А. А. Аграчев, Р. В. Гамкрелидзе, Квазиэкстремальность для управляемых систем, *Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Нов. достиж.*, 1989, том 35, 109–134

УДК 517.971.1+514.7

КВАЗИЭКСТРЕМАЛЬНОСТЬ ДЛЯ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ

А. А. Аграчев, Р. В. Гамкрелидзе

ВВЕДЕНИЕ

В настоящей статье приведены доказательства некоторых результатов, анонсированных в [1], а также обобщения этих результатов на системы с ограничениями на управляющие параметры, обещанные в [1].

На протяжении всей работы (а также следующей статьи С. А. Вахрамеева) без специальных оговорок используются функциональные обозначения, введенные в первой статье настоящего тома.

Главным объектом исследования является гессиан отображения «вход — выход» управляемой системы в некоторой критической точке (экстремали системы). Напомним в связи с этим определение гессианов гладких отображений. Пусть $\Phi:\mathcal{B}\to M$ — гладкое отображение некоторого гладкого банахова многообразия в конечномерное и $\beta_0\in\mathcal{B}$. Дифференциал Φ в точке β_0 есть линейное отображение $D_{\beta_0}\Phi:T_{\beta_0}\mathcal{B}\to T_{\Phi(\beta_0)}M$ касательных пространств. Если зафиксировать локальные координаты в окрестностях точек β_0 и $\Phi(\beta_0)$, то можно определить и второй дифференциал (симметричное билинейное отображение банахова пространства в конечномерное). Однако при этом не получится корректно определенного билинейного отображения $T_{\beta_0}\mathcal{B}\times T_{\beta_0}\mathcal{B}$ в $T_{\Phi(\beta_0)}M$, т. к. квадратичная часть гладкого отображения существенно зависит от выбора локальных координат (например, если $D_{\beta_0}\Phi$ — сюръективное линейное отображение, то, согласно теореме о неявной функции, в некоторых локальных координатах Φ представляется линейным отображением). В то же время, если сузить второй дифференциал на ядро первого дифференциала и профакторизовать его значения по образу первого дифференциала, то получится корректно определенное симметричное билинейное отображение

$$\mathrm{ges}_{\beta_0}\Phi:\ker D_{\beta_0}\Phi\times\ker D_{\beta_0}\Phi\to\operatorname{coker} D_{\beta_0}\Phi,$$

где, по определению, $\operatorname{coker} D_{\beta_0}\Phi = T_{\Phi(\beta_0)}M/\operatorname{im} D_{\beta_0}\Phi$. Отображение $\operatorname{ges}_{\beta_0}\Phi$ называется гессианом Φ в точке β_0. В случае, когда из контекста ясно, в какой точке вычисляется гессиан и дифференциал, мы будем пользоваться сокращенными обозначениями

$$\operatorname{ges}_{\beta_0}\Phi = \Phi'', \quad D_{\beta_0}\Phi = \Phi'.$$

Замечание. Гессиан определен инвариантно по отношению к гладким заменам переменных как в $\mathscr{B}$, так и в M. В случае, когда M есть линейное пространство, $M = \mathbf{R}^n$, а нелинейные замены переменных разрешается делать только в $\mathscr{B}$, второй дифференциал оказывается корректно определенным билинейным отображением из $T_{\beta_0}\mathscr{B}\times T_{\beta_0}\mathscr{B}$ в $\operatorname{coker} D_{\beta_0}\Phi$ (на $\ker D_{\beta_0}\Phi$ его можно не сужать).

Спаривание произвольного вектора $x \in T_\mu M$ с ковектором $\xi \in T^*_\mu M$ мы обозначаем ξx — как умножение строки на столбец. Если ковектор ψ ортогонален $\operatorname{im} D_{\beta_0}\Phi$, $\psi \in (\operatorname{im} D_{\beta_0}\Phi)^\perp \subset T^*_{\Phi(\beta_0)}M$, то

$$\psi \operatorname{ges}_{\beta_0}\Phi : \ker D_{\beta_0}\Phi \times \ker D_{\beta_0}\Phi \to \mathbf{R}$$

— вещественная симметричная билинейная форма. Нам понадобится понятие индекса таких форм. Напомним, что индексом Морса (или просто индексом) вещественной симметричной билинейной формы $q: B\times B \to \mathbf{R}$, где B — некоторое линейное пространство, называется максимальная размерность подпространства в B, на котором квадратичная форма $b \mapsto q(b, b)$ отрицательна. Стандартное обозначение: $\operatorname{ind} q$. Имеем $0 \leqslant \operatorname{ind} q \leqslant \dim B$. Если B бесконечномерно, то возможно $\operatorname{ind} q = +\infty$.

§ 1. Гладкие управляемые системы

Пусть M^n — гладкое n-мерное многообразие, а U — гладкое r-мерное многообразие. Рассмотрим управляемую систему

$$\dot{x} = x \circ f_t(u), \quad x \in M^n, \quad u \in U, \quad t \in [0, T]. \qquad (1)$$

Здесь $f_t(u)$ — бесконечно дифференцируемо зависящее от $u \in U$ семейство полных нестационарных векторных полей на M.

Произвольное отображение $u(\cdot): [0, T] \to U$ называется ограниченным на подмножестве $E \subset [0, T]$, если замыкание его образа $\overline{u(E)}$ компактно, и измеримым, если прообраз каждого открытого в U подмножества измерим. Мы говорим, что отображение $u(\cdot)$ принадлежит $L([0, T]; U)$, если оно измеримо и ограничено на некотроом подмножестве полной меры в $[0, T]$ (ограничено в существенном). Элементы множества $L_\infty([0, T]; U)$ будем называть допустимыми управлениями. Топология в множестве допустимых управлений вводится следующим образом. Если U вложено в качестве замкнутого подмногообразия в $\mathbf{R}^d$, то очевидно

$$L_\infty([0, T]; U) \subset L_\infty([0, T]; \mathbf{R}^d) = L_\infty^d.$$

Искомая топология индуцируется этим вложением. Кроме того, $L_\infty([0, T]; U)$ является гладким банаховым подмногообразием в L_∞^d.

Наряду со стандартной топологией в пространстве допустимых управлений $L_\infty([0, T]; U)$, иногда будет полезно рассматривать более сильную конечномерно-открытую топологию. Данное подмножество $\mathcal{O} \subset L_\infty([0, T]; U)$ считается открытым в конечномерно-открытой топологии, если его пересечение с произвольным конечномерным подмногообразием в $L_\infty([0, T]; U)$ открыто в этом подмногообразии. В дальнейшем, во всех случаях, в которых существенно использование именно конечномерно-открытой топологии, это будет специально отмечено.

Заметим, что совокупность всех управляемых систем вида (1) с фиксированными многообразиями M, U и временным отрезком $[0, T]$ образует линейное пространство; обозначим это пространство символом $\mathrm{CS}(M, U, [0, T])$. В $\mathrm{CS}(M, U, [0, T])$ имеется естественное семейство полунорм, превращающее это пространство в пространство Фреше. В самом деле, семейство нестационарных векторных полей $f_t(u)$ можно рассматривать как нестационарное поле на $M^n \times U$, которое «дифференцирует вдоль M^n», если для всякой функции $a \in C^\infty(M^n \times U)$ положить

$$(f_t a)(x, u) = (f_t(u) a \mid u = \mathrm{const})(x), \quad (x, u) \in M^n \times U.$$

Таким образом, имеется естественное вложение $\mathrm{CS}(M^n, U, [0, T])$ в пространство Фреше всех нестационарных полей на $M^n \times U$ в качестве замкнутого подпространства. В частности, каждому компакту $K \subset M^n \times U$ и целому неотрицательному числу α соответствует полунорма $\|f_.\|_{K, \alpha}$.

Зафиксируем раз и навсегда точку $x_0 \in M^n$ и рассмотрим отображение $F : L_\infty([0, T]; U) \to M$, сопоставляющее каждому допустимому управлению $u(\cdot)$ точку x_T, где

$$\frac{d}{dt} x_t = x_t \circ f_t(u(t)), \quad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Таким образом, $F(u(\cdot)) = x_0 \circ \overrightarrow{\exp} \int\limits_0^T f_t(u(t))\, dt$.

Прежде чем двигаться дальше, опишем интересующие нас локальные инварианты гладких отображений.

Пусть $\mathscr{A}$ — банахово многообразие класса C^∞ и $a \in \mathscr{A}$. Обозначим через $C_a^\infty(\mathscr{A}, M^n)$ множество ростков в точке a гладких отображений из $\mathscr{A}$ в M^n. В $C_a^\infty(\mathscr{A}, M^n)$ вводится топология сильной сходимости всех производных в точке a. Предположим, что $\mathscr{A}$ моделируется на банахово пространство А. Напомним, что k-я производная ростка в точке a определяется только после выбора локальных координат в M^n и $\mathscr{A}$ и является полилинейным отображением из $\mathbf{A}^k$ в $\mathbf{R}^n$. Однако свойство сходимости всех производных в точке a для данного направленного семейства ростков не зависит от предварительного выбора локальных координат. Введенная топология не является хаусдорфовой, но это не должно смущать.

В приводимых ниже определениях выражение «для почти всякого ростка...» означает для любого роста из некоторого открытого всюду плотного подмножества в пространстве ростков. . . .».

Определение 1. Пусть $\mathscr{A}$ — банахово многообразие класса C^∞ и $C_a^\infty(\mathscr{A}, M^n) \ni \mathscr{H}$ — гладкий росток в точке $a \in \mathscr{A}$. Росток называется экстремальным, если существует такая окрестность $\mathscr{O}$ точки a в $\mathscr{A}$ и представитель $H: \mathscr{O} \to M^n$ ростка $\mathscr{H}$, что $H(a) \in \partial H(\mathscr{O})$, т. е. точка $H(a)$ лежит на границе множества $H(\mathscr{O})$.

Определение 2. Пусть снова $\mathscr{H} \in C_a^\infty(\mathscr{A}, M^n)$.

i) Предположим, что $\mathscr{H}$ — экстремальный росток. Скажем, что $\mathscr{H}$ имеет индекс экстремальности $k > 0$, если k — наименьшее такое число, что для почти всякого ростка $\Phi \in C^\infty_{\mathscr{H}(a)}(M^n, \mathbf{R}^{n-k})$ росток $\Phi \circ \mathscr{H} \in C_a^\infty(\mathscr{A}, \mathbf{R}^{n-k})$ не является экстремальным.

ii) Предположим, что росток $\mathscr{H}$ не является экстремальным. Скажем, что $\mathscr{H}$ имеет индекс экстремальности $l \leqslant 0$, если l — наименьшее такое число, что для почти всякого ростка $\Psi \in C_a^\infty(\mathscr{A}, \mathbf{R}^{-l})$ росток $(\mathscr{H} \times \Psi) \in C_a^\infty(\mathscr{A}, M \times \mathbf{R}^{-l})$ не является экстремальным. Если наименьшего l не существует, то индекс экстремальности считается равным $(-\infty)$.

Таким образом, индекс экстремальности произвольного ростка $\mathscr{H} \in C_a^\infty(\mathscr{A}, M^n)$ лежит на отрезке $[-\infty, n]$. Росток является экстремальным, когда его индекс экстремальности положителен.

Вернемся к управляемой системе (1).

Определение 3. Пусть $\tilde{u}(\cdot) \in L_\infty([0, T], U)$ — допустимое управление. Локальным индексом экстремальности управления $\tilde{u}(\cdot)$ относительно системы (1) с начальным условием x_0 называется индекс экстремальности ростка отображения F в «точке» $\tilde{u}(\cdot)$. Управления, имеющие положительный локальный индекс экстремальности называются локально экстремальными относительно системы (1) с начальным условием x_0.

В следующем ниже определении, кроме данной управляемой системы (1) приходится рассматривать близкие к ней системы в пространстве $\mathrm{CS}(M^n, U, [0, T])$. При этом начальное условие следует считать фиксированным.

Определение 4. Индексом квазиэкстремальности допустимого управления $\tilde{u}(\cdot)$ относительно системы (1) называется максимальное такое число $k\in[-\infty, n]$, что сколь угодно близко к $f_t(u)$ в пространстве $CS(M^n, U, [0, T])$ существует управляемая система $g_t(u)$, относительно которой управление $\tilde{u}(\cdot)$ имеет локальный индекс экстремальности k. Управления, имеющие положительный индекс квазиэкстремальности, называются квазиэкстремальными относительно данной системы (1).

Таким образом, индекс квазиэкстремальности управления относительно данной системы $f_t(u)$ — это верхний предел локальных индексов экстремальности $u(\cdot)$ относительно систем $g\in CS(M^n, U, [0, T]$ при g, стремящемся к f[1]. В частности, индекс квазиэкстремальности данного управления полунепрерывно сверху зависит от системы.

Зафиксируем раз и навсегда некоторое допустимое управление $\tilde{u}(\cdot)$, и пусть $\tilde{p}_{t,\tau}$ — соответствующее этому управлению семейство потоков в M,

$$\frac{d}{dt}\tilde{p}_{t,\tau}=\tilde{p}_{t,\tau}\circ f_t(\tilde{u}(t)), \quad \tilde{p}_{\tau,\tau}=\mathrm{id}.$$

Иначе это можно записать в виде

$$\tilde{p}_{t,\tau}=\overrightarrow{\exp}\int_{\tau}^{t} f_\theta(\tilde{u}(\theta))\,d\theta.$$

Обозначим $\tilde{p}_t\overset{\mathrm{def}}{=}\tilde{p}_{t,0}$, $\tilde{x}_t=x_0\circ\tilde{p}_t$, легко видеть, что $\tilde{p}_{t,\tau}=\tilde{p}_\tau^{-1}\circ\tilde{p}_t$.

Пусть $u(\cdot)$ — другое допустимое управление, обозначим $\delta f_t(u(t))=f_t(u(t))-f_t(\tilde{u}(t))$. Имеет место представление

$$\overrightarrow{\exp}\int_0^t f_\tau(u(\tau))\,d\tau=\tilde{p}_t\circ\overrightarrow{\exp}\int_0^t \mathrm{Ad}\,\tilde{p}_{t,\tau}^{-1}\,\delta f(u(\tau))\,d\tau, \tag{2}$$

здесь $\overrightarrow{\exp}\int_0^t \mathrm{Ad}\,\tilde{p}_{t,\tau}^{-1}\,\delta f(u(\tau))\,d\tau$ — правый возмущающий поток, соответствующий возмущению $\delta f_t(u(t))$ поля $f_t(\tilde{u}(t))$.

Обозначим через $\tilde{f}'_t$ и $\tilde{f}_t^{(2)}$, соответственно, первый и второй дифференциалы отображения $u\mapsto f_t(u)$ в точке $\tilde{u}(t)\in U$. Тогда $\tilde{f}'_t: T_{\tilde{u}(t)}U\to \mathrm{Der}\,M^n$ есть линейное отображение касательного пространства к многообразию U в точке $\tilde{u}(t)$ в пространство векторных полей на M; $\tilde{f}_t^{(2)}: T_{\tilde{u}(t)}U\times T_{\tilde{u}(t)}U\to \mathrm{coker}\,\tilde{f}'_t$ — есть симметричное билинейное отображение пространства $T_{\tilde{u}(t)}U$ в факторпространство $\mathrm{Der}(M^n)$ по образу $\tilde{f}'_t$.

[1] Легко видеть, что соответствующий нижний предел всегда равен $(-\infty)$.

Заметим, что касательное пространство к банахову многообразию допустимых управлений $L_\infty([0, T]; U)$ в «точке» $\tilde{u}(\cdot)$ состоит из таких измеримых и ограниченных в существенном отображений $t\mapsto v(t)$, $0\leqslant t\leqslant T$, что $v(t)\in T_{\tilde{u}(t)}U$, $\forall t\in[0, T]$. Мы обозначим это пространство $\mathcal{L}^\infty_{\tilde{u}}$. Пусть $\tilde{F}'\colon \mathcal{L}^\infty_{\tilde{u}}\to T_{\tilde{x}_T}M^n$ — дифференциал отображения F в «точке» $\tilde{u}(\cdot)$ и $\tilde{F}''\colon \ker\tilde{F}'\times\ker\tilde{F}'\to \to \operatorname{coker}\tilde{F}'$ — гессиан F. Из представления (2) и тождества

$$\overrightarrow{\exp}\int_0^t \operatorname{Ad}\tilde{p}_{t,\tau}^{-1}\,\delta f_\tau(u(\tau))\,d\tau=$$

$$=\mathrm{id}+\int_0^t\left(\overrightarrow{\exp}\int_0^\tau \operatorname{Ad}\tilde{p}_{t,\theta}^{-1}\,\delta f_\theta(u(\theta))\,d\theta\right)\circ\operatorname{Ad}\tilde{p}_{t,\tau}^{-1}\,\delta f_\tau(u(\tau))\,d\tau \qquad (3)$$

$$\delta f_t(\tilde{u}(t))\equiv 0$$

легко получаем, что

$$\tilde{F}'v(\cdot)=\tilde{x}_T\circ\int_0^T \operatorname{Ad}\tilde{p}_{T,t}^{-1}\tilde{f}'_t v(t)\,dt.$$

Чтобы не слишком загромождать формулы, введем еще обозначения $D_t^1 v(t)\overset{\mathrm{def}}{=}\operatorname{Ad}\tilde{p}_{T,t}^{-1}\tilde{f}'_t v(t)$ и $D_t^2(v_1(t), v_2(t))= =\operatorname{Ad}\tilde{p}_{T,t}^{-1}\tilde{f}_t^{(2)}(v_1(t), v_2(t))$, $v_i(\cdot)\in\mathcal{L}^\infty_{\tilde{u}}$. Таким образом, $\tilde{F}'v(\cdot)= =\tilde{x}_T\circ\int_0^T D_t^1 v(t)\,dt$. Ясно, что $\operatorname{im}\tilde{F}'=\operatorname{span}\{\tilde{x}_T\circ D_t^1 v\mid v\in T_{\tilde{u}(t)}U$, t — точка Лебега отображения $\tau\mapsto\tilde{x}_T\circ D_\tau^1\}$.

Лемма 1. Гессиан $\tilde{F}''$ отображения F в «точке» $\tilde{u}(\cdot)$ имеет вид

$$\tilde{F}''(v_1(\cdot), v_2(\cdot))=\tilde{x}_T\circ\int_0^T D_t^2(v_1(t), v_2(t))\,dt+$$

$$+\tilde{x}_T\circ\int_0^T\left[\int_0^t D_\tau^1 v_1(\tau),\ D_t^1 v_2(t)\right]dt+\operatorname{im}\tilde{F}',$$

$$\forall v_i(\cdot)\in\ker\tilde{F}'=\left\{v_i(\cdot)\in\mathcal{L}^\infty_{\tilde{u}}\mid\tilde{x}_T\circ\int_0^T D_t^1 v(t)\,dt=0\right\}.$$

Доказательство. Пусть семейство допустимых управлений $u_\varepsilon(\cdot)$ таково, что $u_0(\cdot)=\tilde{u}(\cdot)$, $\frac{\partial}{\partial\varepsilon}u_\varepsilon(\cdot)|_{\varepsilon=0}=v(\cdot)$. Используя тождество (3), без труда получаем

$$\frac{\partial^2}{\partial\varepsilon^2}\Big|_{\varepsilon=0}\overrightarrow{\exp}\int_0^T \operatorname{Ad}\widetilde{P}_{T,\tau}^{-1}\delta f_\tau(u_\varepsilon(\tau))\,d\tau=\int_0^T D_t^2(v(t),\ v(t))\,dt+$$

$$+2\int_0^T\left(\int_0^t D_\tau^1 v(\tau)\,d\tau\circ D_t^1 v(t)\right)dt=\int_0^T D_t^2(v(t),\ v(t))\,dt+$$

$$+\int_0^T\left[\int_0^t D_\tau^1 v(\tau)\,d\tau,\ D_t^1 v(t)\right]dt+\int_0^T D_t^1 v(t)\,dt\circ\int_0^T D_t^1 v(t)\,dt.$$

Таким образом, если $\widetilde{x}_T\circ\int_0^T D_t^1 v(t)\,dt=0$, то

$$\frac{\partial^2}{\partial\varepsilon^2}\Big|_{\varepsilon=0}F(u_\varepsilon(\cdot))=\widetilde{x}_T\circ\int_0^T D_t^2(v(t),\ v(t))\,dt+$$

$$+\widetilde{x}_T\circ\int_0^T\left[\int_0^t D_\tau^1 v(\tau)\,d\tau,\ D_t^1 v(t)\right]dt.$$

Для всякого ковектора $\psi\in(\operatorname{coker}\widetilde{F}')^*=(\operatorname{im}\widetilde{F}')^\perp\subset T^*_{\widetilde{x}_T}M^n$ произведение $\psi\widetilde{F}''$ является скалярной квадратичной формой, в частности, определен индекс Морса $\operatorname{ind}(\psi\widetilde{F}'')$.

Теорема 1. Если $\operatorname{coker}\widetilde{F}'=0$, то индекс квазиэкстремальности допустимого управления $\widetilde{u}(\cdot)$ относительно системы (1) равен $(-\infty)$. Если $\operatorname{coker}\widetilde{F}'\neq 0$, то индекс квазиэкстремальности этого управления относительно системы (1) равен

$$\dim\operatorname{coker}\widetilde{F}'-\min\{\operatorname{ind}(\psi\widetilde{F}'')\mid\psi\in(\operatorname{im}\widetilde{F}'')^\perp\setminus 0\}.$$

Доказательство. Условие $\operatorname{coker}\widetilde{F}'=\{0\}$ означает, что $\widetilde{u}(\cdot)$ — регулярная точка гладкого отображения $F:L_\infty([0,T];U)\to\to M$. Пусть $\mathcal{U}$ — такое подмногообразие конечной коразмерности в $L_\infty([0,T];U)$, что $\widetilde{u}(\cdot)\in\mathcal{U}$ и подпространство $T_{\widetilde{u}(\cdot)}\mathcal{U}$ в $\mathcal{L}^\infty_{\widetilde{u}(\cdot)}$ трансверсально к $\ker\widetilde{F}'$ (т. е. $T_{\widetilde{u}(\cdot)}\mathcal{U}+\ker\widetilde{F}'=\mathcal{L}^\infty_{\widetilde{u}(\cdot)}$). Тогда, очевидно, $\widetilde{u}(\cdot)$ является регулярной точкой отображения $F\mid\mathcal{U}$. В то же время, из теоремы о неявной функции вытекает, что росток произвольного гладкого отображения в регулярной точке не является экстремальным. Исходя из определения локального порядка, получаем, что локальный индекс экстремальности управления $\widetilde{u}(\cdot)$ равен $(-\infty)$. Более того, для любой управляемой системы $g_t(u)$, достаточно близкой к $f_t(u)$, управление $\widetilde{u}(\cdot)$ по-прежнему является регулярной точкой отображения $u(\cdot)\mapsto x_0\circ\overrightarrow{\exp}\int_0^T g_t(u(t))\,dt$. Следовательно, и индекс квазиэкстремальности $\widetilde{u}(\cdot)$ относительно системы (1) равен $(-\infty)$.

Доказательство теоремы 1 в случае $\dim\operatorname{coker}\widetilde{F'}=k>0$ основывается на следующем утверждении.

Предложение 1. Допустимое управление $\widetilde{u}(\cdot)$ в том и только том случае является квазиэкстремальным, когда существует такой ковектор $\psi\in(\operatorname{im}\widetilde{F}')^{\perp}\subset T^{*}_{\widetilde{x}_T}M$, $\psi\neq 0$, что скалярная квадратичная форма $\widetilde{\psi F''}$ имеет индекс не больше, чем $k-1$.

Доказательство.

Достаточность. Предположим, что для некоторого, ненулевого ковектора $\psi\in(\operatorname{im}\widetilde{F}')^{\perp}$ форма $\psi\widetilde{F}''$ имеет индекс $l\leqslant k-1$.

Лемма 2. Квадратичная форма $\psi D_t^2(v, v)$, $v\in T_{\widetilde{u}(t)}U$ неотрицательна для почти всех $t\in[0, T]$. В самом деле, это вытекает из конечности индекса формы $\psi\widetilde{F}''$ и следующего легко проверяемого факта:

Лемма 3. Пусть $\bar{t}\in[0, T]$ — точка Лебега, отображения $t\mapsto D_t^2$. Тогда для функций $v(\cdot)\in\ker\widetilde{F}'$ и удовлетворяющих условиям $v(t)=0$ при $|t-\bar{t}|>\varepsilon$, $|v(t)|\leqslant 1$ при $|t-\bar{t}|\leqslant\varepsilon$ имеет место представление

$$\widetilde{F}''(v(\cdot), v(\cdot))=\widetilde{x}_{T}\circ\int_{\bar{t}-\varepsilon}^{\bar{t}+\varepsilon} D_{\bar{t}}^2(v(t), v(t))\,dt+o(\varepsilon).$$

Используя лемму 2, легко построить такую, сколь угодно близкую к $f_t(u)$, управляемую систему $\hat{f}_t(u)$, что значение и первый дифференциал отображения $u\mapsto\hat{f}_t(u)$ в точке $\widetilde{u}(t)$ совпадают соответственно с $\widetilde{f}_t$ и $\widetilde{f}'_t$, $\forall t\in[0, T]$, однако второй дифференциал $\widetilde{\hat{f}}''_t$ таков, что квадратичная форма

$$\psi\hat{D}_t^2(v, v)=\psi\operatorname{Ad}\widetilde{p}_{T,t}^{-1}\widetilde{\hat{f}}''_t(v, v), \quad v\in T_{\widetilde{u}(t)}U,$$

положительно определена равномерно по $t\in[0, T]$.

Следовательно, можно считать, что форма $\psi D_t^2(v, v)$, $v\in T_{\widetilde{u}(t)}U$ положительно определена равномерно по $t\in[0, T]$. В дальнейшем мы так и будем считать.

Симметричная билинейная форма $\int_0^T\psi D_t^2(v_1(t), v_2(t))dt\overset{\text{def}}{=}$ $\overset{\text{def}}{=}(v_1(\cdot)\,|\,v_2(\cdot))$ определяет скалярное произведение в пространстве $\mathscr{L}^{\infty}_{\widetilde{u}}$ и, следовательно, в подпространстве $\ker\widetilde{F'}\subset\mathscr{L}^{\infty}_{\widetilde{u}}$. Используя это скалярное произведение, можно билинейную форму $\psi\widetilde{F}''(v_1(\cdot), v_2(\cdot))$ представить в виде

$$\psi\tilde{F}''(v_1(\cdot), v_2(\cdot)) = (v_1(\cdot) \mid v_2(\cdot)) + (v_1(\cdot) \mid Kv_2(\cdot)),$$

где

$$(v_1(\cdot) \mid Kv_2(\cdot)) = \int_0^T \psi\left[\int_0^t D_\tau^1 v_2(\tau)\,d\tau,\ D_t^1 v_1(t)\right] dt,$$

$K: \ker\tilde{F}' \to \ker\tilde{F}'$ — некоторый компактный симметричный оператор.

Обозначим через $[\ker\tilde{F}']$ пополнение пространства $\ker\tilde{F}'$ в норме $\sqrt{(v(\cdot) \mid v(\cdot))}$. Оператор K однозначно продолжается до компактного самосопряженного оператора $[K]$, действующего в гильбертовом пространстве $[\ker\tilde{F}']$, причем, как нетрудно показать, $\operatorname{im}[K] \subset \ker\tilde{F}'$. Из теоремы Гильберта—Шмидтат следует, что каждая отличная от нуля точка спектра оператора является изолированным конечнократным собственным значением. Ясно, что всякий собственный вектор, отвечающий ненулевому собственному значению, лежит в $\operatorname{Ker}\tilde{F}'$.

Далее, можно считать, что (-1) не является собственным значением оператора K. В самом деле, в противном случае, сколь угодно малым возмущением исходной управляемой системы; оставляя неизменными $\tilde{f}$ и $\tilde{f}'$, можно так «подправить» $\tilde{f}''$, что формы ψD_t^2 перейдут в $(1+\varepsilon)\psi D_t^2$, где $\varepsilon > 0$ мало. Поскольку формы ψD_t^2 определяют наше скалярное произведение, то при таком возмущении оператор K переходит в оператор $\frac{1}{1+\varepsilon} K$, т. е. все собственные значения оператора K умножаются на $\frac{1}{1+\varepsilon}$.

Итак, мы предполагаем, что форма $\psi\tilde{F}''(v(\cdot), v(\cdot)) = (v(\cdot) \mid v(\cdot)) + (v(\cdot) \mid Kv(\cdot))$ неособа и имеет индекс $l \leqslant k-1$, где $k = \operatorname{codim}(\operatorname{im}\tilde{F}')$. Пусть $w_1(\cdot), \ldots, w_l(\cdot) \in \ker\tilde{F}'$ — полный набор собственных функций, отвечающих собственным значениям оператора K, меньшим, чем (-1). Обозначим $W_- = \operatorname{span}\{w_1, \ldots, w_l\}$ и $W_+ \subset \mathscr{L}_u^\infty$ ортогональное дополнение к W_- в силу скалярного произведения $(\cdot \mid \cdot)$. Квадратичная форма $\psi\tilde{F}''$ отрицательно определена на W_- и положительно определена на W_+.

Пусть, далее, $X_1, \ldots, X_l$ — такие ограниченные векторные поля на M^n, что

i) $\tilde{x}_T \circ (\psi X_i) = 0, \quad i = 1, \ldots, l$;

ii) касательные векторы $\tilde{x}_T \circ X_1, \ldots, \tilde{x}_T \circ X_l$ линейно независимы по модулю $\operatorname{im}\tilde{F}'$, т. е. подпространство, натянутое на $\operatorname{im}\tilde{F}'$ и векторы $\tilde{x}_T \circ X_i$, $i = 1, \ldots, l$, имеет коразмерность $k-l$ в $T_{\tilde{x}_T}M^n$.

Не представляет труда построить такую, сколь угодно близкую к $f_t(u)$, управляемую систему $g_t(u)$, что $g_t(\tilde{u}(t))=\tilde{f}_t$, а первый дифференциал $\tilde{g}_t'$ отображения $u\mapsto g_t(u)$ в точке $\tilde{u}(t)$ имеет вид

$$\tilde{g}_t'v=\tilde{f}_t'v+\varepsilon\sum_{i=1}^{l}\psi D_t^2(w_i(t),\,v)\,\mathrm{Ad}\,\tilde{p}_{T,t}X_i,\quad \forall v\in T_{\tilde{u}(t)}U,$$

где $\varepsilon\in\mathrm{R}$.

Пусть $G:u(\cdot)\mapsto x_0\circ\overrightarrow{\exp}\int\limits_0^T g_t(u(t))\,dt$ — отображение, переводящее каждое допустимое управление $u(\cdot)\in L_\infty([0,\,T];\,U)$ в конец соответствующей траектории. Тогда $G(\tilde{u}(\cdot))=\tilde{x}_T$, а дифференциал $\tilde{G}'$ отображения G в «точке» $\tilde{u}(\cdot)$ имеет вид

$$\tilde{G}'v(\cdot)=\tilde{x}_T\circ\int\limits_0^T\mathrm{Ad}\,\tilde{p}_{T,t}^{-1}\tilde{g}_t'v(t)\,dt=\tilde{F}'v(\cdot)+\varepsilon\sum_{i=1}^{l}(w_i(\cdot)\,|\,v(\cdot))\tilde{x}_T\circ X_i,$$

$$\forall v(\cdot)\in\mathscr{L}_{\tilde{u}}^{\infty}.$$

Следовательно,

$$\mathrm{im}\,\tilde{G}'=\mathrm{im}\,\tilde{F}\oplus\mathrm{span}\,\{\tilde{x}_T\circ X_1,\ldots,\tilde{x}_T\circ X_l\},$$

$$\ker\tilde{G}'=W_+\subset\ker\tilde{F}'.$$

В частности, гессиан $\tilde{G}''$ отображения G в «точке» $\tilde{u}(\cdot)$ — симметричное билинейное отображение, определенное на W_+,

$$\tilde{G}'':W_+\times W_+\to\mathrm{coker}\,\tilde{G}'.$$

Кроме того, ковектор ψ ортогонален $\mathrm{im}\,\tilde{G}''$. Поскольку система $g_t(u)$ близка к системе $f_t(u)$, то скалярная квадратичная форма $\psi\tilde{G}''$ близка к форме $\psi\tilde{F}''\,|\,W_+$. Так как форма $\psi\tilde{F}''$ положительно определена на W_+, то и форма $\psi\tilde{G}''$ положительно определена. Таким образом, доказательство квазиэкстремальности управления $\tilde{u}(\cdot)$ свелось к следующему утверждению.

Предложение 2. Пусть $g\in\mathrm{CS}\,(M^n,\,U,\,[0,\,T])$ — управляемая система, а $\tilde{G}':\mathscr{L}_{\tilde{u}(\cdot)}^{\infty}\to T_{G(\tilde{u}(\cdot))}M^n$ и $\tilde{G}'':\ker\tilde{G}'\times\ker\tilde{G}'\to\mathrm{coker}\,\tilde{G}'$ — соответственно, дифференциал и гессиан отображения $G:u(\cdot)\mapsto x_0\circ\overrightarrow{\exp}\int\limits_0^T g_t(u(t))\,dt$ в «точке» $\tilde{U}(\cdot)\in L_\infty([0,\,T];\,U)$. Если существует такой ковектор $\psi\in(\mathrm{im}\,\tilde{G}')^{\perp}$, что скалярная квадратичная форма $\psi\tilde{G}''$ положительно определена (т. е. $\psi G''(v(\cdot),\;v(\cdot))\geqslant\alpha\;\;\|v(\cdot)\|_2^2$ при некоторой константе $\alpha>0$), то управление

$\tilde{u}(\cdot)$ локально экстремально для системы $g_t(u)$ с начальным условием x_0.

Доказательство. Поскольку доказываемое утверждение чисто локальное, введя подходящие локальные координаты, мы можем отождествить множество допустимых управлений с пространством $\mathscr{L}^\infty_{\tilde{u}(\cdot)} = T_{\tilde{u}(\cdot)}L_\infty([0, T]; U)$, а также считать, что $M^n = \mathrm{R}^n$, $G(\tilde{u}(\cdot)) = 0$. Мы докажем несколько больше, чем требуется, а именно, установим существование такой константы c (возможно, неположительной), что для всех $v(\cdot) \in \mathscr{L}^\infty_{\tilde{u}(\cdot)}$, достаточно близких к нулю, выполняется неравенство $\psi G(\tilde{u}+v) \geqslant c\|v\|_\infty |G(\tilde{u}+v)|$. Проводя выкладки, дабы не загромождать формул, будем писать $\tilde{u}, v, \ldots$ вместо $\tilde{u}(\cdot), v(\cdot), \ldots$.

Запишем разложение Тейлора отображения G в точке $\tilde{u}$:

$$G(\tilde{u}+v) = \tilde{G}'v + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial v^2}(\tilde{u})(v, v) + \int_0^1 \frac{(1-\theta)^2}{2}\frac{\partial^3 G}{\partial \theta^3}(u+\theta v)\,d\theta, \quad (4)$$

$$\forall v \in \mathscr{L}^\infty_{\tilde{u}}(U).$$

При этом $\tilde{G}'' = \frac{\partial^2 G}{\partial v^2}(\tilde{u}) \mid \ker \tilde{G}' + \operatorname{im} \tilde{G}'$.

Из тождества

$$G(u) = x_0 + x_0 \circ \int_0^T \overrightarrow{\exp} \int_0^t g_\tau(u(\tau))\,d\tau \circ g(u(t))\,dt, \quad \forall u(\cdot),$$

нетрудно вывести, что

$$\left| \frac{\partial^3}{\partial u^3} G(u)(v, v, v) \right| \leqslant c_1 \int_0^T |v(t)|^3 dt = c_1 \|v\|_3^3$$

для некоторой константы c_1 и всех u, достаточно близких к $\tilde{u}$.

Представим пространство $\mathscr{L}^\infty_{\tilde{u}}$ в виде прямой суммы $\mathscr{L}^\infty_{\tilde{u}} = \ker \tilde{G}' \oplus V_1$, где конечномерное подпространство V_1 — произвольное прямое дополнение к $\ker \tilde{G}'$ в $\mathscr{L}^\infty_{\tilde{u}}$, $\dim V_1 = \dim(\operatorname{im} \tilde{G}')$. Пусть $v = v_1 + v_2$, где $v_1 \in V$, $v_2 \in \ker \tilde{G}'$. Поскольку линейное отображение $\tilde{G}'$ невырождено на V_1, а квадратичная форма $\psi \frac{\partial^2 G}{\partial v^2}(\tilde{u})$ положительно определена на $\ker \tilde{G}'$, то из разложения (4) вытекает справедливость неравенства

$$|G(\tilde{u}+v)| \geqslant 2\alpha(\|v_1\|_1 + \|v_2\|_2^2) \geqslant \alpha(\|v_1\|_1 + \|v\|_2^2)$$

для всех v, достаточно близких к нулю, и некоторой константы $\alpha > 0$. Умножив разложение (4) на ψ, получим

$$\psi G(\widetilde{u}+v)=\frac{1}{2}\psi\frac{\partial^2 G}{\partial v^2}(\widetilde{u})(v,\ v)+\int_0^1\frac{(1-\theta)^2}{2}\psi\frac{\partial^3 G}{\partial v^3}(\widetilde{u}+\theta v)(v,\ v,\ v)\,d\theta\geqslant$$

$$\geqslant\psi\frac{\partial^2 G}{\partial v^2}(\widetilde{u})(v_1,\ v_2)+\frac{1}{2}\psi\frac{\partial^2 G}{\partial v^2}(\widetilde{u})(v_1,\ v_1)-\frac{c_1}{6}\|v\|_3^3\geqslant$$

$$\geqslant -c_2(\|v_1\|_1\|v\|_\infty+\|v\|_3^3)\geqslant -c_2(\|v_1\|_1+\|v\|_2^2)\|v\|_\infty\geqslant$$

$$\geqslant -\frac{c_1}{\alpha}\|v\|_\infty|G(\widetilde{u}+v)|$$

и т. д.

II) Необходимость. Пусть $\operatorname{codim}(\operatorname{im}\widetilde{F}')=k>0$, и для всякого ненулевого ковектора $\psi\in(\operatorname{im}\widetilde{F}')^\perp$ форма $\psi\widetilde{F}''$ имеет индекс не меньше k.

Лемма 4. Существует такое конечномерное подпространство $W\subset\ker\widetilde{F}'$, что для всякого ненулевого ковектора $\psi\in(\operatorname{im}\widetilde{F}')^\perp$ скалярная форма $\psi\widetilde{F}''|W$ имеет индекс не меньше k.

Доказательство. В самом деле, для любого $\psi\in(\operatorname{im}\widetilde{F}')^\perp$, $|\psi|=1$, найдется такое k-мерное подпространство $W_\psi\subset\ker\widetilde{F}'$, что форма $\psi\widetilde{F}''|W_\psi$ отрицательно определена. Ясно, что для всех $\hat{\psi}$, достаточно близких к ψ, форма $\hat{\psi}\widetilde{F}''|W_\psi$ также отрицательно определена. Выбрав конечное покрытие сферы $\{|\psi|=1\}$ соответствующими окрестностями $O_{\psi_1},\ldots,O_{\psi_m}$, мы можем положить $W=W_{\psi_1}+\ldots+W_{\psi_m}$.

Пусть $V\subset\mathscr{L}^\infty_{\widetilde{u}}(U)$ — некоторое прямое дополнение к $\ker\widetilde{F}'$ в пространстве $\mathscr{L}^\infty_{\widetilde{u}}$, т. е. $\mathscr{L}^\infty_{\widetilde{u}}=V\oplus\ker\widetilde{F}'$, $\dim V=k$; пусть, кроме того, $W\subset\ker\widetilde{F}'$ — подпространство, существование которого обеспечивается леммой 4.

Выберем такое (конечномерное) подмногообразие $\mathscr{U}\subset L_\infty([0,\ T];\ U)$, что $\widetilde{u}(\cdot)\in\mathscr{U}$ и $T_{\widetilde{u}(\cdot)}\mathscr{U}=V\oplus W\subset\mathscr{L}^\infty_{\widetilde{u}}$. В оставшейся части доказательства предложения вместо банахового многообразия всех допустимых управлений $L_\infty([0,\ T];\ U)$ будет использоваться лишь его подмногообразие $\mathscr{U}$. Поэтому, начиная с этого места и до конца доказательства, допустимыми считаются лишь управления $u(\cdot)$, лежащие в $\mathscr{U}$. Соответственно, полагаем

$$F=F|_{\mathscr{U}}:\mathscr{U}\to M^n,\quad \widetilde{F}':V\oplus W\to T_{\widetilde{x}_T}M^n,$$

$$\ker\widetilde{F}'=W,\quad \widetilde{F}'':W\times W\to\operatorname{coker}\widetilde{F}'.$$

Лемма 5. Пусть N — гладкое многообразие, $\Phi:N\to\mathbf{R}^n$ — гладкое отображение, $q\in N$. Обозначим Φ'_q, Φ''_q — соответственно дифференциал и гессиан отображения Φ в точке q. Тогда для всех таких $\hat{\Phi}:N\to\mathbf{R}^n$, что $\|\hat{\Phi}-\Phi\|_{\{q\},2}$ достаточно мала, имеем

i) $\operatorname{codim} \operatorname{im} \hat{\Phi}'_q \leqslant \operatorname{codim} \operatorname{im} \Phi'_q$;

ii) если $\operatorname{ind} \psi\Phi''_q \geqslant \operatorname{codim} \operatorname{im} \Phi'_q$, $\forall \psi \in (\operatorname{im} \Phi'_q)^{\perp} \setminus 0$, то и $\operatorname{ind} \psi\hat{\Phi}''_q \geqslant \operatorname{codim} \operatorname{im} \hat{\Phi}'_q$, $\forall \psi \in (\operatorname{im} \hat{\Phi}'_q)^{\perp} \setminus 0$.

Утверждение i) леммы очевидно. Утверждение ii) справедливо потому, что квадратичная форма $\psi\hat{\Phi}''_q$ близка к некоторой форме вида $\psi\Phi''_q$, суженной на подпространство коразмерности $(\operatorname{codim} \operatorname{im} \Phi'_q - \operatorname{codim} \operatorname{im} \hat{\Phi}'_q)$ в $\ker \Phi'_q$.

Определение 5. Пусть N — гладкое многообразие и $\Phi: N \to \mathbb{R}^n$ — гладкое отображение. Мы говорим, что отображение Φ существенно в точке $q \in N$, если для всякой окрестности $\mathcal{O}_q$ этой точки найдутся такие $\varepsilon > 0$, $m > 0$, что образ любого гладкого отображения $\hat{\Phi}: \mathcal{O}_q \to \mathbb{R}^n$, удовлетворяющего условию $\| \hat{\Phi} - \Phi \|_{\mathcal{O}_q, m} < \varepsilon$, содержит точку $\Phi(q)$, т. е. $\Phi(q) \in \hat{\Phi}(\mathcal{O}_q)$.

Лемма 6. Если дифференциал гладкого отображения $\Phi: N \to \mathbb{R}^n$ в точке $q \in N$ имеет ранг n, то Φ существенно в точке q. Эта лемма — простое следствие теоремы о неявной функции.

Поскольку все проводимые рассмотрения чисто локальные, в дальнейшем мы можем отождествлять многообразие допустимых управлений $\mathcal{U}$ с векторным пространством $T_{\tilde{u}(\cdot)}\mathcal{U} = W \oplus V$ и, кроме того, считать, что $M^n = \mathbb{R}^n$.

Лемма 7 (основная). Отображение $F: \mathcal{U} \to M^n$ существенно в «точке» $\tilde{u}(\cdot)$.

Еще недоказанная часть предложения 1 почти непосредственно вытекает из этой леммы. В самом деле, поскольку F существенно в «точке» $\tilde{u}(\cdot)$, то управление $\tilde{u}(\cdot)$ заведомо не является локально экстремальным. С другой стороны, если $g_t(u)$ — управляемая система, достаточно близкая к (1), и $G: u(\cdot) \mapsto \mapsto x_0 \circ \overrightarrow{\exp} \int_0^T g_t(u(\cdot))\, dt$, то, как следует из леммы 5, скалярные проекции $\psi\tilde{G}''$ гессиана $\tilde{G}''$ отображения G в «точке» $\tilde{u}(\cdot)$ имеют индекс не меньше, чем $\operatorname{codim}(\operatorname{im} \tilde{G}')$ — коразмерность образа дифференциала $\tilde{G}'$ отображения G в «точке» $\tilde{u}(\cdot)$. Таким образом, отображение $G: \mathcal{U} \to M^n$ также подпадает под действие основной леммы и, следовательно, является существенным в «точке» $\tilde{u}(\cdot)$.

Доказательство основной леммы. Мы воспользуемся индукцией по $k = \operatorname{codim}(\operatorname{im} \tilde{F}')$.

Первый шаг, $k = 1$. В этом случае ψ определено однозначно с точностью до скалярного множителя, форма $\psi\tilde{F}''$ знаконеопределена. Выберем $w_1, w_2 \in W$ таким образом, чтобы числа $\psi\tilde{F}''(w_1, w_1)$ и $\psi\tilde{F}''(w_2, w_2)$ имели противоположные знаки, $\psi\tilde{F}''(w_1, w_2) = 0$. Рассмотрим отображение

$$\Phi:(v, \alpha)\mapsto \tilde{F}'v+\alpha^2\tilde{F}''(w_1, w_1)+(1-\alpha)^2\tilde{F}''(w_2, w_2),$$

где $v\in V$, $\alpha\in\mathbf{R}$.

Образ этого отображения содержит окрестность начала координат. Более того, если $\Phi(v_0, \alpha_0)=0$, то дифференциал отображения Φ в точке (v_0, α_0) имеет ранг n, следовательно, Φ существенно в точке (v_0, α_0).

Пусть $\varepsilon\in\mathbf{R}$, рассмотрим отображение

$$(v, \alpha)\mapsto F\left(\tilde{u}(\cdot)+\frac{\varepsilon^2}{2}v+\varepsilon\alpha w_1+\varepsilon(1-\alpha)w_2\right).$$

Разложение в ряд Тейлора дает

$$F\left(\tilde{u}(\cdot)+\frac{\varepsilon^2}{2}v+\varepsilon\alpha w_1+\varepsilon(1-\alpha)w_2\right)=$$

$$=F(\tilde{u}(\cdot))+\frac{\varepsilon^2}{2}\Phi(v, \alpha)+O(\varepsilon^3)\quad(\varepsilon\to 0).$$

Из последнего равенства вытекает, что отображение F существенно в «точке» $\tilde{u}(\cdot)$.

Шаг индукции, $k>1$ произвольно. Обозначим $\ker\tilde{F}''=\{w_0\in W\mid\tilde{F}''(w_0, w)=0,\ \forall w\in W\}$.

i) Квадратичное отображение

$$w\mapsto\tilde{F}''(w, w),\quad w\in W,\tag{5}$$

существенно в любой точке $\hat{w}\in W\setminus\ker\tilde{F}''$.

В самом деле, дифференциал этого квадратичного отображения в точке $\hat{w}$ имеет вид $w\mapsto 2\tilde{F}''(\hat{w}, w)$. Следовательно, образ этого дифференциала равен $\tilde{F}''(\hat{w}, W)$. Поскольку $\hat{w}\notin\ker\tilde{F}''$, то $\dim\tilde{F}''(\hat{w}, W)>0$, поэтому $\operatorname{codim}\tilde{F}''(\hat{w}, W)=\hat{k}<k$.

Пусть $\psi\in\tilde{F}''(\hat{w}, W)^{\perp}$, проекция гессиана отображения (5) в точке $\hat{w}$ на направление ψ совпадает с квадратичной формой $2\psi\tilde{F}''$, суженной на подпространство $\hat{W}_0=\{w\in W\mid\tilde{F}''(\hat{w}, w)=0\}$. Поскольку индекс формы $\psi\tilde{F}''$ на W не меньше k, а коразмерность $\hat{W}_0$ в W равна $k-\hat{k}$, то индекс формы $2\psi\tilde{F}''\mid\hat{W}_0$ не меньше $\hat{k}$. Таким образом, в силу предположения индукции, отображение (5) существенно в точке $\hat{w}$.

ii) Квадратичное отображение (5) из W в $\operatorname{coker}\tilde{F}'$ сюръективно. Чтобы установить это, рассмотрим два случая: а) $\tilde{F}''(w, w)\neq 0$, $\forall w\notin\ker\tilde{F}''$. В этом случае образ отображения (5) замкнут в $\operatorname{coker}\tilde{F}'$. Если отображение (5) не сюръективно, то этот образ содержит граничные точки, отличные от начала в $\operatorname{coker}\tilde{F}'$. Последнее противоречит существенности отображения (5) в произвольной точке $w\in\ker\tilde{F}'$; б) $\exists\hat{w}\notin\ker\tilde{F}''$ такое, что $\tilde{F}''(\hat{w}, \hat{w})=0$. Поскольку отображение (5) существенно в точке $\hat{w}$, то образ этого отображения содержит окрестность начала; так как отображение (5) положительно однородно, то оно сюръективно.

iii) Отображение (5) существенно в точке $w=0$. Пусть $\mathcal{O}$ — некоторая окрестность начала в W. Из ii) следует, что образ этой окрестности при отображении (5) содержит окрестность начала в $\operatorname{coker}\tilde{F}'$. Пусть этот образ содержит шар радиуса $\rho>0$ с центром в начале. Если гладкое отображение $G:\mathcal{O}\to\to\operatorname{coker}\tilde{F}'$ достаточно близко к отображению (5), то, учитывая i), а также предположение индукции и лемму 5, получим, что $G(\mathcal{O})$ содержит окрестность точки $G(0)$. Более того, можно показать, что для всех G, близких к отображению (5), множества $G(\mathcal{O})$ содержат шары с центром в $G(0)$ одного и того же радиуса $\rho>0$.

iv) Отображение

$$\Phi:(v,\ w)\mapsto\tilde{F}'v+\tilde{F}''(w,\ w)$$

из $V\oplus W$ в $\mathbb{R}^n$ существенно в точке $(0,0)$. Это непосредственно следует из iii).

Существенность отображения $F:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^n$ в точке $\tilde{u}(\cdot)$ вытекает из iv) и разложения Тейлора:

$$F\left(\tilde{u}(\cdot)+\frac{\varepsilon^2}{2}v+\varepsilon w\right)=F(\tilde{u}(\cdot))+\frac{\varepsilon^2}{2}\Phi(v,\ w)+O(\varepsilon^3),$$

$$v\in V,\quad w\in W,\quad (\varepsilon\to 0).$$

Таким образом, основная лемма, а с ней и предложение 1 доказаны.

Вернемся к доказательству теоремы. Напомним, что $\dim\operatorname{coker}\tilde{F}'=k>0$. Введем обозначение $\underline{\operatorname{ind}}\tilde{F}''=\min\{\operatorname{ind}(\psi\tilde{F}'')\mid\psi\in\in(\operatorname{im}\tilde{F}'')^{\perp}\setminus 0\}$.

i) Пусть $\mathcal{U}$ — такое подмногообразие конечной коразмерности в $L_\infty([0,\ T];\ U)$, $\tilde{u}(\cdot)\in\mathcal{U}$ и подпространство $T_{\tilde{u}(\cdot)}\mathcal{U}$ трансверсально к $\ker\tilde{F}'$ в $\mathcal{L}^\infty_{\tilde{u}(\cdot)}(U)$. Обозначим через $\tilde{F}'_{\mathcal{U}}$ и $\tilde{F}''_{\mathcal{U}}$ — соответственно, дифференциал и гессиан отображения $F|_{\mathcal{U}}$ в «точке» $\tilde{u}(\cdot)$. Тогда, как нетрудно видеть, справедливы соотношения:

$$\tilde{F}'_{\mathcal{U}}=\tilde{F}'\mid T_{\tilde{u}(\cdot)}\mathcal{U},\quad \operatorname{im}\tilde{F}'_{\mathcal{U}}=\operatorname{im}\tilde{F}';$$

$$\tilde{F}''_{\mathcal{U}}=\tilde{F}''\mid T_{\tilde{u}(\cdot)}\mathcal{U}\cap\ker\tilde{F}',\quad \underline{\operatorname{ind}}\tilde{F}''_{\mathcal{U}}\geqslant\underline{\operatorname{ind}}\tilde{F}''-\operatorname{codim}\mathcal{U}.$$

Предположим теперь, что $l=k-\underline{\operatorname{ind}}\tilde{F}''\leqslant 0$. Если $\operatorname{codim}\mathcal{U}\leqslant\leqslant -l$, то $\dim\operatorname{coker}\tilde{F}'_{\mathcal{U}}-\underline{\operatorname{ind}}\tilde{F}''_{\mathcal{U}}\leqslant 0$. Из рассуждений части II) доказательства предложения 1 следует, что росток отображения $F|\mathcal{U}$ в точке $\tilde{u}(\cdot)$ не является экстремальным. Таким образом, локальный индекс экстремальности управления $\tilde{u}(\cdot)$ относительно системы (1) не превосходит l. Более того, поскольку величина $\dim\operatorname{coker}\tilde{F}' - \underline{\operatorname{ind}}\tilde{F}''$ полунепрерывно сверху зависит от системы, то и индекс квазиэкстремальности $\tilde{u}(\cdot)$ относительно системы (1) не превосходит l.

Выписанное выше неравенство, связывающее $\underline{\operatorname{ind}}\tilde{F}''_{\mathcal{U}}$ и $\operatorname{ind}\tilde{F}''$ может быть уточнено следующим образом:

$$\max_{\operatorname{codim}\mathcal{U}=\alpha} \underline{\operatorname{ind}}\tilde{F}''_{\mathcal{U}} = \underline{\operatorname{ind}}\tilde{F}'' - \alpha, \quad \forall\alpha \geqslant 0.$$

(Это следствие стандартной теоремы Куранта — Фишера о минимаксном представлении собственных чисел). В частности, существует такое многообразие $\mathcal{U}_l$ коразмерности $1-l$, что

$$\underline{\operatorname{ind}}\tilde{F}''_{\mathcal{U}_l} = \operatorname{ind}\tilde{F}'' + l - 1,$$

$$\dim\operatorname{coker}\tilde{F}'_{\mathcal{U}_l} - \operatorname{ind}\tilde{F}''_{\mathcal{U}_l} = 1.$$

Из рассуждений части I) доказательства предложения 1 следует, что сколь угодно близко к $f_t(u)$ найдется такая система $g_t(u)$, что росток в «точке» $u(\cdot)$ отображения $G\,|\,\mathcal{U}_l : u(\cdot) \mapsto$, $\mapsto x_0 \circ \overrightarrow{\exp}\int\limits_0^T g_t(u(t))\,dt$ является экстремальным. Более того, если подмногообразие $\mathcal{U} \subset L_\infty([0, T]; U)$ достаточно близко к $\mathcal{U}_l$, то *росток в «точке» $\tilde{u}(\cdot)$ отображения $G\,|\,\mathcal{U}$ также является* экстремальным. Таким образом, индекс квазиэкстремальности управления $\tilde{u}(\cdot)$ равен l.

ii) Пусть $0 \leqslant d \leqslant k$, $\Phi: M^n \to \mathbb{R}^{n-d}$ — гладкое отображение, регулярное в точке $F(\tilde{u}(\cdot))$, причем дифференциал $\Phi'_{F(\tilde{u})}: T_{F(\tilde{u})}M^n \to \mathbb{R}^{n-d}$ отображения Φ в точке $F(\tilde{u}(\cdot))$ удовлетворяет условию: $\ker\Phi'_{F(\tilde{u})} \cap \operatorname{im}\tilde{F}' = 0$. Обозначим через $\widetilde{\Phi\circ F}'$ и $\widetilde{\Phi\circ F}''$ — соответственно, дифференциал и гессиан отображения $\Phi\circ F$ в «точке» $\tilde{u}(\cdot)$,

$$\underline{\operatorname{ind}}\,\widetilde{\Phi\circ F}'' \overset{de}{=} \min\{\operatorname{ind}\chi\widetilde{\Phi\circ F}''\,|\,\chi \in (\operatorname{im}\widetilde{\Phi\circ F}')^{\perp}\setminus 0\}.$$

Тогда справедливы соотношения:

$$\widetilde{\Phi\circ F}' = \Phi'_{F(\tilde{u})}\circ\tilde{F}', \quad \operatorname{codim}\operatorname{im}\widetilde{\Phi\circ F}' = k - d;$$

$$\widetilde{\Phi\circ F}'' = \Phi'_{F(\tilde{u})}\circ\tilde{F}'', \quad \underline{\operatorname{ind}}\,\widetilde{\Phi\circ F}'' \geqslant \operatorname{ind}\tilde{F}''.$$

Предположим, что $l = k - \underline{\operatorname{ind}}\tilde{F}'' > 0$. Если $d \geqslant l$, то $\dim\operatorname{coker}\widetilde{\Phi\circ F}' - \underline{\operatorname{ind}}\,\widetilde{\Phi\circ F}'' \leqslant 0$. Из рассуждений части II) доказательства предложения 1 следует, что росток отображения

$\Phi\circ F$ в точке $\tilde{u}(\cdot)$ не является экстремальным. Таким образом, локальный индекс экстремальности управления $\tilde{u}(\cdot)$ относительно системы (1) не превосходит l. В силу полунепрерывности сверху величины $\dim\operatorname{coker}\tilde{F}' - \underline{\operatorname{ind}}\tilde{F}''$, индекс квазиэкстремальности управления $u(\tilde{\cdot})$ также не превосходит l.

При $d \leqslant k-1$ неравенство $\underline{\operatorname{ind}}\,\widetilde{\Phi\circ F''} \geqslant \underline{\operatorname{ind}}\tilde{F}''$ может быть уточнено:

$$\min(\operatorname{ind}\widetilde{\Phi\circ F''} \mid \Phi : M^n \to \mathrm{R}^{n-d}\} = \underline{\operatorname{ind}}\tilde{F}'', \quad 0 \leqslant d \leqslant k-1.$$

В частности, существует такое отображение $\Phi_l : M^n \to \mathrm{R}^{n-l+1}$, что

$$\dim\operatorname{coker}\widetilde{\Phi_l\circ F'} - \underline{\operatorname{ind}}\,\widetilde{\Phi_l\circ F''} = 1.$$

Из рассуждений части 1) доказательства предложения 1 следует, что сколь угодно близко к $f_t(u)$ найдется такая система $g_t(u)$, что росток в «точке» $\tilde{u}(\cdot)$ отображения

$$\Phi_l\circ G : u(\cdot) \mapsto \Phi_l\left(x_0\circ\overrightarrow{\exp}\int_0^T g_t(u(t))\,dt\right), \quad u(\cdot) \in L_\infty([0, T]; U)$$

является экстремальным. Более того, если отображение $\Phi \in C^\infty(M^n, \mathrm{R}^{n-l+1})$ достаточно близко к Φ_l, то росток в «точке» $\tilde{u}(\cdot)$ отображения $\Phi\circ G$ также является экстремальным. Таким образом, индекс квазиэкстремальности управления $\tilde{u}(\cdot)$ равен l.

Доказательство теоремы 1 закончено.

Замечание. Из доказательства теоремы видно, что ее утверждение остается справедливым, если стандартную топологию в пространстве допустимых управлений заменить на конечномерно-открытую.

§ 2. Управляемые системы с ограничениями на управления

До сих пор рассматривалась задача управления, в которой множеством управляющих параметров было гладкое многообразие. Теперь перейдем к рассмотрению задач с множествами управляющих параметров более общей природы, включая многообразия с краем и всевозможными «углами».

1°. Мы имеем дело с сравнительно узким классом многообразий с углами и начнем с краткого описания их свойств; несколько подробнее см. об этом в п. 3.2 последней статьи настоящего тома.

Определение 1. Пусть U — гладкое многообразие. Замкнутое подмножество $R \subset U$ называется многообразием с углами, если каждая точка $u \in \mathrm{R} \subset U$ обладает такой окрестностью $\mathcal{O}$ в M и локальными координатами $\varphi : \mathcal{O} \to \mathbf{R}^r$, $\varphi(u) = 0$, что $\varphi(R \cap \mathcal{O})$ есть выпуклый многогранный конус в $\mathbf{R}^r$ с вершиной в нуле.

Вектор $\xi \in T_u U$ называется касательным к подмножеству R, если существует такая гладкая кривая $\gamma:[0,\varepsilon]\to R$, что $\gamma(0)=u$, $\left.\frac{d\gamma}{d\xi}\right|_{\xi=0}=\xi$.. Совокупность всех касательных к R в точке u векторов образует конус в $T_u U$, обозначим его $T_u R$. Ясно, что если R — многообразие с углами, то $T_u R$ — выпуклый многогранный конус. Более того, из определения 1 вытекает, что существует диффеоморфизм $\Phi:\mathcal{O}_u\to T_u U$ некоторой окрестности точки u на $T_u U$, удовлетворяющий условию

$$\Phi(R\cap\mathcal{O}_u)=T_u R. \tag{1}$$

Всякий выпуклый многогранный конус задается конечной системой линейных неравенств, в частности, $T_u R= =\{\xi\in T_u U\,|\,\langle\omega_i,\xi\rangle\leqslant 0,\ i=1,\ldots,N\}$ для некоторых $\omega_1,\ldots,\omega_N\in \in T_u{}^*U$. Следовательно, произвольное многообразие с углами локально задается конечной системой гладких неравенств. В самом деле, если диффеоморфизм $\Phi:\mathcal{O}_u\to T_u U$ удовлетворяет условию (1), то

$$R\cap\mathcal{O}_u=\{v\in\mathcal{O}_u\,|\,\langle\omega_i,\Phi(v)\rangle\leqslant 0,\ i=1,\ldots,N\}.$$

Определение 2. Скажем, что многообразия с углами R_1, $R_2\subset U$ трансверсальны в точке $u\in R_1\cap R_2$, если

$$(-T_u R_1)\dotplus T_u R_2=T_u U.$$

В частности, гладкое подмногообразие $N\subset U$ трансверсально данному многообразию с углами R в точке $u\in N\cap R$ в том и только том случае, когда плоскость $T_u N$ не содержится в гиперплоскости, опорной к конусу $T_u R$.

Определение 3. Открытой гранью многообразия с углами R называется произвольное максимальное гладкое связное подмногообразие, содержащееся в R (подмногообразие считается максимальным, если оно не содержится ни в каком большем подмногообразии, лежащем в R). Замкнутой гранью многообразия с углами R называется замыкание в R открытой грани.

Как нетрудно показать, две различные открытые грани многообразия с углами R имеют пустое пересечение. Следовательно, каждая точка $u\in R$ содержится ровно в одной открытой грани, которую мы обозначим Γ_u. Кроме того, произвольное компактное подмножество в R пересекается лишь с конечным числом граней. Далее, если Γ — открытая грань в R и $\bar\Gamma$ — ее замыкание в R, то множество $\bar\Gamma\setminus\Gamma$ состоит из целых граней многообразия с углами R, при этом, как замкнутая грань $\bar\Gamma$, так и множество $\bar\Gamma\setminus\Gamma$ сами являются многообразиями с углами. Множество $\bar\Gamma\setminus\Gamma$ называется полиэдральный границей граней Γ и $\bar\Gamma$ (обозначение $\partial_\pi\Gamma$ или $\partial_\pi\bar\Gamma$).

Отношение включения «$\subset$» определяет частичный порядок на совокупности всех замкнутых граней многообразия с углами. Оно порождает также отношение частичного упорядочения на совокупности всех открытых граней: грань Γ_1 подчинена грани Γ_2, если $\Gamma_1 \subset \overline{\Gamma}_2$. Как нетрудно видеть, любая замкнутая грань является топологическим многообразием с краем (край, вообще говоря, не гладкий), а максимальные замкнутые грани — это в точности компоненты связности множества R.

Пусть $u \in R$ и $\overline{\Gamma}_1, \ldots, \overline{\Gamma}_k$ — все замкнутые грани, содержащие точку u. Отображение, сопоставляющее каждой грани $\overline{\Gamma}_i$ выпуклый конус $T_u\overline{\Gamma}_i$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между замкнутыми гранями многообразия с углами R, содержащими u, и замкнутыми гранями выпуклого конуса T_uR. Такое соответствие сохраняет отношение включения. При этом $T_u\overline{\Gamma}_u = T_u\Gamma_u$ есть максимальное подпространство в конусе T_uR.

Пусть $h : U \to M$ — гладкое отображение многообразия U в некоторое гладкое многообразие M, R — многообразие с углами в U, $u \in R$ и Γ_u — открытая грань, содержащая точку u.

Определение 4. Дифференциалом отображения $h|R$ в точке u называется сужение на конус T_uR дифференциала $h' : T_uU — T_{h(u)}M$ отображения h в точке u. Образом дифференциала отображения $h|R$ в точке u является выпуклый многогранный конус $h'(T_uR)$.

Определение 5. Нуль-гессианом отображения $h|R$ называется гессиан

$$(h \mid \Gamma_u)'' : \ker (h' \mid T_u\Gamma_u) \times \ker (h' \mid T_u\Gamma_u) \to \operatorname{coker} (h' \mid T_u\Gamma_u)$$

отображения $h|\Gamma_u$ в точке u.

Замечание 1. В отличие от дифференциала, нульгессиан отображения $h|R$, вообще говоря, не совпадает с сужением гессиана $h'' : \ker h' \times \ker h' \to \operatorname{coker} h'$ на соответствующее подпространство. В самом деле, поскольку, вообще говоря, $h'(T_uU) \neq h'(T_u\Gamma_u)$, то и $\operatorname{coker} h' \neq \operatorname{coker} h' \mid T_u\Gamma_u$, следовательно, квадратичные отображения $h'' \mid (T_u\Gamma_u \cap \ker h')$ и $(h \mid \Gamma_u)''$ принимают значения в разных пространствах.

Замечание 2. Мы используем название нуль-гессиан (а не гессиан) потому, что соответствующее квадратичное отображение содержит, вообще говоря, не всю инвариантную информацию о вторых производных отображения $h|R$. Определение «истинного» гессиана мы здесь приводить не будем, поскольку для вычисления квазиэкстремальности в задачах с ограничениями оказывается достаточным нуль-гессиана. Эта ситуация типична, «истинный» гессиан почти всегда, кроме некоторых исключительных случаев сводится к нуль-гессиану.

2°. Пусть $T > 0$ — некоторое число и R — многообразие с углами в U. Обозначим через $L_\infty([0, T]; R)$ совокупность всех таких отображений $u(\cdot) \in L_\infty([0, T]; R)$, что $\overline{u(E_{u(\cdot)})} \subset R$ для некоторого подмножества полной меры $E_{u(\cdot)}$ в $[0, T]$. Подмножество $L_\infty([0, T]; R)$ банахового многообразия $L_\infty([0, T]; U)$ обладает свойствами, аналогичными свойствам подмногообразий с углами конечномерных многообразий.

Обозначим через $\mathcal{G}$ множество всех открытых граней в R. Ясно, что $\mathcal{G}$ — не более чем счетное множество. Пусть $t \mapsto \Gamma_t$ — произвольное измеримое отображение из $[0, T]$ в $\mathcal{G}$, множество

$$\Gamma_{\cdot} = \{u(\cdot) \in L_\infty([0, T]; R) \mid u(t) \in \Gamma_t \text{ для почти всех } t \in [0, T]\}$$

называется открытой гранью множества $L_\infty([0, T]; R)$. Аналогично,

$$\bar{\Gamma}_{\cdot} = \{u(\cdot) \in L_\infty([0, T]; R) \mid u(t) \in \bar{\Gamma}_t \text{ для п. в. } t \in [0, T]\}$$

— замкнутая грань множества $L_\infty([0, T]; R)$. Легко видеть, что всякая открытая грань $\Gamma_{\cdot}$ является банаховым подмногообразием в $L_\infty([0, T]; U)$.

Любое отображение $u(\cdot) \in L_\infty([0, T]; R)$ лежит в единственной открытой грани $t \mapsto \Gamma_{u(t)}$ эта грань обозначается $\Gamma_{u(\cdot)}$.

Напомним, что касательное пространство к $L_\infty([0, T); U)$ в «точке» $u(\cdot)$ состоит из таких измеримых ограниченных в существенном отображений $t \mapsto v(t)$, что $v(t) \in T_{u(t)}U$, $\forall t \in [0, T]$. Такое пространство мы обозначили символом $\mathcal{L}^\infty_{u(\cdot)}$. Соответственно, касательным конусом к множеству $L_\infty([0, T]; R)$ в «точке» $u(\cdot)$ будем называть совокупность всех таких измеримых ограниченных в существенном отображений $t \mapsto v(t)$, что $v(t) \in T_{u(t)}U$, $\forall t \in [0, T]$. Этот конус будем обозначать символом $\mathcal{L}^\infty_{u(\cdot)}(R)$. Максимальным подпространством в $\mathcal{L}^\infty_{u(\cdot)}(R)$ является

$$T_{u(\cdot)}\Gamma_{u(\cdot)} = \{v(\cdot) \in \mathcal{L}^\infty_{u(\cdot)}(R) \mid v(t) \in T_{u(t)}\Gamma_{u(t)}, \ \forall t \in [0, T]\}.$$

Следующее определение трансверсальности, по существу, повторяет конечномерное.

Определение 6. Пусть $\mathcal{N}$ — гладкое банахово подмногообразие конечной коразмерности в $L_\infty([0, T]; U)$. Мы говорим, что $\mathcal{N}$ трансверсально множеству $L_\infty([0, T]; R)$ в «точке» $u(\cdot) \in \mathcal{N} \cap L_\infty([0, T]; R)$, если $\overline{(T_{u(\cdot)}\mathcal{N} + \mathcal{L}^\infty_{u(\cdot)}(R))} = \mathcal{L}^\infty_{u(\cdot)}$ (иными словами, если подпространство $T_{u(\cdot)}\mathcal{N}$ не содержится в гиперплоскости, опорной к конусу $\mathcal{L}^\infty_{u(\cdot)}(R)$).

Пусть $H: L_\infty([0, T]; U) \to M^n$ — некоторое дважды непрерывно дифференцируемое в «точке» $u(\cdot) \in L_\infty([0, T]; U)$ отображение банахового многообразия $L_\infty([0, T]; U)$ в конечномерное многообразие M^n. Пусть $H': \mathcal{L}^\infty_{u(\cdot)} \to T_{H(u(\cdot))}M^n$ — дифференциал отображения H в «точке» $u(\cdot)$. Тогда сужение $H' \mid \mathcal{L}^\infty_{u(\cdot)}(R)$ называется дифференциалом отображения $H \mid L_\infty([0, T]; R)$.

Нуль-гессианом отображения $H \mid L_\infty([0, T]; R)$ в «точке» $u(\cdot)$ называется гессиан

$$(H \mid \Gamma_u)'': \ker H' \mid T_u\Gamma_u \times \ker H' \mid T_u\Gamma_u \to \operatorname{coker} H' \mid T_u\Gamma_u$$

отображения $H \mid \Gamma_u$ в «точке» $u(\cdot)$.

Пусть $C^{\infty}_{u(\cdot)}(L_\infty([0,T];U);M^n)\ni\mathcal{H}$ — гладкий росток в точке $u(\cdot)\in L_\infty([0,T];R)$. Обозначим через $\mathcal{H}_R$ росток $\mathcal{H}\mid L_\infty([0,T];R)$. В предыдущем параграфе было дано определение порядка экстремальности ростка $\mathcal{H}$. Аналогичное понятие может быть введено и для ростка $\mathcal{H}_R$.

Определение 7. Росток $\mathcal{H}_R$ называется экстремальным, если существует такая окрестность $\mathcal{O}$ точки $u(\cdot)$ в $L_\infty([0,T];U)$ и представитель $H:\mathcal{O}\to M^n$ ростка $\mathcal{H}$, что $H(u(\cdot))\in\partial H(\mathcal{O}\cap L_\infty([0,T];R))$, т. е. точка $H(u(\cdot))$ лежит на границе множества $H(\mathcal{O}\cap L_\infty([0,T];R))$.

Определение 8. i) Предположим, что $\mathcal{H}_R$ — экстремальный росток. Скажем, что $\mathcal{H}_R$ имеет индекс экстремальности $k>0$, если k — наименьшее такое число, что для почти всякого ростка $\Phi\in C^{\infty}_{\mathcal{H}(u)}(M^n, \mathbf{R}^{n-k})$ росток $(\Phi\circ\mathcal{H})_R$ не является экстремальным. ii) Предположим, что росток $\mathcal{H}_R$ не является экстре-стремальным. Скажем, что $\mathcal{H}_R$ имеет индекс экстремальности $l\leqslant 0$, если l — наименьшее такое число, что для почти всякого ростка $\mathcal{U}$ подмногообразия коразмерности $(-l)$ в точке $u(\cdot)$, трансверсального к $L_\infty([0,T];R)$, росток $\mathcal{H}_R|\mathcal{U}\cap L_\infty([0,T];R)$ не является экстремальным. Если наименьшего l не существует, то индекс экстремальности считается равным $(-\infty)$.

Замечание 3. Требование трансверсальности приходится включать в определения, поскольку, вообще говоря, не почти всякий росток в точке $u(\cdot)$ подмногообразия конечной коразмерности в $L_\infty([0,T];U)$ является трансверсальным к $L_\infty([0,T];R)$.

3°. Рассмотрим, наконец, управляемую систему с геометрическими ограничениями на управления:

$$\dot{x}=x\circ f_t(u),\quad x\in M^n,\quad u\in R\subset U,\quad t\in[0,T]. \tag{2}$$

Здесь все символы имеют тот же смысл, что и для системы (1.1), а R — заданное подмногообразие с углами в U. Элементы множества $L_\infty([0,T];R)$ будем называть допустимыми управлениями для системы (2). В множестве допустимых управлений вводится топология, индуцированная топологией пространства $L_\infty([0,T];R)$. Линейное пространство всех управляемых систем вида (2) с фиксированными многообразиями M^n, U временным отрезком $[0,T]$ и многообразием с углами R обозначим символом $\mathrm{CS}_R(M^n,U,[0,T])$. Если «забыть про множество R», то управляемая система вида (2) превращается в систему вида (1.1). Иными словами, пространства $\mathrm{CS}_R(M^n,U,[0,T])$ и $CS_R(M^n,U,[0,T])$ состоят из одних и тех же семейств $f_t(u)$, $t\in[0,T]$, $u\in U$ нестационарных векторных полей на M^n. В частности, полунормы $\|f\|_{K,\alpha}$, $W\Subset M^n\times U$, $\alpha\leqslant 0$ (см. стр. 4), определяют структуру пространства Фреше в $\mathrm{CS}_R(M^n,U,[0,T])$.

Зафиксируем точку $x_0 \in M^n$ и рассмотрим отображение $F_R : u(\cdot) \mapsto x_0 \circ \overrightarrow{\exp} \int\limits_0^T f_t(u(t))\,dt$, отображающее множество допустимых управлений $L_\infty([0, T]; R)$ в M^n. Таким образом, $F_R = F \mid L_\infty([0, T]; R)$ (см. стр. 110).

Определение. Пусть $k \in [-\infty, n]$. Допустимое управление $\widetilde{u}(\cdot)$ имеет локальный индекс экстремальности k относительно управляемой системы (2) с начальным условием x_0, если росток отображения $F_R : L_\infty([0, T]; R) \to M^n$ в «точке» $\widetilde{u}(\cdot)$ имеет индекс экстремальности k.

Аналогичным образом на задачи с ограничениями переносятся определения индекса квазиэкстремальности и квазиэкстремальности данного управления. При этом индекс квазиэкстремальности управления $\widetilde{u}(\cdot)$ относительно данной системы $f_t(u)$, $u \in R$ является верхним пределом локальных индексов экстремальности $\widetilde{u}(\cdot)$ относительно произвольных систем $g_t(u)$, $u \in R$, при g стремящемся к f. В частности, индекс квазиэкстремальности данного управления полунепрерывно сверху зависит от системы $f \in CS_R(M, U, [0, T])$.

Зафиксируем раз и навсегда допустимое управление $\widetilde{u}(\cdot)$, и пусть:

$\widetilde{F}'_R : \mathscr{L}^\infty_{\widetilde{u}}(R) \to T_{\widetilde{x}_T} M_n$ — дифференциал отображения F_R в «точке» $\widetilde{u}(\cdot)$;

$\widetilde{F}'_{R0} = \widetilde{F}'_R \mid T_{\widetilde{u}} \Gamma_{\widetilde{v}}$ — сужение $\widetilde{F}'_R$ на максимальное подпространство в $\mathscr{L}^\infty_{\widetilde{u}}(R)$;

$\widetilde{F}''_{R0} : \ker \widetilde{F}'_{R0} \times \ker \widetilde{F}'_{R0} \to \operatorname{coker} \widetilde{F}'_{R0}$ — нуль-гессиан отображения F_R в «точке» $\widetilde{u}(\cdot)$.

При описании выражений для $\widetilde{F}'_R$ и $\widetilde{F}''_{R0}$ мы, без специальных оговорок, будем использовать обозначения, введенные при выводе формул дифференциала и гессиана в задаче без ограничений (стр. 112—113).

В соответствии с общими определениями

$$\widetilde{F}'_R = \widetilde{F}' \mid \mathscr{L}^\infty_{\widetilde{u}}(R), \quad \widetilde{F}'_R v(\cdot) = \int\limits_0^T x_T \circ D^1_t v(t)\,dt, \quad v(\cdot) \in \mathscr{L}^\infty_{\widetilde{u}}(R),$$

$$\operatorname{im} \widetilde{F}'_R = \operatorname{conv} \{\widetilde{x}_T \circ D^1_t v \mid v \in T_{\widetilde{u}(t)} R,$$

t — точка Лебега отображения $\tau \mapsto \widetilde{x}_T \circ D^1_\tau\}$

$$\operatorname{im} \widetilde{F}'_{R0} = \operatorname{span} \{x_T \circ D^1_t v \mid v \in T_{\widetilde{u}(t)} \Gamma_{\widetilde{u}(t)},$$

t — точка Лебега отображения $\tau \mapsto \widetilde{x}_T \circ D^1_\tau\}$.

Пусть

$$\tilde{f}^{(2)}_{\Gamma_{\tilde{u}(t)}}: T_{\tilde{u}(t)}\Gamma_{\tilde{u}(t)} \times T_{\tilde{u}(t)}\Gamma_{\tilde{u}(t)} \to \operatorname{Der} M^n / \tilde{f}'_t (T_{\tilde{u}(t)}\Gamma_{\tilde{u}(t)})$$

— второй дифференциал отображения $u \mapsto f_t(u)$ из гладкого многообразия $\Gamma_{\tilde{u}(t)}$ в $\operatorname{Der} M^n$ в точке $\tilde{u}(t)$, и

$$D^2_{\Gamma_{\tilde{u}(t)}}(v_1, v_2) = \operatorname{Ad} \tilde{P}^{-1}_{T,t} \tilde{f}^{(2)}_{\Gamma_{\tilde{u}(t)}}(v_1, v_2), \quad \forall v_1, v_2 \in T_{\tilde{u}(t)}\Gamma_{\tilde{u}(t)}.$$

Используя лемму 1.1 и определение нуль-гессиана, получаем

$$\tilde{F}''_{R0}(v_1(\cdot), v_2(\cdot)) = \tilde{x}_T \circ \int_0^T D^2_{\Gamma_{\tilde{u}(t)}}(v_1(t), v_2(t))\,dt +$$
$$+ \tilde{x}_T \circ \int_0^T \left[\int_0^t D^1_\tau v_1(\tau)\,d\tau, \; D^1_t v_2(t) \right] dt + \operatorname{im} \tilde{F}'_{R0},$$
$$\forall v_i \in \ker \tilde{F}'_{R0}, \quad i = 1, 2.$$

Перед тем, как формулировать основной результат, напомним, что полярой конуса $\operatorname{im} \tilde{F}'_R \subset T_{\tilde{x}_T} M^n$ называется конус

$$(\operatorname{im} \tilde{F}'_R)^\circ = \{\psi \in T^*_{\tilde{x}_T} \mid \psi\xi \leqslant 0, \quad \forall \xi \in \operatorname{im} \tilde{F}'_R\} =$$
$$= \left\{\psi \in T^*_{\tilde{x}_T} \mid \psi D^1_t v \leqslant 0, \quad \forall v \in T_{\tilde{u}(t)} R \text{ для п. в. } t \in [0, T]\right\}.$$

Ясно, что $(\operatorname{im} \tilde{F}'_R)^\circ \subset (\operatorname{im} \tilde{F}'_{R0})^\perp = (\operatorname{coker} \tilde{F}'_{R0})^*$.

В то же время, для любого $\psi \in (\operatorname{coker} \tilde{F}'_{R0})^*$ определено выражение $\psi \tilde{F}''_{R0}$, представляющее собой скалярную квадратичную форму.

Теорема 1. Пусть $\tilde{u}(\cdot)$ — допустимое управление. Если $(\operatorname{im} \tilde{F}'_R)^\circ = \{0\}$, то индекс квазиэкстремальности управления $\tilde{u}(\cdot)$ относительно системы (2) равен $(-\infty)$. Если $(\operatorname{im} \tilde{F}'_R)^\circ \neq 0$, то индекс квазиэкстремальности этого управления относительно системы (2) равен

$$\dim \operatorname{coker} \tilde{F}'_{R0} - \min \{\operatorname{ind}(\psi \tilde{F}''_{R0}) \mid \psi \in (-\operatorname{im} \tilde{F}'_R)^\circ \setminus 0\}.$$

Доказательство. Условие $\operatorname{coker} \tilde{F}'_R = 0$ означает, что $\tilde{F}'(\mathscr{L}^\infty_{\tilde{u}}(R)) = T_{F(\tilde{u})} M^n$. Доказательство теоремы в этом случае мало чем отличается от доказательства соответствующей части теоремы 1. Мы не будем на нем останавливаться и предположим сразу, что $\dim \operatorname{coker} \tilde{F}'_{R0} = k > 0$.

Предложение 1. Допустимое управление $\tilde{u}(\cdot)$ в том и только том случае имеет положительный индекс квазиэкстремальности, когда существует такой ковектор $\psi \in (-\operatorname{im} \tilde{F}'_R)^\circ$, $\psi \neq 0$, что скалярная квадратичная форма $\psi \tilde{F}''_{R0}$ имеет индекс не больше, чем $k - 1$.

Это предложение является ключевым, вывод из этого утверждения теоремы почти совпадает с аналогичным выводом при доказательстве теоремы 1.

Доказательство предложения 1.

1) Достаточность. Предположим, что некоторый ненулевой ковектор $\psi \in T^*_{F(\tilde{u})}M^n$ удовлетворяет условиям: $\psi\tilde{F}'v(\cdot) \geqslant 0$, $\forall v(\cdot) \in \mathscr{L}^\infty_{\tilde{u}}$, форма $\psi\tilde{F}''_{R0}$ имеет индекс $l \leqslant k-1$.

Пусть в многообразии U задана некоторая риманова метрика, в этом случае мы можем отождествлять пространства T_uU и T^*_uU, $u \in U$. Для всякого $t \in [0, T]$ конус $T_{\tilde{u}(t)}R \cap (T_{\tilde{u}(t)}\Gamma_{\tilde{u}(t)})^\perp$ является острым, при этом любой вектор $v \in T_{\tilde{u}(t)}R$ однозначно представляет в виде $v = v_0 + v_1$, где $v_1 \in T_{\tilde{u}(t)}\Gamma_{\tilde{u}(t)}$, $v_0 \in T_{\tilde{u}(t)}R \cap (T_{\tilde{u}(t)}\Gamma_{\tilde{u}(t)})^\perp$. Ясно, что $\tilde{x}_T\circ(\psi D^1_t v_0) = 0$, $\tilde{x}_T\circ(\psi D^1_t v_1) \geqslant 0$. Используя остроту конусов $T_{\tilde{u}(t)}R \cap (T_{\tilde{u}(t)}\Gamma_{\tilde{u}(t)})^\perp$, нетрудно построить такую, сколь угодно близкую к $f_t(u)$, управляемую систему $\hat{f}_t(u)$, что $\hat{f}_t(u) = f_t(u)$ $\forall u \in \Gamma_{\tilde{u}(t)}$, $t \in [0, T]$ и, одновременно, при некотором $\alpha > 0$ выполняется неравенство

$$\tilde{x}_T\circ(\psi\hat{D}^1_t v) \overset{\text{def}}{=} \tilde{x}_T\circ(\psi \operatorname{Ad} \tilde{p}^{-1}_{T,t}\tilde{\hat{f}}'_t v) \geqslant \alpha |v|,$$

$$\forall t \in [0, T], \quad v \in T_{\tilde{u}(t)}R \cap (T_{\tilde{u}(t)}\Gamma_{\tilde{u}(t)})^\perp.$$

Следовательно,

$$\psi\tilde{\hat{F}}'v(\cdot) \geqslant \alpha \int_0^T |v(t)|\,dt = \alpha \|v(\cdot)\|_1,$$
$$\forall v(\cdot) \in \mathscr{L}^\infty_{\tilde{u}}(R) \cap (T_{\tilde{u}}\Gamma_{\tilde{u}})^\perp \tag{3}$$

(здесь $\tilde{\hat{F}}'$ — дифференциал отображения

$$u(\cdot) \mapsto x_0 \circ \overrightarrow{\exp} \int_0^T \hat{f}_t(u(t))\,dt = \hat{F}(u(\cdot))$$

в «точке» $\tilde{u}(\cdot)$). Из последнего неравенства и тождества $\psi\tilde{\hat{F}}' \mid T_{\tilde{u}}\Gamma_{\tilde{u}} = \psi\tilde{F}' \mid T_{\tilde{u}}\Gamma_{\tilde{u}} = 0$ вытекает, в частности, что $\ker \tilde{\hat{F}}'_R = \ker \tilde{F}'_R \cap T_{\tilde{u}}\Gamma_{\tilde{u}}$.

Остается подходящим образом возмутить отображение $F \mid \Gamma_{\tilde{u}} = \hat{F} \mid \Gamma_{\tilde{u}}$. Поскольку $\Gamma_{\tilde{u}}$, в отличие от $L_\infty([0, T]; R)$ является банаховым многообразием, то, рассуждая почти дословно также, как в соответствующем месте доказательства теоремы 1, можно построить такую, сколь угодно близкую к $\hat{f}_t(u)$, управляемую систему $g_t(u)$, что для дифференциала $\tilde{G}'$ и гессиана

$\widetilde{G}''_{R0}$ отображения $G: u(\cdot) \mapsto x_0 \circ \overrightarrow{\exp} \int\limits_0^T g_t(u(t))\,dt$ в «точке» $\widetilde{u}(\cdot)$ справедливы соотношения:

а) $\widetilde{G}' \mid (T_{\widetilde{u}}\Gamma_{\widetilde{u}})^{\perp} \equiv \widetilde{\widetilde{F}}' \mid (T_{\widetilde{u}}\Gamma_{\widetilde{u}})^{\perp}$;

б) $|\psi\widetilde{G}''_{R0}(v(\cdot), v(\cdot))| \geqslant \beta \| v(\cdot) \|_2^2$, для некоторого $\beta > 0$ и $\forall v(\cdot) \in \ker \widetilde{G}'$. Соотношения а), б) с учетом неравенства (3), влекут локальную экстремальность управления $\widetilde{u}(\cdot)$ относительно системы $g_t(u)$, $u \in R$. Доказательство этого факта не отличается от доказательства предложения 1.2.

II) Необходимость. Пусть $\operatorname{codim}(\operatorname{im} \widetilde{F}'_{R0}) = k > 0$, и для всякого ненулевого ковектора $\psi \in (\operatorname{im} \widetilde{F}'_R)^0$ форма $\psi\widetilde{F}''_{R0}$ имеет индекс не меньше k. Требуется доказать, что индекс квазиэкстремальности управления $\widetilde{u}(\cdot)$ неположителен.

Доказательство проходит по той же схеме, что и доказательство аналогичного утверждения для задачи без ограничений. Необходимо только «подправить» формулировки соответствующих лемм, чтобы учесть ограничения.

Лемма 1.4′. Существует такой конечномерный полиэдральный выпуклый конус $K \subset \mathscr{L}^{\infty}_{\widetilde{u}}(R)$, что $W = K \cap \ker \widetilde{F}'_{R0}$ является линейным пространством, причем для всякого ненулевого $\psi \in \widetilde{F}'(K)^{\circ}$ квадратичная форма $\psi\widetilde{F}'' \mid W$ имеет индекс не меньше k.

Пусть подпространство $V \subset T_{\widetilde{u}}\Gamma_{\widetilde{u}}$ таково, что $T_{\widetilde{u}}\Gamma_{\widetilde{u}} = V \oplus \oplus \ker \widetilde{F}'_{R0}$, а K — конус, существование которого гарантируется леммой 4. Выберем такое (конечномерное) подмногообразие с углами $\mathscr{R} \subset L_{\infty}([0, T]; R)$, что $T_{\widetilde{u}}\mathscr{R} = V \oplus K$. В оставшейся части доказательства предложения вместо множества всех допустимых управлений используется лишь подмножество $\mathscr{R}$.

Определение 1.5′. Пусть N — гладкое (конечномерное) многообразие, $N \supset S$ — многообразие с углами и $\Phi: N \to \mathbf{R}^n$ — гладкое отображение. Мы говорим, что отображение $\Phi \mid S$ существенно в точке $q \in S$, если для всякой окрестности $\mathcal{O}_q$ этой точки в N найдутся такие $\varepsilon > 0$, $m > 0$, что для всякого гладкого отображения $\hat{\Phi}: \mathcal{O}_q \to \mathbf{R}^n$, удовлетворяющего условию $\| \hat{\Phi} - \Phi \|_{\mathcal{O}_q, m} < \varepsilon$, множество $\hat{\Phi}(\mathcal{O}_q \cap S)$ содержит точку $\Phi(q)$.

Лемма 1.6′. Пусть $\Phi'_q: T_qN \to \mathbf{R}^n$ — дифференциал гладкого отображения $\Phi: N \to \mathbf{R}^n$ в точке $q \in S \subset N$. Если $\Phi'_q(T_qS) = \mathbf{R}^n$, то $\Phi \mid S$ существенно в точке q.

Лемма 1.7′. Отображение $F \mid \mathscr{R}: \mathscr{R} \to M$ существенно в точке» $\widetilde{u}(\cdot)$.

Из последней леммы без труда выводится еще не доказанное утверждение предложения 1. Доказывается лемма 7′ так же, как и лемма 7, индукцией по k. Отметим только, что при проведении шага индукции, вместо квадратичного отображения (1.5) надо рассматривать отображение

$$(v,\ w)\mapsto v+\tilde{F}''_{R0}(w,\ w),$$

где $w\in\ker\tilde{F}'_{R0}\cap T_{\tilde{u}}\mathcal{R}$,

$$v\in(\tilde{F}'(T_{\tilde{u}}\mathcal{R})+\operatorname{im}\tilde{F}'_{R0})\subset\operatorname{coker}\tilde{F}'_{R0}.$$

Здесь существенно, что $(\tilde{F}'(T_{\tilde{u}}\mathcal{R})+\operatorname{im}\tilde{F}'_{R0})$ — полиэдральный и, следовательно, замкнутый конус, поскольку он является линейным образом полиэдрального конуса.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Аграчев А. А., Гамкрелидзе Р. В.* Индекс экстремальности и квазиэкстремальные управления // Докл. АН СССР.— 1985.— *284,* № 4.— С. 777—781.
2. —, — Индексы Морса и Маслова для гладких управляемых систем // Докл. АН СССР.— 1986.— *287*.— С. 521—524.
3. *Гамкрелидзе Р. В., Аграчев А. А., Вахрамеев С. А.* Обыкновенные дифференциальные уравнения на векторных расслоениях и хронологическое исчисление // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Соврем. пробл. матем. Новейшие достижения.— 1989.— *35,* С. 3—107.
4. *Сарычев А. В.* Индекс второй вариации управляемой системы // Мат. сб.— 1980.— *113* (*115*).— С. 464—486.
5. *Hestenes M. R.* Applications of the theory of quadratic forms in Hilbert space to the calculus of variations // Pacif. J. of Math.— 1951. *1,* № 4.— С. 525—582.