А. А. Аграчев, Р. В. Гамкрелидзе, Квадратичные отображения и гладкие вектор-функции: эйлеровы характеристики множеств уровня, *Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Нов. достиж.*, 1989, том 35, 179–239

УДК 517.974+515.164.152+515.164.174

КВАДРАТИЧНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ И ГЛАДКИЕ ВЕКТОР-ФУНКЦИИ: ЭЙЛЕРОВЫ ХАРАКТЕРИСТИКИ МНОЖЕСТВ УРОВНЯ

А. А. Аграчев, Р. В. Гамкрелидзе

ВВЕДЕНИЕ

Неособая квадратичная форма на $\mathbf{R}^N$ линейной заменой переменных приводится к виду $x\mapsto\sum\limits_{i=n+1}^{N}x_i^2-\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2$. Число n есть индекс квадратичной формы, оно не зависит от способа приведения формы к диагональному виду и является, таким образом, единственным линейным инвариантом неособой квадратичной формы. Кроме того, этот индекс имеет простую топологическую интерпретацию: В пространстве $\mathscr{P}(\mathbf{R}^N)$ всех квадратичных форм на $\mathbf{R}^N$ задана гиперповерхность Π_1 особых форм, которая является ориентируемым псевдомногообразием. Если ориентация Π_1 фиксирована, то каждой кривой в $\mathscr{P}(\mathbf{R}^N)$, концы которой лежат вне Π_1, отвечает индекс пересечения этой кривой с Π_1. При этом индекс пересечения зависит лишь от концов кривой, но не от соединяющего их пути. Индекс неособой формы $q\in\mathscr{P}(\mathbf{R}^N)$ равен индексу пересечения подходящим образом ориентированной гиперповерхности Π_1 с произвольной кривой, одним из концов которой является q, а другим — какая-либо положительно определенная форма.

Далее, форма $q\in\mathscr{P}(\mathbf{R}^N)$ в том и только том случае неособа, когда нуль не является критическим значением сужения q на сферу $S^{N-1}\subset\mathbf{R}^N$. В этом случае $q^{-1}(0)\cap S^{N-1}$ — гладкое подмногообразие в S^{N-1}, причем для форм, лежащих в одной связной компоненте множество $\mathscr{P}(\mathbf{R}^N)\setminus\Pi_1$, эти многообразия заведомо диффеоморфны. В действительности, $q^{-1}(0)\cap S^{N-1}=S^{n-1}\times S^{N-n-1}$, где $n=\operatorname{ind} q$.

Рассмотрим теперь векторное квадратичное отображение $p=(p_1,\ldots,p_k)^{\mathrm{T}}$, $p_i\in\mathscr{P}(\mathbf{R}^N)$, $i=1,\ldots,k$. Уже при $k=2$ классификация таких отображений относительно линейных замен переменных в $\mathbf{R}^N$ и в $\mathbf{R}^k$ содержит непрерывные параметры, а *при* $k\geqslant3$ *становится необозримой. Оказывается, однако, что* соображения топологического характера, приведенные выше, работают и в этой ситуации.

Квадратичное отображение p называется неособым, если нуль в $\mathbb{R}^k$ не является критическим значением сужения p на S^{N-1}. При непрерывной деформации p в классе неособых отображений гладкое подмногообразие $p^{-1}(0)\cap S^{N-1}$ преобразуется под действием некоторой изотопии сферы S^{N-1}. Заметим, что $p^{-1}(0)$ есть множество вещественных решений однородной системы квадратных уравнений. Если интересоваться системами квадратных неравенств, то следует рассматривать $p^{-1}(C)$, где C — выпуклый замкнутый конус в $\mathbb{R}^k$. На этот случай имеется понятие квадратичного отображения, неособого (или невырожденного) относительно C (см. § 3).

Квадратичному отображению p отвечает пучок квадратичных форм $\omega p=\sum\limits_{i=1}^{k}\omega_i p_i$, $\omega=(\omega_1, \ldots, \omega_k)\in\mathbb{R}^{k*}$, $|\omega|=1$. Такой пучок представляет собой вложенную в $\mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$ сферу размерности $\leqslant(k-1)$. Оказывается, отображение p в том и только том случае неособо, когда эта сфера не касается гиперповерхности Π_1 ни в одной точке[1].

При гладкой деформации сферы, вложенной в $\mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$ из одного неособого положения в другое, также неособое, приходится, вообще говоря, проходить через положения, в которых сфера касается Π_1. Можно определить алгебраическое число точек касания, которое, в действительности, зависит лишь от начального и конечного положения сферы, но не от способа деформации. Более того, если начать со сферы ωp, $|\omega|=1$, а в результате деформации придти к сфере, состоящей только из положительно определенных форм, то алгебраическое число точек касания окажется равным

$$\frac{(-1)^k}{2}(\chi(p^{-1}(0)\cap S^{N-1})+(-1)^N-1),$$

где $\chi(p^{-1}(0)\cap S^{N-1})$ — эйлерова характеристика многообразия, стоящего в скобках.

Важнейшим инвариантом вещественной квадратичной формы является ее индекс. При изучении пучка форм вместо одного индекса приходится рассматривать целочисленную функцию $\omega\mapsto \operatorname{ind}(\omega p)$, $\omega\in\mathbb{R}^{k*}$, $|\omega|=1$. Эта функция определяет фильтрацию сферы S^{k-1} подмножествами $\Omega_n=\{\omega\in S^{k-1}\mid \operatorname{ind}(\omega p)\leqslant n\}$. Если $k=2$, то гомотопический тип этой фильтрации сохраняется при гладкой деформации p в классе неособых квадратичных отображений. Однако при $k\geqslant 3$ ситуация иная:

[1] Гиперповерхность Π_1 имеет особенности. Касание в особой точке можно понимать по разному. Здесь имеется ввиду касание в самом сильном смысле: сфера касается Π_1 в особой точке, если малой гладкой деформацией этой сферы можно добиться того, чтобы она касалась Π_1 уже в неособой точке (см. §§ 1, 2).

даже значение $\min_{|\omega|=1} \operatorname{ind}(\omega p)$ может меняться при такой деформации. Причина заключается в структуре особенностей гиперповерхности Π_1, сфера ωp, $\omega\in S^{k-1}$, вложенная в $\mathscr{P}(\mathbf{R}^N)$, может покинуть область данного индекса, не коснувшись Π_1. Одним из следствий этого явления оказывается существование квадратичных отображений с невыпуклыми образами в $\mathbf{R}^k$ при $k\geqslant 3$.

Кое-что, однако, сохраняется. Например,

$$\chi(p^{-1}(0)\cap S^{N-1})=2\sum_{n=0}^{\left[\frac{N}{2}\right]}(\chi(\Omega_{2n+1})-\chi(\Omega_{2n}))+1+(-1)^{N-1}.$$

Аналогичная формула имеется для $\chi(p^{-1}(C)\cap S^{N-1})$, где C — выпуклый замкнутый конус в $\mathbf{R}^k$. Чтобы ее получить, нужно множество Ω_n заменить на $\Omega_n\cap C^\circ$ (см. теорему 4.1):

Выводу описанных соотношений вместе с необходимым подготовительным материалом, примерами и обобщениями посвящены 5 параграфов статьи. В последнем параграфе рассматриваются уже не квадратичные, а общие гладкие вектор—функции, заданные на компактных ориентированных многообразиях. Приведены выражения эйлеровых характеристик множеств уровня через значения вектор-функций в критических точках. В основе лежит понятие вектор-функций Морса — прямое обобщение скалярных функций Морса.

Каждой критической точке отвечает квадратичная форма— гессиан вектор-функции в этой точке. Индекс гессиана, вообще говоря, меняется от точки к точке, и получается разбиение критического множества на области разных индексов. При благоприятном стечении обстоятельств удается вычислять эйлеровы характеристики прообразов выпуклых конусов через эйлеровы характеристики этих областей.

Предложения, теоремы, леммы, формулы в каждом параграфе нумеруются отдельно. При ссылках на другой параграф используется двойная нумерация.

§ 1. Пространства кадратичных форм

1. Пусть $\mathscr{P}(\mathbf{R}^N)$ — пространство всех билинейных симметричных вещественных форм на $\mathbf{R}^N$, $\dim\mathscr{P}(\mathbf{R}^N)=N(N+1)/2$. Если $p\in\mathscr{P}(\mathbf{R}^N)$, $p:\mathbf{R}^N\times\mathbf{R}^N\to\mathbf{R}^N$, то квадратичную форму $x\mapsto p(x,x)$, где $x\in\mathbf{R}^N$, будем обозначать тем же символом p. Подпространство $\{x\in\mathbf{R}^N\mid p(x,y)=0\ \ \forall y\in\mathbf{R}^N\}\subset\mathbf{R}^N$ называется ядром квадратичной формы p и обозначается $\ker p$. Форма p называется неособой, если $\ker p=0$, в противном случае она называется особой или вырожденной. Далее, форма p называется неотрицательной (неположительной), если $p(x,x)\geqslant 0$ $(p(x,x)\leqslant 0)$ $\forall x\in\mathbf{R}^N$, и положительной (отрицательной), если $p(x,x)>0$ $(p(x,x)<0)$ $\forall x\neq 0$. Легко видеть, что для неотри-

цательной (неположительной) формы p равенство $p(x,x)=0$ выполняется лишь для $x\in\ker p$. Таким образом, неотрицательная форма положительна (неположительная форма отрицательна) в том и только том случае, когда она неособа.

Для всякого подпространства $V\subset\mathbf{R}^N$ через $(p|V)\in\mathscr{P}(V)$ обозначается квадратичная форма, получающаяся сужением отображения p на подпространство V.

Индексом квадратичной формы p (обозначение $\operatorname{ind} p$) называется максимальное такое число $k\geqslant 0$, что для некоторого подпространства $V\subset\mathbf{R}^N$, $\dim V=k$, форма $p|V$ отрицательна.

Линейные замены координат в $\mathbf{R}^N$ определяют действие группы $\mathrm{GL}(\mathbf{R}^N)$ линейных преобразований пространства $\mathbf{R}^N$ в пространстве квадратичных форм $\mathscr{P}(\mathbf{R}^N)$. Ясно, что величины $\dim\ker p$, $\operatorname{ind} p$ инвариантны относительно этого действия (не зависят от выбора координат). Из обычной процедуры приведения квадратичной формы к сумме квадратов следует, что других инвариантов нет: квадратичные формы с одинаковыми индексами и размерностями ядра переводятся друг в друга линейной заменой координат.

Пусть $(\cdot,\cdot)$ — стандартное скалярное произведение в $\mathbf{R}^N$. Всякой форме $p\in\mathscr{P}(\mathbf{R}^N)$ соответствует симметричный линейный оператор $P:\mathbf{R}^N\to\mathbf{R}^N$, определяемый тождеством $p(x,y)=(Px,y)$, $\forall x,y\in\mathbf{R}^N$. Соответствие $p\mapsto P$ является, очевидно, изоморфизмом линейного пространства $\mathscr{P}(\mathbf{R}^N)$ на пространство всех симметричных линейных преобразований в $\mathbf{R}^N$. При этом $\ker p=\ker P$, а $\operatorname{ind} p$ равен числу отрицательных собственных значений (с учетом кратности) оператора P.

Положим $\mathscr{P}_k(\mathbf{R}^N)=\{p\in\mathscr{P}(\mathbf{R}^N)\,|\operatorname{ind} p\leqslant k\}$. В частности, $\mathscr{P}_0(\mathbf{R}^N)$ — совокупность всех неотрицательных форм, ясно, что это выпуклый замкнутый полномерный острый конус в $\mathscr{P}(\mathbf{R}^N)$. Конус $\mathscr{P}_0(\mathbf{R}^N)$ определяет частичное упорядочение пространства $\mathscr{P}(\mathbf{R}^N)$: мы пишем $p_1\leqslant p_2$, если $(p_2-p_1)\in\mathscr{P}_0(\mathbf{R}^N)$, и $p_1<p_2$, если, дополнительно, форма (p_2-p_1) неособая. Из следующего полезного соотношения вытекает, что отображение $\operatorname{ind}:\mathscr{P}(\mathbf{R}^N)\to\mathbf{Z}_+$ монотонно невозрастающее.

Лемма 1. Для любых p_1, $p_2\in\mathscr{P}(\mathbf{R}^N)$ справедливо неравенство

$$\operatorname{ind}(p_1+p_2)\leqslant\operatorname{ind} p_1+\operatorname{ind} p_2.$$

Доказательство. Пусть V_i — линейная оболочка собственных векторов оператора P_i, отвечающих неотрицательным собственным значениям, $\operatorname{codim} V_i=\operatorname{ind} p_i$, $i=1,2$. Тогда, как форма p_1, так и форма p_2 неотрицательны на подпространстве $V_1\cap V_2$, $\operatorname{codim} V_1\cap V_2\leqslant\operatorname{ind} p_1+\operatorname{ind} p_2$.

Пусть $p:\mathbf{R}^N\to\mathbf{R}^N$ — линейный симметричный оператор и $\lambda_1(P)\leqslant\lambda_2(P)\leqslant\ldots\leqslant\lambda_N(P)$ — собственные значения этого оператора, упорядоченные по возрастанию; заметим, что $\lambda_i(P)$ непрерывно (но не гладко!) зависят от P. Пусть I — тождественное преобразование пространства $\mathbf{R}^N$, т. е. оператор, соответствующий квадратичной форме $x \mapsto (x, x)$, $x \in \mathbf{R}^N$. Отображение $P \mapsto P + (\lambda_{k+1} - \lambda_1) I$ определяет монотонный гомеоморфизм пространства $\mathscr{P}(\mathbf{R}^N)$ на себя, переводящий подмножество $\mathscr{P}_k(\mathbf{R}^N)$ на $\mathscr{P}_0(\mathbf{R}^N)$. Отсюда, в частности, следует, что $\mathscr{P}(\mathbf{R}^N)$ гомеоморфно замкнутому полупространству в $R^{N(N+1)/2}$ для $k = 0, 1, \ldots, N-1$.

Граница подмножества $\mathscr{P}_k(\mathbf{R}^N)$ состоит из особых форм и определяется уравнением $\lambda_{k+1}(P) = 0$. Обозначим через $\Pi_1(\mathbf{R}^N)$ совокупность всех особых форм. Ясно, что $\Pi_1(\mathbf{R}^N) = \{p \in \mathscr{P}(\mathbf{R}^N) \mid P = 0\}$ является алгебраической гиперповерхностью в $\mathscr{P}(\mathbf{R}^N)$. Множество неособых форм $\mathscr{P}(\mathbf{R}^N) \setminus \Pi_1(\mathbf{R}^N)$ имеет $N+1$ компонент связности: неособые формы p_1, p_2 лежат в одной компоненте связности в том и только том случае, когда $\operatorname{ind} p_1 = \operatorname{ind} p_2$. Гиперповерхность $\Pi_1(\mathbf{R}^N)$, естественно, имеет особенности; форма $p \in \Pi_1(\mathbf{R}^N)$ является регулярной точкой этой гиперповерхности в том и только том случае, когда $\dim \ker p = 1$. Локальная структура $\Pi_1(\mathbf{R}^N)$ вблизи произвольной, в том числе особой, точки описывается в следующем утверждении.

Л е м м а 2. Пусть $p_0 \in \mathscr{P}(\mathbf{R}^N)$, $V = \ker p_0$. Тогда существует такая окрестность $\mathcal{O}_{p_0}$ точки p_0 в $\mathscr{P}(\mathbf{R}^N)$ и аналитическое отображение $\Phi : \mathcal{O}_{p_0} \to \mathscr{P}(V)$, что 1) $\Phi(p_0) = 0$; 2) $\operatorname{ind} p = \operatorname{ind} p_0 + \operatorname{ind} \Phi(p)$; 3) $\dim \ker p = \dim \ker \Phi(p)$; 4) $(D_{p_0}\Phi) p = p \mid V$, $\forall p$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть γ — некоторый замкнутый контур в комплексной плоскости, отделяющий начало координат от ненулевых собственных значений оператора P_0. Положим

$$\pi_p = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} (P - \xi I)^{-1} d\xi$$

для всякого оператора P, не имеющего собственных значений на контуре γ. Ясно, что π_p — симметричный перестановочный с P оператор, аналитически зависящий от p; кроме того $\pi_p^2 = \pi_p$. В действительности, π_p — ортогональный проектор пространства $\mathbf{R}^N$ на инвариантное подпространство оператора P, отвечающее собственным значениям, лежащим внутри контура γ, в частности, $\pi_{p_0} \mid V = I$. Положим $\Phi(p)(v_1, v_2) = p(\pi_p v_1, \pi_p v_2)$, $\forall v_1, v_2 \in V$. При p, близких к p_0, отображение $\pi_p \mid V$ невырождено, следовательно, форма $\Phi(p)$ эквивалентна форме $p \mid \operatorname{im} \pi_p$. В то же время форма $p \mid \operatorname{im} \pi_p^{\perp}$ — неособа и имеет индекс, равный $\operatorname{ind} p_0$ при p, близких к p_0. Равенства 2), 3) следуют теперь из того, что $\operatorname{im} \pi_p$, $\operatorname{im} \pi_p^{\perp}$ — инвариантные подпространства оператора P. Равенства 1), 4) проверяются непосредственно.

Положим $\Pi_k(\mathbf{R}^N)=\{p\in\mathcal{P}(\mathbf{R}^N)\mid \dim\ker p\geqslant k\}$, $k=0, \ldots, N$

$$0=\Pi_N(\mathbf{R}^N)\subset\Pi_{N-1}(\mathbf{R}^N)\subset\ldots\subset\Pi_1(\mathbf{R}^N)\subset\Pi_0(\mathbf{R}^N)=\mathcal{P}(\mathbf{R}^N)$$

— фильтрация пространства $\mathcal{P}(\mathbf{R}^N)$ замкнутыми подмножествами. Из леммы 2 вытекает, в частности, что для всякого $k=0, 1, \ldots, N$ множество $\Pi_k(\mathbf{R}^N)\setminus\Pi_{k+1}(\mathbf{R}^N)$ является аналитическим подмногообразием коразмерности $\frac{k(k+1)}{2}$ в $\mathcal{P}(\mathbf{R}^N)$, при этом $\overline{\Pi_k(\mathbf{R}^N)\setminus\Pi_{k+1}(\mathbf{R}^N)}=\Pi_k(\mathbf{R}^N)$. В самом деле, если $\dim\ker p_0=k$, то уравнение $\Phi(p)=0$ описывает пересечение множества $\Pi_k(\mathbf{R}^N)\setminus\Pi_{k+1}(\mathbf{R}^N)$ с некоторой окрестностью точки p_0 в $\mathcal{P}(\mathbf{R}^N)$.

Отметим еще, что множества $\Pi_k(\mathbf{R}^N)$ выдерживают умножение на скаляры, т. е. являются конусами, а многообразия $\Pi_k(\mathbf{R}^N)\setminus\Pi_{k+1}(\mathbf{R}^N)$ имеют $N+1-k$ компонент связности: формы p_1, $p_2\in\Pi_k(\mathbf{R}^N)\setminus\Pi_{k+1}(\mathbf{R}^N)$ лежат в одной компоненте связности в том и только том случае, когда $\operatorname{ind} p_1=\operatorname{ind} p_2$.

2. Рассмотрим подробнее алгебраическую гиперповерхность $\Pi_1(\mathbf{R}^N)$. Ниже (как в этом пункте, так и при дальнейшем изложении) мы будем опускать аргумент $\mathbf{R}^N$ в обозначениях $\Pi_k(\mathbf{R}^N)$, $\mathcal{P}_k(\mathbf{R}^N)$ везде, где это не может вызвать недоразумений. Как уже отмечалось, множество особых точек гиперповерхности Π_1 совпадает с Π_2. Поскольку $\operatorname{codim}\Pi_2=3$, а $\operatorname{codim}\Pi_1=1$, то Π_1 является псевдомногообразием. Аналогично, множество особых точек алгебраического многообразия Π_2 совпадает с Π_3 и т. д. для произвольного k множество особых точек алгебраического многообразия Π_k совпадает с Π_{k+1} — это следует из леммы 2.

Пространство квадратичных форм $\mathcal{P}(\mathbf{R}^N)$ — это, по определению, двойственное пространство к симметрическому произведению $\mathbf{R}^N$ на себя, т. е. $\mathcal{P}(\mathbf{R}^N)=(\mathbf{R}^N\odot\mathbf{R}^N)^*$, где значок «$\odot$» означает симметрическое произведение. Следовательно, $\mathcal{P}(\mathbf{R}^N)^*=\mathbf{R}^N\odot\mathbf{R}^N$. В частности, для любых x, $y\in\mathbf{R}^N$ имеем $\langle p, x\odot y\rangle=p(x, y)$.

Пусть $\xi\in\mathbf{R}^N\odot\mathbf{R}^N$, канонические изоморфизмы

$$\mathcal{P}(\mathbf{R}^{N*})=(\mathbf{R}^{N*}\odot\mathbf{R}^{N*})^*=\mathbf{R}^N\odot\mathbf{R}^N=\mathcal{P}(\mathbf{R}^N)^*$$

позволяют рассматривать ξ как квадратичную форму на $\mathbf{R}^{N*}$. Пусть $\mathbf{R}^{N*}\supset\ker\xi$ — ядро этой квадратичной формы, обозначим $L(\xi)=(\ker\xi)^{\perp}\subset\mathbf{R}^N$, $\operatorname{rank}\xi=\dim L(\xi)$.

Произвольный элемент $\xi\in\mathbf{R}^N\odot\mathbf{R}^N$ представляется (неоднозначно) в виде $\xi=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i x_i\odot x_i$, $\alpha_i\neq 0$; непосредственно проверяется тождество

$$L\left(\sum_{i=1}^{k}\alpha_i x_i\odot x_i\right)=\operatorname{span}\{x_i,\ i=1, \ldots, k\},\ \text{если}\ \alpha_i\neq 0,\ i=1, \ldots, k.$$

Отметим еще, что $\operatorname{rank}\xi$ совпадает с минимальным возможным числом слагаемых в представлении $\xi=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i x_i\odot x_i$.

Пусть $p\in\Pi_k/\Pi_{k+1}$, легко видеть, что элемент $x\odot x\in\mathbf{R}^N\odot\mathbf{R}^N=\mathscr{P}(\mathbf{R}^N)^*$ в том и только том случае является нормалью к Π_k в точке p, когда $x\in\ker p$. Ясно, что

$$\operatorname{span}\{x\odot x\mid x\in\ker p\}=\{\xi\in\mathscr{P}(\mathbf{R}^N)^*\mid L(\xi)\subset\ker p\}.$$

В то же время канонический изоморфизм $\mathscr{P}(\mathbf{R}^{N*})=\mathscr{P}(\mathbf{R}^N)^*$ индуцирует изоморфизм

$$\{\xi\in\mathscr{P}(\mathbf{R}^N)^*\mid L(\xi)\subset\ker p\}=\mathscr{P}(\ker p^*).$$

Поскольку $\dim\mathscr{P}(\ker p^*)=\frac{k(k+1)}{2}=\operatorname{codim}\Pi_k$, то получаем, что нормальное подпространство к подмногообразию $\Pi_k\setminus\Pi_{k+1}$ совпадает с $\mathscr{P}(\ker p^*)=\operatorname{span}\{x\odot x\mid x\in\ker p\}$.

Если $k=1$, $p\in\Pi_1\setminus\Pi_2$, то имеется единственная, с точностью до скалярного множителя, нормаль $x\odot x$, $x\in\ker p$ к гиперповерхности Π_1 в точке p. Мы видим, что нормалями к точкам гиперповерхности $\Pi_1\setminus\Pi_2\subset\mathscr{P}(\mathbf{R}^N)$ являются элементы ранга 1 в $\mathscr{P}(\mathbf{R}^N)^*=\mathscr{P}(\mathbf{R}^{N*})$. Предположим теперь, что p — особая точка гиперповерхности Π_1, $\dim\ker p>1$.

Нормалью к Π_1 в точке p назовем произвольный элемент вида $\alpha x\odot x\in\mathscr{P}(\mathbf{R}^N)^*$, где $x\in\ker p$, $\alpha\in\mathbf{R}$ или, эквивалентно, произвольный элемент ранга 1 из $\mathscr{P}(\ker p^*)\subset\mathscr{P}(\mathbf{R}^{N*})$. Обозначим через $\mathscr{N}_p$ совокупность всех нормалей к Π_1 в точке p. Наше определение нормалей в особых точках оправдывается следующим легко проверяемым равенством:

$$\mathscr{N}_p=\bigcap_{O_p\subset\Pi_1}\bigcup_{q\in O_p}\mathscr{N}_q$$ (пересечение берется по всем окрестностям O_p точки p в Π_1).

Нормали вида $x\odot x\,(=(-x)\odot(-x))$, где $x\neq 0$, будем называть положительными. Если $p\in\Pi_1\setminus\Pi_2$, то положительная нормаль в точке p единственна с точностью до положительного множителя и, следовательно, положительные нормали определяют ориентацию многообразия $\Pi_1\setminus\Pi_2$. Множество всех положительных нормалей к Π_1 в произвольной точке $p\in\Pi_1$ обозначим $\mathscr{N}_p^+$. Оказывается, совокупность всех положительных нормалей к Π_1 единичной длины, отнесенных к соответствующим точкам Π_1, образует многообразие и, следовательно, разрешает особенности алгебраического многообразия Π_1.

Более точно, рассмотрим в пространстве $\mathscr{P}(\mathbf{R}^N)\oplus\mathscr{P}(\mathbf{R}^N)^*$ подмножество

$$\tilde{\Pi}_1=\{(p,\,x\odot x)\mid x\in\ker p,\ |x|=1\}.$$

Легко видеть, что $\widetilde{\Pi_1}$ — гладкое подмногообразие в $\mathscr{P}(\mathbf{R}^N)\oplus\oplus\mathscr{P}(\mathbf{R}^N)^*$. В самом деле, это следует из того, что для всякого $x\neq 0$ отображение $p\mapsto Px$ из $\mathscr{P}(\mathbf{R})$ в $\mathbf{R}^N$ имеет ранг N.

Поскольку в каждой точке Π_1 определены нормали, то определены и касательные векторы. Именно, форма $p'\in\mathscr{P}(\mathbf{R}^N)$ является касательным вектором к Π_1 в точке $p\in\Pi_1$ в том и только том случае, когда $p'(x,x)=0$ для некоторого $x\in\ker p\setminus\{0\}$. Более общо, для произвольного $k=1,\ldots,\frac{N(N+1)}{2}-1$ обозначим через $\mathscr{L}^+(k,N)$ многообразие всех ориентированных k-мерных плоскостей в $\mathscr{P}(\mathbf{R}^N)$ (ясно, что $\mathscr{L}^+(k,N)\approx G^+\left(k,\frac{N(N+1)}{2}-k\right)$, где, как обычно, $G^+(k,m)$ — грассманово многообразие k-мерных ориентированных плоскостей в $\mathbf{R}^{k+m}$).

Плоскость $H\in\mathscr{L}^+(k,N)$ называется касательной к Π_1 в точке p, если найдется такое $x\in\ker p\setminus\{0\}$, что $p'(x,x)=0\ \forall p'\in H$. Обозначим через $G_k^+(p;\Pi_1)\subset\mathscr{L}^+(k,N)$ совокупность всех касательных к Π_1 в точке p k-мерных ориентированных плоскостей. Положим, наконец,

$$G_k^+(\Pi_1)=\{(p,H)\mid p\in\Pi_1,\ H\in G_k^+(p;\Pi_1)\}\subset\mathscr{P}(\mathbf{R}^N)\times\mathscr{L}^+(k,N).$$

Легко видеть, что $G_k^+(\Pi_1)$ — алгебраическое подмножество в $\mathscr{P}(\mathbf{R}^N)\times\mathscr{L}^+(k,N)$, причем $\operatorname{codim} G_k^+(\Pi_1)=k+1$. Оказывается, множество особых точек алгебраического многообразия $G_k^+(\Pi_1)$ имеет коразмерность $2(k+1)$ в $\mathscr{P}(\mathbf{R}^N)\times\mathscr{L}^+(k,N)$ и, следовательно, $G_k^+(\Pi_1)$ является гладким псевдомногообразием. Чтобы установить это, рассмотрим множество

$$\widetilde{G_k^+(\Pi_1)}=\{(p,x\odot x,H)\mid p\in\Pi_1,\ x\in\ker p,\ |x|=1,\ H\in\mathscr{L}^+(k,N),$$
$$H(x,x)=\{0\}\}\subset\mathscr{P}(\mathbf{R}^N)\times\mathscr{P}(\mathbf{R}^N)^*\times\mathscr{L}^+(k,N).$$

Множество $\widetilde{G_k^+(\Pi_1)}$ является гладким многообразием по тем же причинам, что и $\widetilde{\Pi_1}$, отображение $(p,x\odot x,H)\mapsto(p,H)$ из $\widetilde{G_k^+(\Pi_1)}$ в $G_k^+(\Pi_1)$ «разрешает особенности» алгебраического многообразия $G_k^+(\Pi_1)$. Нужный результат вытекает из следующего утверждения.

Лемма 3. Гладкое отображение $(p,x\odot x,H)\mapsto(p,H)$ из $\widetilde{G_k^+(\Pi_1)}$ в $\mathscr{P}(\mathbf{R}^N)\times\mathscr{L}^+(k,N)$ имеет максимальный ранг во всех точках вне некоторого подмножества коразмерности $(k+1)$.

Доказательство. Мы должны выделить те точки в $\widetilde{G_k^+(\Pi_1)}$, в которых дифференциал отображения $(p,x\odot x,H)\mapsto\mapsto(p,H)$ имеет ненулевое ядро. Это ядро состоит, очевидно, из тех векторов вида $(0, \overset{\frown}{x\odot y}, 0)$, которые лежат в касательном пространстве $T_{(p, x\odot x, H)}\overset{\frown}{G_k^+}(\Pi_1)$. В то же время, вектор $(0, x\odot y, 0)$ в том и только том случае касается многообразия $\overset{\frown}{G_k^+}(\Pi_1)$ в точке $(p, x\odot x, H)$, когда $(x, y)=0$, $y\in\ker p$, $p'(x, y)=0$ $\forall p'\in H$. Элементарный подсчет показывает, что условие существования такого вектора y, отличного от нуля, выделяет в многообразии $\overset{\frown}{G_k^+}(\Pi_1)$ алгебраическое подмножество коразмерности $k+1$.

Остановимся подробнее на выборе ориентаций псевдомногообразий Π_1 и $G_k^+(\Pi_1)$. Ориентацией псевдомногообразия называется произвольная ориентация его многообразия неособых точек. Многообразием неособых точек для Π_1 является $\Pi_1\setminus\Pi_2$. Как отмечалось выше, гиперповерхность $\Pi_1\setminus\Pi_2$ ориентируема: в каждой точке $p\in\Pi_1\setminus\Pi_2$ имеется единственная с точностью до положительного множителя положительная нормаль ν_p. Далее, многобразие $\Pi_1\setminus\Pi_2$ состоит из N компонент, поэтому на нем имеется 2^N *различных ориентаций: пусть* $\iota:\{0, 1, \ldots, N-1\}\to\{0, 1\}$ — произвольная последовательность из нулей и единиц, произвольная ориентация многообразия $\Pi_1\setminus\Pi_2$ определяется нормалями $(-1)^{\iota(\operatorname{ind} p)}\nu_p$.

Переходя к рассмотрению псевдомногообразия $\overset{\frown}{G_k^+}(\Pi_1)$, отметим, что в этом случае многобразие неособых точек связно — это следует из леммы 3, поскольку $\overset{\frown}{G_k^+}(\Pi_1)$ связно и $k+1\geqslant 2$. Таким образом, на $G_k^+(\Pi_1)$ существует не более двух ориентаций. В действительности, две существуют. Во-первых, любая ориентация многообразия $\Pi_1\setminus\Pi_2$ стандартным образом определяет ориентацию многообразия $G_k^+(\Pi_1\setminus\Pi_2)$. Ориентацию на $G_k^+(\Pi_1\setminus\Pi_2)$, отвечающую ориентации ν_p на $\Pi_1\setminus\Pi_2$ условно *обозначим* $G_k^+(\nu_p)$, *произвольная ориентация на* $G_k^+(\Pi_1\setminus\Pi_2)$ имеет вид $(-1)^{\nu(\operatorname{ind} p)}G_k^+(\nu_p)$. Положим $\operatorname{ind}(p, H)\overset{\text{def}}{=}\operatorname{ind} p$, многообразие $G_k^+(\Pi_1\setminus\Pi_2)$ совпадает с множеством точек непрерывности целочисленной полунепрерывной снизу функции ind на $G_k^+(\Pi_1)$.

Замечание. Предположим, что на некотором триангулируемом многобразии M задана полунепрерывная снизу целочисленная функция α, причем подмножество $\alpha^{-1}((-\infty, n])$ — подмногообразие со связным краем в M для любого $n\in\mathbf{Z}$. Можно показать, что если множество точек непрерывности функции α (которое является открытым и всюду плотным подмножеством в M) — ориентируемое многобразие, то и M — ориентируемое многобразие.

Из замечания следует, что $G_k^+(\Pi_1)$ — (ориентируемое многообразие. Остается выбрать из 2^N ориентаций на $G_k^+(\Pi_1 \setminus \Pi_2)$ ту, которая продолжается на $G_k^+(\Pi_1)$. Прямое, хотя и громоздкое, вычисление показывает, что это $(-1)^{\operatorname{ind} p} G_k^+(\nu_p)$.

Замечание. Нетрудно показать, что нульмерный коцикл $p \mapsto \operatorname{ind} p$ на $\mathscr{P}(\mathbf{R}^N) \setminus \Pi_1$ является двойственным в силу двойственности Александера — Понтрягина к псевдомногообразию Π_1, ориентированному с помощью нормалей ν_p, $p \in \Pi_1 \setminus \Pi_2$; а коцикл $p \mapsto 1 + (-1)^{\operatorname{ind} p}$ на $\mathscr{P}(\mathbf{R}^N) \setminus \Pi_1$ — двойственным к псевдомногообразию Π_1, ориентированному с помощью нормалей $(-1)^{\operatorname{ind} p} \nu_p$, $p \in \mathscr{P}(\mathbf{R}^N) \setminus \Pi_1$.

§ 2. Квадратичные отображения и пучки квадратичных форм

1. Пусть $k > 0$, рассмотрим пространство $\mathscr{P}(\mathbf{R}^N)^k$ симметричных билинейных отображений $p: \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}^k$. Если $p \in \mathscr{P}(\mathbf{R}^N)^k$, то квадратичное отображение $x \mapsto p(x, x)$ будем обозначать тем же символом p. В дальнейшем, чтобы не загромождать формулы, будем также использовать сокращенное обозначение $\mathscr{P}(\mathbf{R}^N)^k = \mathscr{P}(N, k)$.

Квадратичное отображение $p \in \mathscr{P}(N, k)$ называется особым или вырожденным, если нуль является критическим значением отображения $p \mid (\mathbf{R}^N \setminus \{0\})$. Последнее означает, что для некоторых $x \in \mathbf{R}^N \setminus \{0\}$, $\omega \in \mathbf{R}^{k*} \setminus \{0\}$ выполняются равенства $p(x, x) = 0$, $\omega p x = 0$. Если же эти два равенства не выполняются одновременно ни для каких ненулевых x, ω, то отображение p называется неособым. В случае квадратичных форм ($k = 1$) определение особых и неособых отображений сводится, очевидно, к стандартному, приведенному в предыдущем параграфе. Если квадратичное отображение $p \in \mathscr{P}(N, k)$ неособо, то $p^{-1}(0) \cap S^{N-1}$ является гладким замкнутым подмногообразием в S^{N-1} (возможно, пустым).

Лемма 1. Совокупность всех особых отображений является собственным алгебраическим подмножеством в $\mathscr{P}(N, k)$.

Доказательство. Алгебраичность множества особых отображений следует из того, что оно, по определению, является образом при проектировании $(p, x, \omega) \mapsto p$ некоторого алгебраического подмножества в $\mathscr{P}(N, k) \times \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^k$. Чтобы доказать, что множество особых отображений — собственное, достаточно предъявить хотя бы одно неособое отображение: таковым является, например, отображение

$$x \mapsto (x, x)\, l, \text{ где } l \in \mathbf{R}^k \setminus \{0\},\ x \in \mathbf{R}^N.$$

Из леммы 4 вытекает, в частности, что неособые отображения заполняют открытое всюду плотное в $\mathscr{P}(N, k)$ подмножество.

Произвольное линейное отображение из $\mathbf{R}^{k+1*}$ в $\mathscr{P}(\mathbf{R}^N)$ называется k-мерным (линейным) пучком N-мерных квадратичных форм. Каждому квадратичному отображению $p\in\mathscr{P}(N, k)$ очевидным образом соответствует $(k-1)$-мерный пучок квадратичных форм $p^*: \omega\mapsto\omega p$, $\omega\in\mathbf{R}^{k*}$. Соответствие p p^* устанавливает канонический изоморфизм пространства $\mathscr{P}(N, k)$ с пространством $(k-1)$-мерных пучков квадратичных форм: $\mathscr{P}(N, k)=\mathrm{Hom}(\mathbf{R}^{k*}, \mathscr{P}(\mathbf{R}^N))$.

Во многих случаях исследовать квадратичные отображения бывает удобнее на языке пучков квадратичных форм. Пучок форм — это, попросту, подпространство в $\mathscr{P}(\mathbf{R}^N)$ и мы можем непосредственно использовать информацию о $\mathscr{P}(\mathbf{R}^N)$, приведенную в предыдущем параграфе.

Пусть M — гладкое многообразие и $f: M\to\mathscr{P}(\mathbf{R}^N)$ — гладкое отображение. Скажем, что отображение f касается гиперповерхности $\Pi_1\subset\mathscr{P}(\mathbf{R}^N)$ в точке $\mu\in M$, если $f(\mu)\in\Pi_1$ и $D_\mu f(T_\mu M)\perp\nu$ для некоторой нормали $\nu\in\mathscr{N}_{f(\mu)}\setminus\{0\}$.

Определение. Пусть $p\in\mathscr{P}(N, k)$, пучок $p^*: \mathbf{R}^{k*}\to\mathscr{P}(\mathbf{R}^N)$ называется особым, если p^* касается Π_1 в некоторой точке $\omega\in\mathbf{R}^{k*}\setminus\{0\}$. В противном случае пучок p^* называется неособым.

Легко видеть, что пучок p^* является особым в том и только том случае, когда особо отображение p, — мы просто переформулировали условие вырожденности отображения p на геометрическом языке. В дальнейшем эта переформулировка послужит для важных обобщений.

Напомним, что неособые квадратичные отображения заполняют открытое всюду плотное в $\mathscr{P}(N, k)$ подмножество: обозначим это подмножество $\mathring{\mathscr{P}}(N, k)$.

Определение. Неособые отображения $p_1, p_2\in\mathring{\mathscr{P}}(N, k$ называются жестко изотопными, если они лежат в одной компоненте связности множества $\mathring{\mathscr{P}}(N, k)$. [1]

Из стандартной леммы Тома об изотопии [3, 6] следует, что для жестко изотопных $p_1, p_2\in\mathring{\mathscr{P}}(N, k)$ существует гладкая изотопия F_t сферы S^{N-1}, $t\in[0, 1]$, преобразующая $p_1^{-1}(0)\cap S^{N-1}$ в $p_2^{-1}(0)\cap S^{N-1}$, т. е.

$$F_0=\mathrm{id},\quad F_1\left(p_1^{-1}(0)\cap S^{N-1}\right)=p_2^{-1}(0)\cap S^{N-1}.$$

При $k=1$ две неособые квадратичные формы являются, очевидно, жестко изотопными в том и только том случае, когда они имеют одинаковый индекс. При $k=2$ из классических результатов об одномерных пучках квадратичных форм можно извлечь полную классификацию двумерных квадратичных отображений относительно жесткой изотопии. Однако проще провести такую

[1] Это понятие соответствует устоявшейся терминологии в вещественной алгебраической геометрии.

классификацию непосредственно. Мы будем считать, что квадратичные отображения принимают значения в комплексной плоскости $\mathbf{C}=\mathbf{R}^2$ и начнем с простейшего нетривиального случая $N=2$.

Предложение 1. Любое квадратичное отображение из $\mathring{\mathscr{P}}(2,2)$ жестко изотопно одному из следующих трех:

$$I_2(x, x)=x_1^2+x_2^2; \quad \Gamma(x, x)=x_1^2-x_2^2+2ix_1x_2;$$

$$\overline{\Gamma}(x, x)=x_1^2-x_2^2-2ix_1x_2,$$

где $i=\sqrt{-1}\in\mathbf{C}$, $x=(x_1, x_2)\in\mathbf{R}^2$, причем приведенные три отображения попарно не жестко изотопны.

Замечание. Положив $z=x_1+ix_2$, получим $I_2(z, z)=z\bar{z}$, $\Gamma(z, z)=z^2$, $\overline{\Gamma}(z, z)=\bar{z}^2$.

Доказательство. Пусть $p\in\mathring{\mathscr{P}}(2,2)$. Рассмотрим квадратное уравнение

$$\det(\omega P)=0, \quad \omega\in\mathbf{R}^{2*}\setminus\{0\}. \tag{1}$$

Возможны три случая.

1) Дискриминант уравнения (1) больше нуля. В этом случае имеется пара неколлинеарных ковекторов ω, $\hat{\omega}\in\mathbf{R}^{2*}$ таких, что $\omega Px=\hat{\omega}P\hat{x}=0$ для некоторых x, $\hat{x}\in\mathbf{R}^2\setminus\{0\}$. Поскольку $\omega p(x, \hat{x})=\hat{\omega}p(x, \hat{x})=0$, то, очевидно, $p(x, \hat{x})=0$. Ясно, что $x\neq\hat{x}$, так как p неособа. Следовательно, отображение p имеет вид $p(y, y)=(a, y)^2e^{i\theta_1}+(\hat{a}, y)^2e^{i\theta_2}$, где $(a, x)=(\hat{a}, \hat{x})=0$, $\theta_1\neq\pm\theta_2$.

Образ $\mathbf{R}^2$ при квадратичном отображении p — выпуклый конус, натянутый на $e^{i\theta_1}$ и $e^{i\theta_2}$. Очевидной гомотопией это отображение приводится к виду $(a, y)^2+(\hat{a}, y)^2$ (конус сплющивается в полупрямую), а затем, заменой переменных с положительным определителем, к виду (y, y).

2) Дискриминанат уравнения (1) меньше нуля. В этом случае отображение $p|\mathbf{R}^2\setminus\{0\}$ регулярно. Следовательно, для всякого $\omega\in\mathbf{R}^{2*}\setminus\{0\}$, $\operatorname{ind}\omega p=1$, $\ker\omega p=0$. Линейной заменой переменных с положительным определителем p приводится к виду

$$p((x_1, x_2), (x_1, x_2))=x_1^2-x_2^2+i(\alpha x_1^2+\beta x_2^2\mp\gamma x_1x_2).$$

Условие на дискриминант эквивалентно неравенству $|\alpha\mp\beta|<|\gamma|$. Очевидной гомотопией преобразуем отображение p к виду $x_1^2-x_2^2+2ix_1x_2$, если $\gamma>0$, и к виду $x_1^2-x_2^2-2ix_1x_2$, если $\gamma<0$.

3) Дискриминант уравнения (1) равен нулю. Отображения p, обладающие этим свойством, образуют собственное алгебраическое подмножество в пространстве $\mathscr{P}(2,2)$, следовательно, немного возмутив p, мы можем свести ситуацию к случаям 1, 2).

Если $p\in\mathring{\mathscr{P}}(2,2)$, то, очевидно, $p(x,x)\neq 0$ $\forall x\neq 0$. Обозначим через $\deg p$ степень отображения $p|_{S^1}: S^1\to \mathrm{R}^2\setminus\{0\}$ относительно нуля. Ясно, что $\deg p$ не меняется при неособой гомотопии. Имеем $\deg I_2=0$, $\deg \Gamma=2$, $\deg\bar{\Gamma}=-2$. Следовательно, отображения I_2, Γ, $\bar{\Gamma}$ попарно не жёстко изотопны.

Пусть $p_i\in\mathscr{P}(N_i,k)$, $i=1,2$. Прямой суммой $p_1\oplus p_2$ квадратичных отображений p_1 и p_2 называется отображение $p\in\in\mathscr{P}(N_1+N_2,k)$, определяемое формулой

$$p((x_1,x_2),(x_1,x_2))=p_1(x_1,x_1)+p_2(x_2,x_2),\quad \forall x_i\in\mathrm{R}^{N_i},\quad i=1,2.$$

Предложение 2. Любое $p\in\mathring{\mathscr{P}}(N,2)$ жестко изотопно некоторому квадратичному отображению вида $\overset{n}{\underset{i=1}{\oplus}}p_i\oplus\left(\overset{m}{\underset{j=1}{\oplus}}q_j\right)$, где $p_i\in\mathring{\mathscr{P}}(1,2)$, $q_j\in\mathring{\mathscr{P}}(2,2)$, $n+2m=N$.

Доказательство. Не уменьшая общности, можем считать, что дискриминант уравнения

$$\det(\omega P)=0,\quad \omega\neq 0, \tag{1}$$

отличен от нуля.

Симметричное билинейное отображение p однозначно продолжается до симметричного C—билинейного отображения $p_{\mathrm{C}}:\mathrm{C}^N\times\mathrm{C}^N\to\mathrm{C}^2$, где $\mathrm{C}^N=\mathrm{C}\otimes\mathrm{R}^N$, $\mathrm{C}^2=\mathrm{C}\otimes\mathrm{R}^2$. Квадратичное отображение $X\mapsto p_{\mathrm{C}}(X,X)$, $X\in\mathrm{C}^N$, обозначим тем же символом p_{C}. Продолжение уравнения (1) в комплексную область имеет вид

$$\deg(\Omega P_{\mathrm{C}})=0,\quad \Omega\in\mathrm{C}^{2*}\setminus\{0\}. \tag{1c}$$

Уравнение (1) имеет N попарно неколлинеарных корней, причем если Ω—корень, то и $\bar{\Omega}$—корень этого уравнения (где «¯» означает *комплексное сопряжение*). Пусть Ω_1, Ω_2—два различных корня уравнения (1c), причем $\Omega_2\nparallel\Omega_1$; для некоторых X_1, $X_2\in\mathrm{C}^N\setminus\{0\}$ имеем $\Omega_1P_{\mathrm{C}}X_1=0$, $\Omega_2P_{\mathrm{C}}X_2=0$. Поскольку

$$\Omega_1p_{\mathrm{C}}(X_1,X_2)=\Omega_2p_{\mathrm{C}}(X_1,X_2)=\bar{\Omega}_1p_{\mathrm{C}}(\bar{X}_1,X_2)=\bar{\Omega}_2p_{\mathrm{C}}(\bar{X}_1,X_2)=0,$$

то $p_{\mathrm{C}}(X_1,X_2)=p_{\mathrm{C}}(\bar{X}_1,X_2)=0$. Пусть x_i и y_i—соответственно, вещественная и мнимая части вектора $X_i\in\mathrm{C}^N$, $i=1,2$. Из последних равенств следует, что $p(x_1,x_2)=p(x_1,y_2)=$ $=p(y_1,x_2)=p(y_1,y_2)=0$. Следовательно, $p|\operatorname{span}\{x_i,y_i,i=1,2\}=$ $=p|\operatorname{span}\{x_1,y_1\}\oplus p|\operatorname{span}\{x_2,y_2\}$. Пусть $\Omega_1,\ldots,\Omega_N$—попарно неколлинеарные корни уравнения (1c) и $\Omega_iP_{\mathrm{C}}X_i=0$, где $X_i\neq 0$, $i=1,\ldots,N$. Для доказательства предложения 1 осталось установить, что векторы $X_1,\ldots,X_N$ образуют базис пространства C^N. Зафиксируем некоторый ковектор $\Omega_0\in\mathrm{C}^{2*}$, не являющийся корнем уравнения (1c). Тогда $\Omega_i=\Omega_1+\alpha_i\Omega_0$, $i=1,\ldots,N$, где $\alpha_i\in\mathrm{C}$, $\alpha_i\neq\alpha_j$ при $i\neq j$. Из уравнений $\Omega_1P_{\mathrm{C}}X_i+\alpha_i\Omega_0P_{\mathrm{C}}X_i=0$ вытекает, что $-\alpha_i$ являются собственными числами, а X_i—

собственными векторами оператора

$$(\Omega_0 P_{\mathbf{C}})^{-1}\Omega_1 P_{\mathbf{C}}, \quad i=1, \ldots, N. \ ▶$$

Для всякого $n>0$ обозначим через I_n квадратичную форму $x \mapsto (x, x)$, где $x \in \mathbf{R}^n$. Ясно, что $I_n = \underbrace{I_1 \oplus \ldots \oplus I_1}_{n \text{ раз}}$. Положим также $\Gamma_n = \underbrace{\Gamma \oplus \ldots \oplus \Gamma}_{n \text{ раз}}$; $\Gamma_n \in \mathscr{P}(2n, 2)$. Пусть, кроме того, $\Gamma_0 = 0$.

Теорема 1. При $N \geqslant 3$ всякое $p \in \overset{\circ}{\mathscr{P}}(N, 2)$ жестко изотопно одному из отображений вида

$$q(n_1, \ldots, n_{2k-1}; m) = \bigoplus_{j=1}^{2k-1} I_{n_j} e^{\frac{2\pi i}{2k-1}} + \Gamma_m, \quad k, m \geqslant 0,$$

$$\sum_{j=1}^{2k-1} n_j + 2m = N. \tag{2}$$

Отображение $q(n_1, \ldots, n_{2k-1}; m)$ в том и только том случае жестко изотопно отображению $q(n_1', \ldots, n_{2k'-1}'; m')$, когда $k'=k$, $m'=m$, и последовательность чисел $n_1', \ldots, n_{2k-1}'$ получается из последовательности $n_1, \ldots, n_{2k-1}$ циклической подстановкой.

Доказательство. Из предложений 1,2 следует, что отображение p жестко изотопно некоторому отображению вида $\bigoplus_{j=1}^{n} I_1 a_j \oplus \Gamma_l \oplus \overline{\Gamma}_{\overline{l}}$, где $a_j \in \mathbf{C} \setminus 0$, $n + 2l + 2\overline{l} = N$. Сделав, если надо, замену переменных $x_j \mapsto |a_j|^{-1/2} x_j$, можем считать, что $|a_j| = 1$, т. е. $a_j = e^{\theta_j i}$. Пусть $\mathbf{R}^N = \mathbf{R}^m \oplus \mathbf{C}^m$, где $m = l + \overline{l}$; не ограничивая общности, можно считать, что

$$p(x_1, \ldots, x_n, z_1, \ldots, z_m) = \sum_{j=1}^{n} x_j^2 e^{\theta_j i} + \sum_{j=1}^{l} z_j^2 + \sum_{j=l+1}^{m} \overline{z}_j^2. \tag{3}$$

Сначала избавимся от слагаемых вида $\overline{z}_j^2$. Если $n \neq 0$, то замена переменных в $\mathbf{R}^N$ с положительным определителем, преобразующая координату x_1 в $(-1)^{\overline{l}} x_1$, координаты z_j, где $j = l + 1, \ldots, m$ в $\overline{z}_j$ и оставляющая на месте все остальные координаты, приводит форму (3) к виду

$$\sum_{j=1}^{n} x_j^2 e^{\theta_j i} + \sum_{j=1}^{m} z_j^2. \tag{4}$$

Поскольку любое линейное преобразование с положительным определителем гомотопно тождественному, отображение (4) оказывается жестко изотопным отображению (3). Аналогичное рассуждение проходит в случае, когда $n=0$, а $\bar{l}$ — четное число. Для того, чтобы избавиться от членов $\bar{z}_j^2$ в случае $n=0$, $\bar{l}$ — нечетное, теперь достаточно показать, что квадратичное отображение $z_1^2+\bar{z}_2^2$ из $\mathbf{C}^2$ в $\mathbf{C}$ жестко изотопно отображению $z_1^2+z_2^2$.

Обозначим через $\mathscr{R}$ совокупность всех таких вырожденных квадратичных отображений $r\in\mathscr{P}(4,2)$, что уравнение $\det(\omega R)=0$ имеет ровно один (заведомо кратный) корень в $\mathbf{RP}^1=(\mathbf{R}^{2*}\setminus 0)/(\omega\sim\alpha\omega,\ \alpha\neq 0)$; Здесь $\omega r(x,x)=(\omega Rx, x)$, $x\in\mathbf{R}^4$.

Легко видеть, что $\mathscr{R}$ — полуалгебраическое подмножество в $\mathscr{P}(4,2)$. «Общая точка» r_0 гиперповерхности $\mathscr{R}$ обладает следующими свойствами:

а) Кратность единственного корня уравнения $\det(\omega R_0)=0$ в $\mathbf{RP}^1$ равна двум;

б) Для некоторой окрестности O_{r_0} точки r_0 в $\mathscr{P}(4,2)$ множество $O_{r_0}\setminus(O_{r_0}\cap\mathscr{R})=O_{r_0}\cap\overset{\circ}{\mathscr{P}}(4,2)$ имеет не более двух компонентов линейной связности.

Пусть $\det(\omega_0 R_0)=0$, $\omega_0\in\mathbf{R}^{2*}\setminus 0$. Согласно условию, симметричный линейный оператор $\omega_0 R_0$ имеет двумерное ядро $H_0\subset\mathbf{R}^4$. Уравнение $\det(\omega R_0)=0$ имеет еще пару ненулевых комплексно сопряженных корней в $\mathbf{CP}^1$. Рассуждая также, как при доказательстве предложения 2, получим, что $r_0=r_0|H_0\oplus r_0|H_1$, где H_1 — некоторое двумерное подпространство в $\mathbf{R}^4$, трансверсальное H_0. Обозначим $r_0|H_0=r_0^0$, $r_0|H_1=r_0^1$, тогда уравнение $\det(\omega r_0^1)=0$ не имеет ненулевых вещественных корней, а уравнение $\det(\omega r_0^0)=0$ имеет двукратный корень ω_0. Поскольку $r_0^0\in\mathscr{P}(2,2)$, то $\omega_0 r_0^0=0$. Таким образом, значения отображения r_0^0 лежат в прямой, ортогональной ω_0. Не ограничивая общности, можно считать, что это вещественная прямая $\mathbf{C}=\mathbf{R}^2$. Тогда $r_0^0(x,x)=(Qx,x)$, где $Q:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$ — симметричный оператор. Оператор Q невырожден (в противном случае выполнялось бы тождество $\det(\omega r_0^0)\equiv\equiv 0$). Вспомним, наконец, что отображение r_0 вырождено. Это возможно лишь в случае, когда вырождено отображение r_0^0 (рассматриваемое как квадратичное отображение из $\mathbf{R}^2$ в $\mathbf{R}^2$). Последнее выполняется в том и только том случае, когда $(Qx_0, x_0)=0$ для некоторого $x_0\neq 0$. Следовательно, квадратичная форма (Qx,x) знаконеопределена и, не ограничивая общности, можно считать, что $r_0^0(x,x)=x_1^2-x_2^2$.

Введем, наконец, квадратичные отображения

$$r_\varepsilon^0=x_1^2-x_2^2+i\varepsilon x_1x_2,\quad \hat{r}_\varepsilon^0=x_1^2-x_2^2+i\varepsilon(x_1^2+x_2^2)$$

(здесь $i=\sqrt{-1}\in\mathbf{C}=\mathbf{R}^2$), а также $r_\varepsilon=r_\varepsilon^0\oplus r_0^1$, $\hat{r}_\varepsilon=\hat{r}_\varepsilon^0\oplus r_0^1$. Если ε достаточно близко к нулю, то r_ε и $\hat{r}_\varepsilon$ лежат в O_{r_0}; кроме того, при $\varepsilon\neq 0$ квадратичные отображения r_ε и $\hat{r}_\varepsilon$ невырождены. Заметим, что уравнение $\det(\omega R_\varepsilon)=0$ не имеет ненулевых корней в $\mathbf{R}^{2*}$ при $\varepsilon\neq 0$, а уравнение $\det(\omega\hat{R}_\varepsilon)=0$ имеет два неколлинеарных корня. Нетрудно видеть, что сумма кратностей корней в $\mathbf{RP}^1$ сохраняется при жесткой изотопии. Следовательно, отображение r_{ε_1} не жестко изотопно $\hat{r}_{\varepsilon_2}$ для любых $\varepsilon_1, \varepsilon_2\neq 0$. Поскольку $O_{r_0}\cap\mathring{\mathscr{P}}(4, 2)$ имеет не более двух компонент линейной связности, отсюда следует, что для всех достаточно близких к нулю $\varepsilon\neq 0$ отображения r_ε и $r_{-\varepsilon}$ жестко изотопны. В то же время, r_ε^0 жестко изотопно Γ при $\varepsilon>0$ и $\bar{\Gamma}$ при $\varepsilon<0$. Поскольку r_0^1 также жестко изотопно либо Γ, либо $\bar{\Gamma}$, а $\bar{\Gamma}\oplus\bar{\Gamma}$ жестко изотопно $\Gamma\oplus\Gamma$, получаем, что $\Gamma\oplus\Gamma$ жестно изотопно $\Gamma\oplus\bar{\Gamma}$.

Итак, мы показали, что любое отображение из $\mathscr{P}(N, 2)$ жестко изотопно некоторому отображению вида (4). Дальнейшие упрощения будем производить, оставаясь в классе таких отображений. Непосредственно проверяется, что отображение (4) в том и только том случае является невырожденным, когда $e^{\theta_{j_1}i}+e^{\theta_{j_2}i}\neq 0$ $\forall j_1, j_2$.

Разобьем множество $\{e^{\theta_1 i}, \ldots, e^{\theta_n i}\}$ на несколько подмножеств, используя следующее правило: элементы $e^{\theta_{j_1}i}$, $e^{\theta_{j_2}i}$ в том и только том случае попадают в одно подмножество, когда одна из дуг, соединяющих точки $e^{\theta_{j_1}i}$ и $e^{\theta_{j_2}i}$ в окружности $S^1=\{z\in\mathbf{C}\,|\,|z|=1\}$ не содержит точек вида $(-e^{\theta_j i})$, $j=1, \ldots$ $\ldots, n$. Нетрудно показать, что при $n\neq 0$ число подмножеств оказывается нечетным. Пусть этих подмножеств $2k-1$. При помощи жесткой изотопии все точки из одного подмножества легко слить в одну, а затем расположить получившиеся $2k-1$ точек в вершинах правильного $(2k-1)$-угольника. Таким образом, любое невырожденное квадратичное отображение из $\mathbf{R}^N$ в $\mathbf{R}^2=\mathbf{C}$ действительно жестко изотопно одному из отображений вида (2).

Остается показать, что класс жесткой изотопии определяет последовательность чисел $n_1, \ldots, n_{2k-1}$ с точностью до циклических перестановок. Прежде всего, число $\sum_{j=1}^{2k-1} n_j=N-2m$ есть сумма кратностей корней уравнения $\det(\omega P)=0$ в $\mathbf{RP}^1$ и сохраняется при жесткой изотопии.

Пусть $p\in\mathring{\mathscr{P}}(N, 2)$ и $\omega_1, \ldots, \omega_n\in\mathbf{R}^{2*}\setminus 0$ — представители корней уравнения $\det(\omega P)=0$ в $\mathbf{RP}^1=(\mathbf{R}^{2*}\setminus 0)\,|\,(\omega\sim\alpha\omega,\ \alpha\neq 0)$. Для всякого $j=1, \ldots, n$ квадратичное отображение $p\,|\,\ker\omega_j p$ прини мает значения на прямой $\omega_j^{\perp}$. Более того, из невырожденности p вытекает, что квадратичная форма $p \mid \ker \omega_j p$ знакоопределена. В частности, $\forall x \in \ker \omega p \setminus 0$ вектор $p(x, x)$ отличен от нуля, а вектор $\frac{1}{|p(x,x)|} p(x, x)$ не зависит от $x \in \ker \omega p \setminus 0$. Положим $\frac{1}{|p(x,x)|} p(x, x) = e^{\theta_j i}$, $x \in \ker \omega_j p \setminus 0$. Далее, корни уравнения $\det(\omega P) = 0$ непрерывно зависят от $p \in \mathscr{P}(N, 2)$, если считать каждый корень столько раз, какова его кратность. То же относится и к векторам $e^{\theta_j i}$, если их кратности считать равными кратностям соответствующих корней. Невырожденность отображения p влечет выполнение неравенств $e^{\theta_{j_1} i} + e^{\theta_{j_2} i} \neq 0 \ \forall j_1, j_2$. Разобьем множество $\{e^{\theta_1 i}, \ldots, e^{\theta_n i}\}$ на несколько подмножеств, по уже знакомому нам правилу: в одно подмножество попадают точки, которые можно соединить в S^1 дугой, не содержащей точек вида $(-e^{\theta_j i})$, $j = 1, \ldots, n$. Получается нечетное число подмножеств, пусть это $T_1, \ldots, T_{2k-1}$. Каждому T_j отвечает дуга $\Delta_j \subset S^1$ — единственная дуга длины меньше π, удовлетворяющая условиям $\partial \Delta_j \subset T_j \subset \Delta_j$ (здесь $\partial \Delta_j$ — граница, т. е. концы дуги Δ_j, в случае $\# \Delta_j = 1$ дуга Δ_j сводится к точке). Легко видеть, что $\Delta_{j_1} \cap \Delta_{j_2} = \varnothing$ при $j_1 \neq j_2$. Каждой дуге Δ_j отвечает кратность n_j, равная сумме кратностей точек, входящих в множество T_j. При жесткой изотопии могут меняться длины дуг, но сохраняются их кратности и взаимное расположение на S^1. Для учета этого расположения будем считать дуги Δ_j занумерованными таким образом, что при движении по S^1 в положительном направлении вслед за дугой Δ_1 последовательно встречаются дуги $\Delta_2, \Delta_3, \ldots, \Delta_{2k-1}$. Это правило определяет нумерацию с точностью до циклических подстановок. ▶

К сожалению, элементарные методы, использованные при классификаци квадратичных отображений со значениями в $\mathbf{R}^2$, неприменимы уже для отображений со значениями в $\mathbf{R}^3$. Дело в том, что квадратичное отображение общего положения из $\mathscr{P}(N, 3)$ не представимо в виде $p_1 \oplus p_2$ с ненулевыми p_1, p_2.

В самом деле, всякому $p \in \mathscr{P}(N, 3)$ отвечает алгебраическая кривая степени N в $\mathbf{R}P^2 = (\mathbf{R}^{3*} \setminus 0)/(\omega \sim \alpha\omega, \alpha \neq 0)$, определяемая уравнением $\det(\omega P) = 0$, $\omega \in \mathbf{R}^{3*}$. Если $p = p_1 \oplus p_2$, то $\det(\omega P) = \det(\omega P_1) \det(\omega P_2)$, и соответствующая кривая приводима. В то же время, общая кривая степени N в $\mathbf{R}P^2$ неприводима. Сопоставим размерности пространства квадратичных отображений и проективного пространства кривых. При этом следует учесть, что на пространстве $\mathscr{P}(N, 3)$ действует группа линейных замен переменных $\mathrm{GL}(N)$, а при линейной замене переменных в p кривая $\det(\omega P) = 0$ не меняется. Размерность фактор-пространства $\mathscr{P}(N, 3)$ по действию $\mathrm{GL}(N)$ равна $\frac{3N(N+1)}{2} - N^2 =$

$=\frac{N^2+3N}{2}$. Размерность пространства кривых степени N в $\mathbf{RP}^2$ равна $C^2_{N+2}-1=\frac{(N+2)(N+1)}{2}-1=\frac{N^2+3N}{2}$.

Таким образом, размерности совпадают. Можно показать, что отображение, сопоставляющее каждому $p\in\mathscr{P}(N,3)$ кривую $\det(\omega P)=0$, имеет регулярные точки и, следовательно, его образ содержит неприводимые кривые. Изучение этого отображения выходит за рамки настоящей статьи. Детальное его исследование в комплексной ситуации можно найти в [4].

2. Вернемся к изучению пучков квадратичных форм p^*, отвечающих квадратичным отображениям $p\in\mathscr{P}(N,k)$ с произвольным $k>0$.

Определение. Пусть p_0, $p_1\in\mathscr{P}(N,k)$. Пучки $p_0{}^*$ и $p_1{}^*$ называются неособо гомотопными в том и только том случае, когда p_0 и p_1 жестко изотопны.

Таким образом, пучки p_0^* и p_1^* являются неособо гомотопными, если и только если они могут быть включены в такое непрерывное семейство пучков p_t^*, $t\in[0,1]$, что отображения $\omega\mapsto\omega p_t$, $\omega\neq0$ не касаются гиперповерхности Π_1 $\forall t\in[0,1]$. При этом, однако, отображения $\omega\mapsto\omega p_t$ могут касаться (т. е. не быть трансверсальными) какого-нибудь из подмногообразий $\Pi_n\setminus\Pi_{n+1}\subset\Pi_1$, $n>1$.

В самом деле, пусть $p\in\mathscr{P}(N,k)$, $\omega_0\in\mathbf{R}^{k*}$ и $\omega_0p\in\Pi_n\setminus\Pi_{n+1}$. Отображение $\omega\mapsto\omega p$ касается Π_1 в точке ω_0 в том и только том случае, когда $p(x,x)=0$ для некоторого $x\in\ker\omega_0p\setminus\{0\}$. Пусть $x_1,\ldots,x_n$ — некоторый базис пространства $\ker\omega_0p$. Отображение $\omega\mapsto\omega p$ в том и только том случае касается (не трансверсально) подмногообразия $\Pi_n\setminus\Pi_{n+1}$ в точке ω_0p, когда

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i p(x_i,x_i)=0,$$

для некоторых $\alpha_i\in\mathbf{R}$, $i=1,\ldots,n$, $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2\neq0$. Это следует из полученного в § 1 равенства

$$(T_{\omega_0p}\Pi_n)^{\perp}=\operatorname{span}\mathcal{N}_p=\operatorname{span}\{x\odot x\mid x\in\ker\omega_0p\}.$$

Пучок квадратичных форм $\omega\mapsto\omega p$, трансверсальный всем подмногообразиям $\Pi_n\setminus\Pi_{n+1}$, $n\geqslant1$, при $\omega\neq0$ будем в дальнейшем называть просто трансверсальным пучком. Из стандартной теоремы трансверсальности следует, что квадратичные отображения, соответствующие трансверсальным пучкам, заполняют открытое всюду плотное подмножество в $\mathscr{P}(N,k)$. Обозначим это подмножество $\mathscr{P}^t(N,k)$. Ясно, что $\mathscr{P}^t(N,k)\subset\subset\mathring{\mathscr{P}}(N,k)$.

Напомним, что через $\mathscr{P}_n$ обозначается множество $\{p \in \mathscr{P}(\mathbf{R}^N) \mid \operatorname{ind} p \leqslant n\}$.

Пусть $p \in \mathscr{P}(N, k)$; если неособая гомотопия пучков сохраняет (с точностью до изотопии) подмногообразие $p^{-1}(0) \cap \cap S^{N-1} \subset S^{N-1}$, то трансверсальная гомотопия сохраняет также (с точностью до изотопии) подмножества $p^{*-1}(\mathscr{P}_n) \cap S^{k-1}$, $n=0, 1, 2, \ldots$. Это вытекает из следующего утверждения.

Лемма 1. Пусть M — гладкое замкнутое многообразие, $f_t: M \to \mathscr{P}(\mathbf{R}^N)$, $t \in [0, 1]$ — гладкая гомотопия гладких отображений. Если отображения f_t трансверсальны подмногообразиям $\Pi_n \setminus \Pi_{n+1}$, $n=1, \ldots, N$ для любого $t \in [0, 1]$, то существует гладкая изотопия $F_t: M \to M$, $t \in [0, 1]$, $F_0 = \mathrm{id}$, многообразия M, удовлетворяющая условию

$$F_t\left(f_0^{-1}(\mathscr{P}_n)\right) = f_t^{-1}(\mathscr{P}_n), \quad n=0, 1, \ldots, N.$$

Доказательство. Если бы граница множества $\mathscr{P}_n$ была гладким многообразием, все свелось бы к лемме Тома об изотопии. Впрочем, обычный метод доказательства леммы об изотопии [3] проходит и здесь — помогает лемма 1.2 о локальной структуре алгебраического многообразия Π_1. Мы должны найти такое семейство диффеоморфизмов $F_t: M \to M$, $F_0 = \mathrm{id}$, что для всякого $x \in M$ справедливо оотношение:

$$f_0(x) \in \mathscr{P}_n \Leftrightarrow f_t \circ F_t(x) \in \mathscr{P}_n, \quad \forall t \in [0, 1]. \tag{2}$$

Будем искать F_t как общее решение обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t} F_t(x) = X_t(F_t(x)), \quad t \in [0, 1],$$

где X_t — нестационарное векторное поле на M.

Дифференцирование соотношения (2) показывает, что достаточно установить существование гладкого векторного поля X со следующими свойствами: если $y \in M$ и $f_t(y) \in \Pi_n \setminus \Pi_{n+1}$, то $\left(\frac{\partial f}{\partial t}(y) + f'_{ty} X_t(y)\right) \in T_{f_t(y)} \Pi_n$, где $f'_{ty}: T_y M \to \mathscr{P}(\mathbf{R}^N)$ — дифференциал отображения f_t в точке y. Далее, достаточно построить поле X_t локально, вблизи фиксированной точки $y_0 \in M$, а затем стандартным образом применить разбиение единицы. Если $f_t(y_0) \in \Pi_n \setminus \Pi_{n+1}$, то из условия трансверсальности сразу следует существование такого поля для $y \in f_t^{-1}(\Pi_n \setminus \Pi_{n+1})$. Тонкость состоит в том, что $f_t(y_0) \in \Pi_i$ при $i=1, \ldots, n-1$. Однако из леммы 1.2 следует существование таких локальных координат Ψ в окрестности точки $f(y_0)$ на $\mathscr{P}(\mathbf{R}^N)$, что $\Psi_* T_y \Pi_i \supset \Psi_* T_{y_0} \Pi_n$ для всех y, близких к y_0, $y \in \Pi_i$, $i=1, \ldots, n$. Отсюда мгновенно следует, что поле X_t может быть правильно продолжено на всю окрестность точки y_0 в M.

Пусть квадратичное отображение $p \in \mathscr{P}(N, k)$ таково, что $\omega p \notin \Pi_2$ ни для какого $\omega \neq 0$. В этом случае, если пучок p^*

неособый, то он и трансверсальный. Алгебраическое множество Π_2 имеет коразмерность 3 в $\mathscr{P}(\mathbf{R}^N)$, поэтому для типичных семейств p_t^*, $t\in[0, 1]$, нульмерных и одномерных пучков выполняется условие $\omega p_t \notin \Pi_2$ $\forall \omega\neq 0$, $t\in[0, 1]$. Следовательно, справедливо

Предложение 3. Пусть $p_1, p_2 \in \mathscr{P}(N, k)$, где $k\leqslant 2$, причем пучки p_1^*, p_2^* трансверсальны. Если p_1^* и p_2^* неособо гомотопны, то они трансверсально гомотопны.

При $k\geqslant 3$ условие трансверсальной гомотопности существенно сильнее, чем условие неособой гомотопности. Разницу между двумя этими видами гомотопности на языке квадратичных отображений наглядно демонстрирует следующее утверждение.

Лемма 2. Пусть p_1, $p_2 \in \mathring{\mathscr{P}}(N, k)$, где $k\geqslant 2$. 1) Если $p_1(\mathbf{R}^N)\neq \mathbf{R}^k$ и $p_2(\mathbf{R}^N)\neq \mathbf{R}^k$, то p_1^* и p_2^* неособо гомотопны.

2) Если p_1^* и p_2^* трансверсально гомотопны и $p_1(\mathbf{R}^N)$ лежит в некотором полупространстве в $\mathbf{R}^k$, то $p_2(\mathbf{R}^N)$ также лежит в некотором полупространстве в $\mathbf{R}^k$.

Доказательство. 1) Пусть $l_i \in \mathbf{R}^k \setminus p_i(\mathbf{R}^N)$, $i=1, 2$; ясно, что $\alpha l_i \in \mathbf{R}^k\setminus p_i(\mathbf{R}^N)$ $\forall \alpha>0$. Обозначим через $I_N l_i$ квадратичное отображение $x\mapsto(x, x)\,l_i$. Семейство $t\mapsto(1-t)\,p_i - tI_N l_i$ осуществляет жёсткую изотопию между квадратичными отображениями p_i и $-I_N l_i$. Жёсткая изотопность отображений $-I_N l_1$ и $-I_N l_2$ очевидна.

2) Множество $p(\mathbf{R}^N)$ лежит в полупространстве в том и только том случае, когда $\operatorname{ind}\omega p=0$ для некоторого $\omega\neq 0$; иными словами, если $p^{*-1}(\mathscr{P}_0)\cap S^{k-1}\neq\varnothing$. Однако мы знаем, что множество $p^{*-1}(\mathscr{P}_0)\cap S^{k-1}$ сохраняется (с точностью до изотопии) при трансверсальной гомотопии.

Замечание. Из леммы 2 и предложения 3 следует, в частности, что образ произвольного $p\in\mathscr{P}(N, 2)$ либо лежит в некоторой полуплоскости, либо совпадает с $\mathbf{R}^2$. Впрочем, легко непосредственно доказать, что $p(\mathbf{R}^N)$ — выпуклый конус в $\mathbf{R}^2$.

Пусть $k\geqslant 3$. Чтобы построить пример пары неособо гомотопных, но трансверсально не гомотопных пучков, достаточно указать $p\in\mathscr{P}(N, k)$, удовлетворяющее условиям: $\overline{p(\mathbf{R}^N)}\neq \mathbf{R}^k$, $\operatorname{conv} p(\mathbf{R}^N)=\mathbf{R}^k$ (отображение p даже не обязано быть неособым, поскольку подходящее малое возмущение p неособо и обладает теми же свойствами). Простейший пример такого рода дает отображение $q_3:(x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}\mapsto(x_1x_2, x_2x_3, x_1x_3)^{\mathrm{T}}$ из $\mathscr{P}(3, 3)$.

В самом деле, $\overline{q_3(\mathbf{R}^3)}=\{(y_1, y_2, y_3)^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^3 \mid y_1y_2y_3\geqslant 0\}$.

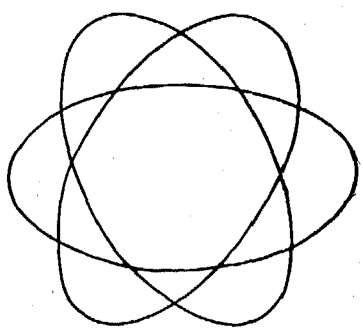
Отображение $p\in\mathscr{P}(3, 3)$ в том и только том случае невырожденно, когда $p(x, x)\neq 0$ $\forall x\in\mathbf{R}^3\setminus 0$. Пусть $\mathbf{RP}^2=S^2/(x\sim(-x))$, где S^2 — единичная сфера в $\mathbf{R}^3$. Поскольку $p(x, x)=p(-x, -x)$, для $p \in \mathring{\mathscr{P}}(3, 3)$ корректно определено отображение $\bar{p}: \mathbf{R}P^2 \to S^2$, переводящее точку $\{x, -x\} \in \mathbf{R}P^2$ в $\frac{1}{|p(x, x)|} p(x, x)$. Пусть $\deg \bar{p}$ — степень этого отображения (т. к. $\mathbf{R}P^2$ не ориентируемо, то степень определена лишь по модулю 2). Оказывается, для типичного $p \in \mathring{\mathscr{P}}(3, 3)$ из условия $\deg \bar{p} = 0$ следует $\bar{p}(\mathbf{R}P^2) \neq S^2$.

Приведем набросок доказательства.

Для любой точки y общего положения на S^2 множества $\bar{p}^{-1}(y)$ и $\bar{p}^{-1}(-y)$ должны состоять из четного числа точек. В то же время, множество $\bar{p}^{-1}(y) \cup \bar{p}^{-1}(-y)$ есть трансверсальное пересечение двух квадрик в $\mathbf{R}P^2$ и, следовательно, по теореме Безу, либо пусто, либо состоит из двух, либо из четырех точек. Если хоть одно из множеств $\bar{p}^{-1}(y)$, $\bar{p}^{-1}(-y)$ пусто, то все доказано. Остается еще возможность $\# \bar{p}^{-1}(y) = \# \bar{p}^{-1}(-y) = 2$, т. е. для любой точки общего положения $y \in S^2$ множество $\bar{p}^{-1}(y)$ состоит ровно из двух точек. Однако поскольку отображение $\bar{p}: \mathbf{R}P^2 \to S^2$ не может быть накрытием, то оно должно иметь складки, и прообраз точки, лежащий по одну сторону складки, содержит на две точки больше, чем по другую. Полученное противоречие завершает доказательство.

В качестве следствия, с учетом лёммы 2, получаем, что все отображения $p \in \mathring{\mathscr{P}}(3, 3)$, удовлетворяющие условию $\deg \bar{p} = 0$, попарно жестко изотопны. Используя этот факт, можно построить много примеров неособо гомотопных, но трансверсально не гомотопных пучков. На следующий красивый пример нам указал В. И. Арнольд.

Пусть $p = (p_1, p_2, p_3)^T \in \mathscr{P}(3, 3)$, причем уравнения $p_i(x, x) = 0$, $i = 1, 2, 3$ определяют в $\mathbf{R}P^2$ эллипсы, расположенные как указано на рисунке:



(каждая пара эллипсов пересекается в четырех точках, причем две из них лежат внутри третьего, а две снаружи).

Каждая из координатных форм p_i принимает значения противоположных знаков в точках, лежащих внутри и снаружи своего эллипса. Отсюда выводим, что $p(\mathbf{R}^3)$ пересекается со всеми октантами, на которые делят $\mathbf{R}^3$ координатные плоскости. Следовательно, $p(\mathbf{R}^3)$ не содержится ни в одном полупространстве в $\mathbf{R}^3$ и, согласно утверждению 2) леммы 2, пучок p^* трансверсально не гомотопен ни одному пучку, содержащему знакоопределенную форму. С другой стороны, $\operatorname{ind}\bar{p}=0$: полюса сферы S^2 являются регулярными значениями отображения $p:\mathbf{RP}^2\to S^2$, а прообраз каждого полюса состоит из двух точек. Следовательно, p^* неособо гомотопно пучкам, содержащим знакоопределенные формы.

§ 3. Комплексы квадратичных форм

1. Пусть $K^\circ\subset\mathbf{R}^k$ — некоторый выпуклый острый многогранный конус в $\mathbf{R}^k$ с вершиной в нуле, $K=\{w\in\mathbf{R}^k\,|\,\omega l\leqslant 0\ \forall l\in K^0\}$ — дуальный конус.

В § 2 рассматривались неособые квадратичные отображения, т. е. такие $p\in\mathscr{P}(N,k)$, что $p|(\mathbf{R}^N\setminus\{0\})$ трансверсально точке 0 в $\mathbf{R}^k$. В этом пункте мы несколько обобщим ситуацию, рассмотрев отображения, трансверсальные конусу K°.

Определение. Пусть M — гладкое многообразие и $f:M\to\mathbf{R}^k$ — гладкое отображение. и f'_m — его дифференциал в точке m. Скажем, что отображение f касается конуса K° в точке $m\in M$, если $f(m)\in K^\circ$ и $f'_m(T_mM)+K^\circ+\mathbf{R}f(m)\neq\mathbf{R}^k$ (или, эквивалентно, $f'_m(T_mM)\perp\omega$ и $f(m)\perp\omega$ для некоторого $\omega\in K\setminus 0$. Отображение f называется трансверсальным к конусу K°, если оно не касается K° ни в одной точке.

Пусть теперь $p\in\mathscr{P}(N,k)$. Квадратичное отображение $p:\mathbf{R}^N\to\mathbf{R}^k$ в том и только том случае касается конуса K° в точке $x\neq 0$, когда $\omega_0 Px=0$ для некоторого $\omega_0\in K\setminus 0$ и $\omega p(x,x)\leqslant 0$ для любого $\omega\in K$. Мы видим, что условие касания полностью определяется значениями пучка p^* на конусе K. Произвольное линейное отображение из K в $\mathscr{P}(\mathbf{R}^N)$ будем называть пучком квадратичных форм на K, а линейное пространство всех таких пучков обозначим $\mathscr{P}(N;K)$.

Если $p\in\mathscr{P}(N,k)$, то пучок $p^*|_K\in\mathscr{P}(N;K)$ обозначим p^K.

Определение. Пучок $p^K\in\mathscr{P}(N;K)$ называется особым, если найдется такое $\omega_0\in K\setminus 0$, что $\omega_0 p\in\Pi_1$, и для некоторой нормали $\nu\in\mathscr{N}^+_{\omega_0 p}\setminus 0$ справедливо неравенство $\langle\nu,\omega p\rangle\leqslant 0\ \forall\omega\in K$ (иными словами, ν лежит в конусе $p^K(K)^\circ$, двойственном к $p^K(K)$). В противном случае пучок p^K называется неособым.

Легко видеть, что пучок p^K — особый в том и только том случае, когда отображение p касается конуса K° в некоторой точке $x\neq 0$. Множество всех неособых пучков в $\mathscr{P}(N;K)$ обозначим $\mathring{\mathscr{P}}(N;K)$.

Лемма 1. Подмножество $\mathring{\mathscr{P}}(N; K)$ открыто и всюду плотно в пространстве $\mathscr{P}(N; K)$.

Доказательство. Если $x \neq 0$, то отображение $p \mapsto p(x, x)$ из $\mathscr{P}(N, K)$ в $\mathbf{R}^k$ имеет ранг k. Поэтому открытое всюду плотное в $\mathscr{P}(N, K)$ подмножество состоит из таких квадратичных отображений p, что $p \mid (\mathbf{R}^N \setminus 0)$ трансверсально всем подпространствам вида $\operatorname{span} \Gamma$, где Γ — произвольная грань конуса K° (это следствие стандартной теоремы трансверсальности). Соответствующие пучки p^K лежат в $\mathring{\mathscr{P}}(N, K)$.

Пусть $K_i \subset \mathbf{R}^{k_i *}$ — выпуклые многогранные конусы и $A: K_1 \to K_2$ — линейное отображение. Каждому пучку $p^{K_2} \in \mathscr{P}(N; K_2)$ соответствует пучок $A^* p^{K_2} \in \mathscr{P}(N; K_1)$, где $A^* p^{K_2}(\omega) = p^{K_2}(A\omega)$. Ясно, что $A^* p^{K_2} = (A^* p)^{K_1}$, где $A^* p \in \mathscr{P}(N, k_1)$ — композиция квадратичного отображения $p \in \mathscr{P}(N, k_2)$ и линейного отображения $A^*: \mathbf{R}^{k_2} \to \mathbf{R}^{k_1}$. Если отображение A сюрьективно, то, очевидно,

$$(A^* p)^{-1}(K_1^\circ) = \bigcap_{\omega \in K_1} \{x \in \mathbf{R}^N \mid \omega p(x, x) \leqslant 0\} = p^{-1}(K_2^\circ).$$

Следующие утверждения также очевидны

Лемма 2. Если линейное отображение $A: K_1 \to K_2$ сюрьективно и не обращается в нуль на $K_1 \setminus 0$, то для любого пучка $p^{K_2} \in \mathscr{P}(N; K_2)$ имеем:

$$p^{K_2} \in \mathring{\mathscr{P}}(N; K_2) \Leftrightarrow A^* p^{K_2} \in \mathring{\mathscr{P}}(N; K_1).$$

Лемма 3. Положим $\mathbf{R}_+^n = \{(y_1, \ldots, y_n) \in \mathbf{R}^n \mid y_i \geqslant 0,\ i = 1, \ldots, n\}$. Для любого выпуклого многогранного конуса K найдутся такие n_1, $n_2 \geqslant 0$ и сюрьективное отображение $A: \mathbf{R}^{n_1} \oplus \mathbf{R}_+^{n_2} \to K$, что A не обращается в нуль на $(\mathbf{R}^{n_1} \oplus \mathbf{R}_+^{n_2}) \setminus 0$. (Здесь $n_1 = \dim (K \cap (-K))$, а $n_2 \geqslant$ числа образующих острого конуса $K/(K \cap (-K))$.

Лемма 4. Пусть $p_t^K \in \mathring{\mathscr{P}}(N; K)$ — гладко зависит от $t \in [0, 1]$. Тогда существует такая липшицева изотопия $F_t: S^{N-1} \to S^{N-1}$, $t \in [0, 1]$, $F_0 = \mathrm{id}$, что $F_1(p_0^{-1}(K^\circ) \cap S^{N-1} = p_1^{-1}(K^\circ) \cap S^{N-1}$.

Доказательство. Квадратичные отображения $p_t \mid S^{N-1}$ трансверсальны конусу K°, $t \in [0,1]$. Положим $f_t = p_t \mid S^{N-1}$.

Выберем в относительной внутренности конуса K° точку y_0; функция Минковского на K° определяется формулой

$$\mu(y) = \inf\{\mu \geqslant 0 \mid \mu K^\circ \ni p\} \quad \forall p \in \operatorname{span} K^\circ.$$

Ясно, что $\mu^{-1}(1) = \partial K^\circ$ — относительная граница конуса K. Аппроксимируем выпуклую положительно однородную функцию μ некоторой гладкой выпуклой положительно однородной функцией μ_ε так, что $\mu_\varepsilon - \varepsilon \leqslant \mu \leqslant \mu_\varepsilon$; тогда $K_\varepsilon^\circ = \{y \in \mathbf{R}^k \mid \mu_\varepsilon \leqslant 1\}$ — выпуклое множество с гладким краем $\partial K_\varepsilon^\circ$, содержащееся в K°.

Далее, из условия трансверсальности следует существование на S^{N-1} такого гладкого векторного поля $X(x)$, что для всякого $x \in f_t^{-1}(K^\circ)$ вектор $f'_{tx} X(x)$, приложенный в точке $f(x)$, смотрит в относительную внутреннность множества K° (локально существование такого поля непосредственно вытекает из условия трансверсальности, а глобально — строится с помощью разбиения единицы). Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{ds} = X(x(s)) \text{ на } S^{N-1}.$$

Нетрудно показать, что функция $s \mapsto \mu \circ f_t(x(s))$ монотонно убывает с определенной от нуля скоростью для всех $x(s)$, лежащих в некоторой фиксированной окрестности O множества $f_t^{-1}(\partial K^\circ)$. Выбрав ε достаточно малым, мы можем добиться того, что $f_t^{-1}(\partial \overset{\circ}{K_\varepsilon}) \subset O$ и, кроме того, $\frac{d}{ds} \mu_\varepsilon \circ f_t(x(s)) \leqslant 0$ при $x(s) \in O$ (последнее вытекает из стандартных результатов выпуклого анализа о поведении субдифференциалов сходящейся последовательности выпуклых функций, см. [2]). Двигаясь вдоль траекторий системы $\frac{dx}{ds} = X(x(s))$ от $f_t^{-1}(\partial K^\circ) = (\mu \circ f_t)^{-1}(1)$ к $f_t^{-1}(\partial K_\varepsilon) = (\mu_\varepsilon \circ f_t^{-1})(1)$ мы получим липшицеву изотопию S^{N-1}, переводящую множество $f_t^{-1}(K^\circ)$ на множество $f_t^{-1}(\overset{\circ}{K_\varepsilon})$.

Лемма 4 вытекает теперь из следующего утверждения:

Пусть $V \subset \mathbf{R}^k$ — гладкое многообразие с краем и $f_t : S^{N-1} \to \mathbf{R}^k$, $t \in [0, 1]$, — гладкая гомотопия гладких отображений, трансверсальных V. Тогда существует такая гладкая изотопия $F_t : S^{N-1} \to S^{N-1}$, $t \in [0, 1]$, $F_0 = \mathrm{id}$, что $F_t(f_0^{-1}(V)) = f_t^{-1}(V)$, $\forall t \in [0, 1]$. Это незначительное усиление стандартной леммы Тома об изотопии (вместо многобразия без края — многообразие с краем) может быть доказано тем же способом, что и лемма 2.1 с соответствующими упрощениями.

Рассуждения, аналогичные использованным при доказательстве леммы 4, позволяют доказать следующее утверждение.

Лемма 5. Пусть C — замкнутое выпуклое подмножество в $\mathbf{R}^k$ и $f : M \to \mathbf{R}^k$ — гладкое отображение гладкого замкнутого многообразия M в $\mathbf{R}^k$. Предположим, что f трансверсально C (т. е. ни для какого $x \in M$ плоскость $\operatorname{im} f'(x)$ не является опорной к C в точке $f(x)$). Тогда для всякого выпуклого замкнутого множества C_p, достаточно близкого к C, найдется такая изотопия $F_t : M \to M$, $t \in [0, 1]$, $F_0 = \mathrm{id}$, что $F_1(f^{-1}(C)) = f^{-1}(C_p)$.

Утверждения лемм 2 и 3 позволяют естественным образом обобщить понятие неособой гомотопности на случай пучков, определенных на разных конусах.

Определение. Неособые пучки $p_i^{K_i} \in \mathscr{P}(N; K_i)$, $i = 1, 2$ называются неособо гомотопными, если найдется такой конус K

и линейные сюрьективные отображения $A_i: K \to K_i$, $i=1, 2$, не обращающиеся в нуль на $K \setminus 0$, что пучки $A_i^* p_i^{K_i} \in \overset{\circ}{\mathscr{P}}(N; K)$, $i=1, 2$, лежат в одной компонёнте связности множества $\overset{\circ}{\mathscr{P}}(N; K)$.

Замечание. Новое понятие неособой гомотопности шире приведенного в § 2 даже, если $K_1 = K_2$ — линейное пространство; тем не менее, для неособо гомотопных $p_i^{K_i}$ множества $p_i^{-1}(K_i^0) \cap S^{N-1}$ изотопны в S^{N-1}.

Тот факт, что пучок $p_1^{K_1}$ неособо гомотопен пучку $p_2^{K_2}$, будем записывать так: $p_1^{K_1} \sim p_2^{K_2}$.

В § 2 при рассмотрении пучков, заданных на линейных пространствах, мы, наряду с неособыми пучками, имели также дело с трансверсальными пучками. Соответствующее понятие имеется (и, как будет ясно позже, очень полезно) и для пучков, заданных на выпуклых конусах. Напомним, что пучок $p^K \in \mathscr{P}(N; K)$ называется неособым, если для всякого $\omega_0 \in K \setminus 0$ имеем $p^K(K)^0 \cap \mathscr{N}^+_{\omega_0 p} = 0$.

Назовем пучок $p^K \in \mathscr{P}(N; K)$ трансверсальным, если для всякого $\omega_0 \in K \setminus 0$ имеем

$$p^K(K) \cap \operatorname{conv} \mathscr{N}^+_{\omega_0 p} = 0.$$

Поскольку $\mathscr{N}^+_{\omega_0 p} = \{x \odot x \mid x \in \ker \omega_0 p\}$, то, отделив конус $p^K(K)^\circ$ от конуса $\operatorname{conv} \mathscr{N}^+_{\omega_0} p$ гиперплоскостью, получим:

Пучок p^K в том и только том случае является трансверсальным, когда для всякого $\omega_0 \in K \setminus 0$ найдется такое $\omega \in K$, что $\omega p|_{\ker \omega_0 p} > 0$. Множество всех трансверсальных пучков в $\mathscr{P}(N; K)$ обозначим $\mathscr{P}^t(N; K)$; ясно, что $\mathscr{P}^t(N; K) \subset \overset{\circ}{\mathscr{P}}(N; K)$.

Лемма 6. Множество $\mathscr{P}^t(N; K)$ открыто и всюду плотно в $\mathscr{P}(N; K)$.

Доказательство. То, что $\mathscr{P}^t(N; K)$ открыто — очевидно. Далее, предположим, что пучок $p^K \in \mathscr{P}(N; K)$ не является трансверсальным, $\omega_0 \in K \setminus 0$ — точка, в которой нарушается трансверсальность и Γ_{ω_0} — открытая грань конуса K, в которой лежит ω_0. Тогда определенный на подпространстве пучок $p^* \mid \operatorname{span} \Gamma_{\omega_0}$ также не является трансверсальным. Поскольку K имеет лишь конечное число граней, то утверждение леммы вытекает из стандартной теоремы трансверсальности.

Определение. Пучки $p_i^{K_i} \in \mathscr{P}^t(N; K_i)$ называются трансверсально гомотопными, если найдется такой конус K и линейные сюрьективные отображения $A_i: K \to K_i$, $i=1, 2$, не обращающиеся в нуль на $K \setminus 0$, что $A_i^* p_i^{K_i} \in \mathscr{P}^t(N; K)$, $i=1, 2$ — лежат в одной компоненте связности множества $\mathscr{P}^t(N; K)$.

Трансверсальную гомотопность пучка $p_1^{K_1}$ пучку $p_2^{K_2}$ мы будем выражать соотношением $p_1^{K_1} \overset{t}{\sim} p_2^{K_2}$. Следующее утверждение очевидно.

Предложение 1. Пусть K_i, $i=1, 2$, — острые конусы и пучки $p_i^{K_i} \in \mathscr{P}(N; K_i)$ таковы, что формы ωp_i неособы $\forall \omega \in K_i \setminus 0$, $i=1, 2$. Пучок $p_1^{K_1}$ трансверсально гомотопен пучку $p_2^{K_2}$ в том и только том случае, когда $\operatorname{ind} \omega_1 p_1 = \operatorname{ind} \omega_2 p_2$ для некоторых $\omega_i \in K_i \setminus 0$, $i=1, 2$.

Пусть $p_0 \in \mathscr{P}(\mathbf{R}^N)$, причем $\ker p_0 = 0$, $\operatorname{ind} p_0 = n$. Обозначим через $\mathfrak{n}$ класс всех пучков, неособо гомотопных пучку $\alpha \mapsto \alpha p_0$, $\alpha \in \mathbf{R}_+$ из $\mathscr{P}(N; \mathbf{R}_+)$, а через $\mathfrak{n}_t$ — класс всех пучков, трансверсально гомотопных этому пучку. Каждый из пучков, описанных в предложении 1, лежит в одном из классов $\mathfrak{n}_t$, где $n = 0, 1, \ldots, N$.

Следующее предложение показывает, что «малые» трансверсальные пучки принадлежат одному из классов $\mathfrak{n}_t$ даже, если они не удовлетворяют условиям предложения 1.

Предложение 2. Пусть $p^K \in \mathscr{P}(N; K)$, $\omega_0 \in K \setminus 0$, пучок p^K *трансверсален в точке* ω_0 *и* $\operatorname{ind} \omega_0 p = n$. *Тогда для любой* достаточно малой конической окрестности U_{ω_0} точки ω_0 в K пучок $p^{U_{\omega_0}} = p^K | U_{\omega_0}$ принадлежит классу $\mathfrak{n}_t$.

Доказательство. Пусть $V = \ker \omega_0 p$, $\dim V = r$; из условия трансверсальности вытекает существование такого $\omega_1 \in K$, что $\omega_1 p|_V > 0$.

Пусть $\omega \in K$, форме ωp отвечает симметрический оператор $\omega P : \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}^N$ с собственными значениями $\lambda_1(\omega P) \leqslant \lambda_2(\omega P) \leqslant \ldots \ldots \lambda_N(\omega P)$. Обозначим через $V(\omega)$ линейную оболочку собственных векторов оператора ωP, соответствующих собственным значениям $\lambda_{k+1}(\omega P), \ldots, \lambda_{k+r}(\omega P)$. Имеем $V(\omega_0) = V$ и для ω, близких к ω_0 подпространство $V(\omega)$ близко к V. Выберем окрестность U так, что $\forall \omega \in U$ и некоторого $\varepsilon > 0$ выполняются неравенства:

$$\lambda_k(\omega p) < -\varepsilon(\omega, \omega_0) < \lambda_{k+1}(\omega p),\ \lambda_{k+r}(\omega p) > 0;$$

$$(\omega_1 p - \omega_0 p)|_{V(\omega)} > 0.$$

Кроме того, мы предполагаем, что U содержится в объединении граней конуса K, примыкающих к точке ω_0.

Для любых $\tau \in [0, \varepsilon]$ и $\omega \in U$ положим $\omega p_\tau = \omega p + \tau(\omega, \omega_0) I$, где $I(x, x) \overset{\text{def}}{=} (x, x)\ \forall x \in \mathbf{R}^N$, а скалярное произведение в пространстве $\operatorname{span} K$ выбрано так, что $(\omega_1 - \omega_0, \omega_0) > 0$. Ясно, что) $\operatorname{ind} \omega p_\varepsilon = n$, $\ker \omega p_\varepsilon = 0\ \forall \omega \in U$. Следовательно, пучок $p_\varepsilon^U \in \mathscr{P}(N; U$ принадлежит классу $\mathfrak{n}_t$. Осталось показать, что пучки p_τ^U трансверсальны при всех $\tau \in [0, \varepsilon]$. Легко видеть, что $\ker \omega p_\tau \subset V(\omega)$, $\forall \omega \in U$, $\tau \in [0, \varepsilon]$. В то же время, при всех достаточно малых

$\alpha > 0$ ковектор $(\alpha(\omega_1 - \omega_0) + \omega) \in U$ и

$$(\alpha\omega_1 - \alpha\omega_0 + \omega)\, p_\tau \,|\, \ker \omega p_\tau = \alpha(\omega_1 - \omega_0)\, p_\tau \,|\, \ker \omega p_\tau \geqslant$$
$$\geqslant \alpha(\omega_1 - \omega_0)\, p \,|\, \ker \omega p_\tau > 0. \ ▶$$

2. В этом пункте мы еще раз существенно расширим класс рассматриваемых пучков квадратичных форм. Если до сих пор рассматривались только линейные отображения в пространство квадратичных форм, то теперь будут использоваться произвольные кусочно-гладкие. Начнем с уточнения понятия «кусочная гладкость».

Определение. Пусть M — многообразие класса C^∞. Замкнутое подмножество $\Omega \subset M$ называется многообразием с углами, если любая точка $\omega \in \Omega$ обладает такой окрестностью O_ω в M и локальными координатами $\varphi : O_\omega \to \mathbf{R}^k$, $\varphi(\omega) = 0$, что $\varphi(O_\omega \cap \Omega)$ — выпуклый многогранный конус в $\mathbf{R}^k$.

Вектор $\xi \in T_\omega M$ называется касательным к Ω в точке $\omega \in \Omega$, если существует такая гладкая кривая $\gamma : [0, \varepsilon] \to \Omega$, что $\gamma(0) = \omega$, $\gamma'(0) = \xi$. Совокупность всех векторов, касательных в точке ω к многообразию с углами Ω, образует выпуклый многогранный конус в $T_\omega M$, который обозначается $T_\omega \Omega$. Из определения многообразия с углами вытекает, что существует диффеоморфизм $\Phi : O_\omega \to T_\omega M$ некоторой окрестности точки ω в M на $T\omega M$, удовлетворяющий условию

$$\Phi(\Omega \cap O_\omega) = T_\omega \Omega.$$

Определение. Связное гладкое подмногообразие $\Gamma \subset M$ называется открытой гранью многообразия с углами $\Omega \subset M$, если $\Gamma \subset \Omega$ и Γ не содержится строго ни в одном связном гладком подмногообразии в M, лежащем в Ω; при этом замыкание $\bar{\Gamma}$ открытой грани Γ называется замкнутой гранью.

Лемма 7. Пусть Ω — многообразие с углами и $\omega \in \Omega$. Тогда: i) точка ω содержится в единственной открытой грани Γ_ω многообразия с углами Ω; ii). Любая замкнутая грань $\bar{\Gamma} \subset \Omega$ сама является многообразием с углами и соответствие $\bar{\Gamma} \mapsto T_\omega \bar{\Gamma}$, где $\omega \in \bar{\Gamma}$, является взаимно однозначным соответствием между замкнутыми гранями, содержащими ω, и замкнутыми гранями конуса $T_\omega \Omega$, при этом $T_\omega \Gamma_\omega = T_\omega \Omega \cap (-T_\omega \Omega)$.

Доказательство. Нетрудно видеть, что множества $\{\omega \in \Omega \,|\, \dim(T_\omega \Omega \cap (-T_\omega \Omega)) = i\}$ являются i-мерными гладкими подмногообразиями в M. Следовательно, связные компоненты этих множеств, и только они, являются i-мерными гранями многообразия с углами Ω. Отсюда вытекает утверждение i) леммы 7, да и утверждение ii) теперь очевидно.

Отношение включения «$\subset$» определяет частичный порядок на совокупности всех замкнутых граней многообразия с углами Ω. Оно порождает также отношение частичного упорядочения на совокупности всех открытых граней: грань Γ_1 подчинена грани Γ_2, если $\Gamma_1 \subset \overline{\Gamma}_2$. Как нетрудно видеть, любая замкнутая грань $\overline{\Gamma}$ является топологическим многообразием с краем $\partial\overline{\Gamma} = \overline{\Gamma} \setminus \Gamma$ (край, вообще говоря, не гладкий), а максимальные замкнутые грани — это в точности компоненты связности множества Ω.

Пусть $\widetilde{M}$ — еще одно многобразие класса C^∞, отображение $f: \Omega \to \widetilde{M}$ называется гладким, если оно является сужением, на Ω некоторого гладкого отображения $F: M \to \widetilde{M}$. Дифференциалом $f'_\omega: T_\omega\Omega \to T_{f(\omega)}\widetilde{M}$ называется сужение на $T_\omega\Omega$ дифференциала $F'_\omega: T_\omega M \to T_{f(\omega)}\widetilde{M}$. Это сужение зависит, очевидно, лишь от f, а не от выбора гладкого продолжения F. Далее, отображение $\varphi: \Omega \to \Omega$ называется диффеоморфизмом, если φ является сужением на Ω некоторого диффеоморфизма $\Phi: M \to M$. Заметим, что диффеоморфизм φ не обязан быть отображением «на».

Определение. Пусть $f: \Omega \to \widetilde{M}$ — гладкое отображение и $\widetilde{M} \supset \widetilde{\Omega}$ — многообразие с углами. Скажем, что f трансверсально $\widetilde{\Omega}$ в точке $\omega \in \Omega$, если из условия $f(\omega) \in \widetilde{\Omega}$ следует $(-\operatorname{im} f'_\omega) + T_{f(\omega)}\widetilde{\Omega} = T_{f(\omega)}\widetilde{M}$. Отображение f называется трансверсальным $\widetilde{\Omega}$, если оно трансверсально $\widetilde{\Omega}$ в каждой точке.

Определение. Пусть $\mathscr{K} = \{\Omega_1, \ldots, \Omega_n\}$ — конечный набор компактных мноогобразий с углами, $\Omega_i \subset M$, $i = 1, \ldots, n$. Множество $\mathscr{K}$ назовем кусочно-гладким комплексом, если $\forall i, j$ пересечение $\Omega_i \cap \Omega_j$ является замкнутой гранью Ω_i и замкнутой гранью Ω_j и, кроме того, $\Omega_i \cap \Omega_j \in \mathscr{K}$. Носителем кусочно-гладкого комплекса $\mathscr{K}$ называется множество $\overline{\mathscr{K}} = \bigcup_{i=1}^{n} \Omega_i \subset M$.

Определение. Пусть $M \supset \Omega$ — многообразие с углами и $f: \Omega \to \mathscr{R}(\mathrm{R}^N)$ — гладкое отображение. Отображение f называется неособым, если для всякого $\omega \in \Omega$ из условия $f(\omega) \in \Pi_1$, следует $f'_\omega(T\omega\Omega)^\circ \cap \mathscr{N}^+_{f\omega} = 0$ и, трансверсальным, если, при тех же условиях

$$f'_\omega(T\omega\Omega)^\circ \cap \operatorname{conv} \mathscr{N}^+_{f(\omega)} = 0.$$

Последнее определение может быть расшифровано аналогично тому, как это делалось в пункте 1 для пучков квадратичных форм: гладкое отображение $f: \Omega \to \mathscr{P}(\mathrm{R}^N)$ является неособым, если и только если для любых $\omega \in \Omega$, $x \in \ker f(\omega) \setminus 0$ найдется такое $\xi \in T_\omega\Omega$, что $(f'_\omega\xi)(x, x) > 0$; это отображение является трансверсальным, если и только если для любого $\omega \in \Omega$ найдется такое $\xi \in T_\omega\Omega$, что $(f'_\omega\xi)\,|_{\ker f(\omega)} > 0$.

Пусть K — многогранный конус в $\mathbf{R}^{k*}$ и S^{k-1} — сфера в R^{k*}. Ясно, что $K \cap S^{k-1}$ — многообразие с углами. Нетрудно видеть, что пучок $p^K \in \mathscr{P}(N; k)$ в том и только том случае является неособым (трансверсальным), когда отображение $p^K|_{K\cap S^{N-1}}$ неособо (трансверсально).

Определение. Пусть $\mathcal{K}$ — некоторый кусочно-гладкий комплекс и $\overline{\mathcal{K}}\subset M$ — его носитель. Комплексом квадратичных форм называется произвольное непрерывное отображение $f:\overline{\mathcal{K}}\to\mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$, гладкое на каждом из многообразий с углами $\Omega\in\mathcal{K}$, $\Omega\subset\overline{\mathcal{K}}$. Комплекс квадратичных форм f называется неособым (трансверсальным), если для всякого $\Omega\in\mathcal{K}$ отображение $f|_\Omega:\Omega\to\mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$ неособо (трансверсально).

Произвольную гомотопию $f_t:\overline{\mathcal{K}}\to\mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$, $t\in[0, 1]$ комплексов квадратичных форм будем называть неособой (трансверсальной), если f_t неособо (трансверсально) $\forall t\in[0, 1]$.

Пространство всех гладких отображений многообразия с углами $\Omega\subset M$ в $\mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$ обозначим через $C^\infty(\Omega, \mathcal{P}(\mathbb{R}^N))$, а пространство всех комплексов квадратичных форм вида $f:\overline{\mathcal{K}}\to\mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$ через $C^\infty(\mathcal{K}, \mathcal{P}(\mathbb{R}^N))$. Топология Уитни $C^\infty(M, \mathcal{P}(\mathbb{R}^N))$ индуцирует структуру пространства Фреше в $C^\infty(\Omega, \mathcal{P}(\mathbb{R}^N))$. Скажем, что последовательность комплексов $f_n\in C^\infty(\mathcal{K}, \mathcal{P}(\mathbb{R}^N))$, $n=1, 2, \ldots$, сходится к комплексу $f\in C^\infty(\mathcal{K}, \mathcal{P}(\mathbb{R}^N))$, если $\forall\Omega\in\mathcal{K}$ отображения $f_n|\Omega$ сходятся к $f|\Omega$ в пространстве Фреше $C^\infty(\Omega, \mathcal{P}(\mathbb{R}^N))$. Это понятие сходимости определяет, очевидно, структуру пространства Фреше в $C^\infty(\mathcal{K}, \mathcal{P}(\mathbb{R}^N))$.

Следующее утверждение (аналогичное лемме 6) легко следует из обычной теоремы трансверсальности.

Лемма 8. Пусть $\mathcal{K}$ — кусочно-гладкий комплекс; трансверсальные квадратичные комплексы образуют открытое всюду плотное подмножество в пространстве $C^\infty(\mathcal{K}, \mathcal{P}(\mathbb{R}^N))$.

Лемма 9. Пусть $f_t:\overline{\mathcal{K}}\to\mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$, $t\in[0, 1]$ — гладкая трансверсальная гомотопия комплексов квадратичных форм. Тогда существует такое гладкое семейство непрерывных взаимно однозначных отображений $F_t:\overline{\mathcal{K}}\to\overline{\mathcal{K}}$, $F_0=\mathrm{id}$, что

$$F_t(f_0^{-1}(\mathcal{P}_n))\subset f_t^{-1}(\mathcal{P}_n),\quad n=0, 1, \ldots, N,\quad t\in[0, 1],$$

при этом, если $\mathcal{K}$ состоит из единственного многообразия с углами Ω, то $F_t:\Omega\to\Omega$ — диффеоморфизм.

Доказательство. Лемма 9 представляет собой параллель к лемме 2.1, однако отнюдь не содержит последнюю в качестве частного случая, поскольку фигурирующее в лемме 2.1 равенство заменяется на включение. Метод доказательства леммы 8 тот же, что и леммы 2.1 (как и остальных вариантов леммы Тома об изотопии).

Пусть X — непрерывное векторное поле на M, сужение X на $\overline{\mathcal{K}}$ назовем векторным полем на $\mathcal{K}$, если для любых y, Ω, $y\in\Omega\in\mathcal{K}$, справедливо включение $X(y)\in T_y\Omega$. Векторное поле на $\mathcal{K}$

называется гладким (липшицевым), если $X|_\Omega$ — гладкое (липшицево) для любого $\Omega \in \mathscr{K}$.

Для доказательства леммы 9 достаточно построить нестационарное липшицево (а в случае $\mathscr{K}=\{\Omega\}$ — гладкое) поле X_t на $\mathscr{K}$ со следующими свойствами: если $y \in \Omega \in \mathscr{K}$, то

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}(y)+f'_{ty}X_t(y)\right)\Big|_{\ker f_t(y)}>0. \tag{1}$$

Достаточно построить искомое поле локально, вблизи фиксированной точки $y_0 \in \Omega_0 \in \mathscr{K}$, а затем воспользоваться разбиением единицы.

Пусть $\mathscr{P}_+(\ker f_t(y))$ — выпуклый замкнутый конус всех квадратичных форм на $\mathbb{R}^N$, неотрицательных на подпространстве $\ker f_t(y)$. Из результатов п. 1.2 следует, что

$$\mathscr{P}_+(\ker f_t(y))^\circ = -\operatorname{conv} \mathscr{N}^+_{f_t(y)}.$$

Переходя к двойственным конусам в условии трансверсальности

$$\operatorname{conv} \mathscr{N}^+_{f_t(y_0)} \cap f'_{ty_0}(T_{y_0}\Omega_0)=0,$$

получаем равенство

$$-f'_{ty_0}(T_{y_0}\Omega_0)+\mathscr{P}_+(\ker f_t(y_0))=\mathscr{P}(\mathbb{R}^N).$$

Последнее равенство очевидно сохранится, если мы заменим конус $\mathscr{P}_+(\ker f_t(y_0))$ на внутренность этого конуса, состоящую из форм, положительных на подпространстве $\ker f_t(y_0)$. Следовательно, найдется такой вектор $X_t(y_0) \in T_{y_0}\Omega_0$, что

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}(y_0)+f'_{ty_0}X_t(y_0)\right)\Big|_{\ker f_t(y_0)}>0.$$

Ясно, что любое непрерывное векторное поле X_t на M, принимающее значение $X_t(y_0)$ в точке y_0 удовлетворяет неравенству (1) при всех y, близких к y_0.

Осталось доказать существование хотя бы одного липшицевого (а в случае $\mathscr{K}=\{\Omega_0\}$ — гладкого) поля на $\mathscr{K}$, принимающего в точке y_0 значение $X_t(y_0)$. Построение гладкого поля в Ω_0 тривиально: это то поле, которое переходит в постоянное при диффеоморфизме $\Phi : O_{y_0} \cap \Omega_0 \to T_{y_0}\Omega_0$.

Продолжение векторного поля, заданного на Ω_0, на любое $\Omega \in \mathscr{K}$ липшицевым образом также не вызывает затруднений. Это продолжение может быть осуществлено индукцией по размерности граней, при этом задача легко сводится к следующей: на границе выпуклого острого многогранного конуса задано липшицево векторное поле, требуется продолжить это поле липшицевым образом на весь конус; чтобы построить продолжение, выберем какую-нибудь точку внутри конуса и на луче, проходящем через эту точку и вершину, положим поле равным его значению в вершине, а затем, соединяя точки луча с границей конуса отрезками, лежащими в гиперплоскости, перпендикулярной лучу, определим поле вдоль каждого отрезка, взяв выпуклые комбинации значений поля в концах отрезка.

Следствие. В условиях леммы 8 гомотопический тип пары $(\bar{\mathcal{K}}, f_t^{-1}(\mathcal{P}_n))$ не зависит от $t\in[0, 1]$ для $n=0, 1, \ldots, N$. В частности, группы когомологий $H^i(\bar{\mathcal{K}}, f^{-1}(\mathcal{P}_n))$ являются инвариантами трансверсальной гомотопии.

Пусть $f:\bar{\mathcal{K}}\to\mathcal{P}(\mathbf{R}^N)$ — неособый комплекс квадратичных форм, причем $f(\bar{\mathcal{K}})\cap\Pi_2=\varnothing$. Тогда f — трансверсальный комплекс. Поскольку Π_2 имеет коразмерность 3 в $\mathcal{P}(\mathbf{R}^N)$ получаем следующее очевидное обобщение предложения 2.3.

Предложение 3. Предположим, что $\mathcal{K}$ — нульмерный или одномерный комплекс и $f_i:\bar{\mathcal{K}}\to\mathcal{P}(\mathbf{R}^N)$ — трансверсальные комплексы квадратичных форм, $i=1, 2$. Если f_1 и f_2 неособо гомотопны, то они и трансверсально гомотопны.

В ситуации, рассмотренной в предложении 3, гомотопический тип пар $(\bar{\mathcal{K}}, f_i^{-1}(\mathcal{P}_n))$, $i=1,\ldots,N$ является инвариантом неособой гомотопии. Это, в частности, имеет место для комплексов

$$\omega\mapsto\omega q(n_1,\ldots,n_{2k-1};\ m),\quad \omega\in S^1\subset\mathbf{R}^{2*} \tag{2}$$

(Определение квадратичных отображений $q(n_1,\ldots,n_{2k-1};\ m)$ см. в формулировке теоремы 2.1).

Напомним, что $f^{-1}(\mathcal{P}_n)=\{y\in\bar{\mathcal{K}}\mid \operatorname{ind} f(y)\leqslant n\}$, и описание множеств $f^{-1}(\mathcal{P}_n)$ сводится к вычислению функции $y\mapsto\operatorname{ind} f(y)$. Для комплекса (2) эта функция имеет следующий вид:

Пусть $\Delta_0,\ldots,\Delta_{2k-3}$ — открытые дуги, на которые окружность S^1 делится корнями степени $4k—2$ из единицы, занумерованные так, чтобы индексы монотонно возрастали при движении в положительном направлении от Δ_0.

Положим $n_j=n_{j-2k+1}$ при $2k\leqslant j\leqslant 3k—2$. Тогда

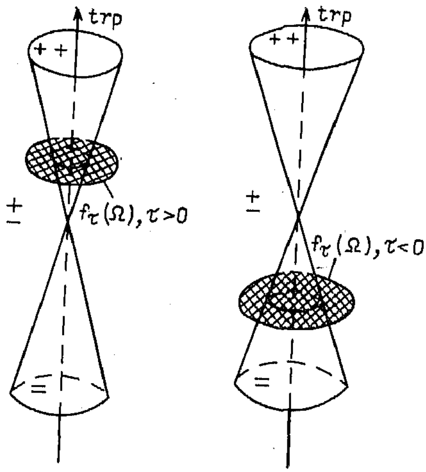
$$\operatorname{ind}(\omega q(n_1,\ \ldots,\ n_{2k-1}:\ m))=$$
$$=\begin{cases} m+\sum\limits_{j=\alpha+1}^{\alpha+k} n_j, & \omega\in\Delta_{2\alpha} \\ m+\sum\limits_{j=\alpha+2}^{\alpha+k} n_j, & \omega\in\bar{\Delta}_{2\alpha+1}\end{cases},\quad \alpha=0,\ 1,\ \ldots,\ 2k-2. \tag{3}$$

Отсюда нетрудно вывести, что комплекс (2) может быть неособо гомотопен комплексу $\omega\mapsto\omega q(n_1',\ \ldots,\ n_{2k'-1}';\ m')$, $\omega\in S^1$ лишь если $m=m'$, $k=k'$ и последовательность чисел $n_1',\ \ldots,\ n_{2k-1}'$ получается из последовательности $n_1,\ldots,n_{2k-1}$ циклической подстановкой. Подчеркнем, что этот факт не вытекает из теоремы 2.1: там речь шла о гомотопии в классе неособых пучков квадратичных форм, т. е. «линейных» неособых отображений S_1 в $\mathscr{P}(\mathbf{R}^N)$, а здесь — о гомотопии в классе произвольных гладких неособых отображений.

Для комплексов квадратичных форм размерности больше единицы неособая гомотопность как и следовало ожидать, отнюдь не влечет трансверсальную гомотопность. В действительности, уже для гладких отображений $f: B^2 \to \mathscr{P}(\mathbf{R}^2)$ двумерного диска в пространство квадратичных форм двух переменных группы когомологий $H^i(B^2, f^{-1}(\mathscr{P}_n))$ не являются инвариантами неособой гомотопии.

Приведем «модельный» пример.

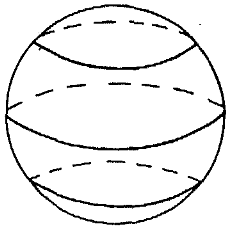
Пусть $\Omega = \{p \in \mathscr{P}(\mathbf{R}^2) \mid \operatorname{tr} P = 0, \operatorname{tr} P^2 \leqslant 1\}$ — диск в трехмерном пространстве $\mathscr{P}(\mathbf{R}^2)$. Определим отображения $f_\tau: \Omega \to \mathscr{P}(\mathbf{R}^2)$ формулой $f_\tau(p) = p + \tau I$, $p \in \Omega$, $\tau \in (-1, 1)$. Отображение f_0 неособо, однако не является трансверсальным; отображения f_τ при $\tau \in (-1, 1) \setminus \{0\}$ трансверсальны. Имеем $H^i(\Omega, f_\tau^{-1}(\mathscr{P}_n)) = 0$ $\forall i, n$ при $\tau \geqslant 0$; в то же время $H^0(\Omega, f_\tau^{-1}(\mathscr{P}_0)) = H^2(\Omega, f_\tau^{-1}(\mathscr{P}_1)) = \mathbf{Z}$ при $-1 < \tau < 0$.



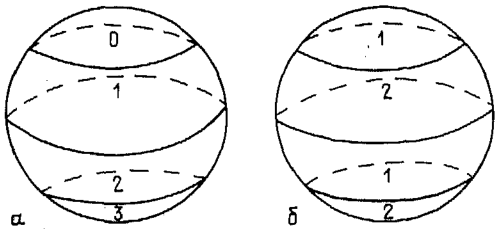
Пусть q_0 — неособая квадратичная форма из $\mathscr{P}(\mathbf{R}^N)$. Заменив f_τ на отображение $f_\tau \oplus q_0: \Omega \to \mathscr{P}(\mathbf{R}^{N+2})$, получим аналогичную картину для любого $N > 0$.

Рассмотренные в конце § 2 примеры квадратичных отображений $\mathbf{R}^3$ в $\mathbf{R}^3$ позволяют продемонстрировать тот же эффект в случае пучков квадратичных форм. Пусть $p \in \mathscr{P}(3, 3)$, уравнение $\det(\omega P)$ определяет кубическую кривую в проективной плоскости $\mathbf{RP}^2$. Для отображения p общего положения эта кривая неособа. Вообще говоря, неособая кубическая кривая может иметь либо одну либо две компоненты связности. Оказывается, она имеет две компоненты связности в том и только том случае, когда пучок p^* неособо гомотопен пучку, содержащему знакоопределенную форму. При переходе от $\mathbf{RP}^2$ к ее двулистному накрытию — сфере $s^2 \subset \mathbf{R}^{3*}$ одна из компонент (стягиваемая в $\mathbf{RP}^2$) раздваивается, а другая (нестягиваемая) — нет.

Получается следующая картина: кривая разбивает S^2 на четыре области.



Поскольку для невырожденной формы ωp имеем $\operatorname{ind}(-\omega p)=3-\operatorname{ind}\omega p$, а точкам соседних областей отвечают соседние индексы, то *возможно лишь два способа* разбиения на области с различными индексами:



В случае а) пучок p^* содержит знакоопределенные формы, а в случае б) — нет. Как было показано в § 2, обе ситуации реализуются.

Пусть $f:\mathscr{K}\to\mathscr{P}(\mathbf{R}^N)$ — комплекс квадратичных форм и $p_0 \in \mathscr{P}_0(\mathbf{R}^{N'})$ — фиксированная положительная форма. Тогда отображение $\omega \mapsto f(\omega)\oplus p_0$ определяет комплекс квадратичных форм $f\oplus p_0:\mathscr{K}\to\mathscr{P}(\mathbf{R}^{N+N'})$. Если f — неособый комплекс, то, очевидно, $f\oplus p_0$ — также неособый, а если f — трансверсальный комплекс, то $f\oplus p_0$ также трансверсальный. Кроме того,

$$f^{-1}(\mathscr{P}_n)=(f\oplus p_0)^{-1}(\mathscr{P}_n), \quad \forall n \text{ и } f\oplus p_0 \overset{t}{\sim} f\oplus p_1$$

для любых положительных форм p_0, $p_1 \in \mathscr{P}_0(\mathbf{R}^{N'})$. Операция, сопоставляющая комплексу f комплекс $f\oplus p_0$, позволяет распространить понятия неособой и трансверсальной гомотопности на комплексы форм от разного числа переменных.

Определение. Скажем, что комплексы $f_i:\overline{\mathscr{K}}\to\mathscr{P}(\mathrm{R}^{N_i})$, $i=1, 2$ стабильно неособо (трансверсально) гомотопны, если для некоторых положительных форм $p_i\in\mathscr{P}\left(\mathrm{R}^{N'_i}\right)$, $N_1+N'_1=N_2+N'_2$, комплексы $f_i\oplus p_i$, $i=1, 2$, являются неособо (трансверсально) гомотопными.

§ 4. Эйлерова характеристика

Пусть $\mathscr{T}$ — топологическое пространство, имеющее гомотопический тип конечного клеточного комплекса. Символом $\chi(\mathscr{T})$ обозначается эйлерова характеристика пространства $\mathscr{T}$, $\chi(\mathscr{T})=\Sigma\,\mathrm{rank}\,H^i(\mathscr{T})(-1)^i$. Как известно, эйлерова характеристика аддитивна: если C_1, C_2 — подкомплексы конечного клеточного комплекса C, то

$$\chi(C/C_1)=\chi(C)-\chi(C_1),\quad \chi(C_1\cup C_2)+\chi(C_1\cap C_2)=\chi(C_1)+\chi(C_2).$$

Определение. Пусть $f:\overline{\mathscr{K}}\to\mathscr{P}(\mathrm{R}^N)$ — неособый комплекс квадратичных форм. Положим

$$\chi(f)=\sum_{n=0}^{N}(-1)^n\chi(\overline{\mathscr{K}}/f^{-1}(\mathscr{P}_n))=\sum_{i=0}^{\left[\frac{N}{2}\right]}\chi(f^{-1}(\mathscr{P}_{2i+1})/f^{-1}(\mathscr{P}_{2i}))$$

и назовем $\chi(f)$ эйлеровой характеристикой комплекса квадратичных форм f.

Пусть $\mathscr{K}$, $\mathscr{L}$ — кусочно-гладкие комплексы, $\overline{\mathscr{K}}$, $\overline{\mathscr{L}}\subset M$, причем $\overline{\mathscr{K}\cap\mathscr{L}}=\overline{\mathscr{K}}\cap\overline{\mathscr{L}}$. Тогда $\mathscr{K}\cap\mathscr{L}$, $\mathscr{K}\cup\mathscr{L}$ также кусочно-гладкие комплексы и для произвольного комплекса квадратичных форм $f:\overline{\mathscr{L}\cup\mathscr{K}}\to\mathscr{P}(\mathrm{R}^N)$ очевидным образом определяются комплексы квадратичных форм $f|\mathscr{K}$, $f|\mathscr{L}$, $f|\mathscr{K}\cap\mathscr{L}$. Эйлерова характеристика очевидно, аддитивна в том смысле, что

$$\chi(f)+\chi(f|\mathscr{K}\cap\mathscr{L})=\chi(f|\mathscr{K})+\chi(f|\mathscr{L}).$$

Можно показать, что эйлерова характеристика $\chi(f)$ (в отличие от ее слагаемых $\chi(\overline{\mathscr{K}}/f^{-1}(\mathscr{P}_n))$) не меняется при неособой гомотопии. В случае пучков это вытекает из следующей теоремы и леммы 3.4.

Теорема 1. Пусть $p\in\mathscr{P}(N, k)$ — квадратичное отображение из R^N в R^k, K — выпуклый замкнутый конус в R^{k*}, причем пучок $p^K:K\to\mathscr{P}(\mathrm{R}^N)$ трансверсален. Положим $K_n=(p^K)^{-1}(\mathscr{P}_n)\setminus 0$, $n\geqslant 0$. Тогда

$$\frac{1}{2}\chi(p^{-1}(K^\circ)\cap S^{N-1})=\sum_{i=0}^{[\frac{N}{2}]}\chi(K_{2i+1}/K_{2i})+\frac{\varepsilon}{2}(1+(-1^{N-1})=$$

$$=\chi(p^K|S^{k-1})+\frac{\varepsilon}{2}\chi(S^{N-1}), \qquad (1)$$

где $\varepsilon=\begin{cases}(-1)^{\dim K}, & K=-K\\ 0, & K\neq -K.\end{cases}$

Доказательство проведем в несколько этапов.

1) Предположим, что K — полупрямая, $K=\{\alpha\omega_0\,|\,\alpha\geqslant 0\}$. Тогда $p^{-1}(K^\circ)=\{x\in\mathbb{R}^N\,|\,\omega_0 p(x,x)\leqslant 0\}$, множество $p^{-1}(K^\circ)\cap S^{N-1}$ имеет гомотопический тип сферы размерности $(\operatorname{ind}\omega_0 p-1)$; следовательно, $\chi(p^{-1}(K^\circ)\cap S^{N-1})=1+(-1)^{\operatorname{ind}\omega_0 p-1}$. В то же время,

$$\chi(K_n/K_{n-1})=\begin{cases}1, & n=\operatorname{ind}\omega_0 p,\\ 0, & n\neq\operatorname{ind}\omega_0 p.\end{cases}$$

Таким образом, в случае, когда K — полупрямая, равенство (1) справедливо.

2) Пусть K — произвольный многогранный конус и $\omega_0\in K\setminus 0$. Тогда равенство (1) справедливо для пучка $p^{U_{\omega_0}}$, где U_{ω_0} — произвольная достаточно малая коническая окрестность точки ω_0 в K. В самом деле, из леммы 3.4 и следствия леммы 3.9 вытекает, что и левая и правая части равенства (1) не меняются при трансверсальной гомотопии, а предложение 3.2 утверждает, что пучок pU_{ω_0} трансверсально гомотопен пучку, определенному на полупрямой; таким образом, мы оказываемся в ситуации, рассмотренной на предыдущем этапе.

Замечание. Предположим, что $\dim\ker\omega p\leqslant r$, $\forall\omega\in K\setminus 0$. Внимательное рассмотрение доказательства предложения 3.2 показывает, что в этом случае размеры окрестности U_{ω_0} в утверждении 2) могут быть выбраны одинаковыми для всех ω_0, т. ч. $\omega_0\in\Pi_r$.

Чтобы двигаться дальше, нам понадобится одно простое свойство выпуклых конусов.

Предложение 1. Пусть K_1, K_2 — выпуклые замкнутые конусы в $\mathbb{R}^k$. Тогда

$$K_1\cup K_2=K_1+K_2\Leftrightarrow \overset{\circ}{K}_1\cup\overset{\circ}{K}_2=\overset{\circ}{K}_1+\overset{\circ}{K}_2.$$

Мы приведем доказательство, так как не смогли найти это утверждение в учебниках. Для любых выпуклых конусов справедливо равенство $\overset{\circ}{K}_1+\overset{\circ}{K}_2=(K_1\cap K_2)^\circ$. Предположим, что $\omega\in(K_1\cap K_2)^\circ\setminus(\overset{\circ}{K}_1\cup\overset{\circ}{K}_2)$. Тогда $\langle\omega,x\rangle\leqslant 0$ $\forall x\in K_1\cap K_2$, но найдутся такие $x_1\in K_1$ и $x_2\in K_2$, что $\langle\omega,x_1\rangle>0$, $\langle\omega,x_2\rangle>0$. Для всякого $\alpha\in[0,1]$ имеем $\langle\omega,\alpha x_1+(1-\alpha)x_2\rangle>0$, следовательно, весь отрезок $\mathrm{conv}\{x_1, x_2\}$ лежит вне множества $K_1 \cap K_2$. В то же время, множества $K_i \cap \mathrm{conv}\{x_1, x_2\}$ замкнуты и непусты. Следовательно, отрезок $\mathrm{conv}(x_1, x_2\}$ содержит точки, лежащие вне $K_1 \cup K_2$ и множество $K_1 \cup K_2$ не выпукло. ▶

3) Пусть K, L — выпуклые многогранные конусы, причем $K \cup L$ выпукло, $K \cap L \neq 0$. Если равенство (1) верно для пучков p^K, p^L, $p^{K \cap L}$, то оно верно также и для пучка $p^{K \cap L}$.

В самом деле, $(K \cup L)^\circ = (K^\circ \cap L^\circ)$ и, в силу предложения 1, $(K \cap L)^\circ = K^\circ \cup L^0$. Таким образом,

$$\begin{aligned}\chi(p^{-1}((K \cup L)^\circ) \cap S^{N-1}) &= \chi(p^{-1}(K^\circ) \cap p^{-1}(L^\circ) \cap S^{N-1}) = \\ &= \chi(p^{-1}(K^\circ) \cap S^{N-1}) + \chi(p^{-1}(L^\circ) \cap S^{N-1}) - \\ &\quad - \chi(p^{-1}(K^\circ) \cup p^{-1}(L^\circ) \cap S^{N-1}) = \\ = \chi(p^{-1}(K^\circ) \cap S^{N-1}) + \chi(p^{-1}(L^\circ) \cap S^{N-1}) &- \chi(p^{-1}((K \cap L)^\circ \cap S^{N-1}\ .)\end{aligned}$$

Остается воспользоваться предположением и аддитивностью эйлеровой характеристики квадратичных форм.

4) Равенство (1) справедливо для произвольного выпуклого многогранного конуса K.

Воспользуемся двойной индукцией по $\dim K$ и по $\max_{\omega \in K^\circ \setminus 0} (\dim \ker \omega p)$. Многократно рассекая конус K трансверсальными этому конусу гиперплоскостями и используя утверждение 3), мы можем все свести к ситуации, рассмотренной в 2). При этом, если K — линейное пространство, то на одном из этапов нам придется представлять прямую в $\mathbf{R}^{k*}$ в виде объединения двух лучей. Пересечение этих лучей — нулевой конус 0. Поскольку $0^\circ = \mathbf{R}^k$, то $\chi(p^{-1}(0^\circ) \cap S^{N-1}) = \chi(S^{N-1})$, и в формуле (1) появляется слагаемое с коэффициентом ε.

Справедливость равенства (1) для произвольного выпуклого замкнутого конуса вытекает теперь из аппроксимационной леммы 3.5. ▶

Формула (1) дает содержательные результаты уже в случае $k=2$, $K=0$. В этом случае все возможные ситуации исчерпываются квадратичными отображениями вида $q(n_1, \ldots, n_{2k-1}; m)$ (см. теорему 2.1). Положим

$$V(n_1, \ldots, n_{2k-1}; m) = \{x \in S^{N-1} \mid q(n_1, \ldots, n_{2k-1}; m)(x, x) = 0\}$$

— полное пересечение двух вещественных квадрик $\mathbf{R}^N$, пересеченное со сферой S^{N-1}, $N = \Sigma n_j + 2m$. Теорема 1 в сочетании с равенством (3.3) приводит к следующему способу вычисления эйлеровой характеристики этого многообразия.

Обозначим через I подмножество в $\{1, \ldots, 2k-1\}$, состоящее из всех таких j, что n_j нечетно, а через I' — множество $I \cup \{j+2k-1 \mid j \in I\}$, и положим $\theta(j) = \#(I' \cap \{j, j+1, \ldots, j+2k-1\}$. Многообразие $V(n_1, \ldots, n_{2k-1}; m)$ имеет размерность $N-3$; если N четно, то это — нечетномерное многообразие и его эйлерова характеристика равна нулю; если же N нечетно, то

$$\frac{1}{2}\chi(V(n_1, \ldots, n_{2k-1}; m)) = (-1)^m \sum_{j \in I} (-1)^{\theta(j)} + 1.$$

При фиксированном нечетном N максимальная по абсолютной величине эйлерова характеристика получается в случае $k = \frac{N+1}{2}$, $m=0$ при этом $\frac{1}{2}\chi(V(1, \ldots, 1; 0)) = (-1)^{\frac{N+1}{2}} N + 1$.

Рассмотрим еще квадратичные отображения $p \in \mathscr{P}(N, 3)$. Уравнение $\det(\omega P) = 0$ определяет алгебраическую кривую степени N в $\mathbf{R}P^2 = (\mathbf{R}^{3*} \setminus 0)/(\omega \sim \alpha\omega, \alpha \neq 0)$. Предположим, что это неособая кривая (это предположение выполняется для отображений p общего положения и гарантирует трансверсальность пучка p^*). Если N нечетно, то $p^{-1}(0) \cap S^{N-1}$ — нечетномерное многообразие, и его эйлерова характеристика равна нулю, при четном N равенство (1) легко преобразуется к виду

$$\frac{1}{4}\chi(p^{-1}(0) \cap S^{N-1}) = \chi(\{\bar{\omega} \in \mathbf{R}P^2 \mid \det(\omega p) \leqslant 0\}).$$

Из известных неравенств И. Г. Петровского [7] теперь следует, что

$$|\chi(p^{-1}(0) \cap S^{N-1})| \leqslant \frac{3}{2} N(N-2) + 4.$$

Замечание. Неравенства И. Г. Петровского для кривых четной степени являются точными. Можно показать, что кривые, на которых эти неравенства превращаются в равенства, представляются уравнениями вида $\det(\omega p) = 0$ для некоторых $p \in \mathscr{P}(3, 3)$. Следовательно, полученное неравенство также точное.

2. В этом пункте мы приведем некоторые выражения для $\chi(f)$ в случае, когда $f : M^k \to \mathscr{P}(\mathbf{R}^N)$ определено на гладком многообразии M^k.

Пусть $F(m_0) : \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}^N$ — линейный симметричный оператор, отвечающий квадратичной форме $f(m_0)$, а $\lambda_n(m_0)$ — n-е снизу собственное значение оператора $F(m)$, $m \in M$, $n = 1, \ldots, N$. Если $\lambda_n(m_0)$ — однократное собственное значение, то функция $m \mapsto \lambda_n(m)$ является гладкой вблизи точки m_0. В этом случае обозначим через $\lambda_n'(m_0)$ дифференциал функции $m \mapsto \lambda_n(m)$ в точке m_0 и через $\lambda_n''(m_0)$ — гессиан этой функции (напомним, что гессиан скалярной функции определен только тогда, когда дифференциал равен нулю). Положим также $F_\lambda(m) = (F(m) - \lambda I) \mid \ker(F(m) - \lambda I)^\perp$ и $f_\lambda(m)$ — квадратичная форма на $\ker(F(m) - \lambda I)^\perp$, соответствующая оператору $F_\lambda(m)$.

Пусть x — собственный вектор, отвечающий однократному собственному значению $\lambda_n(m)$ оператора $F(m)$, $|x|=1$ и $\mu \in T_n M^k$. Тогда, как нетрудно показать, $\langle \lambda'(m), \mu \rangle = = \frac{\partial}{\partial \mu} f(m)(x, x)$,

$$\lambda''(m)(\mu, \mu) =$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial \mu^2} f(m)(x, x) - 2 f_{\lambda_n(m)} \left(F^{-1}_{\lambda_n(m)} \frac{\partial F(m)}{\partial \mu} x, F^{-1}_{\lambda_n(m)} \frac{\partial F(m)}{\partial \mu} x \right).$$

Лемма 1. Типичное неособое отображение $f: M^k \to \mathscr{P}(\mathbf{R}^N)$ класса C^∞ обладает следующими свойствами: Если $m_0 \in M^k$, $\lambda \in \mathbf{R}$, $x \in \mathbf{R}^N \setminus 0$ таковы, что $F(m_0)x = \lambda x$ и m_0 — критическая точка функции $m \mapsto f(m)(x, x)$, то i) $\dim \ker f(m_0) = 1$; ii) квадратичная форма $\lambda''(m_0)$ на $T_{m_0} M^k$ невырождена.

Это утверждение можно вывести из стандартной теоремы трансверсальности. Мы не будем приводить подробное доказательство, а укажем лишь, как в подобных ситуациях производится подсчет параметров. Например, чтобы установить i) следует рассмотреть систему уравнений $F(m)x = \lambda x$, $F(m)y = \lambda y$, $\frac{\partial}{\partial m} f(m)(x, y) = 0$, $(x, y) = 0$ относительно переменных $m \in M^k$, $\lambda \in \mathbf{R}$, $x, y \in S^{N-1}$. Независимых уравнений здесь $2N+k$ (но не $2N+k+1$, поскольку равенство $(F(m)y, x) = \lambda(y, x)$ вытекает из $F(m)x = \lambda x$), а переменных $2N+k-1$, следовательно, для типичного f эта система уравнений не должна иметь решений.

Предложение 2. Если отображение $f: M^k \to \mathscr{P}(\mathbf{R}^N)$ удовлетворяет условиям леммы 1, то

$$\chi(f) = \sum_{n=1}^{N} (-1)^{n+k-1} \sum_{\{m \mid \lambda_n(m) < 0, \lambda_n'(m) = 0\}} (-1)^{\operatorname{ind} \lambda_n''(m)}. \tag{2}$$

Доказательство. Если $t > 0$ достаточно велико, то $(f + tI)(M) \subset \mathscr{P}_0$; в частности, $\chi(f + tI) = 0$. Если отображение $f + tI$ неособо при $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, то $\chi(f + t_1 I) = \chi(f + t_2 I)$. Следовательно, чтобы вычислить $\chi(f)$, нужно выделить такие точки $t_i > 0$, что $f + t_i I$ особо, и выяснить, как меняется $\chi(f + t_i I)$ при прохождении параметра t через t_i.

Отображение $f + t_0 I$ является особым в том и только том случае, когда для некоторых $m_0 \in M$, $x_0 \in S^{N-1}$ справедливы равенства $F(m_0)x_0 = -t_0 x_0$, $\frac{\partial}{\partial m} f(m_0)(x_0, x_0) = 0$. Из условий предложения 2 вытекает, что такие тройки (t_0, m_0, x_0) являются изолированными в $(0, +\infty) \times M^k \times S^{N-1}$ и, следовательно, их имеется лишь конечное число (t_0, близкое к нулю, и t_0 достаточно большие недопустимы).

Таким образом, если $f + t_0 I$ — особое отображение, то $-t_0 = \lambda_n(m)$ для некоторого n, причем m_0 — критическая точка функции $\lambda_n(m)$.

Пусть $m_{01}, \ldots, m_{0l}$ — все критические точки функции $\lambda_n(m)$, отвечающие критическому значению $-t_0$, из условий предложения 2 следует, что все критические точки невырождены. Заметим, что $(f+tI)^{-1}(\mathcal{P}_{n-1})=\lambda_n^{-1}([-t, +\infty))$. Из теории Морса следует, что

$$\chi((f+(t_0+\varepsilon)I)^{-1}(\mathcal{P}_{k-1}))-\chi((f+(t_0-\varepsilon)I)^{-1})=$$

$$=(-1)^k\sum_{i=1}^{l}(-1)^{\operatorname{Ind}\lambda_n''(m_{0i})}$$

при всех достаточно малых $\varepsilon>0$.

Суммируя по всем $t_0>0$, получаем

$$\begin{array}{l}\chi(M^k)-\chi(f^{-1}(\mathcal{P}_{n-1}))=(-1)^k\displaystyle\sum_{\{m|\lambda_n(m)<0,\,\lambda_n'(m)=0\}}(-1)^{\operatorname{Ind}\lambda_n''(m)}\\ \qquad\| \\ \chi(M^k/f^{-1}(\mathcal{P}_{n-1}))\end{array}$$

Наконец, суммируя по n с соответствующими знаками, получаем равенство (2).

Замечание. Равенство, аналогичное (2), имеет место и в случае, если f определено на произвольном многообразии с углами. Чтобы получить такое равенство, необходимо воспользоваться вариантом теории Морса для многообразий с углами.

Теперь мы хотим получить выражение для $\chi(f)$ в виде коэффициента зацепления двух циклов. Поскольку выбор знака у коэффициента зацепления — вопрос соглашения, а знак эйлеровой характеристики однозначно определен, то, чтобы избежать двусмысленностей, необходимо заранее договориться о выборе знаков. Пусть U^n — гладкое ориентированное многообразие, $\varphi_1, \ldots, \varphi_k \in C^\infty(U^n)$ и $V^{n-k}=\{v\in U^n | \varphi_1(v)=\varphi_2(v)= = \ldots =\varphi_k(v)=0\}$, причем $d_v\varphi_1, \ldots, d_v\varphi_k$ линейно независимы в каждой точке $v\in V^{n-k}$. Функции $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ следующим образом определяют ориентацию гладкого многообразия V^{n-k}: внешняя $(n-k)$-форма ω на T_vV^{n-k} задает положительную ориентацию на T_vV^{n-k} в том и только том случае, когда n-форма $d_v\varphi_1\wedge\ldots\wedge d_v\varphi_k\wedge\omega$ задает положительную ориентацию на T_vU^n (порядок сомножителей существенен!).

Далее, пусть M — гладкое ориентированное многообразие произвольной размерности, $\varphi\in C^\infty(M)$, $W=\varphi^{-1}(0)$, причем $d_w\varphi\neq 0$ при $w\in W$. Обозначим через $G_k^+(M)$ многообразие всех k-мерных ориентированных плоскостей, касательных к M (это локально тривиальное расслоение с базой M и слоем $G^+(k, \dim M-k)$), а через $G_k^+(W)$ — многообразие всех k-мерных ориентированных плоскостей, касательных к W. Нетрудно видеть, что $G_k^+(W)$ — подмногообразие коразмерности $(k+1)$ в $G_k^+(M)$. Ясно, что многообразия $G_k^+(M)$ и $G_k^+(W)$ ориентируемы. Для нас не имеет значения выбор ориентации на $G_k^+(M)$, но важно уметь однозначно определять ориентацию на $G_k^+(W)$ по заданной ориентации на $G_k^+(M)$; чтобы сделать это, мы зададим подмногообразие $G_k^+(W)$ в $G_k^+(M)$ с помощью набора уравнений. Пусть $\mu_1, \ldots, \mu_k$ — положительно ориентированный базис ориентированной плоскости $H \subset T_m M$, $H \in G_k^+(M)$. Плоскость H в том и только том случае лежит в $G_k^+(W)$, когда $\varphi(m) = \frac{\partial\varphi}{\partial\mu_1} = \ldots$ $\ldots = \frac{\partial\varphi}{\partial\mu_k} = 0$. Независимые функции $\varphi(m), \frac{\partial\varphi}{\partial\mu_1}, \ldots, \frac{\partial\varphi}{\partial\mu_k}$ (порядок существенен!) определяют ориентацию на $G_k^+(W)$ в соответствии с изложенным выше рецептом[1].

Рассмотрим гладкую гиперповерхность $\Pi_1 \setminus \Pi_2$ в многообразии $\mathscr{P}(\mathbf{R}^N) \setminus \Pi_2$,

$$\Pi_1 \setminus \Pi_2 = \{p \in \mathscr{P}(\mathbf{R}^N) \setminus \Pi_2 \mid \lambda_{\operatorname{ind} p+1}(p) = 0\}.$$

Используя обозначения п. 1.2, получаем, что $\nu_p = d_p \lambda_{\operatorname{ind} p+1}$, ориентация $G_k^+(\nu_p)$ многообразия $G_k^+(\Pi_1 \setminus \Pi_2)$ теперь автоматически определяется ориентацией многообразия

$$G_k^+(\mathscr{P}(\mathbf{R}^N) \setminus \Pi_2) = (\mathscr{P}(\mathbf{R}^N) \setminus \Pi_2) \times G^+\left(k, \frac{N(N+1)}{2} - k\right).$$

В п. 1.2 отмечалось, что ориентация $(-1)^{\operatorname{ind} p} C_k^+(\nu_p)$ продолжается до корректно определенной ориентации псевдомногообразия $G_k^+(\Pi_1)$, $G_k^+(\Pi_1) \subset \mathscr{P}(\mathbf{R}^N) \times \mathscr{L}^+(k, N)$ (обозначения п. 1.2).

Одноточечная компактификация $G_k^+(\Pi_1) \cup \{\infty\}$ псевдомногообразия $G_k^+(\Pi_1)$ с ориентацией $(-1)^{\operatorname{ind} p}\nu_p$ определяет целочисленный сингулярный цикл коразмерности $k+1$ в $\mathscr{P}(\mathbf{R}^N) \times \mathscr{L}^+(k, N) \cup \cup \{\infty\}$. Допуская некоторую вольность, мы будем обозначать этот цикл тем же символом $G_k^+(\Pi_1)$. Нетрудно видеть, что цикл $G_k^+(\Pi_1)$ гомологичен нулю в $\mathscr{P}(\mathbf{R}^N) \times \mathscr{L}^+(k, N) \cup \{\infty\}$. В самом деле, поскольку образ псевдомногообразия $G_k^+(\Pi_1)$ при проекции $\mathscr{P}(\mathbf{R}^N) \times \mathscr{L}^+(k, N) \to \mathscr{P}(\mathbf{R}^N)$ не совпадает с $\mathscr{P}(\mathbf{R}^N)$, то наш цикл можно гомотопией перевести в бесконечно удаленную точку ∞.

Напомним определение коэффициента зацепления. Пусть γ_1, γ_2 — гомологичные нулю циклы с непересекающимися носителями в одноточечной компактификации $U^n \cup \{\infty\}$ некоторого гладкого ориентированного многообразия U_n, причем $\dim \gamma_1 +$

---

[1] Строго говоря, функции $\frac{\partial\varphi}{\partial\mu_i}$ задана не на плоскостях, а на базисах, однако переходя, например, к ортогональным базисам в какой-нибудь римановой метрике, нетрудно убедиться, что все определено корректно.

$+\dim\gamma_2=n-1$, коэффициентом зацепления $l(\gamma_1, \gamma_2)$ называется индекс пересечения цепей Γ_1 и γ_2, где $\partial\Gamma_1=\gamma_1$; гомологичность нулю γ_2 обеспечивает независимость индекса пересечения от выбора Γ_1, кроме того, $l(\gamma_2, \gamma_1)=(-1)^{\dim\gamma_1\dim\gamma_2+n}l(\gamma_1, \gamma_2)$.

Теорема 2. Пусть $f: M^k\to\mathscr{P}(\mathbf{R}^N)$ — неособое отображение гладкого ориентированного многообразия M^k в $\mathscr{P}(\mathbf{R}^N)$. Пусть, кроме того, f — иммерсия (т. е. $\operatorname{rank} f'_m=k$ $\forall m\in M^k$) и Tf — сингулярный k-мерный цикл в $\mathscr{P}(\mathbf{R}^N)\times\mathscr{L}^+(k, N)$, определяемый отображением $m\mapsto(f(m), \operatorname{im} f'_m)$, где ориентация плоскости $\operatorname{im} f'_m$ определяется ориентацией пространства T_mM^k. Тогда цикл Tf гомологичен циклу $T(f+tI)$ и, если t достаточно велико, то

$$\chi(f)=(-1)^k l(T(f+tI)-Tf, G_k^+(\Pi_1)) \qquad (3)$$

Доказательство. Гомологичность циклов Tf и $T(f+tI)$ очевидна (t — параметр гомотопии). Кроме того, мы можем считать, что отображение f удовлетворяет условиям леммы 1.

Мы должны вычислить индекс пересечения ориентированной сингулярной цепи, определяемой отображением

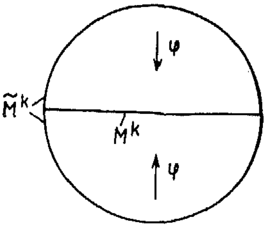
$$(\tau, m)\mapsto\left(f(m)+\tau I, \operatorname{im} f'_m\right)$$

с циклом $G_k^+(\Pi_1)$. Точка $f(m_0)+\tau_0 I, \operatorname{im} f'm_0)$ является точкой пересечения этих двух цепей, если для некоторого n имеем $\lambda_n(m_0)+\tau_0=0$, $\lambda'_n(m_0)=0$. Из наших условий вытекает, что рассматриваемые цепи пересекаются трансверсально; из определения ориентации цикла $G_k^+(\Pi_1)$ следует, что индекс пересечения в точке $(f(m_0)+\tau I, \operatorname{im} f'_m)$ равен произведению $(-1)^{n-1}$ на знак якобиана отображения $(\tau, m)\mapsto(\lambda_n(m)+\tau, \lambda'_n(m))$ в точке (τ_0, m_0). Учитывая условие $\lambda'_n(m_0)=0$, получаем, что этот индекс пересечения равен $(-1)^{n-1}\operatorname{sgn}\det\lambda''_n(m_0)=(-1)^{n-1+\operatorname{ind}\lambda''_n(m_0)}$. Утверждение теоремы вытекает теперь из (2).

Формула (3) имеет смысл только в том случае, когда отображение f — иммерсия, однако это условие не является существенным ограничением. Из классической теоремы Уитни вытекает, что при $2k\leqslant\frac{N(N+1)}{2}$ типичное отображение $f: M^k\to\mathscr{P}(\mathbf{R}^N)$ класса C^∞ является иммерсией.

Кроме геометрической наглядности формула (3) удобна тем, что ее правая часть «по определению» является инвариантом неособой гомотопии: иммерсия $f: M^k\to\mathscr{P}(\mathbf{R}^N)$ в том и только том случае неособа, когда цепи Tf и $G_k^+(\Pi_1)$ имеют непересекающиеся носители. Формула, аналогичная (3), имеется и тогда, когда M^k — ориентированное многобразие с краем; мы кратно опишем соответствующую конструкцию, опустив доказательства.

Итак, предположим, что M^k — многообразие с краем ∂M^k. Склеив по краю два экземпляра многообразия M^k, получим гладкое ориентируемое многообразие без края $\widetilde{M}_k$. Гладкая структура в $\widetilde{M}^k$ определяется при помощи трубчатой окрестности края в M^k (см. [5]). Эта же трубчатая окрестность позволяет определить гладкое отображение «складывания» $\varphi\colon \widetilde{M}^k \to M^k$, вырожденное на $\varphi^{-1}(\partial M^k)$.



Пусть $f\colon M^k \to \mathscr{P}(\mathbf{R}^N)$ — неособое отображение. Тогда отображение $f\circ\varphi\colon \widetilde{M}^k \to \mathscr{P}(\mathbf{R}^N)$ тоже неособо и справедливо равенство $\chi(f) = \frac{1}{2}(\chi(f\circ\varphi) + \chi(f \mid \partial M^k))$. Если $2k \leqslant \frac{N(N+1)}{2}$, то отображение $f\circ\varphi$ малым шевелением может быть превращено в иммерсию, и мы оказываемся в ситуации, когда применимо тождество (3).

§ 5. КОМПЛЕКСЫ ЭРМИТОВЫХ ФОРМ

1. Пусть $\mathbf{C}^N$ — N-мерное комплексное пространство, $\mathbf{C}^N \approx \mathbf{R}^{2N}$. Эрмитовой формой на $\mathbf{C}^N$ назовем произвольную симметричную билинейную форму $p \in \mathscr{P}(\mathbf{R}^{2N})$, сохраняющуюся при умножении аргументов на мнимую единицу: форма $p \in \mathscr{P}(\mathbf{R}^{2N})$ называется эрмитовой, если $p(iz, iw) = p(z, w)$, $\forall z,\ w \in \mathbf{C}^N$. Пространство всех эрмитовых форм на $\mathbf{C}^N$ обозначим $\mathscr{P}(\mathbf{C}^N)$, соответствующие квадратичные формы $z \mapsto p(z, z)$ также будем называть эрмитовыми (в более распространенной терминологии эрмитовыми называются симметричные полуторалинейные комплекснозначные формы; формы, эрмитовы в нашем смысле — это вещественные части полуторалинейных форм).

Форма $p \in \mathscr{P}(\mathbf{R}^{2N})$ является эрмитовой в том и только том случае, когда отвечающий ей симметричный оператор $P\colon \mathbf{R}^{2N} \to \mathbf{R}^{2N}$ коммутирует с умножением на i; иными словами, P — эрмитов оператор в $\mathbf{C}^N$, $P^{\mathsf{T}} = \overline{P}$. Следовательно, $\dim \mathscr{P}(\mathbf{C}^N) = N^2$; если $p \in \mathscr{P}(\mathbf{C}^N)$, то $\operatorname{ind} p$, $\dim \ker p$ — четные числа, причем эрмитовы формы с одинаковыми индексами и размерностями ядра переводятся друг в друга заменами координат из группы $\mathrm{GL}(\mathbf{C}^N)$.

Положим $\mathscr{P}_k(\mathbf{C}^N)=\mathscr{P}_k(\mathbf{R}^{2N})\cap\mathscr{P}(\mathbf{C}^N)$, $\Pi_k(\mathbf{C}^N)=\Pi_k(\mathbf{R}^{2N})\cap\cap\mathscr{P}(\mathbf{C}^N)$; ясно, что

$$\mathscr{P}_{2k+1}(\mathbf{C}^N)=\mathscr{P}_{2k}(\mathbf{C}^N),\quad \Pi_{2k-1}(\mathbf{C}^N)=\Pi_{2k}(\mathbf{C}^N).$$

Пусть $p_0\in\mathscr{P}(\mathbf{C}^N)$, $V=\ker p_0$. В таком случае V — комплексное подпространство в $\mathbf{C}^N$ и, как нетрудно видеть, отображение Φ, построенное в лемме 1.2, преобразует эрмитовы формы в эрмитовы. Следовательно, отображение Φ описывает локальную структуру гиперповерхности $\Pi_1(\mathbf{C}^N)$ в $\mathscr{P}(\mathbf{C}^N)$ вблизи точки $p_0\in\in\mathscr{P}(\mathbf{C}^N)$. В качестве следствия получаем, что $\Pi_{2k}(\mathbf{C}^N)\setminus\Pi_{2(k+1)}(\mathbf{C}^N)$ — аналитическое подмногообразие коразмерности k^2 в $\mathscr{P}(\mathbf{C}^N)$ для любого $k=1, 2, \ldots, N$.

Переходя к описанию пространства $\mathscr{P}(\mathbf{C}^N)^*$, двойственного к $\mathscr{P}(\mathbf{C}^N)$, подчеркнем, что функторы «$*$» и «$\odot$» мы рассматриваем только над полем вещественных чисел, при этом комплексная структура в пространстве $\mathbf{C}^{N*}$ определяется оператором, сопряженным к умножению на i в $\mathbf{C}^N$. Почти непосредственно из определения эрмитовых форм вытекает равенство

$$\mathscr{P}(\mathbf{C}^N)^*=\left\{\left(\sum_\alpha z_\alpha\odot u_\alpha\right)\in\mathbf{C}^N\odot\mathbf{C}^N\,\middle|\,\sum_\alpha iz_\alpha\odot iu_\alpha=\right.$$
$$\left.=\sum_\alpha z_\alpha\odot u_\alpha\right\}\subset\mathscr{P}(\mathbf{R}^{2N})^*.$$

Если векторы $e_1,\ldots,e_N$ образуют базис пространства $\mathbf{C}^N$, то векторы

$$e_\alpha\odot e_\beta+ie_\alpha\odot ie_\beta,\ 1\leqslant\alpha\leqslant\beta\leqslant N,\ \text{и}\ e_\alpha\odot ie_\beta-ie_\alpha\odot e_\beta,\ 1\leqslant\alpha<\beta\leqslant N,$$

образуют базис пространства $\mathscr{P}(\mathbf{C}^N)^*$. При отождествлении пространства $\mathscr{P}(\mathbf{R}^{2N})^*$ с $\mathscr{P}(\mathbf{R}^{2N*})$ (см. п. 1.2) подпространство $\mathscr{P}(\mathbf{C}^N)^*$ отождествляется с $\mathscr{P}(\mathbf{C}^{N*})$ — пространством эрмитовых форм на $\mathbf{C}^{N*}$. Поэтому, если $\eta\in\mathscr{P}(\mathbf{C}^N)^*=\mathscr{P}(\mathbf{C}^{N*})$, то $L(\eta)=\ker\eta^\perp$ — комплексное подпространство в $\mathbf{C}^N$; в частности, $\operatorname{rank}\eta$ — четное число.

Пусть $p\in\Pi_{2k}(\mathbf{C}^N)\setminus\Pi_{2(k+1)}(\mathbf{C}^N)$. Легко видеть, что элемент $\eta\in\in\mathscr{P}(\mathbf{C}^N)^*$ в том и только том случае является нормалью к $\Pi_k(\mathbf{C}^N)$ в точке p, когда $L(\eta)\subset\ker p$. При этом отождествление $\mathscr{P}(\mathbf{C}^N)^*=\mathscr{P}(\mathbf{C}^{N*})$ индуцирует изоморфизм пространства $T_p\Pi_{2k}(\mathbf{C}^N)^\perp\cap\mathscr{P}(\mathbf{C}^N)$ эрмитовых нормалей к $\Pi_{2k}(\mathbf{C}^N)$ в точке p с пространством $\mathscr{P}(\ker p^*)$ эрмитовых форм на $\ker p^*$.

Если $k=1$, $p\in\Pi_2(\mathbf{C}^N)\setminus\Pi_4(\mathbf{C}^N)$, то имеется единственная с точностью до вещественного множителя эрмитова нормаль $z\odot z+ +iz\odot iz$, $z\in\ker p$ к гиперповерхности $\Pi_1(\mathbf{C}^N)$ в точке p. Мы видим, что эрмитовыми нормалями к точкам гиперповерхности $\Pi_2(\mathbf{C}^N)\setminus\Pi_4(\mathbf{C}^N)$ могут быть только элементы ранга 2 в $\mathscr{P}(\mathbf{C}^N)^*= =\mathscr{P}(\mathbf{C}^{N*})$. Предположим теперь, что p — особая точка гиперповерхности $\Pi_2(\mathbf{C}^N)$, $\dim\ker p>2$. Эрмитовой нормалью к $\Pi_2(\mathbf{C}^N)$

в точке p назовем произвольный элемент ранга 2 из $\mathscr{P}(\ker p^*) \subset \mathscr{P}(\mathbf{C}^{N*})$. Эрмитова нормаль называется положительной, если соответствующая эрмитова форма на $\ker p^*$ положительно определена. Обозначим через $\mathscr{N}'_p(\mathbf{C})$ совокупность всех эрмитовых нормалей к $\Pi_2(\mathbf{C})$ в точке p, а через $\mathscr{N}'^+_p(\mathbf{C})$ — совокупность всех положительных эрмитовых нормалей. Как и в вещественной ситуации (см. п. 1.2) имеют место равенства:

$$\mathscr{N}'_p(\mathbf{C}) = \bigcap_{O_p \subset \Pi_1(\mathbf{C}^N)} \bigcup_{q \in O_p} \mathscr{N}'_q(\mathbf{C}); \quad \mathscr{N}'^+_p(\mathbf{C}) = \bigcap_{O_p \subset \Pi_1(\mathbf{C}^N)} \bigcup_{q \in O_p} \mathscr{N}'^+_q(\mathbf{C})$$

(пересечение берется по всем окрестностям точки p в $\Pi_1(\mathbf{C}^N)$).

2. Введем обозначение $\mathscr{P}_{\mathbf{C}}(N, k) = \mathscr{P}(\mathbf{C}^N)^k$ — пространство эрмитовых отображений из $\mathbf{C}^N$ в $\mathbf{R}^k$; ясно, что $\mathscr{P}_{\mathbf{C}}(N, k) \subset \mathscr{P}(2N, k)$.

Пусть K — выпуклый замкнутый конус в $\mathbf{R}^{k*}$, пучком эрмитовых форм на K называется произвольное линейное отображение из K в $\mathscr{P}(\mathbf{C}^N)$, пространство всех таких пучков обозначается $\mathscr{P}_{\mathbf{C}}(N; K)$.

Определение. Пучок $p^K \in \mathscr{P}_{\mathbf{C}}(N; K)$ называется особым в точке $\omega_0 \in K \setminus 0$, если $p^K(K)^\circ \cap \mathscr{N}^+_{\omega_0 p}(\mathbf{C}) \neq 0$. Пучок p^k называется неособым, если он не является особым ни в одной точке.

Нетрудно показать, что пучок $p^K \in \mathscr{P}_{\mathbf{C}}(N; K)$ — неособый в том и только том случае, когда соответствующее отображение $p \in \mathscr{P}_{\mathbf{C}}(N, k)$ трансверсально конусу K°. Вообще все результаты и определения из § 3, начиная с леммы 3.1 и кончая следствием леммы 3.9, очевидным образом переформулируются для эрмитового случая. Эрмитов аналог предложения 3.3. справедлив не только для нульмерных и одномерных, но также и для двумерных кусочногладких комплексов, поскольку $\Pi_2(\mathbf{C}^N)$ имеет коразмерность 4 в $\mathscr{P}(\mathbf{C}^N)$.

Каждой квадратичной форме $p \in \mathscr{P}(\mathbf{R}^N)$ можно каноническим образом сопоставить эрмитову форму $p_{\mathbf{C}} \in \mathscr{P}(\mathbf{C}^N)$, где $\mathbf{C}^N = \mathbf{C} \otimes \mathbf{R}^N$, положив $p_{\mathbf{C}}(i \otimes x, y) = 0$, $p_{\mathbf{C}}(x, y) = p(x, y)$, $\forall x, y \in \mathbf{R}^N$ (в этом случае $P_{\mathbf{C}} i \otimes x = i \otimes P_{\mathbf{C}} x$, $\forall x \in \mathbf{R}^N$). Произвольному комплексу квадратичных форм $f : \overline{\mathscr{K}} \to \mathscr{P}(\mathbf{R}^N)$ при этом соответствует комплекс $f_{\mathbf{C}} : \overline{\mathscr{K}} \to \mathscr{P}(\mathbf{C}^N)$ эрмитовых форм.

Нетрудно показать, что комплекс $f_{\mathbf{C}}$ трансверсален в том и только том случае, когда трансверсален комплекс f. Если комплекс $f_{\mathbf{C}}$ — неособый, то f также неособый, однако обратное неверно! Это хорошо видно на «модельном» примере, описанном в п. 3. 2. Пусть

$$\Omega = \{p \in \mathscr{P}(\mathbf{R}^2) \mid \operatorname{tr} p = 0, \ \operatorname{tr} p^2 = 1\} \text{ — диск в } \mathscr{P}(\mathbf{R}^2)$$

и $f : \Omega \to \mathscr{P}(\mathbf{R}^2)$ — тождественное отображение, $f(p) = p$, $\forall p \in \Omega$. Тривиальная проверка показывает, что f неособо, однако $f_{\mathbf{C}}$ особо в точке $0 \in \Omega$.

Таким образом, инварианты неособой гомотопии комплекса эрмитовых форм $f_{\mathbf{C}}$ не являются, вообще говоря, инвариантами неособой гомотопии комплекса f.

Определение. Пусть $g:\overline{\mathscr{K}}\to\mathscr{P}(\mathbf{C}^N)$ — неособый комплекс эрмитовых форм. Положим

$$\chi_{\mathbf{C}}(g)=\sum_{n=0}^{N}\chi(\overline{\mathscr{K}})g^{-1}(\mathscr{P}_{2k}(\mathbf{C}^N)).$$

Можно показать, что $\chi_{\mathbf{C}}(g)$ не меняется при неособой гомотопии комплексов эрмитовых форм. В случае пучков это вытекает из эрмитова аналога теоремы 4. 1, который мы сейчас сформулируем.

Пусть S^{2N-1} — единичная сфера в $\mathbf{C}^N$ и $\mathbf{CP}^{N-1}=S^{2N-1}/(z\sim e^{i\theta}z,\ \theta\in\mathbf{R})$ — комплексное проективное пространство. Если $p\in\mathscr{P}_{\mathbf{C}}(N,k)$, то $p(e^{i\theta}z,\ e^{i\theta}z)=p(z,\ z)$. Обозначим через $\bar{p}:\mathbf{CP}^{N-1}\to\mathbf{R}^k$ отображение, индуцированное квадратичным отображением $z\mapsto p(z,\ z)$, $z\in S^{2N-1}$.

Теорема 1. Пусть $p\in\mathscr{P}_{\mathbf{C}}(N,\ k)$ — эрмитово квадратичное отображение из $\mathbf{C}^N$ в $\mathbf{R}^k$, K — выпуклый замкнутый конус в $\mathbf{R}^{k*}$, причем пучок $p^K:K\to\mathscr{P}(\mathbf{C}^N)$ трансверсален. Положим $K_n=(p^K)^{-1}(\mathscr{P}^{\circ}(\mathbf{C}))\cap S^{k-1}$. Тогда

$$\chi(\bar{p}^{-1}(K^{\circ}))=\sum_{n=0}^{N}\chi(K_{2N}/K_{2N})+\varepsilon\chi(\mathbf{CR}^{N-1})=\chi(p^K\,|\,K_{2N})+\varepsilon N \quad \text{(I)}$$

где

$$\varepsilon=\begin{cases}(-1)^{\dim k^K}, & K=-K,\\ 0, & K\neq -K.\end{cases}$$

Доказательство. Предположим, что K — полупрямая, $K=\{\alpha\omega_0\,|\,\alpha\geqslant 0\}$. Тогда $\bar{p}^{-1}(K^{\circ})=\{z\in\mathbf{C}^N\,|\,\omega_0 p(z,\ z)\leqslant 0\}$, множество $\bar{p}^{-1}(K^{\circ})$ имеет гомотопический тип пространства $\mathbf{CP}^{\operatorname{ind}\omega_0 p/2-1}$, следовательно, $\chi(\bar{p}^{-1}(K^{\circ}))=\frac{1}{2}\operatorname{ind}\omega_0 p$, и в этом случае равенство (I) справедливо. Дальнейший ход доказательства совпадает с доказательством теоремы 4.1.

В п. 4.2 рассматривались комплексы квадратичных форм, заданные на гладком многообразии и было получено представление эйлеровой характеристики такого комплекса в виде коэффициента зацепления двух циклов (теорема 4.2). Естественно, аналогичное представление имеется и для комплексов эрмитовых форм. Мы предоставляем читателю сделать необходимые для его вывода изменения в рассуждениях п. 4.2.

Замечание. Рассмотрим N-мерное пространство над телом кватернионов $\mathbf{H}^N\approx\mathbf{C}^{2N}\approx\mathbf{R}^{4N}$. Положим

$$\mathscr{P}(\mathbf{H}^N)=\left\{p\in\mathscr{P}(\mathbf{R}^{4N})\,|\,\begin{matrix}p(ix,\ iy)=p(jx,\ jy)=p(x,\ y)\\ \forall x,\ y\in\mathbf{H}^N\approx\mathbf{R}^{4N}\end{matrix}\right\}\subset\mathscr{P}(\mathbf{C}^{2N}).$$

Все понятия и результаты, относящиеся к пучкам и комплексам эрмитовых форм, включая теорему 1, имеют очевидные аналоги для пучков и комплексов, принимающих значения в $\mathscr{P}(\mathbf{H}^N)$.

§ 6. Критические множества гладких векторных функций

В этом параграфе вводятся вектор-функции Морса — прямое обобщение скалярных функций Морса (т. е. функций с невырожденными критическими точками). Несколько простых соотношений демонстрируют своеобразную двойственность между множествами уровня вектор-функции и ее критическими точками. Каждой критической точке соответствует квадратичная форма — гессиан, и мы приходим к важному примеру нелинейного комплекса квадратичных форм.

1. Пусть M — гладкое ориентируемое компактное n-мерное многообразие и $f: M \to \mathbf{R}^k$ — гладкое отображение, т. е. $f \in C^k_\infty(M)$. Рассмотрим множество

$$C_f = \{(\psi, x) \in \mathbf{R}^{k*} \times M \mid d_x(\psi f) = 0, \ |\psi| = 1\} \subset S^{k-1} \times M$$

и назовем C_f критическим множеством вектор-функции f.

Определение. Пусть $f \in C^k_\infty(M)$. Назовем f вектор-функцией Морса, если отображение $(\psi, x) \mapsto d_x(\psi f)$ из $S^{k-1} \times M$ в T^*M трансверсально нулевому сечению в T^*M.

Предложение 1. Вектор-функции Морса образуют открытое всюду плотное подмножество в $C^k_\infty(M)$. Это предложение — прямое следствие теоремы трансверсальности Тома.

Если f — вектор-функция Морса, то критическое множество C_f является, очевидно, гладким ориентируемым $(k-1)$-мерным многообразием.

Скалярную функцию $a \in C_\infty(M)$ обычно называют функцией Морса, если гессиан a в каждой критической точке — невырожденная квадратичная форма. Нетрудно показать, что это определение эквивалентно нашему. Более того, справедлива

Лемма 1. Отображение $f \in C^k_\infty(M)$ в том и только том случае является вектор-функцией Морса, когда $\forall (\psi, x) \in C_f$ выполняется соотношение

$$\ker \operatorname{ges}_x(\psi f) \cap \ker D_x f = 0.$$

Доказательство состоит в расшифровке условия трансверсальности, составляющего определение вектор-функции Морса.

Для произвольной вектор-функции Морса $f \in C^k_\infty(M)$ будем обозначать через $f_c: C_f \to \mathbf{R}^k$ отображение $(\psi, x) \mapsto f(x)$, а через $\psi_c: C_f \to S^{k-1}$ отображение $(\psi, x) \mapsto \psi^{\mathsf{T}}$, $(\psi, x) \in C_f$.

Начиная с этого места везде ниже предполагается, что $n \geqslant k$. Пусть $x \in M$, обозначим $f'(x) = D_x f : T_x M \to \mathbf{R}^k$. Точка (ψ, x) в том и только том случае лежит в C_f, когда ранг линейного отображения $f'(x)$ меньше, чем k, и $\psi \in (\operatorname{im} f'(x))^{\perp}$.

Итак, в точках критического множества ранг отображения $f'(x)$ не превосходит $(k-1)$. Оказывается, в типичной ситуации подмножество в C_f, состоящее из таких точек (ψ, x), что $\operatorname{rank} f'(x) \leqslant k-2$ имеет коразмерность равную $(n-k)+2 \geqslant 2$.

Предложение 2. Для любого f из некоторого открытого всюду плотного в $C_\infty{}^k(M)$ подмножества совокупность таких точек $(\psi, x) \in C_f$, что $\operatorname{rank} f'(x) \leqslant k-2$ представляется в виде объединения конечного числа подмногообразий коразмерности не меньшей $n-k+2$ в C_f.

Доказательство. Отображение $x \mapsto f'(x)$ является сечением векторного расслоения $T^*M \otimes \mathbf{R}^k$ над M. Слой этого расслоения состоит из матриц размера $n \times k$.

Как известно, матрицы ранга $r \leqslant k$ образуют гладкое подмногообразие коразмерности $(n-r)(k-r)$ в пространстве матриц. Если для данного $x \in M$ матрица $f'(x)$ имеет ранг r, то множество $\{\psi \in S^{k-1} \mid (\psi, x) \in C_f\}$ представляет собой $(k-r-1)$-мерную сферу. Остается применить теорему трансверсальности к семейству отображений $x \mapsto f'(x)$, $f \in C_\infty{}^k(M)$ и подсчитать число параметров.

Замечание. В дальнейшем нам будут неоднократно встречаться свойства гладких отображений, имеющие место для произвольной f из некоторого открытого всюду плотного $C_\infty{}^k(M)$ подмножества. В этих случаях мы будем говорить, что типичное отображение $f \in C_\infty{}^k(M)$ обладает соответствующим свойством.

Пусть $x \in M$ и $\operatorname{rank} f'(x) < k$, тогда определен $\operatorname{ges}_x f : \ker f'(x) \times \times \ker f'(x) \to \operatorname{coker} f'(x)$ — симметричное билинейное отображение; при этом $\forall \psi \in (\operatorname{im} f'(x))^{\perp}$ справедливо равенство $\psi \operatorname{ges}_x f = = \operatorname{ges}_x \psi f|_{\ker f'(x) \times \ker f'(x)}$. Для квадратичного отображения $\xi \mapsto \operatorname{ges}_x f(\xi, \xi)$, $\xi \in \ker f'(x)$, мы будем использовать обозначение $f''(x)$.

Лемма 2. Пусть $f \in C_\infty{}^k(M)$ — вектор-функция Морса и $(\psi, x) \in C_f$. Отображение $f_c : C_f \to \mathbf{R}^k$ является иммерсией в точке (ψ, x) в том и только том случае, когда $\operatorname{rank} f'(x) = k-1$ и $\operatorname{ges}_x f$ — неособая билинейная форма. Отображение $\varphi_c : (\psi, x) \mapsto \mapsto \psi^{\mathrm{T}}$ из C_f в S^{k-1} является иммерсией (и субмерсией) в точке (ψ, x) в том и только том случае, когда $\operatorname{ges}_x \psi f$ — неособая билинейная форма.

Доказательство — прямое вычисление.

Критическое множество C_f вектор-функции Морса является ориентируемым многообразием. Вообще говоря, это несвязное многообразие и ориентация на нем может быть задана многими способами.

Между тем имеется одна выделенная ориентация, которую мы назовем канонической. Строится она следующим образом.

Пусть $\Phi : (\psi, x) \mapsto \psi f'(x)$ — гладкое отображение из $S^{k-1} \times M$

в T^*M, тогда C_f — полный прообраз нулевого сечения кокасательного расслоения $T^*M \xrightarrow{\pi} M$ при отображении Φ. Зафиксируем точку $(\psi, x) \in C_f$, и пусть $u_1, \ldots, u_{k-1}$ — некоторый базис пространства $T_{(\psi,x)}C_f$, векторы $v_1, \ldots, v_n$ дополняют этот базис до базиса пространства $T_{(\psi,x)}S^{k-1} \times M \supset T_{(\psi,x)}C_f$, а $w_1, \ldots, w_{k-1}$ — положительно ориентированный базис пространства $T_\psi S^{k-1} \subset \subset T_{(\psi,x)}S^{k-1} \times M = T_\psi S^{k-1} \oplus T_x M$.

Мы говорим, что базис $(u_1, \ldots, u_{k-1})$ определяет положительную ориентацию на $T_{(\psi,x)}C_f$, если базисы $(u_1, \ldots, u_{k-1}, v_1, \ldots, v_n)$ и $(w_1, \ldots, w_{k-1}, (\mathrm{id} - \pi_* \Phi_*) v_1, \ldots, (\mathrm{id} - \pi_* \Phi_*) v_r)$ определяют одинаковую ориентацию на $T_{(\psi,x)}S^{k-1} \times M = T_\psi S^{k-1} \oplus T_x M$.

Легко видеть, что описанная конструкция корректно определяет каноническую ориентацию на C_f. Канонически ориентированное критическое множество C_f мы будем в дальнейшем называть критическим многообразием вектор-функции Морса f.

Если (ψ, x) — точка инъективности отображения f_c (т. е. $\mathrm{rank}\,(D_{(\psi,x)} f_c) = k-1$), то каноническая ориентация на $T_{(\psi,x)} f_c$ может быть описана более явно. Пусть ν_ψ — такая $(k-1)$-форма на $\mathbf{R}^k$, что k-форма $\psi \wedge \nu_\psi$ задает положительную ориентацию на $\mathbf{R}^k$. Тогда форма $\nu_\psi \mid \mathrm{im}\, f'(x)$ задает некоторую ориентацию на подпространстве $\mathrm{im}\, f'(x) = \{\psi\}^\perp \subset \mathbf{R}^k$, а форма $f_c^* \nu_\psi$ — ориентацию на $T_{(\psi,x)} C_f$.

Лемма 3. Пусть $(\psi, x) \in C_f$ — точка инъективности отображения f_c, тогда форма $(-1)^{\mathrm{ind}\, \psi f''(x) + k - 1} f_c^* \nu_\psi$ задает каноническую ориентацию на $T_{(\psi,x)} C_f$.

Доказательство — снова прямое вычисление, однако более запутанное, чем предыдущие, и мы его приведем. Если в пространствах $T_x M$ и $T_\psi S^{k-1} = \{\psi\}^\perp \subset \mathbf{R}^k$ фиксировать базисы, то линейное отображение $f'(x) : T_x M \to \{\psi\}^\perp$ представится в виде $(k-1) \times n$ матрицы, а билинейная форма $\mathrm{ges}_x \psi f$ — в виде симметричной $n \times n$-матрицы. Выберем базисы $\{u_1, \ldots, u_{k-1}\} \subset \{\psi\}^\perp$ и $\{u_1, \ldots, u_{k-1}, v_1, \ldots, v_{n-k+1}\} \subset T_x M$ таким образом, что

1) $f'(x) u_i = w_i, \quad i = 1, \ldots, k-1$;

2) $\mathrm{ges}_x \psi f(u_i, \ker f'(x)) = 0, \quad i = 1, \ldots, k-1$;

3) $v_j \in \ker f'(x), \quad j = 1, \ldots, n-k+1$;

4) $\langle \nu_\psi, w_1 \wedge \ldots \wedge w_{k-1} \rangle > 0$.

В этом базисе наши матрицы имеют следующий вид: $f'(x) = (E, 0)$, где E — единичная $(k-1) \times (k-1)$-матрица;

$$\mathrm{ges}_x \psi f = \begin{pmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_0 \end{pmatrix},$$

где $Q_0 = \mathrm{ges}_x \psi f \mid_{\ker f'(x)} = \psi\, \mathrm{ges}_x f$ — симметричная $(n-k+1) \times \times (n-k+1)$-матрица. При этом векторы $(-Q_1 w_i) \oplus u_i \in \{\psi^\perp\} \oplus \oplus T_x M = T_{(\psi,x)}(S^{k-1} \times M)$ образуют базис пространства $T_{(\psi,x)} C_f$, $i = 1, \ldots, k-1$. Поскольку $f'(x) u_i = w_i$, то базис $(-Q_1 w_1) \oplus$

$\oplus u_1, \ldots, (-Q_1 u_{k-1}) \oplus u_{k-1}$ задает ту же ориентацию на $T_{(\psi,x)}C_f$, что и $f^*\nu_\psi$. Чтобы выяснить, какой эта ориентация имеет знак по отношению к канонической, нужно к $(n+k-1)\times(k-1)$-матрице

$$\begin{pmatrix} -Q_1 \\ E \\ 0 \end{pmatrix},$$

составленной из элементов нашего базиса пространства $T_{(\psi,x)}C_f$, приписать $(n+k-1)\times n$ матрицу

$$\begin{pmatrix} f'(x) \\ \mathrm{ges}_x \psi f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E, & 0 \\ Q_1, & 0 \\ 0, & Q_0 \end{pmatrix}$$

и найти знак соответствующего определителя. Имеем

$$\det Q_0 (-1)^{k-1} \det \begin{pmatrix} E, & -Q_1 \\ Q_1, & E \end{pmatrix} = (-1)^{k-1} \det Q_0 \det (Q_1{}^2 + E).$$

Поскольку $\det(Q_1^2+E)>0$, ориентация на $T_{(\psi,x)}C_f$, определяемая базисом $(-Q_1 w_i)\oplus u_i$, $i=1,\ldots, k-1$, имеет по отношению к канонической знак $(-1)^{k-1} \operatorname{sgn} \det Q_0 = (-1)^{k-1+\operatorname{ind} Q_0}$.

Замечание. Если (ψ, x) — точка инъективности отображения $\varphi_c : (\psi, x) \mapsto \psi^{\mathrm{T}}$ из C_f в S^{k-1}, то форма $(-1)^{\operatorname{ind} \mathrm{ges}_x \psi f} \varphi_c^* \nu_\psi$ задает каноническую ориентацию на $T_{(\psi,x)}C_f$; мы не будем приводить соответствующее вычисление.

Мы переходим к формулировке теоремы, которая является прямым многомерным обобщением следующего тривиального факта, верного для гладких функций одного вещественного аргумента, имеющих лишь простые нули: если в двух соседних нулях своей производной функция принимает значения разного знака, то между этими нулями производной имеется единственный нуль самой функции, а если — одинакового знака, то между ними нет ни одного нуля самой функции.

Пусть $g : N \to \mathbb{R}^k$ — непрерывное отображение некоторого ориентированного $(k-1)$-мерного многообразия N в $\mathbb{R}^k$ и $a \in \mathbb{R}^k \setminus \operatorname{im} g$. Напомним, что степенью отображения g относительно a (обозначение $\deg_a f$) называется степень отображения $y \mapsto \dfrac{g(y)-a}{|g(y)-a|}$ из N в S^{k-1}.

Символом $\chi(N)$, как обычно, обозначается эйлерова характеристика многообразия N.

Теорема 1. Пусть $f \in C^k_\infty(M)$ — вектор-функция Морса, тогда $\chi(M) = \deg \varphi_c$. Если вектор $a \in \mathbb{R}^k$ не является критическим значением отображения f, то

$$\chi(f^{-1}(x)) = (-1)^k \deg_a f_c.$$

Доказательство. Без ограничения общности, можем считать, что $a=0$.

Лемма 4. Для типичной вектор-функции Морса $f \in C_\infty^h(M)$ скалярная функция $|f_c|^2$ на C_f есть функция Морса, причем все ее критические точки являются точками инъективности отображения f_c.

Доказательство. Точка $(\psi, x) \in C_f$ является критической для функции $|f_c|^2$ в том и только том случае, когда $(\ker f')^{\perp}_{\mathrm{ges}_x \psi f} \subset \ker f^{\mathrm{T}} f'$. Если (ψ, x) — точка инъективности отображения f_c (см. лемму 2), то это условие эквивалентно равенству $f^{\mathrm{T}} f' = 0$. Гессиан функции $\frac{1}{2}|f_c|^2$ сводится к квадратичной форме $u \mapsto (f'u)^{\mathrm{T}} f'u + f^{\mathrm{T}} f''(x) \times (u, u)$, $\forall u \in (\ker f')^{\perp}_{\mathrm{ges}_x \psi f}$. Таким образом, условия вырожденности или «неинъективности» критической точки функции $|f_c|^2$ записываются в виде уравнений на 2-струю вектор-функции f. Поэтому доказательство леммы 4 сводится к подсчету параметров и применению теоремы трансверсальности Тома.

Не ограничивая общности, мы можем считать, что отображение f удовлетворяет условиям леммы 4. В частности, критические точки функций $|f_c|^2$ и $|f|^2$ совпадают.

Лемма 5. Предположим, что точка инъективности (ψ, x) отображения f_c является критической точкой функции $|f|^2$, $|f(x)|\psi^{\mathrm{T}} = f(x)$. Тогда

$$\operatorname{ind} \mathrm{ges}_x |f|^2 = \operatorname{ind} (f^{\mathrm{T}} \mathrm{ges}_x f) + \operatorname{ind} \mathrm{ges}_{(\psi, x)} |f_c|^2.$$

Доказательство. Если $f(x) = 0$, то и правая, и левая части доказываемого равенства обращаются в нуль. Предположим, что $f(x) \neq 0$. Тогда $\frac{1}{2} \mathrm{ges}_x |f|^2 = f'(x)^{\mathrm{T}} f'(x) + \mathrm{ges}_x \psi f$. Следовательно,

$$\frac{1}{2} \mathrm{ges}_x |f|^2 |_{\ker f'(x)} = \mathrm{ges}_x \psi f |_{\ker f'(x)} = \psi \, \mathrm{ges}_x f.$$

Условие инъективности влечет невырожденность билинейной формы $f^{\mathrm{T}} \mathrm{ges}_x f$ (см. лемму 2). Стало быть, $\ker f' \times \cap$ $\cap (\ker f' \times)^{\perp}_{\mathrm{ges}_x |f|^2} = 0$, поэтому

$$\operatorname{ind} \mathrm{ges}_x |f|^2 = \operatorname{ind} f^{\mathrm{T}} \mathrm{ges}_x f + \operatorname{ind} \left(\mathrm{ges}_x f| |^2 | (\ker f'(x))^{\perp}_{\mathrm{ges}_x |f|^2} \right).$$

Остается заметить, что $(\ker f'(x))^{\perp}_{\mathrm{ges}_x |f|^2} = (\ker f'(x))^{\perp}_{\mathrm{ges}_x \psi f}$ и $\mathrm{ges}_{x(\psi, x)} |f_c|^2 = \mathrm{ges}_x |f|^2 | (\ker f'(x))^{\perp}_{\mathrm{ges}_x \psi f}$ (см. доказательство леммы 4).

При выполнении условий леммы 4 все критические точки функции $|f|^2$, лежащие в $M \setminus f^{-1}(0)$, невырождены. Пусть $x_1, \ldots, x_m$ — все такие точки. Поскольку $|f|^2 \geqslant 0$, теория Морса в применении к функции $|f|^2$ дает равенство

$$\chi(M) = \sum_{\alpha=1}^{m} (-1)^{\operatorname{ind} \mathrm{ges}_{x_\alpha} |f|^2} + \chi(f^{-1}(0)). \tag{1}$$

Пусть N — некоторое гладкое ориентированное d-мерное многообразие и $g_i : N \to S^d$ — гладкие отображения, $i=1, 2$. Обозначим $\Gamma(g_i) = \{(y, g_i(y)) \in N \times S^d \mid y \in N\}$ — график отображения g_i, $i=1, 2$, и через $\Gamma(g_1) \cdot \Gamma(g_2)$ — индекс пересечения m-мерных ориентированных подмногообразий $\Gamma(g_1)$ и $\Gamma(g_2)$ в $N \times S^m$. Справедлива формула

$$\Gamma(g_1) \cdot \Gamma(g_2) = \deg g_2 + (-1)^d \deg g_1.$$

В частности,

$$\Gamma\left(\frac{f_c}{|f_c|}\right) \cdot \Gamma(\varphi_c) = \deg \varphi_c + (-1)^{k-1} \deg f_c. \tag{2}$$

В то же время, $\Gamma\left(\frac{f_c}{|f_c|}\right)$ и $\Gamma(\varphi_c)$ пересекаются в точках $\left(\left(\frac{f^{\mathrm{T}}(x_\alpha)}{|f(x_\alpha)|}, x_\alpha\right), \frac{f(x_\alpha)}{|f(x_\alpha)|}\right)$, $\alpha = 1, \ldots, m$, и в никаких других.

Положим $\psi_\alpha = \frac{f^{\mathrm{T}}(x_\alpha)}{|f(x_\alpha)|}$; индекс пересечения в точке $((\psi_\alpha, x_\alpha), \psi_\alpha^{\mathrm{T}})$ равен $(+1)$, если линейное отображение $D_{x_\alpha}\varphi_c - D_{x_\alpha}\frac{f_c}{|f_c|} = D_{x_\alpha}\varphi_c - \frac{1}{|f_c|} D_{x_\alpha} f_c$ переводит каноническую ориентацию пространства $T_{(\psi_\alpha, x_\alpha)}C_f$ в положительную ориентацию пространства $T_{\psi_\alpha^{\mathrm{T}}}S'^{k-1}$, и (-1) в противном случае.

Пусть $(\xi_1, u_1), \ldots, (\xi_{k-1}, u_{k-1})$ — канонически ориентированный базис в $T_{(\psi_\alpha, x_\alpha)}C_f$, причем $u_1, \ldots, u_{k-1}$ — линейно независимы. Искомый индекс пересечения совпадает с величиной

$$\operatorname{sgn}\det\left(\psi_\alpha^{\mathrm{T}}, \xi_1^{\mathrm{T}} - \frac{1}{|f(x_\alpha)|} f'(x_\alpha) u_1, \ldots, \xi_{k-1}^{\mathrm{T}} - \frac{1}{|f(x_\alpha)|} f'(x_\alpha) u_{k-1}\right) =$$
$$= \operatorname{sgn}\det(\psi_\alpha^{\mathrm{T}}, |f(x_\alpha)|\xi_1^{\mathrm{T}} - f'(x_\alpha) u_1, \ldots, |f(x_\alpha)|\xi_{k-1}^{\mathrm{T}} - f'(x_\alpha) u_{k-1}) = \operatorname{sgn}\det(A+B),$$

где

$$A = (\psi_\alpha^{\mathrm{T}}, -f'(x_\alpha) u_1, \ldots -f'(x_\alpha) u_{k-1}),$$
$$B = (0, |f(x_\alpha)|\xi_1^{\mathrm{T}}, \ldots, |f(x_\alpha)|\xi_{k-1}^{\mathrm{T}}).$$

Из леммы 3 вытекает, что $\operatorname{sgn}\det A = (-1)^{\operatorname{ind}\psi_\alpha f''(x_\alpha)}$. Следовательно,

$$\operatorname{sgn}\det(A+B) = (-1)^{\operatorname{ind}\psi_\alpha f''(x_\alpha)} \operatorname{sgn}\det(A^{\mathrm{T}}(A+B)) =$$
$$= \operatorname{sgn}\det(\{(f'(x_\alpha) u_i)^{\mathrm{T}} f'(x_\alpha) u_j - |f(x_\alpha)|\xi_j f'(x_\alpha) u_i\}_{i,j=1}^{k-1}(-1)^{\operatorname{ind}\psi_\alpha f''(x_\alpha)}.$$

(мы учли равенства $\psi_\alpha \xi_i^{\mathrm{T}} = \psi f'(x_\alpha) u_i = 0$, $i = 1, \ldots, k-1$.

Дифференцируя тождество $\psi f'(x)=0 \ \forall(\psi, x)\in C_f$ в точке (ψ_α, x_α), получаем

$$\xi_j f'(x_\alpha) u_i + \psi_\alpha f''(x_\alpha)(u_i, u_j)=0.$$

Таким образом,

$$\operatorname{sgn}\det(A+B)=$$

$$=(-1)^{\operatorname{Ind}\psi_\alpha f''(x_\alpha)} \operatorname{sgn}\det(\{(f'(x_\alpha)u_i)^\top f'(x_\alpha)u_j + f''(x_\alpha)(u_i, u_j)\}_{i,j=1}^{k-1}).$$

Поскольку

$$(f'(x_\alpha)u_i)^\top f'(x_\alpha)u_j + f(x_\alpha)^\top f''(x_\alpha)(u_i, u_j)=\frac{1}{2}\operatorname{ges}_{(\psi_\alpha, x_\alpha)}|f_c|^2,$$

то, с учетом леммы 5,

$$\operatorname{sgn}\det(A+B)=(-1)^{\operatorname{Indges}_{x_\alpha}|f_c|^2+\operatorname{Ind}\psi_\alpha f''(x_\alpha)}=(-1)^{\operatorname{Indges}_{x_\alpha}|f|^2}.$$

Окончательно,

$$\Gamma\left(\frac{f_c}{|f_c|}\right)\cdot\Gamma(\varphi_c)=\sum_{\alpha=1}^{m}(-1)^{\operatorname{Indges}_{x_\alpha}|f|^2}.$$

Из соотношений (1), (2) вытекает равенство

$$\chi(M)-\deg\varphi_c=\chi(f^{-1}(0))-\deg f_c(-1)^k.$$

Пусть $a\in\mathbf{R}^k$, причем a не является критическим значением отображения f. Заменив f на $f-a$, получим

$$\chi(M)-\deg\varphi_c=\chi(f^{-1}(a))-\deg_a f_c(-1)^k. \qquad (3)$$

Если $|a|$ достаточно велика, то $f^{-1}(a)=\varnothing$. В то же время, левая часть равенства (3) не зависит от a, следовательно, и правая, и левая части этого равенства равны нулю. Теорема доказана.

Следствие 1. Пусть $f\in C_\infty^k(M)$ — вектор-функция Морса, причем $0\in\mathbf{R}^k$ не является критическим значением f. Пусть, далее, $a_0\in\mathbf{R}^k\setminus 0$ таково, что отображение f_c трансверсально лучу $\{\tau a_0 \mid \tau>0\}$ и $f_c^{-1}(\{\tau a_0\mid\tau>0\})=\{(\pm\psi_1, x_1), \ldots, (\pm\psi_m, x_m)\}\subset C_f$, где $\psi_i f(x_i)>0$, $i=1, \ldots, m$. Тогда

$$\chi(f^{-1}(0))=((-1)^{n-k+1}-1)\sum_{i=1}^{m}(-1)^{\operatorname{Ind}\psi_i f''(x_i)}.$$

Доказательство. Условие трансверсальности обеспечивает регулярность отображения $\frac{f_c}{|f_c|}$ в точках $(\pm\psi_i, x_i)$, $i=1, \ldots, m$. Из теоремы 1 следует, что $\chi(f^{-1}(0))=$ $=\sum_{i=1}^{m}(-1)^{k+l_i}+(-1)^{k+\lambda_i}$, где целое число $l_i(\lambda_i)$ является четным или нечетным в зависимости от того, переводит ли отображение

$$D_{(\psi_i, x_i)}\frac{f_c}{|f_i|}: T_{(\psi_i, x_i)}C_f \to T_{\frac{f(x_i)}{|f(x_i)|}} S^{k-1} \quad \left(\text{отображение } D_{(-\psi_i, x_i)}\frac{f_c}{|f_c|}\right)$$

каноническую ориентацию пространства $T_{(\psi_i, x_i)}C_f$ в положительную или отрицательную ориентацию пространства $T_{\frac{f(x_i)}{|f(x_i)|}} S^{k-1}$. Знаки этих ориентаций легко подсчитываются с помощью леммы 3.

Следствие 2. Пусть снова $f=(f_1, \ldots, f_k)^T \in C^k_\infty(M)$ — вектор-функция Морса и $0 \in \mathbf{R}^k$ не является критическим значением. Тогда

$$\chi(f^{-1}(0)) = \int_{C_f} \frac{1}{k\sigma_k |f|^k} \sum_{i=1}^{k} (-1)^{k-i+1} f_i df_1 \wedge \ldots \widehat{df_i} \ldots \wedge df_k$$

$$\chi(M) = \int_{C_f} \frac{1}{k\sigma_k} \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} d\psi_1 \wedge \ldots \widehat{d\psi_i} \ldots \wedge d\psi_k,$$

где σ_k — объем единичного k-мерного шара, а знак $\wedge$ показывает, что соответствующий сомножитель опущен.

Отображение $(\psi, x) \mapsto x$ ориентированного многообразия C_f в M определяет в M целочисленный сингулярный цикл. Мы будем обозначать этот цикл $\bar{C}_f$ и называть его критическим циклом вектор-функции Морса f. С другой стороны, выбор некоторой ориентации на M автоматически определяет ориентацию подмногообразия $f^{-1}(0) \subset M$ и превращает это подмногообразие в целочисленный цикл в M. При этом

$$\dim \bar{C}_f = k-1, \dim f^{-1}(0) = n-k,$$
$$\dim M = n = \dim \bar{C}_f + \dim f^{-1}(0) + 1.$$

Пусть γ_1, γ_2 — два цикла в M с непересекающимися носителями, $\dim \gamma_1 + \dim \gamma_2 + 1 = \dim M$. Если γ_1 и γ гомологичны нулю, то корректно определен коэффициент зацепления $l(\gamma_1, \gamma_2)$: если $\gamma_1 = \partial \Gamma_1$, то $l(\gamma_1, \gamma_2) = \Gamma_1 \cdot \gamma_2$ — индекс пересечения цепей Γ_1 и γ_2 (гомологичность нулю γ_2 обеспечивает независимость этого индекса от выбора Γ_1). Оказывается, все это действует в нашей ситуации.

Предложение 3. Критический цикл $\bar{C}_f$ вектор-функции Морса $f \in C^k_\infty(M)$ и цикл $f^{-1}(0)$ гомологичны нулю в M; для коэффициента зацепления этих циклов справедлива формула

$$l(f^{-1}(0), \bar{C}_f) = -\deg f_c = (-1)^{k-1}\chi(f^{-1}(0)). \quad (4)$$

Доказательство. Подберем $f_0 \in C_\infty(M)$ таким образом, чтобы вектор-функция $g=\binom{f_0}{f} \in C_\infty^{k+1}(M)$ была вектор-функцией Морса. Критическое многообразие

$$C_g=\{(\psi_0, \psi, x) \mid \psi_0 f_0(x)+\psi f(x)=0, \ \psi_0^2+|\psi|^2=1, \ x \in M\} \subset S^k \times M.$$

Рассмотрим в C_g подмногообразие с краем $C_g^-=\{(\psi_0, \psi, x) \in C_g \mid \psi_0 \leqslant 0\}$. Ясно, что край $\partial C_g^-=\{(\psi_0, \psi, x) \in C_g \mid \psi_0=0\}=C_f$. Гладкое отображение $(\psi_0, \psi, x) \mapsto x$ из C_g^- в M будучи суженным на край ∂C_g^-, реализует цикл $\overline{C}_f$, следовательно, $\overline{C}_f$ гомологичен нулю в M.

Далее, предположим, что отображение f трансверсально лучу $\{\tau a_0 \mid \tau > 0\}$, где $a_0 \in \mathbb{R}^k \setminus 0$ (в силу теоремы Сарда такой луч всегда существует). Тогда $f^{-1}(\{\tau a_0 \mid \tau \geqslant 0\})$ — гладкое подмногообразие с краем в M, причем $\partial f^{-1}(\{\tau a_0 \mid \tau \geqslant 0\})=f^{-1}(0)$. Следовательно, цикл $f^{-1}(0)$ гомологичен нулю в M. Тождество (4) непосредственно вытекает из следствия 1 теоремы 1 и определения коэффициента зацепления при аккуратном учете ориентаций.

2. Пусть $x \in M$ и $J_x^2 M$ — пространство 2-струй в точке x гладких скалярных функций на M. Для произвольного целого $r \geqslant 0$ положим

$$\Sigma_r(x)=\{J_x^2 a \mid a \in C_\infty(M), \ d_x a=0, \ \dim \ker \operatorname{ges}_x a=r\} \subset J_x^2 M,$$

$$\Sigma_r^0(x)=\{J_x^2 a \mid a \in C_\infty(M), \ J_x^2 a \in \Sigma_r(x), \ a(x)=0\}.$$

Пусть, далее, $J^2 M=\bigcup_{x \in M} J_x^2 M$ — тотальное пространство расслоения 2-струй на M; положим $\Sigma_r(M)=\bigcup_{x \in M} \Sigma_r(x)$, $\Sigma_r^0(M)=\bigcup_{x \in M} \Sigma_r^0(x)$. Легко видеть, что $\Sigma_r(M)$ и $\Sigma_r^0(M)$ — гладкие подмногообразия в $J^2 M$ для $r=1, 2, \ldots$.

Определение. Вектор-функцию $f \in C_\infty^k(M)$ назовем сильно морсовой, если отображение $(\psi, x) \mapsto J_x^2(\psi f)$ из $S^{k-1} \times M$ в $J^2 M$ трансверсально подмногообразиям $\Sigma_r(M)$ и $\Sigma_r^0(M)$, $\forall r \geqslant 0$.

Ясно, что сильно морсова вектор-функция является морсовой, кроме того, из теоремы трансверсальности Тома следует, что сильно морсовы вектор-функции заполняют открытое всюду плотное подмножество в $C_\infty{}^k(M)$.

Положим

$$C_f^-=\{(\psi, x) \in C_f \mid \psi f(x) \leqslant 0\},$$

$$C_f^0=\{(\psi, x) \in C_f \mid \psi f(x)=0\}.$$

Если f — сильно Морсова вектор-функция, то, как нетрудно видеть, C_f^- — гладкое многообразие с краем C_f^0.

Пусть V — такое гладкое векторное расслоение над M, что $TM \oplus V$ — тривиальное расслоение, $TM \oplus V = M \times \mathbf{R}^N$, и μ — евклидова метрика на V, т. е. такое гладкое отображение $x \mapsto \mu(x) \in \mathscr{P}(V_x)$, что $\mu(x) > 0$ $\forall x \in M$. Определим отображения

$$Q_f: C_f^- \to \mathscr{P}(\mathbf{R}^N) \text{ и } Q_f^0: C_f^0 \to \mathscr{P}(\mathbf{R}^N),$$

положив

$$Q_f(\psi, x) = \operatorname{ges}_x(\psi f) \oplus \mu(x), \quad \forall (\psi, x) \in C_f^-, \tag{5}$$
$$Q_f^0 = Q_f \mid C_f^0.$$

Лемма 6. Если $f \in C_\infty^k(M)$ — сильно морсова вектор-функция, то $Q_f: C_f^- \to \mathscr{P}(\mathbf{R}^N)$ и $Q_f^0: C_f^0 \to \mathscr{P}(\mathbf{R}^N)$ — трансверсальные отображения, причем класс стабильной трансверсальной гомотопии отображений Q_f и Q_f^0 не зависит от выбора дополнительного расслоения V и метрики μ (определение стабильной трансверсальной гомотопии см. в конце п. 3.2).

Трансверсальность отображений Q_f и Q_f^0 прямо следует из определений, а остальное — из элементарной теории векторных расслоений. ▶

Пусть $x \in M$, определим линейные отображения $\pi_1(x): J_x^2 M \to J_x^1 M$ и $\pi_0(x): J_x^2 M \to J_x^0 M = \mathbf{R}$ формулами $\pi_1(x)(J_x^2 a) = J_x^1 a$, $\pi_0(x)(J_x^2 a) = a(x)$. Поскольку струи постоянных функций осуществляют стандартное вложение $J_x^0 M$ в $J_x^k M$ для любого k, то мы можем считать, что $J_x^0 M \subset J_x^1 M$. Имеются очевидные отождествления $\ker \pi_1(x) = \mathscr{P}(T_x M)$,

$$\Sigma_r^0(x) = \Pi_r(T_x M) \setminus \Pi_{r+1}(T_x M),$$
$$\Sigma_r(x) = \Pi_r(T_x M) \setminus \Pi_{r+1}(T_x M) \oplus \mathbf{R} \subset \ker(\pi_1(x) - \pi_0(x)).$$

Для всякого $\alpha \in \ker(\pi_1(x) - \pi_0(x))$ следующим образом определим множество $\Upsilon_\alpha \subset T^* J_x^2 M \subset T_\alpha^* J^2 M$

а) если $\alpha \notin \ker \pi_0(x) \cup \overline{\Sigma}_1(x)$, то $\Upsilon_\alpha = (\ker(\pi_1(x) - \pi_0(x)))^\perp$;

б) если $\alpha \in \ker \pi_0(x) \setminus \overline{\Sigma}_1^0(x)$, то $\Upsilon_\alpha = (\ker \pi_0(x))^\perp$,

в) если $\alpha \in \overline{\Sigma}_1^0(x) = \Pi_1(T_x M)$, то $\Upsilon_\alpha = (\ker \pi_0(x))^\perp \oplus \mathscr{N}_\alpha^+(T_x M)$;

г) если $\alpha \in \overline{\Sigma_1(x)} \setminus \overline{\Sigma_1^0(x)}$, то $\Upsilon_\alpha = (\ker(\pi_1(x) - \pi_0(x)))^\perp \oplus \mathscr{N}_\alpha^+(T_x M)$.

Теперь мы в состоянии существенно обобщить определение сильно морсовых вектор-функций. Назовем выпуклый замкнутый конус K в $\mathbf{R}^{k*}$ кусочно-гладким, если $K \cap S^{k-1}$ — подмногообразие с углами в S^{k-1}.

Определение. Пусть K — кусочно-гладкий выпуклый замкнутый конус в $\mathbf{R}^{k*}$, $f \in C_\infty^k(M)$. Пусть, далее, $F: (K \cap S^{k-1}) \times M \to J^2 M$ — отображение, определяемое формулой $F(\psi, x) = J_x^2(\psi f)$

и $F'_{(\psi, x)}: T_\psi (K \cap S^{k-1}) \oplus T_x M \to T_{F(\psi,x)} J^2 M$ — дифференциал отображения F в точке (ψ, x). Вектор-функцию f назовем сильно морсовой относительно K, если для любых $\psi \in K \cap S^{k-1}$, $x \in M$ из условия $d_x(\psi f) = 0$ следует

$$(\operatorname{im} F'_{(\psi, x)})^\circ \cap \Upsilon_{F(\psi, x)} = 0.$$

Если $K = \mathbf{R}^{k*}$, то определение сильной морсовости относительно K эквивалентно определению сильной морсовости, данному выше.

Используя теорему трансверсальности Тома, нетрудно показать, что вектор-функции, сильно морсовы относительно фиксированного конуса K, заполняют открытое всюду плотное подмножество в $C^k_\infty(M)$. При этом, если f сильно морсово относительно K, то множество $C_f^-(K) = [(\psi, x) \in C_f^- \mid \psi \in K \cap S^{k-1}\}$ и $C_f^0(K) = \{(\psi, x) \in C_f^0 \mid \psi \in K \cap S^{k-1}\}$ являются подмногообразиями с углами в C_f. Как и выше (т. е. в случае $K = \mathbf{R}^{k*}$) равенство (5) определяет отображение

$$Q_f(K): C_f^-(K) \to \mathscr{P}(\mathbf{R}^N), \quad Q_f^0(K) = Q_f \mid C_f^0(K).$$

Лемма 7. Пусть $f \in C^k_\infty(M)$ — сильно морсова вектор-функция относительно кусочно-гладкого выпуклого замкнутого конуса $K \subset \mathbf{R}^{k*}$. Тогда i) отображение $f: M \to \mathbf{R}^k$ трансверсально конусу K°, $K^\circ \subset \mathbf{R}^k$; ii) $Q_f(K): C_f^-(K) \to \mathscr{P}(\mathbf{R}^N)$ и $Q_f^0(K): C_f^0(K) \to \mathscr{P}(\mathbf{R}^N)$ — трансверсальные отображения, причем класс стабильной трансверсальной гомотопии отображений Q_f и Q_f^- не зависит от выбора дополнительного расслоения V и метрики μ.

Доказательство трансверсальностей проводится прямым вычислением, исходя из определений. Проверим, например, утверждение i).

Предположим, что f не трансверсально конусу K° в точке $x \in M$. Тогда для некоторого $\psi_0 \in K \cap S^{k-1}$ имеем

$$d_x(\psi_0 f) = 0, \quad \psi_0 f(x) = 0, \quad \psi f(x) \leqslant 0, \quad \forall \psi \in K.$$

Следовательно, $J^1_x(\psi_0 f) = 0$ и дифференциал функции $J^2_y a \mapsto a(y)$ на $J^2 M$ в «точке» $J^2_x(\psi_0 f) = F(\psi_0, x)$ лежит в конусе, дуальном к $\operatorname{im} F'(\psi_0, x)$.

Предложение 4. Пусть $f \in C^k_\infty(M)$ — сильно морсова вектор-функция относительно кусочно-гладкого выпуклого замкнутого конуса $K \subset \mathbf{R}^{k*}$. Если для любых $(\psi, x) \in C_f^-(K)$ квадратичная форма $\operatorname{ges}_x(\psi f)$ неособа, то

$$\chi(f^{-1}(K^\circ)) = \chi(C_f^-(K)) - \chi(C_f^0(K)) - 2(\chi(Q_f(K)) - \\ - \chi(Q_f^0(K))) + \varepsilon\chi(M), \quad (6)$$

где

$$\varepsilon=\begin{cases}(-1)^{\dim K}, & K=-K\\ 0, & K\neq -K.\end{cases}$$

Доказательство идет по той же схеме, что и доказательство теоремы 4.1.

1) Предположим, что K — полупрямая, $K=\{\alpha\psi_0,\ \alpha\geqslant 0\}$. Тогда $C_f^-(K)$ — конечное множество, $C_f^0(K)=0$, и из теории Морса следует, что

$$\chi(\psi_0 f)^{-1}(-\infty,0])=\sum_{(\psi_0,x)\in C_f^-(K)}(-1)^{\operatorname{ind}\operatorname{ges}_x\psi_0 f}=$$

$$=\#(C_f^-(K))-2\chi(Q_f(K)).$$

2) Пусть K — произвольный кусочно-гладкий конус и $\psi_0\in K\cap\cap S^{k-1}$. Равенство (6) будет справедливым, если в нем заменить K на любую достаточно малую коническую окрестность U_{ψ_0} точки ψ_0 в K. В самом деле, из условий доказываемого предложения и леммы 2 следует, что отображение $\varphi_c|C_f^-(K):C_f^-(K)\to\to S^{k-1}$, определяемое формулой $\varphi_c(\psi,x)=\psi$, является накрытием. Отсюда, снова воспользовавшись невырожденностью $\operatorname{ges}_x(\psi f)$, выводим, что

$$\chi(C_f^-(U_{\psi_0}))-\chi(G_f^0(U_{\psi_0}))=\#\{(\psi_0,x)\mid\psi_0 f'(x)=0,\ \psi_0 f(x)<0\},$$

$$\chi(C_f^-(U_{\psi_0}))-\chi(C_f^0(U_{\psi_0}))-2(\chi(Q_f(U_{\psi_0}))-\chi(Q_f^0(U_{\psi_0})))=$$

$$=\sum_{\{x\mid\psi_0 f'(x)=0,\ \psi_0 f(x)<0\}}(-1)^{\operatorname{ind}\operatorname{ges}_x\psi_0 f}=\chi((\psi_0 f)^{-1}(-\infty,0)).$$

Для обоснования утверждения 2) остается доказать, что множество $f^{-1}(\overset{\circ}{U}_{\psi_0})$ гомотопически эквивалентно множеству $(\psi_0 f)^{-1}(-\infty,0)$, если окрестность U_{ψ_0} достаточно мала. Поскольку 0 — регулярное значение вектор-функции f, то, конечно, $f^{-1}(\overset{\circ}{U}_{\psi_0})$ гомотопически эквивалентно $f^{-1}(\overset{\circ}{U}_{\psi_0}\setminus 0)$. Мы покажем, что $f^{-1}(\overset{\circ}{U}_{\psi_0}\setminus 0)$ является гомотопическим ретрактом множества $(\psi_0 f)^{-1}(-\infty,0)$.

Здесь имеется тонкость, которая заключается в том, что нуль может быть критическим значением функции $\psi_0 f$. Пусть $x_1,\ldots,x_m$ — все критические точки этой функции, отвечающие нулевому критическому значению и O_{x_i} — окрестность точки x_i, в которой функция $\psi_0 f$ гладкой заменой переменных приводится к квадратичной форме, $i=1,\ldots,m$. Для некоторого $\varepsilon>0$ имеем: $|\operatorname{grad}_x\psi_0 f|\geqslant 2\varepsilon$ при $x\notin\bigcup_{i=1}^m O_{x_i}$.

Следовательно, для всякого ψ из достаточно малой окрестности U_{ψ_0} выполняется неравенство

$$|\operatorname{grad}_x \psi_0 f| \geqslant \varepsilon, \quad x \notin \bigcup_{i=1}^{m} O_{x_i}.$$

Движение вдоль траекторий векторного поля, положительно пропорционального $(-\operatorname{grad}_x(\psi_0 f))$ (как в обычной теории Морса) осуществляет ретракцию множества $(\psi_0 f)^{-1}(-\infty, 0)$ в множество $(\psi_0 f)^{-1}(-\infty, 0) \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{m} O_{x_i}\right)$ и, далее, в множество $f^{-1}(\overset{\circ}{U}_{\psi_0} \setminus 0)$.

3) Пусть K_1, K_2 — такие кусочно-гладкие выпуклые конусы, что $K_1 \cup K_2$ выпукло. Если равенство (6) верно для конусов K_1, K_2, $K_1 \cap K_2$, то оно верно также для конуса $K_1 \cup K_2$. Доказательство точно такое, как у соответствующего утверждения теоремы 4.1 — нужно воспользоваться аддитивностью правой и левой частей равенства (6).

4) Для окончательного доказательства предложения 4 нужно воспользоваться индукцией по размерности конуса K. Если эта размерность равна 1, то K — либо полупрямая (см. 1)), либо прямая. Прямую можно представить в виде объединения двух полупрямых и воспользоваться утверждением 3). Индуктивный шаг делается также как при доказательстве теоремы 4.1: многократно рассекая конус K трансверсальными этому конусу гиперплоскостями и используя утверждение 3), все сводим к ситуации, рассмотренной в 2).

Замечание. Условие невырожденности квадратичных форм $\operatorname{ges}_x \psi f$ при $\psi \in K \setminus 0$ является довольно жестким; справедливо ли равенство (6) (или некоторая его модификация) при более слабых предположениях, нам неизвестно.

Часто приходится рассматривать случай, когда $M = S^n$, $f = F | S^n$, где $F \in C^k_\infty(\mathbb{R}^{n+1} \setminus 0)$ — положительно однородная функция. Мы приведем описание особого множества, гессиана и т. д. вектор-функции f в терминах F в случае, когда F — положительно однородная степени однородности $\nu \neq 0, 1$, т. е.

$$F(tx) = t^\nu f(x), \ \forall t > 0, \ x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus 0.$$

Основные тождества:

$$(D_x F)\, x = \nu F(x),$$
$$D^2_x F(x, y) = (\nu - 1)\, D_x F y, \ \forall x, \ y \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus 0.$$

Пусть $\psi \in \mathbb{R}^{k*}$, симметричную $(n+1) \times (n+1)$ — матрицу, соответствующую билинейной форме $D^2_x \psi F$, обозначим $\psi F''(x)$. Критическое множество имеет вид $C_f \{(\psi, x) \in S^{k-1} \times S^n \,|\, x$ — собственный вектор матрицы $\psi F''(x)\}$.

Пусть $(\psi, x) \in C_f$, $\psi F''(x)\, x = \lambda x$. Тогда

$$\operatorname{ges}_x \psi f = \left(D^2_x \psi F - \frac{\lambda}{\nu - 1} I\right)\Big|_{x^\perp}; \tag{7}$$

в частности, отображение $\varphi_c:(\psi, x)\mapsto\psi$ в том и только том случае регулярно в точке (ψ, x), когда $\frac{\lambda}{\nu-1}$ не является собственным значением для $\psi F''(x)|_{x\perp}$. Кроме того, $d_x\psi F=\frac{\lambda}{\nu-1}x$, $\psi F(x)=\frac{\lambda}{\nu(\nu-1)}$, следовательно, λ — гладкая функция на C_f и

$$C_f^-=\{(\psi,\ x)\in S^{k-1}\times S^n\,|\,\psi F''(x)x=\lambda x,\ \lambda\nu(\nu-1)\leqslant 0\}.$$

Проиллюстрируем результаты этого параграфа на примере квадратичных отображений.

Лемма 8. Пусть $P\in\mathscr{P}(n+1,k)$; следующие утверждения эквивалентны:

i) отображение $p|S^n:S^n\to\mathbf{R}^k$ не является вектор-функцией Морса;

ii) нуль в $\mathbf{R}^k$ является критическим значением отображения $(x,y)\mapsto p(x,y)$, рассматриваемого на многообразии $\{(x,y)\in\in S^n\times S^n\,|\,x\perp y\}$;

iii) для некоторых $\psi\in S^{k-1}$, x, $y\in S^n$, $\lambda\in\mathbf{R}$ выполняются соотношения $\psi Px=\lambda x$, $\psi Py=\lambda y$, $x\perp y$, $p(x,y)=0$.

Доказательство — прямая проверка.

Лемма 9. Для типичного $p\in\mathscr{P}(n+1,k)$ отображение $p|S^n$ является морсовым.

Доказательство. В силу теоремы трансверсальности и леммы 8 достаточно доказать, что нуль в $\mathbf{R}^k$ является регулярным значением отображения

$$(p,x,y)\mapsto p(x,y),\ \text{где}\ p\in\mathscr{P}(n+1,k),$$
$$(x,y)\in\{(x,y)\in S^k\times S^k\,|\,x\perp y\}.$$

Однако, как нетрудно видеть, указанное отображение, вообще, не имеет критических точек.

Пусть $p\in\mathscr{P}(n+1,k)$ таково, что $p|S^n$ морсово. Обозначим через C_p критическое множество вектор-функции $p|S^n$ (это не вызовет недоразумений), а через $\pi_c:C_p\to S^{k-1}$ — отображение $(\psi,x)\mapsto\psi$. Тогда

$$C_p=\{(\psi,\ x)\in S^{k-1}\times S^n\,|\,(\psi P)x=\lambda x\ \text{для нек.}\ \lambda\in\mathbf{R}\}$$
$$C_p^-=\{(\psi,\ x)\in S^{k-1}\times S^n\,|\,(\psi P)x=\lambda x,\ \lambda\leqslant 0\}.$$

Пусть $(\psi,x)\in C_p$, $\psi Px=\lambda x$. Отображение π_c в том и только том случае является локальным диффеоморфизмом в окрестности точки (ψ,x), когда $\mathrm{ges}_x(\psi p|S^n)$ — неособая форма (лемма 2), т. е. когда λ — однократное собственное значение матрицы ψP (см. (7)).

Симметричная матрица ψP имеет, с учетом кратности, $n+1$ вещественных собственных значений, расположим их в порядке возрастания: $\lambda_1(\psi)\leqslant\ldots\leqslant\lambda_{n+1}(\psi)$.

Пусть $1\leqslant i\leqslant n+1$ и $\lambda_i(\psi)$ — однократное собственное значение, $S^n\ni x_i$ — соответствующий собственный вектор. Тогда линейное отображение $(-1)^{i-1}D_{(\psi,x_i)}\pi_i: T_{(\psi,x_i)}C_p \to T_\psi S^{k-1}$ переводит каноническую ориентацию пространства $T_{(\psi,x_i)}C_p$ в положительную ориентацию $T_\psi S^{k-1}$ (ст. замечание после леммы 3).

Лемма 10. Для типичного $p\in\mathscr{P}(n+1,k)$ множество критических значений отображения $\pi_c: C_p \to S^{k-1}$ является алгебраическим множеством размерности не более $(k-3)$.

Доказательство. Отождествляя пространство симметричных $(n+1)\times(n+1)$-матриц с $\mathscr{P}(\mathbf{R}^{n+1})$, получаем, что совокупность всех симметричных матриц с кратными собственными значениями совпадает с $\Pi_1(\mathbf{R}^{n+1})+\mathrm{span}\{I\}$ и является алгебраическим подмножеством коразмерности 2 в $\mathscr{P}(\mathbf{R}^{n+1})$. Если отображение $p^*: \psi \mapsto \psi p$, $\psi\in S^{k-1}$, трансверсально подмногообразиям $\Pi_m(\mathbf{R}^{n+1})\setminus\Pi_{m+1}(\mathbf{R}^{n+1})+\mathrm{span}\{I\}$, $m=1,\ldots,n+1$ в $\mathscr{P}(\mathbf{R}^{n+1})$ (а для типичного p это так), то совокупность таких $\psi\in S^{k-1}$, что матрица ψP имеет кратные собственные значения, является алгебраическим подмножеством коразмерности не менее двух в S^{k-1}.

Любое квадратичное отображение $p\in\mathscr{P}(n+1,k)$ четно: $p(-x)=p(x)$. Отождествление точек x и $-x$, $x\in S^n$, превращает сферу S^n в проективное пространство $\mathbf{RP}^n$, таким образом, p корректно определяет отображение $\tilde{p}:\mathbf{RP}^n\to\mathbf{R}^k$ по правилу $\tilde{p}(\{x,-x\})=p(x)$. Это отображение и его критическое множество $C_{\tilde{p}}$ удобно использовать наряду с p и C_p. Ясно, что C_p является двулистным накрытием многообразия $C_{\tilde{p}}$.

Из леммы 10 следует, что для типичного $p\in\mathscr{P}(n+1, 2)$ матрица ψP не имеет кратных собственных значений ни при каком $\psi\in S^1$, и многообразие $C_{\tilde{p}}$ представляет собой объединение $(n+1)$ попарно непересекающихся окружностей. При $k\geqslant 3$ кратные собственные значения уже не устранимы. Например, при $k=3$ приведением в общее положение можно лишь добиться того, чтобы матрицы ψP имели по одному двукратному собственному значению для конечного числа точек $\psi\in S^2$, а для всех остальных ψ — только однократные собственные значения. Двукратному собственному значению отвечает целая окружность собственных векторов единичной длины.

Таким образом, чтобы получить многообразие $C_{\tilde{p}}$ для типичного $p\in\mathscr{P}(n+1, 3)$, нужно из набора $n+1$ двумерных сфер (отвечающих собственным значениям с различными номерами) «вырезать» несколько пар точек таким образом, чтобы точки, входящие в одну пару, лежали в сферах с соседними номерами; затем «вклеить» вместо вырезанных точек окружности и «склеить» попарно соответствующие сферы по этим окружностям.

Мы видим, что если ограничиться квадратичными вектор-функциями $p|_S$, $p\in\mathscr{P}(n+1,k)$, то при $k=2$ условия предложения 4 выполняются в типичной ситуации; при $k \geqslant 3$ это уже не так: конус K следует выбирать таким образом, чтобы матрицы ψP не имели кратных неположительных собственных значений при $\psi \in K \setminus 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Аграчев А. А., Гамкрелидзе Р. В.* Вычисление эйлеровой характеристики пересечений вещественных квадрик // Докл. АН СССР.— 1988.— *299*, № 1.— С. 11—14.
2. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализа.— М.: Мир, 1923.— 469 с.
3. *Том Р., Левин Г.* Особенности дифференцируемых отображений.— В кн.: «Особенности дифференцируемых отображений».— М.: Мир, 1968.— С. 9—101.
4. *Тюрин А. Н.* О пересечении квадрик // Успехи мат. наук.— 1975.— *30*, № 6,— С. 51—100.
5. *Хирш М.* Дифференциальная топология.— М.: Мир, 1979.— 280 с.
6. *Abraham R., Robbin J.* Transversal mappings and flows. Benjamin, New York, 1967.
7. *Petrowsky I. G.* On the topology of real plane algebraic curves. Ann. Math.— 1938.— *39*.— С. 189—396.

ВЫПУСКИ И ТОМА, ОПУБЛИКОВАННЫЕ РАНЕЕ

Алгебра. Топология. «1962» (1964)*.
Геометрия. «1963» (1965).
Алгебра. «1964» (1966).
Алгебра. Топология. Геометрия. «1965» (1967), «1966» (1968), «1967» (1969), «1968» (1970), «1969» (1970), «1970» (1972), тома 10 (1971), 11 (1974), 12 (1974), 13 (1975), 14 (977), 15 (1977), 16 (1978), 17 (1979), 18 (1981), 19 (1981), 20 (1982), 21 (1983), 22 (1984), 23 (1985), 24 (1986), 25 (1987), 26 (1988)
Проблемы геометрии. Тома 7 (1976), 8 (1977), 9 (1979), 10 (1978), 11 (1981), 12 (1981), 13 (1982), 14 (1983), 15 (1984), 16 (1984), 17 (1985), 18 (1987), 19 (1987), 20 (1988), 21 (1989).
Математический анализ. Теория вероятностей. Регулирование. «1962» (1964).
Математический анализ. «1963» (1965), «1964» (1966), «1965» (1966), «1966», (1967), «1967» (1969), «1968» (1969), «1969» (1971), «1970» (1971), тома 10 (1973), 11 (1973), 12 (1974), 13 (1975), 14 (1977), 15 (1977), 16 (1978), 17 (1979), 18 (1980), 19 (1981), 20 (1982), 21 (1983), 22 (1984), 23 (1985), 24 (1986), 25 (1987), 26 (1988)
Теория вероятностей. «1963» (1965).
Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика. «1964», (1966), «1966» (1967), «1967» (1969), «1968» (1970), «1969» (1970), «1970» (1971), тома 10 (1972, 11 (1974), 12 (1975), 13 (1976), 14 (1977), 15 (1978), 16 (1978), 17 (1979), 18 (1981), 19 (1982), 20 (1983), 21 (1983), 22 (1984), 23 (1985), 24 (1986), 25 (1987), 26 (1988)
Современные проблемы математики. Тома 1 (1973), 2 (1973), 3 (1974), 4 (1975), 5 (1975), 6 (1976), 7 (1976), 8 (1977), 9 (1977), 10 (1978), 11 (1978), 12 (1978), 13 (1979), 14 (1979), 15 (1980), 16 (1980), 17 (1981), 18 (1981), 19 (1982), 20 (1982), 21 (1982), 22 (1983), 23 (1983).
Современные проблемы математики. Новейшие достижения. Тома 24 (1984), 25 (1984), 26 (1985), 27 (1985), 28 (1986), 29 (1986), 30 (1987), 31 (1987), 32 (1988), 33 (1988)
Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Тома 1 (1985), 2 (1985), 3 (1985), 4 (1985), 5 (1985), 6 (1988), 7 (1985), 8 (1985), 9 (1986), 10 (1986), 11 (1986), 12 (1986), 13 (1986), 14 (1987), 15 (1987), 16 (1987), 17 (1988), 18 (1988), 19 (1988), 20 (1988), 21 (1988), 22 (1988), 23 (1988), 24 (1988), 25 (1988), 26 (1988), 27 (1988), 28 (1988), 29 (1988), 30 (1988), 31 (1988), 32 (1988), 33 (1988), 34 (1988).

* Число в кавычках — название, в скобках — год издания.