]$, x: $x \neq 0$, $\frac{x}{|x|} \in \mathrm{cl}\, S_2$. Отсюда вытекает существование (зависящих от R) чисел k и $\delta_1 \in (0, \delta)$, для которых

$$|\tilde{D}(x,t)| \leqslant k|x|^2 \quad \forall t \in [0,1], \quad \forall x \in O_{\delta_1}: \frac{x}{|x|} \in S_2. \tag{10'}$$

Замкнутые множества $\mathrm{cl}\, S_1$ и $S \setminus S_2$ не пересекаются. Следовательно, (см. [6]), существует такая бесконечно дифференцируемая на X функция ξ_R, что

$$\xi_R(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathrm{cl}\, S_1, \\ 0, & x \in S \setminus S_2, \end{cases} \quad 0 \leqslant \xi_R(x) \leqslant 1 \quad \forall x.$$

Аналогично ξ_δ — такая бесконечно дифференцируемая на X функция, что

$$\xi_\delta(x) = \begin{cases} 1, & x \in O_\delta, \\ 0, & x \in X \setminus O_{2\delta}, \end{cases} \quad 0 \leqslant \xi_\delta(x) \leqslant 1 \quad \forall x.$$

На $X \times [0, 1]$ определим (зависящее от R) отображение $\tilde{D}_R$:

$$\tilde{D}_R(x, t) = \begin{cases} \xi_\delta(x)\, \xi_R\left(\frac{x}{|x|}\right) B^{-1}(x,t)(\alpha_3(x,t) + \alpha_4(x,t), 0), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Повторяя рассуждения § 3, при этом заменяя ссылку на (10) ссылкой на (10′), получаем, что отображение $\tilde{D}_R$ непрерывно дифференцируемо. Определим отображение D_R: $Z \times [0, 1] \to Z$, положив

$$D_R(z, t) = \tilde{D}_R(x, t), \quad z = (x, y^*).$$

По аналогии с (11) рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} \frac{dz}{dt} = D_R(z, t), \\ z(\tau) = (x, 0). \end{cases} \tag{11'}$$

Через O_R обозначим множество тех $x \in V \cap \tilde{R}$, для которых существует определенное на $[0, 1]$ решение (11′) $z(\cdot; x, \tau)$, удовлетворяющее следующим ограничениям:

$$\begin{cases} z(t; x, \tau) \in O_\delta; \quad \text{если } x \neq 0, \frac{x}{|x|} \in H^e \cap \tilde{R}, \text{ то} \\ z(t; x, \tau) \neq 0, \frac{z(t; x, \tau)}{|z(t; x, \tau)|} \in S_1 \quad \forall t, \tau \in [0, 1]. \end{cases} \tag{13'}$$

Повторяя рассуждения § 3 (и заменяя (10) на (10′)), получаем, что O_R — окрестность нуля.

Через $\Phi_R(x)$ обозначим первую составляющую координаты вектора $z(1; x, 0)$. Так же, как и в § 3, доказывается, что отображение Φ_R (также зависящее от R) является локальным диффеоморфизмом и $\Phi_R(\tilde{R} \cap H \cap O_R) = M \cap \Phi_R(\tilde{R} \cap O_R)$. Но из (13′) и определения функций ξ_R, ξ_δ вытекает, что сужение отображения Φ_R на $\tilde{R} \cap O_R$ совпадает с Φ, т. е. $\Phi_R(x) = \Phi(x)\ \forall x \in \tilde{R} \cap O_R$. Кроме того, множество $\tilde{R} \cap O_R$ открыто в $\tilde{R}$. Поэтому множество $R \cap O_R$ также открыто в R, а сужение Φ на $R \cap O_R$ непрерывно дифференцируемо. Таким образом в силу произвольности R множество O конечномерно-открыто, а определенное на нем отображение Φ является локальным конечномерным диффеоморфизмом и удовлетворяет (4). Теорема доказана.

§ 5. Доказательство теоремы 3

Для произвольного $y \in E^n$ введем в рассмотрение конус $\pi(y) \subset E^n$, состоящий из таких векторов $d \in E^n$, для каждого из которых найдется слабо сходящаяся к нулю последовательность $\{x_i\} \subset X$, для которой $\lim\limits_{i\to\infty} Q(x_i) = d$.

Л е м м а 1 ([9]). *Множество $\pi(y)$ выпукло $\forall y \in E^n$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $d_1, d_2 \in \pi(y)$, $\alpha \in [0, 1]$. Выберем слабо сходящиеся к нулю последовательности $\{x_i^s\} \subset X$, для которых $\lim\limits_{i\to\infty} Q(x_i^s) = d_s$, $s = 1, 2$. Обозначим через A_s: $X \to X$ s-ю координату отображения A и положим $Q_s(x) = A_s(x, x)$. В силу слабой сходимости $\{x_i^2\}$ к нулю для произвольного номера i найдется такой номер $j(i) \geqslant i$, $j(i) > j(i-1)$, что

$$|A_s(x_i^1, x_{j(i)}^2)| \leqslant \frac{1}{i}, \quad s = \overline{1, n}. \tag{18}$$

Положим $x_s = \sqrt{\alpha} x_i^1 + \sqrt{1-\alpha}\, x_{j(i)}^2$. Тогда последовательность $\{x_i\}$ слабо сходится к нулю. Далее имеем

$$Q_s(x_i) = \alpha Q_s(x_i^1) + 2\sqrt{\alpha(1-\alpha)}\, A_s(x_i^1, x_{j(i)}^2) + (1-\alpha) Q_s(x_{j(i)}^2),$$

откуда в силу (18)

$$\lim_{i\to\infty} Q(x_i) = \alpha d_1 + (1-\alpha) d_2 = d \Rightarrow d \in \pi(y),$$

что завершает доказательство выпуклости $\pi(y)$, а вместе с этим и леммы.

Л е м м а 2 ([9]). *Пусть* $\mathrm{Leg} \neq \varnothing$. *Тогда конус $\pi(y)$ замкнут $\forall y \in E^n$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть последовательность $\{d_i\} \subset E^n$ сходится к d. Переходя к последовательности, будем считать, что $|d_i - d| \leqslant \frac{1}{i}$. Выберем слабо сходящиеся к нулю последовательности $\{x_{j,i}\}$, для которых $\lim\limits_{j\to\infty} Q(x_{j,i}) = d_i$. При этом можно добиться того, чтобы $|Q(x_{j,i}) - d_i| \leqslant \frac{1}{i}\ \forall j$.

Из того, что по условию форма λQ лежандрова для некоторого $\lambda \in E^n$, выводится (мы здесь этого не делаем), что переходя к подпоследовательностям можно добиться равномерной по i ограниченности последовательностей $\{x_{j,i}\}$.

Переходя от пространства X к замкнутой линейной оболочке векторов $\{x_{j,i}\}$, будем считать, что само X сепарабельно. Но на ограниченном множестве, на котором лежат все $x_{j,i}$, слабая топология сепарабельного гильбертова пространства метризуема. Поэтому для любого i существует $j(i)$ такое, что $|Q(x_i) - d_i| < \frac{1}{i}$, а последовательность $\{x_i\}$ слабо сходится к нулю, где $x_i = x_{j(i),i}$. Очевидно, что $Q(x_i) \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} d \Rightarrow d \in \pi(y)$ и, следовательно, $\pi(y)$ замкнуто. Лемма доказана.

Лемма 3 ([9]). *Пусть* $\mathrm{Leg} \neq \varnothing$. *Тогда* $\pi(y) = -\Lambda^0(y)\ \forall y \in E^n$.

Доказательство. Пусть $\lambda \in \Lambda(y)$, $d \in \pi(y)$. Возьмем слабо сходящуюся к нулю последовательность $\{x_i\}$, для которой $yA(x_i) \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} 0$, $\lim\limits_{i\to\infty} Q(x_i) = d$. Тогда

$$\langle\lambda, d\rangle = \lim_{i\to\infty} \lambda Q(x_i) \geqslant 0 \Rightarrow \langle -\lambda, d\rangle \leqslant 0\ \ \forall d \in \pi(y) \Rightarrow -\Lambda(y) \subseteq \pi^0(y).$$

Докажем обратное включение. Пусть $d \in \pi^0(y)$. Пусть $\{x_i\}$ — произвольная слабо сходящаяся к нулю последовательность, для которой $yA(x_i) \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} 0$, а e — произвольная предельная точка последовательности $\{Q(x_i)\}$. Очевидно,

$$e \in \pi(y) \Rightarrow \langle -d, e\rangle \geqslant 0 \Rightarrow \varliminf_{i\to\infty} \langle -d, Q(x_i)\rangle \geqslant 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -d \in \Lambda(y) \Rightarrow \pi^0(y) \subseteq -\Lambda(y).$$

Таким образом, $\pi^0(y) = -\Lambda(y)$, откуда в силу лемм 1 и 2 $\pi(y) = \pi^{00}(y) = -\Lambda^0(y)$. Лемма доказана.

Перейдем непосредственно к доказательству теоремы 3. Достаточность. Пусть Q не является сильно 2-регулярным. Тогда найдутся такие единичные последовательности $\{x_i\} \subset X$, $\{y_i\} \subset E^n$, что

$$Q(x_i) \to 0, \quad y_i A(x_i) \to 0, \quad i \to \infty. \tag{19}$$

Переходя к подпоследовательности, будем считать, что $x_i \underset{\text{сл}}{\to} x_0$, $y_i \to y_0$, $i \to \infty$. Возьмем какое-нибудь $\lambda \in \mathrm{Leg}$. Тогда $\lambda Q(x_i) \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} 0$, откуда в силу лежандровости λQ имеем $x_0 \neq 0$. Кроме того, из (19) имеем $y_0 A(x_0) = 0$, $x_0 \in K$. Положим $\xi_i = x_i - x_0$. В силу (19)

$$\lim_{i\to\infty} Q(\xi_i) = -Q(x_0),$$

откуда в силу леммы 3 $Q(x_0) \in \Lambda^0(y_0)$. Полученное противоречие с предположением теоремы завершает рассуждения.

Необходимость. Возьмем произвольные ненулевые $x \in K$, $y \in E^n$ и пусть $yA(x) = 0$. Предположим, что $Q(x) \in \Lambda^0(y)$. Тогда в силу леммы 3 существует слабо сходящаяся к нулю последовательность $\{\tilde{x}_i\}$, для которой $yA(\tilde{x}_i) \to 0$, $Q(\tilde{x}_i) \to -Q(x)$, $i \to \infty$. Положим $x_i = \tilde{x}_i + x$. Тогда $Q(x_i) \to 0$, $yA(x_i) \to 0$, $i \to \infty$, а последовательность $\{x_i\}$ ограничена и к нулю не стремится, что в свою очередь противоречит сильной 2-регулярности Q. Теорема доказана.

Список литературы

1. *Эдварс Р.* Функциональный анализ. М.: Мир, 1969.
2. *Kakutani S., Klee V. L.* The finite topology of a linear space // Arch. Math. Fasc. 1. 1963. V. 14. P. 55—58.
3. *Аграчев А. А., Гамкрелидзе Р. В.* Вычисление эйлеровой характеристики перечислений вещественных квадрик // ДАН СССР. 1988. Т. 299, № 1. С. 11—14.
4. *Аграчев А. А.* Топология квадратичных отображений и гессианы гладких отображений // Алгебра. Топология. Геометрия. (Итоги науки и техники.) 1988. Т. 26.
5. *Hestenes M. R.* Quadratic forms in Hilbert space // Pacific J. Math. 1951. V. 1, № 4. P. 525—581.
6. *Ленг С.* Введение в теорию дифференцируемых многообразий. М.: Мир, 1967.
7. *Милнор Д.* Теория Морса. М.: Мир, 1965.
8. *Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В.* Оптимальное управление. М.: Наука, 1979.
9. *Арутюнов А. В.* К теории квадратичных отображений в банаховых пространствах // ДАН СССР. 1990. Т. 314, № 6. С. 1290—1292.

Москва

Поступила в редакцию
01.08.1990