

# Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. В. Гамквелидзе, А. А. Аграчев, С. А. Вахрамеев, Обыкновенные дифференциальные уравнения на векторных расслоениях и хронологические исчисления, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Нов. достиж.*, 1989, том 35, 3–107

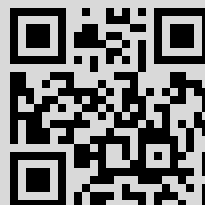
Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 95.129.140.250

17 ноября 2015 г., 13:35:04



# ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ НА ВЕКТОРНЫХ РАССЛОЕНИЯХ И ХРОНОЛОГИЧЕСКОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

*Р. В. Гамкрелидзе, А. А. Аграчев, С. А. Вахрамеев*

В этой статье излагаются основы исчисления потоков, определяемых векторными полями на гладких многообразиях, снабжённых, возможно, дополнительными структурами. Представленный материал является результатом развития идей более ранних работ [2], [3], [4], [9]. Основными средствами исследования здесь являются формула вариаций и общая теорема существования потока в конечно порождённых модулях (см. § 3, п. 3.3 и § 3, п. 3.4). Здесь же развивается очень удобный функциональный подход для описания и изучения различного рода геометрических объектов на гладком многообразии.

В статье используются нестандартные обозначения — объяснение их смысла даётся в § 1—§ 2.

## § 1. Векторные поля и диффеоморфизмы

Обыкновенное дифференциальное уравнение на многообразии определяется заданием нестационарного векторного поля. В этом параграфе будет дано функциональное, не использующее локальных координат, описание основных объектов, связанных с уравнением: векторных полей, дифференциальных форм, диффеоморфизмов, а также точек многообразия. Начнём с последних.

**1.1. Гомоморфизмы алгебры  $C^\infty(M)$  в  $R$  и точки многообразия  $M$ .** Пусть  $M$  — гладкое  $n$ -мерное многообразие (термин «гладкость» всюду далее означает бесконечную дифференцируемость, а многообразия предполагаются со счётной базой). Основным объектом, связанным с многообразием  $M$  — это  $R$ -алгебра  $C^\infty(M)$  всех гладких вещественных функций на нём. Эта алгебра коммутативна, ассоциативна и содержит единицу — функцию  $e(x)$ ,  $x \in M$ , тождественно равную единице на  $M$ . По существу, алгебра  $C^\infty(M)$  содержит всю информацию о многообразии  $M$ . Мы расшифруем это утверждение подробнее в предложениях 1.1. и 2.1.

Пусть  $x \in M$  — некоторая точка  $M$ . Она определяет отображение  $\hat{x}: C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$\hat{x}: a \mapsto a(x),$$

которое  $\mathbb{R}$ -линейно и мультипликативно:

$$\hat{x}(\lambda a + \mu b) = \lambda \hat{x}(a) + \mu \hat{x}(b),$$

$$\hat{x}(ab) = \hat{x}(a) \hat{x}(b)$$

$$\forall a, b \in C^\infty(M), \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Оказывается, что верно и обратное: всякий линейный функционал на  $C^\infty(M)$ , отличный от нулевого, и обладающий свойством мультипликативности, порождается некоторой точкой из  $M$ . Именно, справедливо

Предложение 1.1. Если  $\xi: C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$  — ненулевой гомоморфизм кольца  $C^\infty(M)$  в прямую  $\mathbb{R}$ , то  $\xi$  порождается однозначно определённой точкой из  $M$ : существует единственная точка  $x \in M$  удовлетворяющая условию

$$\xi(a) = \hat{x}(a) = a(x) \quad \forall a \in C^\infty(M).$$

Доказательство. Заметим прежде всего, что всякий кольцевой гомоморфизм  $C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$  является  $\mathbb{R}$ -линейным отображением, то есть гомоморфизмом алгебр. Поэтому ядро  $\ker \xi$  (ненулевого) гомоморфизма  $\xi$  является максимальным идеалом в кольце  $C^\infty(M)$ .

В самом деле, пусть идеал  $I \supset \ker \xi$  и  $a \in I$ , но  $a \notin \ker \xi$ , следовательно,  $\xi(a) \neq 0$ . В силу  $\mathbb{R}$ -линейности  $\xi$ , функция  $b = a - \xi(a) \in \ker \xi$ , поэтому ненулевая константа  $\xi(a) = a - b \in I$ , следовательно,  $I = C^\infty(M)$ .

Обозначим через  $I_x \subset C^\infty(M)$  — максимальный идеал функций, обращающихся в нуль в точке  $x$ ; очевидно,  $I_x = \ker \hat{x}$ . Пусть  $C_0^\infty(M)$  — идеал в  $C^\infty(M)$ , состоящий из всех финитных функций (функций, с компактными носителями). Доказательство предложения основано на следующих утверждениях а) — б).

а) Если  $I$  — максимальный идеал кольца  $C^\infty(M)$ , не содержащий  $C_0^\infty(M)$ , то  $I = I_x$  для некоторой точки  $x \in M$ .

Для доказательства рассмотрим аннулятор идеала  $I$ , то есть множество  $\text{Ann } I = \{x \in M \mid a(x) = 0 \quad \forall a \in I\}$ . Из максимальной  $I$  непосредственно следует, что  $\text{Ann } I$  либо состоит из единственной точки  $x$ , либо пуст. В первом случае, очевидно,  $I \subset I_x$  и из максимальной  $I$  следует  $I = I_x$ . Второй случай невозможен, ибо, как мы сейчас покажем, из  $\text{Ann } I = \emptyset$  следует  $I \supset C_0^\infty(M)$ , что противоречит условию.

Пусть  $\text{Ann } I = \emptyset$ , тогда для  $\forall x \in M$  существует такая окрестность  $U_x$  точки  $x$ , что если носитель  $\text{supp } a$  функции  $a \in C^\infty(M)$  лежит в  $U_x$ , то  $a \in I$ . В самом деле, возьмём функцию  $a' \in I$  не равную нулю в  $x$ , а в качестве  $U_x$  возьмём окрестность точ-

ки  $x$ , в которой  $a' \neq 0$ . Если  $\text{supp } a \subset U_x$ , то функция  $a''$  определена соотношениями  $a'' = a'$  на  $U_x$ ,  $a'' = 0$  вне  $U_x$  — гладкая. Следовательно,  $a \in I$  ибо  $a' \in I$  и  $a = a'a'' \in I$ .

Пусть теперь  $a_0 \in C_0^\infty(M)$ . Покроем компактное множество  $\text{supp } a_0$  конечным числом окрестностей указанного вида и пусть  $\{a_1, \dots, a_s\}$  — разбиение единицы, на  $\text{supp } a_0$ , подчиненное этому покрытию. Тогда  $a_0 = a_0 \sum_{i=1}^s a_i = \sum_{i=1}^s a_0 a_i \in I$ , ибо  $a_0 a_i \in I$ ,  $i = 1, \dots, s$ .

б) Если  $\xi: C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$  — ненулевой гомоморфизм колец, то ограничение  $\xi$  на  $C_0^\infty(M)$  также отлично от нуля.

Для доказательства предположим противное, то есть что  $M$  не компактно и ненулевой гомоморфизм  $\xi$  тождественно равен нулю на  $C_0^\infty(M)$ . Рассмотрим функцию  $a \in C^\infty(M)$ , каждое множество уровня которой  $\{x \in M \mid a(x) \leq N\}$ ,  $N = 1, 2, \dots$ , компактно. Другими словами, функция  $a$  больше любого наперед заданного числа вне соответствующего компактного множества. Существование такой функции доказано ниже. Тогда функция  $a - \xi(a)$  также удовлетворяет указанному условию и, следовательно, к ней можно добавить такую функцию  $a_0$  с компактным носителем, что функция  $b = a - \xi(a) + a_0$  всюду положительна. Поэтому  $\xi(b) \neq 0$ , ибо из  $\xi \neq 0$  на  $C^\infty(M)$  следует  $1 = \xi(e) = \xi\left(\frac{1}{b} \cdot b\right) = \xi\left(\frac{1}{b}\right) \cdot \xi(b)$ . С другой стороны,  $\xi(b) = \xi(a - \xi(a) + a_0) = \xi(a_0) = 0$ . Полученное противоречие доказывает утверждение в б).

Для доказательства существования функции  $a$ , все множества уровней которой компактны, рассмотрим такое открытое счетное локально конечное покрытие  $\{U_i\}_{i=1}^\infty$  многообразия  $M$ , что все  $U_i$  компактны. Пусть  $\{F_i\}_{i=1}^\infty$  — покрытие  $M$  компактными множествами, а причем  $F_i \subset U_i$ . (В качестве  $F_i$  мы можем, например, взять  $\text{supp } b_i$ , где  $\{b_i\}_{i=1}^\infty$  — разбиение единицы на  $M$  подчиненное покрытию  $\{U_i\}$ ).

Пусть  $a_i$  — гладкая на  $M$  функция с носителем  $\text{supp } a_i \subset U_i$  и равная тождественно  $i$  на  $F_i$ . Формула

$$a = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$$

корректно определяет гладкую функцию, которая и является искомой, ибо вне компакта  $\bigcup_{i=1}^N \text{supp } a_i$  она  $\geq N + 1$ .

Из утверждений а) — б) сразу же следует предложение 1.1. В самом деле, если  $\xi$  — ненулевой гомоморфизм  $C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$  то, в силу б), он отличен от нуля на  $C_0^\infty(M)$ , поэтому максимальный идеал  $\ker \xi$  не содержит  $C_0^\infty(M)$  и потому, в силу а), он имеет

вид  $\ker \xi = I_x = \ker \hat{x}$ . Из полученного соотношения следует, что  $\xi = \hat{x}$ , ибо для  $\forall a \in C^\infty(M)$  функция  $a - \hat{x}(a)$  лежит в  $\ker \hat{x}$ , а потому и в  $\ker \xi$ , следовательно,  $\xi(a - \hat{x}(a)) = 0$ , или  $\xi(a) = \hat{x}(a)$ .

Предложение 1.1 доказано.

**1.2. Гладкие отображения и диффеоморфизмы.** Категории  $Mn_\infty$ ,  $Mn_{Diff}$  и  $C^\infty$ ,  $C^\infty_{Diff}$ . Во всем дальнейшем изложении под гомоморфизмом алгебр всегда будем подразумевать кольцевой гомоморфизм, переводящий единицу в единицу.

Категорию всех гладких многообразий обозначим через  $Mn_\infty$ , морфизмы этой категории — гладкие отображения,

$$Mor(M, N) = \{f \mid M \xrightarrow{f} N\}.$$

Подкатегория  $Mn_{Diff} \subset Mn_\infty$  содержит те же объекты, что и  $Mn_\infty$ , а ее морфизмами являются диффеоморфизмы:

$$Mor(M, N) = Diff(M, N).$$

Каждое гладкое отображение  $f: M \rightarrow N$  индуцирует гомоморфизм алгебр

$$C^\infty(M) \xleftarrow{f^*} C^\infty(N),$$

определенный формулой

$$f^*b = b \circ f \in C^\infty(M) \quad \forall b \in C^\infty(N).$$

Если  $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} L$ , то

$$(g \circ f)^* = f^* \circ g^*: C^\infty(L) \rightarrow C^\infty(M) \text{ и } (id_M)^* = id_{C^\infty(M)},$$

и если  $f$  — диффеоморфизм, то  $f^*$  — изоморфизм алгебр и

$$(f^{-1})^* = f^{*-1}.$$

Таким образом, соответствия

$$*: M \mapsto C^\infty(M), \quad f \mapsto f^*: C^\infty(N) \rightarrow C^\infty(M)$$

задают функтор из  $Mn_\infty$  в категорию  $C^\infty$ , объектами которой служат алгебры (гладких) функций над произвольными гладкими многообразиями, а морфизмами — произвольные гомоморфизмы алгебр. Подкатегория  $C^\infty_{Diff}$  определяется по аналогии с  $Mn_{Diff}$  — ее объекты — те же, что и в  $C^\infty$ , а морфизмы — произвольные изоморфизмы алгебр.

Функтор  $*$  естественно назвать *функтором подстановки*, ибо для вычисления функции  $a = f^*b \in C^\infty(M)$ ,  $b \in C^\infty(N)$ , следует в  $b$  подставить отображение  $f$ .

Предложение 2.1. Произвольный гомоморфизм алгебр

$$C^\infty(M) \xleftarrow{\varphi} C^\infty(N)$$

однозначно определяет такое гладкое отображение

$$\Gamma\varphi = f: M \rightarrow N,$$

что

$$\varphi = f^*, \quad \Gamma \text{id}_{C^\infty(M)} = \text{id}_M.$$

Гомоморфизм  $\varphi$  является изоморфизмом тогда и только тогда, когда  $f$  — диффеоморфизм и в этом случае

$$\varphi^{-1} = (f^{-1})^* = f^{*-1}.$$

Доказательство. Пусть  $\hat{x}: C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$  — гомоморфизм, соответствующий точке  $x \in M$ , см. п. 1.1. Тогда композиция  $\hat{x} \circ \varphi: C^\infty(N) \rightarrow \mathbb{R}$  — гомоморфизм алгебр, ибо переводит тождественную единицу  $e(y) \equiv 1$  в единицу  $1 \in \mathbb{R}$ . Поэтому, согласно предложению 1.1, однозначно определена такая точка  $y$ , что  $\hat{y} = \hat{x} \circ \varphi$ . Очевидно, отображение  $x \mapsto f(x) = y$  удовлетворяет условию  $f^* = \varphi$ , причем оно гладкое, ибо для  $\forall b \in C^\infty(N)$  имеем, по условию,  $f^*b = \varphi(b) \in C^\infty(M)$ .

Если  $\varphi$  — изоморфизм, то аналогичная конструкция для  $\varphi^{-1}$  дает отображение  $g: N \rightarrow M$ , для которого  $g^* = \varphi^{-1}$  и, следовательно,

$$(g \circ f)^* = f^* \circ g^* = \varphi \circ \varphi^{-1} = \text{id}_{C^\infty(M)}, \quad (f \circ g)^* = \text{id}_{C^\infty(N)},$$

или

$$g \circ f = \text{id}_M, \quad f \circ g = \text{id}_N.$$

Наоборот, если  $f$  — диффеоморфизм, то  $\varphi$  — изоморфизм.

Из доказанного предложения вытекает, что соответствия

$$\Gamma: C^\infty(M) \mapsto M, \quad \varphi \mapsto \Gamma\varphi = f,$$

где

$$C^\infty(M) \xleftarrow{\varphi} C^\infty(N), \quad M \xrightarrow{\Gamma\varphi=f} N, \quad \varphi = f^*$$

задают функтор из  $C^\infty$  в  $\text{Mn}_\infty$  или, соответственно из  $C^\infty_{\text{Diff}}$  в  $\text{Mn}_{\text{Diff}}$ . Ясно, что функторы  $*$  и  $\Gamma$  взаимно обратны, ибо

$$\Gamma \circ * = \text{Id}_{\text{Mn}_\infty} (= \text{Id}_{\text{Mn}_{\text{Diff}}}), \quad * \circ \Gamma = \text{Id}_{C^\infty} (= \text{Id}_{C^\infty_{\text{Diff}}}),$$

где  $\text{Id}$  — тождественный функтор на соответствующей категории.

**1.3. Дифференцирования и векторные поля.** Здесь мы вкратце напомним хорошо известные определения и простейшие свойства, относящиеся к касательному расслоению гладкого многообразия.

Дифференцированием алгебры  $C^\infty(M)$  называется  $\mathbb{R}$ -линейное отображение  $X: C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ , удовлетворяющее правилу дифференцирования произведения

$$X(ab) = (Xa)b + aXb \quad \forall a, b \in C^\infty(M).$$

Множество всех дифференцирований алгебры  $C^\infty(M)$  будем обозначать  $\text{Der } M$ . Его элементы называются также (гладкими) *векторными полями* на гладком многообразии  $M$ .

Множество  $\text{Der } M$  имеет естественную структуру действительной алгебры Ли с коммутированием векторных полей в качестве умножения:

$$[X, Y] = X \circ Y - Y \circ X, \quad X, Y \in \text{Der } M,$$

а также структуру  $C^\infty(M)$ -модуля с естественными операциями сложения векторных полей и умножения их на гладкие функции.

*Касательным вектором* или *дифференцированием в точке*  $x \in M$  к многообразию  $M$  называется  $\mathbb{R}$ -линейный функционал  $\tau_x: C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$  удовлетворяющий условию «инфинитизимальной мультипликативности» в точке  $x$  (*правило Лейбница*):

$$\tau_x(ab) = (\tau_x a)b(x) + a(x)\tau_x b \quad \forall a, b \in C^\infty(M).$$

Значением векторного поля  $X$  в точке  $x$  назовём композицию  $x \circ X = X_x: C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}^{(1)}$ , которая, как легко видеть, — дифференцирование в точке  $x$ . Наоборот, пусть в каждой точке  $x \in M$  задан касательный вектор  $\tau_x$ . Мы можем каждой функции  $a \in C^\infty(M)$  поставить в соответствие функцию  $b(x) = \tau_x a$ ,  $x \in M$ . Если для  $\forall a \in C^\infty(M)$  соответствующая функция  $b$  — гладкая, то соответствие  $X: a \mapsto b$   $\mathbb{R}$ -линейно и удовлетворяет правилу дифференцирования произведения, следовательно,  $X \in \text{Der } M$  и значение векторного поля  $X$  в точке  $x$  совпадает с  $\tau_x$ .

Множество всех касательных векторов в точке  $x$  называется *касательным пространством* к  $M$  в точке  $x$  и обозначается  $T_x M$ . Оно естественным образом наделяется структурой действительного векторного пространства и легко доказать, что его размерность равна  $n$  ( $n$  — размерность многообразия  $M$ ).

*Носителем векторного поля*  $X \in \text{Der } M$ ,  $\text{supp } X$ , назовём замыкание множества тех  $x \in M$ , для которых  $X_x \neq 0$ .

Дизъюнктивное объединение касательных пространств

$$TM = \bigsqcup_{x \in M} T_x M$$

с естественной гладкостью (см. также § 2) является  $2n$ -мерным многообразием и называется *касательным расслоением многообразия*  $M$ . Его (гладкими) сечениями являются векторные поля (см. § 2).

<sup>1)</sup> Более педантично следовало бы писать  $\hat{x} \circ X = X_x$ ; однако начиная с этого момента, мы будем опускать символ  $\hat{\phantom{x}}$  в обозначении гомоморфизма, соответствующего точке  $x$ , — это не приводит к недоразумениям: запись точки  $x$  слева от функции или оператора означает, что она рассматривается в этом контексте как функционал.

## Морфизмом $F$ касательных расслоений

$$TM \xrightarrow{F} TN$$

называется всякое гладкое отображение многообразий  $TM$  в  $TN$ , линейно отображающее слой  $T_x M$  в слой  $T_y N$ . Нетрудно видеть (см. также § 2), что возникающее при этом соответствие  $x \mapsto y = f(x)$  является гладким отображением  $M$  в  $N$ . В этом случае мы говорим о морфизме  $F$  над  $f$  и пишем

$$f = \theta(F).$$

Ясно, что касательные расслоения над произвольными гладкими многообразиями и всевозможные морфизмы между ними (с естественным законом композиции) образуют категорию. Изоморфизмами в этой категории являются морфизмы, которые представляют из себя диффеоморфизмы. Изоморфизм  $F: TM \rightarrow TM$  называется *автоморфизмом*, касательного расслоения, если

$$\theta(F) = \text{id}_M.$$

Категорию всех касательных расслоений обозначим через  $TMn_\infty$ . Подкатегория  $TMn_{\text{diff}} \subset TMn_\infty$  имеет те же объекты, что и вся категория, а в качестве морфизмов берутся лишь те морфизмы  $F$  из  $TMn_\infty$ , для которых  $\theta(F)$  — диффеоморфизм.

Пусть  $f: M \rightarrow N$  — произвольное гладкое отображение. Дифференциалом отображения  $f$  в точке  $x \in M$  называется линейное отображение

$$T_x f: T_x M \rightarrow T_{f(x)} N, {}^1)$$

определенное формулой

$$T_x f(\tau_x) = \tau_x \circ f^*, \quad \tau_x \in T_x M.$$

Имеют место следующие очевидные формулы: если  $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} L$ , то

$$T_x(g \circ f) = T_{f(x)} g \circ T_x f, \quad T_x \text{id}_M = \text{id}_{T_x M}.$$

Семейство  $T_x f$ ,  $x \in M$ , определяет гладкое *послойное отображение* (линейное на слоях) касательных расслоений

$$Tf: TM \rightarrow TN, \quad Tf|_{T_x M} = T_x f,$$

удовлетворяющее соотношениям

$$T(g \circ f) = Tg \circ Tf, \quad T \text{id}_M = \text{id}_{TM}.$$

Таким образом, соответствия

$$M \mapsto TM, \quad f \mapsto Tf$$

задают ковариантный функтор из  $Mn_\infty$  в  $TMn_\infty$ , причём

<sup>1)</sup> Обычно дифференциал отображения  $f: M \rightarrow N$  в точке  $x$  обозначается через  $f_{*,x}$  или  $D_x f$ .

$\theta(Tf)=f$ . Это соответствие является одновременно и функтором из  $M_{\text{Diff}}$  в  $TM_{\text{Diff}}$ , а морфизм  $Tf$  можно рассматривать как *расширение отображения*  $f$  с многообразия  $M$  на всё касательное расслоение  $TM$ .

Если  $f:M \rightarrow N$  — диффеоморфизм, то  $p=(f^{-1})^*: C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(N)$  — изоморфизм алгебр и определено отображение  $\text{Ad } p: \text{Der } M \rightarrow \text{Der } N$ ,

$$X \mapsto Y = \text{Ad } p X = p \circ X \circ p^{-1} \in \text{Der } N, \quad X \in \text{Der } M,$$

переводящее  $C^\infty(M)$ -модуль  $\text{Der } M$  в  $C^\infty(N)$ -модуль  $\text{Der } N$ . Оно удовлетворяет, очевидно, соотношениям

$$\text{Ad } p(a_1 X_1 + a_2 X_2) = (p a_1) \text{Ad } p X_1 + (p a_2) \text{Ad } p X_2, \quad \text{Ad } p^{-1} = (\text{Ad } p)^{-1}$$

$$\text{Ad}(p_1 \circ p_2) = \text{Ad } p_1 \circ \text{Ad } p_2, \quad \text{Ad}(\text{id}_{C^\infty(M)}) = \text{id}_{\text{Der } M}.$$

Первые два равенства показывают, что  $\text{Ad } p$  — *полуизоморфизм*  $C^\infty(M)$ -модуля  $\text{Der } M$  на  $C^\infty(N)$ -модуль  $\text{Der } N$  над *изоморфизмом алгебр*  $p=(f^{-1})^*$  — см. § 2, п. 2.2. Вторые два равенства выражают функториальный характер соответствия  $p \mapsto \text{Ad } p$ , если смотреть на  $\text{Ad}$  как на *расширение изоморфизма* алгебр  $p: C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(N)$  до соответствующего *полуизоморфизма* модулей  $\text{Der } M$  и  $\text{Der } N$  над этими алгебрами. По аналогии с формулой  $\theta(Tf)=f$ , мы пишем

$$\theta(\text{Ad } p) = p = (f^{-1})^*.$$

В свою очередь,  $\text{Ad } p$  можно расширить с  $\text{Der } M$  на произвольную тензорную степень  $\otimes_k \text{Der } M = \text{Der } M \otimes \dots \otimes_k \text{Der } M$  по формуле

$$(\text{Ad } p \otimes \dots \otimes \text{Ad } p)(X_1 \otimes \dots \otimes X_k) = \text{Ad } p X_1 \otimes \dots \otimes \text{Ad } p X_k.$$

Ясно, что это расширение — *полуизоморфизм* над  $p: C^\infty(M)$ -модуля  $\otimes_k \text{Der } M$  в  $C^\infty(N)$ -модуль  $\otimes_k \text{Der } N$ , следовательно,

$$\theta(\text{Ad } p \otimes \dots \otimes \text{Ad } p) = p.$$

Отображение  $\text{Ad } p = \text{Ad}(f^{-1})^*$  можно выразить через дифференциал  $Tf$  следующим образом. Пусть  $X$  — произвольное векторное поле из  $\text{Der } M$ ,  $Y = \text{Ad}(f^{-1})^* X \in \text{Der } N$ . Тогда

$$T_x f(X_x) = Y_{f(x)} = f(x) \circ \text{Ad}(f^{-1})^* X.$$

Все рассмотренные в этом пункте понятия и конструкции автоматически переносятся на произвольные открытые множества  $U \subset M$ , если их рассматривать как гладкие многообразия с гладкостью, индуцированной каноническим вложением  $i: U \rightarrow M$ . Этим замечанием мы будем пользоваться в дальнейшем.

Например, если  $Y \in \text{Der } U$ , причём множество  $\text{supp } Y$  компактно, то, взяв функцию  $a \in C^\infty(M)$  с носителем в  $U$  и равную единице на  $\text{supp } Y$  мы можем задать векторное поле  $X =$

$= aY \in \text{Der } M$ , значения которого совпадают со значениями  $Y$  на  $U$  и равны нулю вне  $\text{supp } Y$ .

1.4. Двойственный язык — дифференциальные формы.  $C^\infty(M)$ -гомоморфизмы  $C^\infty(M)$ -модуля  $\text{Der } M$  в алгебру  $C^\infty(M)$  обозначим через

$$\text{Der}^* M = \text{Hom}(\text{Der } M, C^\infty(M)) = \text{Hom } \text{Der } M.$$

Множество  $\text{Der}^* M$  естественно наделяется структурой  $C^\infty(M)$ -модуля и называется *двойственным к модулю  $\text{Der } M$* , а его элементы — *дифференциальными формами (1-й степени)* или просто *формами*.

Результат действия формы  $\omega$  на векторное поле  $X \in \text{Der } M$  обозначим

$$\langle \omega, X \rangle \in C^\infty(M), \quad \omega \in \text{Der}^* M, \quad X \in \text{Der } M.$$

Легко видеть, что если значение поля  $X$  в точке  $x$  равно нулю, то для  $\forall \omega \quad \langle \omega, X \rangle|_x = 0$ . Поэтому можно говорить о *значении  $\omega_x$  формы  $\omega$  в точке  $x$* , определяя его по формуле

$$\langle \omega_x, X_x \rangle = \langle \omega, X \rangle|_x \quad \forall X \in \text{Der } M.$$

Следовательно, значение  $\omega_x$  является элементом двойственного пространства  $T_x^* M$  к касательному пространству  $T_x M$ .

Значение  $\omega_x$  можно представить и в виде композиции  $x \circ \omega$ , ибо

$$x \circ \omega (X) = x \langle \omega, X \rangle = \langle \omega, X \rangle|_x.$$

Носителем формы  $\omega$  мы называем замыкание множества тех  $x$ , для которых  $\omega_x \neq 0$ .

Векторное пространство  $T_x^* M$  называется *кокасательным пространством к  $M$  в точке  $x$* , его элементы — *ковекторами*, а дизъюнктивное объединение

$$T^* M = \bigsqcup_{x \in M} T_x^* M$$

с естественной гладкостью  $2n$ -мерного многообразия, см. § 2, — *кокасательным расслоением многообразия  $M$* .

Таким образом, каждая форма  $\omega$  определяет некоторое сечение в  $T^* M$ ,

$$x \mapsto \omega_x \in T_x^* M, \quad x \in M.$$

Очевидно, всякое сечение  $x \mapsto \omega_x \in T_x^* M$  в  $T^* M$  задает форму  $\omega \in \text{Der}^* M$  по формуле

$$\langle \omega, X \rangle|_x = \langle \omega_x, X_x \rangle$$

в том и только том случае, если для  $\forall X \in \text{Der } M$  отображение  $x \mapsto \langle \omega_x, X_x \rangle$  — гладкое.

Легко также доказать, что всякую точку  $x \in M$  можно окружить столь малой окрестностью  $U_x$ , что  $\text{Der } U_x, \text{Der}^* U_x$  —

свободные  $C^\infty(U_x)$ -модули ранга  $n$ , причем, если  $X_1, \dots, X_n$  — базис в  $\text{Der } U_x$ , то формы  $\omega_1, \dots, \omega_n$  из  $\text{Der}^* U_x$ , определенные соотношениями

$$\langle \omega_i, X_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ e, & i = j, \end{cases}$$

образуют двойственный базис в  $\text{Der}^* U_x$ . Это утверждение эквивалентно *локальной тривиальности* расслоений  $TM$ ,  $T^*M$ .

Двойственный модуль к  $\text{Der}^* M$  канонически изоморфен  $\text{Der } M$ . Каноническая инъекция  $\text{Der } M \subset (\text{Der}^* M)^*$  очевидна, ибо существует векторное поле  $X$  с любым наперед заданным значением  $X_x$ , какова бы ни была точка  $x$ . Доказательство суръективности в рассматриваемом контексте несколько сложнее. Однако, утверждаемый изоморфизм является частным случаем более общего изоморфизма между конечно порожденными проективными  $C^\infty(M)$ -модулями  $\mathfrak{F}$  и  $\mathfrak{F}^{**}$  доказанным в § 2.

*Дифференциалом* *да* функции  $a \in C^\infty(M)$  называется форма из  $\text{Der}^* M$ , определенная формулой

$$\langle da, X \rangle = Xa \quad \forall X \in \text{Der } M.$$

Очевидно, что отображение

$$d : C^\infty(M) \rightarrow \text{Der}^* M, \quad a \mapsto da,$$

$\mathbb{R}$ -линейно и удовлетворяет *правилу Лейбница*

$$d(ab) = (da)b + adb \quad \forall a, b \in C^\infty(M).$$

Значение формы  $da$  в точке  $x \in M$  мы определили выше как композицию  $x \circ (da) = (x \circ d)(a)$ , следовательно,

$$x \circ da(X_x) = x \langle da, X \rangle = x(Xa) = (x \circ X)(a) = X_x a.$$

С другой стороны, функция  $a$  является гладким отображением  $M \rightarrow \mathbb{R}$  и мы определяли дифференциал в точке  $x$  этого отображения по формуле  $T_x a(X_x) = X_x \circ a^*$ . Легко видеть, что эти определения согласованы, если число  $\lambda \in \mathbb{R}$  отождествлять с дифференцированием  $\lambda \frac{d}{dt}$  на  $\mathbb{R}$ .

Формы вида

$$\sum_i b_i da_i, \quad a_i b_i \in C^\infty(M)$$

образуют подмодуль в  $\text{Der}^* M$ , порожденный дифференциалами  $da, a \in C^\infty(M)$ . Нетрудно видеть, что он совпадает с  $\text{Der}^* M$ . Именно, справедливо следующее

**Предложение 4.1.** Пусть  $(x_1, \dots, x^{n+h}) : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+h}$  — гладкое вложение  $M$  в  $\mathbb{R}^{n+h}$ . Тогда дифференциалы  $dx^1, \dots, dx^{n+h}$  порождают модуль  $\text{Der}^* M$ .

Следовательно,  $\text{Der}^* M$  — конечно порожденный  $C^\infty(M)$ -модуль, причем всякая форма  $\omega \in \text{Der}^* M$  представляется в виде

$$\omega = \sum_{i=1}^{n+r} a_i dx^i, \quad a_i \in C^\infty(M).$$

Предположим, что задано гладкое отображение  $f: M \rightarrow N$  и пусть  $Tf: TM \rightarrow TN$  — соответствующее отображение касательных пространств. Определим сопряженное к  $Tf$  отображение  $(Tf)^*: C^\infty(N)$ -модуля  $\text{Der}^* N$  в  $C^\infty(M)$ -модуль  $\text{Der}^* M$

$$(Tf)^* = T^*f: \text{Der}^* N \rightarrow \text{Der}^* M$$

по формуле

$$v \mapsto T^*f(v) = \omega \in \text{Der}^* M, \quad v \in \text{Der}^* N,$$

$$\langle T^*f(v), X \rangle|_x = \langle v_{f(x)}, T_x f(X_x) \rangle = \langle v_{f(x)}, T f(X_x) \rangle.$$

Легко видеть, что  $T^*f$  — полугомоморфизм над  $f^*$  из  $\text{Der}^* N$  в  $\text{Der}^* M$ , который можно также записать в виде соотношения

$$T^*f(v)|_x = \omega_x = v_{f(x)} T_x f,$$

выражающего коммутативность диаграммы

$$\begin{array}{ccc} T_x M & \xrightarrow{T_x f} & T_{f(x)} N \\ & \searrow \omega_x & \nearrow v_{f(x)} \\ & R & \end{array}$$

На отображение  $T^*f$  можно смотреть как на расширение сопряженного отображения  $f^*$  с алгебр до полугомоморфизма над  $f^*$  соответствующих модулей. Поэтому  $T^*f = (Tf)^*$  также обычно обозначают через  $f^*$  и мы получаем формулу

$$f^*(db) = d(f^*b), \quad b \in C^\infty(N),$$

выражающую «инвариантность вида первого дифференциала при замене переменных» и сводящуюся к утверждению, что дифференциал  $d$  коммутирует с «операцией подстановки»  $f^*$ .

Можно, конечно, определить отображение  $T^*f$  по формуле

$$T^*f: db \mapsto d(f^*b), \quad \sum a_i (db_i) \mapsto \sum f^*(a_i) d(f^*b_i),$$

$$a_i, b_i, b \in C^\infty(N).$$

Корректность такого определения легко проверяется, и тогда первоначальное определение  $T^*f$  превращается в утверждение — если  $v = \sum a_i db_i$ , то

$$\begin{aligned} \langle T^*f \sum a_i db_i, X \rangle &= \sum_i (f^*a_i) \langle d(f^*b_i), X \rangle = \\ &= \sum_i f^*a_i X(f^*b_i). \end{aligned}$$

Если  $f$  — диффеоморфизм и, следовательно,  $p = f^*$  — изомор-

физм, то сопряженное отображение  $(Tf)^* = T^*f$  можно, очевидно, определить по формуле

$$\langle (Tf)^*v, X \rangle = p\langle v, \text{Ad}p^{-1}X \rangle.$$

Поэтому, в случае, когда  $f$  — диффеоморфизм, отображение  $(Tf)^*$  можно также рассматривать как сопряженное к  $\text{Ad}p^{-1}$  относительно операции спаривания  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  и писать

$$\langle (\text{Ad}p^{-1})^*v, X \rangle = p\langle v, \text{Ad}p^{-1}X \rangle.$$

Отображение  $(\text{Ad}p^{-1})^*$  является расширением изоморфизма алгебр  $p^{-1}: C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(N)$  до полуизоморфизма  $C^\infty(N)$ -модуля форм  $\text{Der}^*N$  на  $N$  на  $C^\infty(M)$ -модуль  $\text{Der}^*M$  форм на  $M$ . По аналогии с  $\text{Ad}p$ , отображение  $(\text{Ad}p)^*$  также естественно распространяется на тензорные степени соответствующего модуля.

## § 2. Векторные расслоения и конечно порожденные проективные модули

В § 1 мы кратко рассмотрели касательные и кокасательные расслоения  $TM$ ,  $T^*M$  гладкого многообразия  $M$  и  $C^\infty(M)$ -модули их сечений — модуль векторных полей  $\text{Der} M$  и модуль дифференциальных форм первой степени  $\text{Der}^*M$  вместе с соответствующими отображениями. Каждая из этих категорий позволяет строить чисто функториально остальные три.

Теорию дифференциальных уравнений на гладком многообразии особенно удобно строить с помощью «функционального языка» — в терминах модулей сечений расслоений  $TM$  и  $T^*M$  и полугомоморфизмов между ними. При этом, однако, возникает необходимость в рассмотрении более общих модулей, чем  $\text{Der} M$  или  $\text{Der}^*M$ . Поэтому мы посвятили этот параграф обзору нужных нам обобщений — некоторым сведениям о векторных расслоениях вообще, проективных конечно порожденных  $C^\infty(M)$ -модулях и тесной связи между ними.

**2.1. Векторные расслоения.** Категории  $\text{Vd}_\infty$ ,  $\text{Vd}_{\text{Diff}}$ . Напомним основные определения.

*Предрасслоением над  $M$*  будем называть семейство векторных пространств  $E_x$ ,  $x \in M$ . Их дизъюнктивную сумму  $E = \bigsqcup_{x \in M} E_x$

назовем *тотальным пространством* предрасслоения, множество  $E_x$  — *слоем над  $x$* , а отображение

$$\text{pr}_E = \text{pr}: \bigsqcup_{x \in M} E_x \rightarrow M, \quad \text{pr}(E_x) = x \quad \forall x \in M$$

— *проекцией на базу  $M$* . *Сечением предрасслоения* называется всякое отображение вида

$$s: M \rightarrow E, \quad s(x) \in E_x \quad \forall x \in M$$

или  $\text{pr} \circ s = \text{id}_M$ . Каждое семейство  $\Sigma$  сечений порождает некоторый  $C^\infty(M)$ -модуль сечений, состоящий из сечений вида

$$\sum_i a_i s_i, \quad a_i \in C^\infty(M), \quad s_i \in \Sigma.$$

Предрасслоение  $E$  называется *векторным расслоением* над  $M$ , если в  $E$  введена такая гладкость (а, следовательно, и топология), что выполняется условие *локальной тривиальности*: для  $\forall x \in M$  и некоторой ее окрестности  $U_x$  существует диффеоморфизм  $\xi: \bigsqcup_{y \in U_x} E_y = \text{pr}^{-1}(U_x) \rightarrow U_x \times \mathbb{R}^k$ , при котором каждый

слой  $E_y$  линейно отображается на соответствующий слой  $y \times \mathbb{R}^k$  прямого произведения. Диффеоморфизм  $\xi$  мы будем называть *тривиализирующим диффеоморфизмом*, а окрестности  $U_x$  — *тривиализирующими окрестностями расслоения  $E$* .

Ясно, что размерность слоя постоянна на каждой связной компоненте многообразия  $M$  и векторное расслоение  $E$  с размерностью базы  $n$  и размерностью слоя  $k$  является гладким  $(k+n)$ -мерным многообразием, а соответствующая проекция  $\text{pr}$  является *субмерсией  $E$  на  $M$*  (то есть гладким отображением максимального ранга в каждой точке).

Через  $i: M \rightarrow E$  будем обозначать гладкое регулярное вложение (*каноническое вложение*), переводящее точку  $x \in M$  в нулевую точку соответствующего слоя  $E_x$  и будем отождествлять  $M$  с  $i(M) \subset E$ .

*Сечением* в векторном расслоении  $E$  называется всякое сечение предрасслоения, являющееся одновременно гладким отображением. Множество  $\sigma E$  всех (гладких) сечений векторного расслоения естественным образом наделяется структурой  $C^\infty(M)$ -модуля.

В самом деле, пусть  $s_1, s_2$  — два гладких сечения и  $a_1, a_2 \in C^\infty(M)$ . Докажем, что в некоторой окрестности произвольной точки  $x$  сечение  $a_1 s_1 + a_2 s_2$  — гладкое отображение. Пусть  $U_x$  — тривиализирующая окрестность точки  $x$ ,  $\xi$  — соответствующий диффеоморфизм. В силу линейности  $\xi$  на слоях, имеем на  $U_x$ :

$$\xi \circ (a_1 s_1 + a_2 s_2) = a_1 (\xi \circ s_1) + a_2 (\xi \circ s_2),$$

причем правая часть — гладкое отображение  $U_x$  в  $U_x \times \mathbb{R}^k$ . Так как  $\xi^{-1}$  — диффеоморфизм, то  $a_1 s_1 + a_2 s_2 = \xi^{-1} \circ (a_1 \xi \circ s_1 + a_2 \xi \circ s_2)$  — гладкое отображение  $U_x$  в  $E$ .

Модуль сечений  $\sigma E$  однозначно восстанавливает гладкую структуру  $C^\infty(E)$  тотального пространства в силу следующего предложения.

**Предложение 1.1.** Функция  $a$  принадлежит алгебре  $C^\infty(E)$  в том и только том случае, если для любых фиксированных сечений  $s_1, \dots, s_k \in \sigma E$ , где  $k$  — размерность слоя, отображение  $\mu: M \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ , определенное формулой

$$(x, \lambda^1, \dots, \lambda^k) \mapsto a \left( \sum_{i=1}^k \lambda^i s_i(x) \right)$$

является гладким.

Доказательство. Пусть  $a \in C^\infty(E)$ . Отображение  $\mu$  представим как композицию

$$(x, \lambda^1, \dots, \lambda^k) \xrightarrow{\nu} \sum_{i=1}^k \lambda^i s_i(x) \xrightarrow{a} a\left(\sum_{i=1}^k \lambda^i s_i(x)\right).$$

В силу условия локальной тривиальности,  $\nu$  — гладкое отображение, следовательно, композиция  $\mu = a \circ \nu$  также гладкая.

Пусть теперь вещественная функция  $a$  на  $E$  такова, что отображение  $\mu = a \circ \nu = \nu^* a$  гладкое при любом выборе сечений  $s_1, \dots, s_k \in \sigma E$ . Докажем, что в некоторой окрестности произвольной точки  $z \in E$  функция  $a$  гладкая и, следовательно,  $a \in C^\infty(E)$ .

Пусть  $\text{pr}(z) = x$  и  $U_x$  — тривиализирующая окрестность,  $\xi$  — соответствующий тривиализирующий диффеоморфизм. Возьмем в  $U_x \times \mathbb{R}^k$   $k$  (гладких) сечений  $r_1, \dots, r_k$  с компактными носителями и линейно независимых в каждой точке некоторой окрестности  $V \subset U_x$  точки  $x$ . Тогда в  $E$  существуют  $k$  сечений  $s_1, \dots, s_k$  таких, что  $\xi \circ s_i|_V = r_i$ . Из линейной независимости  $r_1(y), \dots, r_k(y)$  следует, что отображение

$$(y, \lambda^1, \dots, \lambda^k) \mapsto \lambda^1 s_1(y) + \dots + \lambda^k s_k(y) = \\ = \xi^{-1} \circ (\lambda^1 r_1(y) + \dots + \lambda^k r_k(y)), \quad y \in V, \quad (\lambda^1, \dots, \lambda^k) \in \mathbb{R}^k$$

является диффеоморфизмом  $V \times \mathbb{R}^k$  на  $W = \text{pr}^{-1}(V) = \bigsqcup_{y \in V} E_y$ .

По условию, отображение  $(y, \lambda^1, \dots, \lambda^k) \mapsto a \circ \nu(y, \lambda^1, \dots, \lambda^k)$ ,  $y \in V$ , — гладкое, следовательно,  $a \circ \nu = \nu^*(a|_W) \in C^\infty(V \times \mathbb{R}^k)$ . Но  $\nu^*$  — изоморфизм  $C^\infty(W)$  на  $C^\infty(V \times \mathbb{R}^k)$ , следовательно,  $a|_W$  — гладкая функция (при любом выборе  $z \in E$ ), поэтому  $a \in C^\infty(E)$ .

Предложение доказано.

Таким образом, предрасслоение  $E = \bigsqcup_{x \in M} E_x$  превращается в векторное расслоение соответствующим выбором в нем  $C^\infty(M)$ -модуля сечений, который и задает в  $E$  гладкость (вместе с топологией). Этим замечанием мы будем пользоваться в дальнейшем.

Морфизмом векторного расслоения  $A = \bigsqcup_{x \in M} A_x$  над  $M$  в векторное расслоение  $B = \bigsqcup_{y \in N} B_y$  над  $N$  будем называть гладкое

отображение  $F: A \rightarrow B$ , линейно отображающее произвольный слой  $A_x$  в некоторый слой  $B_{f(x)}$  (размерности слоев  $A_x$  и  $B_y$  могут быть различными). Соответствующее отображение баз  $f: M \rightarrow N$  также является гладким, так как представляется в виде композиции гладких отображений:  $f = \text{pr}_B \circ F \circ i_M$ .

Категорию всех векторных расслоений над произвольными гладкими многообразиями и морфизмов между ними обозначим через  $\text{Vd}_\infty$ . Изоморфизмы этой категории — морфизмы, являющиеся диффеоморфизмами; соответствующее отображение баз является также диффеоморфизмом. Так как  $f$  определяется по

$F$  однозначно, мы будем писать  $\bar{f} = \theta(F)$  и говорить о морфизме  $F$  над  $\bar{f}$ , или же о расширении  $F$  отображения  $\bar{f}$  с базы на соответствующее расслоение.

Если  $A \xrightarrow{F_1} B \xrightarrow{F_2} C$  — морфизмы, то  $\theta(F_2 \circ F_1) = \theta(F_2) \circ \theta(F_1)$ , кроме того,  $\theta(\text{id}_A) = \text{id}_M$ . Изоморфизм  $F: A \rightarrow A$  будем называть *автоморфизмом*, если  $\theta(F) = \text{id}_M$ .

Определим подкатегорию  $\text{Bd}_{\text{Diff}} \subset \text{Bd}_{\infty}$  как состоящую из тех же объектов, что и  $\text{Bd}_{\infty}$ , а морфизмами в ней объявим лишь те морфизмы  $F \in \text{Bd}_{\infty}$ , для которых  $\theta(F)$  — диффеоморфизм соответствующих многообразий.

Наконец, категория  $\text{Bd}_M$  состоит из всевозможных векторных расслоений над данной фиксированной базой  $M$ , а ее морфизмы — произвольные морфизмы между этими расслоениями.

Обозначим через  $H_k^m$  *грасманово многообразие* — множество всевозможных  $k$ -мерных подпространств в  $\mathbb{R}^m$  с естественной гладкостью. Отображение  $M \rightarrow H_k^m$ ,  $x \mapsto E_x \subset H_k^m$ ,  $x \in M$ , является гладким в том и только том случае, если для каждой заданной точки  $x \in M$  существуют такие отображения  $s_1, \dots, s_k \in C(M, \mathbb{R}^m)$ , что  $s_1(y), \dots, s_k(y) \in E_y$ ,  $\forall y \in M$  и векторы  $s_1(x), \dots, s_k(x)$  линейно независимы.

Предположим, что в каждом слое  $E_x$  векторного расслоения  $E = \bigsqcup_{x \in M} E_x$ ,  $\dim E_x = k$ , задано подпространство фиксированной размерности:  $A_x \subset E_x$ ,  $\dim A_x = l \leq k$ . Тогда можно говорить о гладкой зависимости  $A_x$  от  $x \in M$ , ибо если  $x, y$  лежат в одной тривиализирующей окрестности расслоения, то, пользуясь соответствующим тривиализирующим диффеоморфизмом, мы можем считать, что  $A_x, A_y \in H_l^k$ . На основании сказанного выше, условие гладкости отображения  $x \mapsto A_x$ ,  $x \in M$ , эквивалентно существованию для каждой точки  $x$  таких (гладких) сечений  $s_1, \dots, s_l \in \sigma E$ , что  $s_1(y), \dots, s_l(y) \in A_y$ ,  $\forall y \in M$  и векторы  $s_1(x), \dots, s_l(x)$  линейно независимы.

Объявляя  $C^\infty(M)$ -модулем гладких сечений предрасслоения  $A = \bigsqcup_{x \in M} A_x$  все сечения  $s \in \sigma E$  удовлетворяющие условию  $s(x) \in A_x$ ,  $\forall x \in M$ , мы наделяем  $A$  гладкостью, индуцированной на  $A \subset E$  из  $E$ . Тем самым мы превращаем  $A$  в векторное расслоение над  $M$ , которое называется *подрасслоением* векторного расслоения  $E$ .

Если  $E' = \bigsqcup_{x \in M} E'_x$ ,  $E'' = \bigsqcup_{x \in M} E''_x$  — два векторных расслоения над  $M$ , мы можем естественным образом определить векторное расслоение над  $M$ :

$$E = E' \oplus E'' = \bigsqcup_{x \in M} E'_x \oplus E''_x$$

— *прямую сумму расслоений*  $E', E''$ , объявив  $C^\infty(M)$ -модулем сечений расслоения  $E$  прямую сумму модулей  $\sigma E', \sigma E''$ . Век-

торные расслоения  $E'$ ,  $E''$  естественным образом отождествляются с подрасслоениями расслоения  $E$ .

Наоборот, если  $E = \bigsqcup_{x \in M} E_x$  — произвольное векторное расслоение и заданы гладкие отображения

$$x \mapsto E'_x \subset E_x, \quad x \mapsto E''_x \subset E_x, \quad x \in M,$$

причем  $E'_x \cap E''_x = \{0\}$ , то  $x \mapsto E'_x \oplus E''_x = A_x \subset E_x$ ,  $x \in M$ , — гладкое отображение и подрасслоение  $\bigsqcup_{x \in M} A_x \subset E$  естественно изоморфно прямой сумме  $\bigsqcup_{x \in M} E'_x \oplus \bigsqcup_{x \in M} E''_x$ .

Существует универсальный способ получения векторных расслоений, который описывается следующим предложением.

Предложение 1.2. Пусть задано гладкое отображение

$$M \rightarrow H_k^m, \quad x \mapsto A_x \in H_k^m, \quad x \in M.$$

Обозначим через  $A$  описанное выше подрасслоение  $A = \bigsqcup_{x \in M} A_x \subset M \times \mathbb{R}^m$ . Гладкость на  $A$  индуцируется из  $M \times \mathbb{R}^m$ , а модуль сечений  $\sigma A$  совпадает со всевозможными гладкими отображениями  $s \in C^\infty(M, \mathbb{R}^m)$ , удовлетворяющими условию  $s(x) \in A_x \quad \forall x \in M$ .

Оказывается, что для всякого векторного расслоения  $E = \bigsqcup_{x \in M} E_x$  над  $M$  с размерностью слоя  $\dim E_x = k$  существует

такое гладкое отображение  $M \rightarrow H_k^m$  при достаточно большом  $m$ , что соответствующее подрасслоение  $A = \bigsqcup_{x \in M} A_x \subset M \times \mathbb{R}^m$ ,

$\dim A_x = k$ , изоморфно  $E$  и, следовательно, изоморфны модули сечений  $\sigma E$  и  $\sigma A$ .

Обозначим через  $B_x$  ортогональное дополнение к  $A_x$  в  $\mathbb{R}^m$ . Тогда гладкое отображение  $x \mapsto B_x \in H_{m-k}^m$  задает подрасслоение  $B = \bigsqcup_{x \in M} B_x \subset M \times \mathbb{R}^m$ , причем, на основании сказанного,  $A \oplus B = M \times \mathbb{R}^m$ .

Таким образом, произвольное векторное расслоение  $E$  над  $M$  можно (изоморфно) вложить в качестве прямого слагаемого в прямое произведение  $M \times \mathbb{R}^m$  при достаточно большом  $m$ .

Доказательство. Будем считать, что  $M \subset E$ , причем  $x$  — нулевая точка слоя  $E_x$  для  $\forall x \in M$ . Пусть  $TE$  — касательное расслоение к  $(n+k)$ -мерному гладкому многообразию  $E$ ,  $T_x E$  — касательная плоскость к  $E$  в точке  $x$ .

Рассмотрим предрасслоение  $D = \bigsqcup_{x \in M} T_x E$ . Мы превращаем

его в векторное расслоение, определяя модуль сечений  $\sigma D$  как  $C^\infty(M)$ -модуль, порожденный сечениями  $s: M \rightarrow D$  вида  $s = X|_M$ , где  $X$  — произвольное сечение касательного расслоения  $TE$ , то

есть векторное поле на многообразии  $M$ . Другими словами, сечения векторного расслоения  $D$  — это ограничения на  $M$  векторных полей на многообразии  $E$ .

Пусть  $T_x M$ ,  $T_x E_x$  — касательные плоскости в точке  $x \in M$  соответственно к подмногообразиям  $M \subset E$ ,  $E_x \subset E$ . Отображения  $x \mapsto T_x M \subset T_x E$ ,  $x \mapsto T_x E_x \subset T_x E$ ,  $x \in M$ , являются, очевидно, гладкими и порождают подрасслоения

$$\bigsqcup_{x \in M} T_x M \subset D, \quad \bigsqcup_{x \in M} T_x E_x \subset D, \quad D = \bigsqcup_{x \in M} T_x M \oplus \bigsqcup_{x \in M} T_x E_x.$$

Легко видеть, что векторное расслоение  $\bigsqcup_{x \in M} T_x E_x$  изоморфно

$$E = \bigsqcup_{x \in M} E_x.$$

Пусть теперь  $g: E \rightarrow \mathbb{R}^m$  — гладкое отображение  $(k+n)$ -мерного многообразия  $E$  в  $\mathbb{R}^m$  регулярное в некоторой окрестности  $M$ , следовательно, ранг дифференциала  $Tg$  равен  $n+k$  в каждой точке  $M$ ; при достаточно большом  $m$  такое отображение всегда существует (теорема Уитни о вложении). Мы получаем гладкое отображение

$$M \rightarrow H_k^m, \quad x \mapsto A_x = T_x g(T_x E_x) \in H_k^m, \quad x \in M,$$

которое, как легко видеть, и является искомым.

Пусть задано предрасслоение над  $M$ ,  $A = \bigsqcup_{x \in M} A_x$  с постоянной размерностью слоя  $\dim A_x = k$ . *Двойственным* или *дуальным* к  $A$  предрасслоением мы будем называть предрасслоение со  $A = A^* = \bigsqcup_{x \in M} A_x^*$ , где  $A_x^*$  — двойственное к  $A_x$   $k$ -мерное пространство. Если  $A$  — векторное расслоение, то и  $A^*$  естественным образом превращается в векторное расслоение, если в качестве его модуля гладких сечений  $\sigma A^*$  принять сечения  $\xi: x \mapsto \xi(x) \in A_x^*$ , для которых отображения

$$x \mapsto \langle \xi(x), s(x) \rangle = \langle \xi, s \rangle|_x, \quad x \in M,$$

где  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  — спаривание между  $A_x$  и  $A_x^*$  — гладкие функции при любом выборе сечения  $s \in \sigma A$ .

В категории  $\text{Bd}_{\text{Diff}}$  соответствие  $A \mapsto A^* = \text{co } A$  можно превратить в контрвариантный функтор в себя, если на морфизмах  $F: A \rightarrow B$  определить отображение со  $A \xleftarrow{\text{co } F} \text{co } B$  по формуле  $\langle \text{co } F \eta(y), s \circ f^{-1}(y) \rangle = \langle \eta(y), F \circ s \circ f^{-1}(y) \rangle$ , где  $\eta$  и  $s$  — произвольные сечения в  $\text{co } B$ ,  $A$ . Линейность отображения  $\text{co } F$  на слоях очевидна, его гладкость легко следует из определения модуля  $\sigma(\text{co } A)$  и предложения 1.1.

Существует естественное отображение расслоения  $A = \bigsqcup_{x \in M} A_x$  на расслоение  $\text{co } \text{co } A = A^{**} = \bigsqcup_{x \in M} A_x^{**}$ ,

$$\bigsqcup_{x \in M} A_x \xrightarrow{I} \bigsqcup_{x \in M} A_x^{**},$$

определяемое отождествлением  $A_x \cong A_x^{**}$ . Отображение  $I$  устанавливает изоморфизм между модулями сечений  $\sigma A$  и  $\sigma(\text{со} \circ \text{со} A)$  и, следовательно, мы получаем естественную эквивалентность функторов  $\text{со} \circ \text{со} \cong \text{Id}_{\text{Diff}}$ , из которой, в частности, следует естественный изоморфизм векторных расслоений  $A \cong \text{со} \circ \text{со} A = A^{**}$ .

Пользуясь описанным выше вложением  $A \subset M \times \mathbb{R}^m$ , можно построить изоморфизм  $A \cong \text{со} A = A^*$  (который не может быть естественным), но мы этого делать не будем, так как он непосредственно следует из модульного изоморфизма (2.11).

**2.2. Конечно порождённые проективные  $C^\infty(M)$ -модули. Категории  $\text{Mod}_\infty$ ,  $\text{Mod}_{\text{Diff}}$ .** Пусть заданы: ненулевой гомоморфизм алгебр

$$\varphi : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(N), \quad (2.1)$$

$C^\infty(M)$ -модуль  $\mathfrak{F}$  и  $C^\infty(N)$ -модуль  $\mathfrak{G}$ . Отображение  $\Phi : \mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{G}$  мы называем *полугомоморфизмом модулей над  $\varphi$* , если

$$\Phi(a'u' + a''u'') = \varphi(a') \Phi(u') + \varphi(a'') \Phi(u'')$$

$$\forall a', a'' \in C^\infty(M), \forall u', u'' \in \mathfrak{F}.$$

Ясно, что существует гладкое отображение  $f$  такое, что

$$M \xleftarrow{f} N, \quad \varphi = f^*.$$

Множество всех полугомоморфизмов над  $\varphi$  из  $\mathfrak{F}$  в  $\mathfrak{G}$  обозначим  $\text{Hom}_\varphi(\mathfrak{F}, \mathfrak{G})$ . Оно естественным образом превращается в  $C^\infty(N)$ -модуль. При  $\mathfrak{G} = C^\infty(N)$  мы пишем

$$\text{Hom}_\varphi(\mathfrak{F}, C^\infty(N)) = \text{Hom}_\varphi \mathfrak{F}.$$

Если  $M = N$  и  $\varphi = \text{id}$ , то  $C^\infty(M)$ -модуль  $\text{Hom}_{\text{id}}(\mathfrak{F}, \mathfrak{G}) = \text{Hom}(\mathfrak{F}, \mathfrak{G})$  превращается в  $C^\infty(M)$ -модуль гомоморфизмов  $\mathfrak{F}$  в  $\mathfrak{G}$ , а  $\text{Hom}_{\text{id}} \mathfrak{F} = \text{Hom } \mathfrak{F} = \mathfrak{F}^*$  — *двойственный модуль к  $\mathfrak{F}$* .

Результат применения  $\Phi \in \text{Hom}_\varphi \mathfrak{F}$  к  $u \in \mathfrak{F}$  будем обозначать независимо от  $\varphi$  через  $\langle \Phi, u \rangle \in C^\infty(N)$ .

$\text{Hom}_\varphi$  можно рассматривать как контрвариантный функтор из категории всех  $C^\infty(M)$ -модулей  $\mathfrak{F}$  в категорию всех  $C^\infty(N)$ -модулей  $\mathfrak{G}$ , где морфизмами в этих категориях являются соответствующие модульные гомоморфизмы. Этот функтор задаётся на объектах соответствием  $\mathfrak{F} \mapsto \text{Hom}_\varphi \mathfrak{F}$ , а на морфизмах  $\chi \in \text{Hom}(\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2)$  — отображением  $\chi \mapsto \text{Hom}_\varphi \chi$ , где

$$(\text{Hom}_\varphi \chi) \Phi = \Phi \circ \chi, \quad \Phi \in \text{Hom}_\varphi \mathfrak{F}_2. \quad (2.2)$$

Коммутативность диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{F}_1 & \mapsto & \text{Hom}_{\Phi} \mathfrak{F}_1 \\ \chi \downarrow & & \uparrow \text{Hom}_{\Phi} \chi \\ \mathfrak{F}_2 & \mapsto & \text{Hom}_{\Phi} \mathfrak{F}_2 \end{array}$$

очевидна.

Можно несколько обобщить смысл функтора  $\text{Hom}_{\Phi}$  и рассматривать его парах  $(\mathfrak{F}, \mathfrak{G})$  в соответствии с коммутативной диаграммой

$$\begin{array}{ccc} (\mathfrak{F}, \mathfrak{G}) & \mapsto & \text{Hom}_{\Phi}(\mathfrak{F}, \mathfrak{G}) \\ \chi \downarrow & \uparrow \rho & \uparrow \text{Hom}_{\Phi}(\chi, \rho) \\ (\mathfrak{F}', \mathfrak{G}') & \mapsto & \text{Hom}_{\Phi}(\mathfrak{F}', \mathfrak{G}'), \end{array}$$

где  $\chi, \rho$  — гомоморфизмы  $C^{\infty}(M)$ -, соответственно,  $C^{\infty}(N)$ -модулей, а  $\text{Hom}_{\Phi}(\chi, \rho)$  определяется соотношением

$$\Phi = \text{Hom}_{\Phi}(\chi, \rho) \Phi' = \rho \circ \Phi' \circ \chi \in \text{Hom}_{\Phi}(\mathfrak{F}', \mathfrak{G}'), \quad \Phi' \in \text{Hom}_{\Phi}(\mathfrak{F}', \mathfrak{G}'). \quad (2.3)$$

Имеют место следующие очевидные естественные изоморфизмы

$$\left. \begin{aligned} \text{Hom}_{\Phi}(\mathfrak{F}_1 \oplus \mathfrak{F}_2, \mathfrak{G}) &\cong \text{Hom}_{\Phi}(\mathfrak{F}_1, \mathfrak{G}) \oplus \text{Hom}_{\Phi}(\mathfrak{F}_2, \mathfrak{G}), \\ \text{Hom}_{\Phi}(\mathfrak{F}, \mathfrak{G}_1 \oplus \mathfrak{G}_2) &\cong \text{Hom}_{\Phi}(\mathfrak{F}, \mathfrak{G}_1) \oplus \text{Hom}_{\Phi}(\mathfrak{F}, \mathfrak{G}_2). \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

В частности,

$$\text{Hom}_{\Phi}(\mathfrak{F}_1 \oplus \mathfrak{F}_2) = \text{Hom}_{\Phi} \mathfrak{F}_1 \oplus \text{Hom}_{\Phi} \mathfrak{F}_2. \quad (2.5)$$

Для задания первого изоморфизма возьмём  $\Phi_i \in \text{Hom}_{\Phi}(\mathfrak{F}_i, \mathfrak{G})$ ,  $i=1, 2$ . Тогда элемент  $\Phi_1 \oplus \Phi_2$  естественно отождествляется с элементом из  $\text{Hom}_{\Phi}(\mathfrak{F}_1 \oplus \mathfrak{F}_2, \mathfrak{G})$  согласно формуле

$$\Phi_1 \oplus \Phi_2 (u_1 \oplus u_2) = \Phi_1 u_1 + \Phi_2 u_2, \quad u_i \in \mathfrak{F}_i, \quad i=1, 2.$$

Это отождествление является естественным изоморфизмом.

Для задания второго изоморфизма обозначим через  $\text{pr}_1, \text{pr}_2$  проекторы из  $\mathfrak{G}_1 \oplus \mathfrak{G}_2$  соответственно на  $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2$  и отождествим произвольный элемент  $\Phi \in \text{Hom}_{\Phi}(\mathfrak{F}, \mathfrak{G}_1 \oplus \mathfrak{G}_2)$  с элементом  $\text{pr}_1 \circ \Phi \in \text{Hom}_{\Phi}(\mathfrak{F}, \mathfrak{G}_1) \oplus \text{Hom}_{\Phi}(\mathfrak{F}, \mathfrak{G}_2)$ .

Пусть задано произвольное подмножество  $S \subset \mathfrak{F}$ . Назовём *аннулятором* множества  $S$  в  $\text{Hom}_{\Phi} \mathfrak{F}$  множество  $S^{\perp \Phi}$  определённое по формуле

$$S^{\perp \Phi} = \{ \Phi \in \text{Hom}_{\Phi} \mathfrak{F} \mid \langle \Phi, u \rangle = 0 \quad \forall u \in S \}. \quad (2.6)$$

Для произвольного  $S$  аннулятор  $S^{\perp \Phi}$  является подмодулем в  $\text{Hom}_{\Phi} \mathfrak{F}$  и имеют место очевидные формулы

$$\left. \begin{aligned} S_1 \subset S_2 &\Rightarrow S_1^{\perp \Phi} \supset S_2^{\perp \Phi}, \\ S_1^{\perp \Phi} \cap S_2^{\perp \Phi} &\subset (S_1 + S_2)^{\perp \Phi}. \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

Нетрудно показать (см. ниже), что для произвольного  $C^{\infty}(M)$ -модуля  $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 \oplus \mathfrak{F}_2$  имеет место естественный изоморфизм

$$\text{Hom}_{\Phi}(\mathfrak{F}_1 \oplus \mathfrak{F}_2) \cong \mathfrak{F}_2^{\perp \Phi} \oplus \mathfrak{F}_1^{\perp \Phi}, \quad (2.8)$$

причем

$$\mathfrak{F}_2^{\perp\varphi} \cong \text{Hom}_{\varphi} \mathfrak{F}_1, \quad \mathfrak{F}_1^{\perp\varphi} \cong \text{Hom}_{\varphi} \mathfrak{F}_2,$$

и мы вновь приходим к естественному изоморфизму (2.5).

При  $\varphi = \text{id}$  мы получаем естественные изоморфизмы

$$\left. \begin{aligned} \text{Hom}(\mathfrak{F}_1 \oplus \mathfrak{F}_2) &\cong \mathfrak{F}_2^{\perp} \oplus \mathfrak{F}_1^{\perp}, \\ \mathfrak{F}_2^{\perp} &\cong \text{Hom} \mathfrak{F}_1, \quad \mathfrak{F}_1^{\perp} \cong \text{Hom} \mathfrak{F}_2, \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

где введено обозначение  $\mathfrak{F}^{\perp} = \mathfrak{F}^{\perp \text{id}}$ .

Для доказательства изоморфизма (2.8) заметим, что

$$\text{Hom}_{\varphi}(\mathfrak{F}_1 \oplus \mathfrak{F}_2) = \mathfrak{F}_2^{\perp\varphi} + \mathfrak{F}_1^{\perp\varphi} = \{\xi' + \xi'' \mid \xi' \in \mathfrak{F}_1^{\perp\varphi}, \xi'' \in \mathfrak{F}_2^{\perp\varphi}\},$$

ибо для  $\forall \Phi \in \text{Hom}_{\varphi} \mathfrak{F}$  справедливо представление

$$\Phi = \Phi \circ \text{pr}_1 + \Phi \circ \text{pr}_2, \quad \Phi \circ \text{pr}_1 \in \mathfrak{F}_2^{\perp\varphi}, \quad \Phi \circ \text{pr}_2 \in \mathfrak{F}_1^{\perp\varphi}.$$

Далее имеем  $\mathfrak{F}_2^{\perp\varphi} \cap \mathfrak{F}_1^{\perp\varphi} = \{0\}$ , ибо (см. (2.7)),

$$\mathfrak{F}_2^{\perp\varphi} \cap \mathfrak{F}_1^{\perp\varphi} \subset (\mathfrak{F}_2 + \mathfrak{F}_1)^{\perp\varphi} = \{0\}.$$

Следовательно, мы получили соотношение (2.8), где изоморфизм задается соответствием  $\Phi \mapsto \Phi \circ \text{pr}_1 \oplus \Phi \circ \text{pr}_2$ .

Для задания естественных изоморфизмов (2.9) заметим, что если  $\Phi_1 \in \mathfrak{F}_2^{\perp\varphi}$ ,  $\Phi_2 \in \mathfrak{F}_1^{\perp\varphi}$ , то соответствия  $\Phi_1 \mapsto \Phi_1|_{\mathfrak{F}_1}$ ,  $\Phi_2 \mapsto \Phi_2|_{\mathfrak{F}_2}$  определяют естественные вложения

$$\mathfrak{F}_2^{\perp\varphi} \subset \text{Hom}_{\varphi} \mathfrak{F}_1, \quad \mathfrak{F}_1^{\perp\varphi} \subset \text{Hom}_{\varphi}(\mathfrak{F}_2)$$

и легко видеть, на основании (2.5), что эти вложения сюръективны.

Заметим ещё, что для произвольного  $C^{\infty}(M)$ -модуля  $\mathfrak{F}$  и  $C^{\infty}(N)$ -модуля  $\mathfrak{G}$  можно написать естественный гомоморфизм  $C^{\infty}(N)$ -модулей

$$\chi : (\text{Hom}_{\varphi} \mathfrak{F}) \otimes \mathfrak{G} \rightarrow \text{Hom}_{\varphi}(\mathfrak{F}, \mathfrak{G}),$$

заданный соотношением

$$\chi(\Phi \otimes v)u = (\Phi u)v, \quad \Phi \in \text{Hom}_{\varphi} \mathfrak{F}.$$

Наше утверждение следует из  $C^{\infty}(N)$ -билинейности выражения  $(\Phi u)v$  относительно  $\Phi$ ,  $v$  и универсальности тензорного произведения  $(\text{Hom}_{\varphi} \mathfrak{F}) \otimes \mathfrak{G}$  относительно  $C^{\infty}(N)$ -билинейных отображений  $(\text{Hom}_{\varphi} \mathfrak{F}) \times \mathfrak{G} \rightarrow \text{Hom}_{\varphi}(\mathfrak{F}, \mathfrak{G})$ .

В общем случае ничего большего о гомоморфизме  $\chi$  сказать нельзя, однако  $\chi$  является естественным изоморфизмом в категории конечно порождённых проективных модулей (см. ниже), к рассмотрению которых мы теперь переходим.

Напомним, что модуль (над произвольным кольцом  $R$  и не

обязательно конечно порождённый) называется *проективным*, если он *вкладывается* (то есть гомоморфно и инъективно отображается) в свободный модуль в качестве прямого слагаемого.

Следующее свойство характеризует проективные модули:

Если  $R$ -модуль  $\mathfrak{F}$  изоморфен фактору  $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}'$   $R$ -модуля  $\mathfrak{G}$ , по подмодулю  $\mathfrak{G}'$ , то  $\mathfrak{F}$  вкладывается в  $\mathfrak{G}$  как *прямое дополнение* к  $\mathfrak{G}'$ , то есть существует такой инъективный гомоморфизм  $\chi: \mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{G}$ , что

$$\mathfrak{G} = \chi(\mathfrak{F}) \oplus \mathfrak{G}'.$$

Свободный  $C^\infty(M)$ -модуль ранга  $m$  будем представлять, как правило, в виде модуля гладких отображений  $M$  в  $\mathbb{R}^m$ :  $C^\infty(M, \mathbb{R}^m) = \{\omega = (a^1, \dots, a^m) \mid a^i \in C^\infty(M)\}$ . Всякий конечно порождённый  $C^\infty(M)$ -модуль  $\mathfrak{F}$  с  $m$  образующими  $u_1, \dots, u_m$  как правило, в виде модуля гладких отображений  $M$  в  $\mathbb{R}^m$ : при котором  $\omega_i$  переходит в  $u_i$ , где  $\omega_1, \dots, \omega_m$  — произвольный базис в  $C^\infty(M; \mathbb{R}^m)$ . Следовательно,  $\mathfrak{F}$  изоморфен фактору  $C^\infty(M; \mathbb{R}^m)/\mathfrak{G}$ , где  $\mathfrak{G}$  — ядро этого гомоморфизма.

Воспользовавшись сформулированным выше критерием проективности, мы видим, что всякий проективный  $C^\infty(M)$ -модуль  $\mathfrak{F}$  с  $m$  образующими вкладывается в  $C^\infty(M; \mathbb{R}^m)$  в качестве прямого слагаемого. Поэтому для характеристики конечно порождённых проективных  $C^\infty(M)$ -модулей достаточно охарактеризовать подмодули в  $C^\infty(M; \mathbb{R}^m)$ , являющиеся прямыми слагаемыми. Такой характеристикой может служить

**Предложение 2.1.** Пусть  $\mathfrak{F}$  — подмодуль в  $C^\infty(M; \mathbb{R}^m)$  и  $M$  — связно. Обозначим через  $\mathfrak{F}_x$  подпространство  $\mathfrak{F}_x = \{u(x) : u \in \mathfrak{F}\} \subset \mathbb{R}^m, x \in M$ .

Следующие условия 1) — 4) эквивалентны.

1) В  $C^\infty(M; \mathbb{R}^m)$  существует подмодуль  $\mathfrak{G}$ , являющийся прямым дополнением к  $\mathfrak{F}$ :  $C^\infty(M; \mathbb{R}^m) = \mathfrak{F} \oplus \mathfrak{G}$ .

2)  $\dim \mathfrak{F}_x$  не зависит от  $x$  и модуль  $\mathfrak{F}$  конечно порождён с числом образующих  $\leq m$ .

3)  $\dim \mathfrak{F}_x$  не зависит от  $x$  и  $\mathfrak{F}$  совпадает с множеством всех гладких отображений  $\omega \in C^\infty(M; \mathbb{R}^m)$ , удовлетворяющих условию  $\omega(x) \in \mathfrak{F}_x \forall x \in M$ .

4) Отображение  $h_1: x \mapsto F_x$  является гладким отображением  $M$  в  $H_k^m$ , причем модуль сечений векторного расслоения  $\sqcup_x \mathfrak{F}_x \subset M \times \mathbb{R}^m$  совпадает с  $\mathfrak{F}$ . Далее, существует такое гладкое отображение  $h_2: M \rightarrow H_{m-k}^m, x \mapsto \mathfrak{G}_x \in H_{m-k}^m$ , что

$$C^\infty(M; \mathbb{R}^m) = \mathfrak{F} \oplus \sqcup_{x \in M} \mathfrak{G}_x.$$

**Доказательство.** Импликация 1)  $\Rightarrow$  2). По условию, всякое отображение  $\omega \in C^\infty(M; \mathbb{R}^m)$  (однозначно) представляется в виде  $\omega = u + v, u \in \mathfrak{F}, v \in \mathfrak{G}$ , поэтому  $\omega(x) = u(x) + v(x) \forall x \in M$ , то

есть  $\mathfrak{F}_x + \mathfrak{G}_x = \mathbb{R}^m$ , или  $\dim \mathfrak{F}_x + \dim \mathfrak{G}_x \geq m$ . Докажем, что  $\mathfrak{F}_x \cap \mathfrak{G}_x = \{0\}$ . Если  $z \in \mathfrak{F}_x \cap \mathfrak{G}_x$ , то существуют такие  $u' \in \mathfrak{F}$ ,  $v' \in \mathfrak{G}$ , что  $u'(x) = v'(x) = z$ , откуда, взяв базис  $w_1, \dots, w_m$

в  $C^\infty(M; \mathbb{R}^m)$ , получим:  $w' = u' - v' = \sum_{i=1}^m a^i w_i$ ,  $a^i(x) = 0$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Представим  $w_i$  в виде  $w_i = u_i \oplus v_i$ ,  $u_i \in \mathfrak{F}$ ,  $v_i \in \mathfrak{G}$ , откуда

$$w' = \sum_{i=1}^m a^i u_i \oplus \sum_{i=1}^m a^i v_i = u'' + v'', \quad u''(x) = v''(x) = 0.$$

В силу единственности представления, имеем  $u' = u''$ , следовательно,  $u'(x) = u''(x) = z = 0$ . Таким образом, имеем

$$\mathbb{R}^m = \mathfrak{F}_x \oplus \mathfrak{G}_x \quad \forall x \in M, \dim \mathfrak{F}_x + \dim \mathfrak{G}_x = m.$$

Так как размерности  $\dim \mathfrak{F}_x$ ,  $\dim \mathfrak{G}_x$  полунепрерывны снизу (при малом изменении  $x$  они могут только увеличиться в силу непрерывности элементов  $C^\infty(M; \mathbb{R}^m)$  и  $\dim \mathfrak{F}_x + \dim \mathfrak{G}_x = m$ , то  $\dim \mathfrak{F}_x$  и  $\dim \mathfrak{G}_x$  не зависят от  $x$  (для связного  $M$ ). Для доказательства конечной порождённости  $\mathfrak{F}$  представим базис  $w_1, \dots, w_m$  модуля  $C_\infty(M; \mathbb{R}^m)$  в виде

$$w_i = u_i + v_i, \quad u_i \in \mathfrak{F}, \quad v_i \in \mathfrak{G}, \quad i = 1, \dots, m.$$

Тогда для  $\forall u \in \mathfrak{F}$  имеем

$$u = \sum_{i=1}^m a^i w_i = \sum_{i=1}^m a^i u_i + \sum_{i=1}^m a^i v_i = \sum_{i=1}^m a^i u_i,$$

ибо  $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{G} = \{0\}$ , то есть  $u_1, \dots, u_m$  — образующие  $\mathfrak{F}$ .

Импликация 2)  $\Rightarrow$  3). Если  $u \in \mathfrak{F}$ , то, по определению, имеем  $u(x) \in \mathfrak{F}_x \quad \forall x \in M$ . Докажем обратное утверждение: если  $u \in C^\infty(M; \mathbb{R}^m)$ ,  $u(x) \in \mathfrak{F}_x \quad \forall x \in M$ , то  $u \in \mathfrak{F}$ .

Пусть  $u_1, \dots, u_m$  — система образующих  $\mathfrak{F}$ ,  $\{U_i\}$  — настолько мелкое локально конечное покрытие  $M$  открытыми множествами с компактными замыканиями, что для  $\forall U_i$  из  $u_1, \dots, u_m$  можно выбрать  $k = \dim \mathfrak{F}_x$  элементов  $u_{i_1}, \dots, u_{i_k}$ , таких, что система векторов  $u_{i_1}(x), \dots, u_{i_k}(x)$  линейно независима для  $\forall x \in U_i$ . Поэтому существуют функции  $a_1^{(i)}, \dots, a_m^{(i)}$  на  $U_i$ , удовлетворяющие соотношению

$$u(x) = \sum_{j=1}^m a_j^{(i)} u_j(x) \quad \forall x \in U_i.$$

Пусть  $\{a^{(i)}\}$  — гладкое разбиение единицы, подчиненное покрытию  $\{U_i\}$ , так что функции  $a^{(i)} a_j^{(i)} = b_j^{(i)}$  можно считать принадлежащими  $C^\infty(M)$ , ибо  $\text{supp } b_j^{(i)} \subset U_i$ . Имеем для  $\forall i$

$$a^{(i)}(x)u(x) = \sum_{j=1}^m b_j^{(i)}(x)u_j(x) \quad \forall x \in M.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} u(x) &= \left( \sum_i a^{(i)}(x) \right) u(x) = \sum_{j=1}^m \left( \sum_i b_j^{(i)}(x) \right) u_j(x) = \\ &= \sum_{j=1}^m b_j(x) u_j(x) \quad \forall x \in M, \end{aligned}$$

где функции  $b_j = \sum_i b_j^{(i)} \in C^\infty(M)$  корректно определены в силу локальной конечности покрытия  $\{U_i\}$ . Таким образом,

$$u = \sum_{j=1}^m b_j u_j \in \mathfrak{F}.$$

Импликация 3)  $\Rightarrow$  4). Отображение  $h_1: x \mapsto \mathfrak{F}_x \in H_h^m$  — гладкое. В самом деле, для заданного  $x$  возьмём отображения  $u_1, \dots, u_k$  линейно независимые в  $x$ . Они будут линейно независимы в некоторой достаточно малой окрестности  $U_x$  точки  $x$  и потому система  $u_1(y), \dots, u_k(y)$  является базисом для  $\mathfrak{F}_y$  в любой точке  $y \in U_x$ .

Таким образом (см. п. 2.1), мы получаем векторное расслоение

$$\bigsqcup_{x \in M} h_1(x) = \bigsqcup_{x \in M} \mathfrak{F}_x \subset M \times \mathbb{R}^m,$$

модуль сечений которого состоит из всех гладких отображений  $w \in C^\infty(M; \mathbb{R}^m)$ , для которых  $w(x) \in \mathfrak{F}_x \quad \forall x \in M$ , следовательно,

$$\sigma \bigsqcup_{x \in M} \mathfrak{F}_x = \mathfrak{F}.$$

Для определения  $h_2$  достаточно обозначить через  $\mathcal{G}_x$  ортогональное дополнение к  $\mathfrak{F}_x$  (например, в канонической метрике координатного пространства  $\mathbb{R}^m$ ) и положить  $h_2: x \mapsto \mathcal{G}_x$ .

Импликация 4)  $\Rightarrow$  1) очевидна.

Следствие 1. Модуль сечений всякого векторного расслоения  $E$  над  $M$  конечно порождён и проективен.

В самом деле, на основании предложения 1.2 существует такое гладкое отображение  $h: M \rightarrow H_h^m$ , что расслоение  $E$  изоморфно векторному расслоению  $\bigsqcup_{x \in M} h(x) \subset M \times \mathbb{R}^m$ . Следовательно,

$C^\infty(M)$ -модуль  $\sigma E$  изоморфен модулю сечений векторного расслоения  $\bigsqcup_{x \in M} h(x)$ , который, на основании доказанного выше,

конечно порождён и проективен.

Следствие 2. Если  $\mathfrak{F}$  лежит в  $C^\infty(M; \mathbb{R}^m)$  в качестве прямого слагаемого:  $C^\infty(M; \mathbb{R}^m) = \mathfrak{F} \oplus \mathfrak{G}$ , то в  $C^\infty(M; \mathbb{R}^m)$  можно выбрать такой подмодуль  $\mathfrak{G}'$ , что  $C^\infty(M; \mathbb{R}^m) = \mathfrak{F} \oplus \mathfrak{G}'$  и соотношения  $u \in \mathfrak{F}$ ,  $v' \in \mathfrak{G}'$  эквивалентны равенству  $\langle u, v' \rangle = 0$ , то есть  $(u(x), v'(x)) = 0 \quad \forall x \in M$ , где  $(\cdot, \cdot)$  — произвольное, например, каноническое скалярное произведение в  $\mathbb{R}^m$ :  $((a^1, \dots, a^m), (b^1, \dots, b^m)) =$   

$$= \sum_{i=1}^m a^i b^i.$$

В самом деле, обозначив через  $\mathfrak{G}'_x$  ортогональное дополнение к  $\mathfrak{F}$  относительно скалярного произведения  $(\cdot, \cdot)$  можно принять за  $\mathfrak{G}'$  модуль сечений  $\sigma \bigsqcup_{x \in M} \mathfrak{G}'_x$ .

Предложение 2.2. Пусть  $\mathfrak{E}$  — свободный  $C^\infty(M)$ -модуль ранга  $l$ ,  $\mathfrak{E}'$  — свободный  $C^\infty(N)$ -модуль ранга  $m$  и  $\varphi: C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(N)$  — ненулевой гомоморфизм. Тогда  $\text{Hom}_\varphi(\mathfrak{E}, \mathfrak{E}')$  — свободный  $C^\infty(N)$ -модуль ранга  $lm$ , причем его базис  $\{\Phi_{ij}\}$ ,  $i=1, \dots, l$ ,  $j=1, \dots, m$ , задается соотношениями:

$$\Phi_{ij}(\omega_i) = \omega'_j, \quad \Phi_{ij}(\omega_k) = 0, \quad i \neq k,$$

где  $\{\omega_i\}$ ,  $\{\omega'_j\}$ ,  $i=1, \dots, l$ ,  $j=1, \dots, m$  — базисы в  $\mathfrak{E}$  и  $\mathfrak{E}'$ .

Следовательно,  $\text{Hom}_\varphi \mathfrak{E}$  — свободный  $C^\infty(N)$ -модуль ранга  $l$ , базис которого задается полугомоморфизмами  $\Phi_i$ ,

$$\Phi_i \omega_i = e \in C^\infty(N), \quad \Phi_i \omega_j = 0, \quad i \neq j.$$

Доказательство. Для  $\forall \Phi \in \text{Hom}_\varphi(\mathfrak{E}, \mathfrak{E}')$  имеем однозначное представление

$$\Phi = \sum_{i,j} b_{ij} \Phi_{ij},$$

где  $b_{ij}$  определяются из соотношений

$$\Phi \omega_i = \sum_{j=1}^m b_{ij} \omega'_j, \quad i=1, \dots, l.$$

Следствие. Если  $\mathfrak{F}$ ,  $\mathfrak{G}$  — конечно порождённые проективные модули, то  $\text{Hom}_\varphi(\mathfrak{F}, \mathfrak{G})$  также конечно порождён и проективен.

В самом деле, дополним  $\mathfrak{F}$  и  $\mathfrak{G}$  прямыми слагаемыми до свободных модулей  $\mathfrak{F} \oplus \mathfrak{F}'$  и  $\mathfrak{G} \oplus \mathfrak{G}'$  конечного ранга. Тогда, на основании изоморфизма (2.4) имеем:

$$\begin{aligned} \text{Hom}_\varphi(\mathfrak{F} \oplus \mathfrak{F}', \mathfrak{G} \oplus \mathfrak{G}') &\cong \text{Hom}_\varphi(\mathfrak{F}, \mathfrak{G}) \oplus \text{Hom}_\varphi(\mathfrak{F}, \mathfrak{G}') \oplus \\ &\oplus \text{Hom}_\varphi(\mathfrak{F}', \mathfrak{G}) \oplus \text{Hom}_\varphi(\mathfrak{F}', \mathfrak{G}'), \end{aligned}$$

где левая часть изоморфизма — свободный  $C^\infty(N)$ -модуль конечного типа, следовательно,  $\text{Hom}_\varphi(\mathfrak{F}, \mathfrak{G})$  — конечно порождённый проективный  $C^\infty(N)$ -модуль.

Предложение 2.3. Для всякого конечно порождённого проективного  $C^\infty(M)$ -модуля имеет место изоморфизм

$$\mathfrak{L} \cong \mathfrak{L}^* = \text{Hom } \mathfrak{L}, \quad (2.11)$$

который, однако, не является естественным и зависит от некоторых неинвариантных конструкций.

Доказательство. Представим  $C^\infty(M; \mathbb{R}^m)$  в виде  $C^\infty(M; \mathbb{R}^m) = \mathfrak{F} \oplus \mathfrak{G}$ , причём  $\mathfrak{G}$  выберем таким образом, чтобы (см. следствие 2 предложения 2.1) имела место эквивалентность

$$u \in \mathfrak{F}, v \in \mathfrak{G} \Leftrightarrow \langle u, v \rangle = 0,$$

из которой следуют (зависящие от выбора  $\mathfrak{G}$ ) инъективные вложения

$$\mathfrak{F} \subset \mathfrak{G}^\perp, \quad \mathfrak{G} \subset \mathfrak{F}^\perp.$$

Их прямая сумма задаёт инъективный гомоморфизм (см. первую из формул (2.10) и предложение 2.2)

$$\begin{aligned} i_1 \oplus i_2 : C^\infty(M; \mathbb{R}^m) = \mathfrak{F} \oplus \mathfrak{G} &\rightarrow \mathfrak{G}^\perp \oplus \mathfrak{F}^\perp \cong \text{Hom}(\mathfrak{F} \oplus \mathfrak{G}) = \\ &= \text{Hom}(C^\infty(M; \mathbb{R}^m)) \cong C^\infty(M; \mathbb{R}^m). \end{aligned}$$

Следовательно, учитывая крайние члены этих соотношений, получаем, что  $i_1 \oplus i_2$  — изоморфизм, поэтому  $i_1, i_2$  также изоморфизмы. Это завершает доказательство, ибо, согласно второму из изоморфизмов (2.10),  $\mathfrak{G}^\perp \cong \text{Hom } \mathfrak{L}$ .

Докажем, теперь, что если  $\mathfrak{F}$  — конечно порождённый проективный  $C^\infty(M)$ -модуль, то имеет место естественный изоморфизм

$$\mathfrak{F} \cong \mathfrak{F}^{**} = \text{Hom} \cdot \text{Hom } \mathfrak{F}. \quad (2.12)$$

Имеем естественное инъективное вложение  $i : \mathfrak{F} \subset \mathfrak{F}^{**}$ , ибо для  $\forall \xi \in \mathfrak{F}^*$  элемент  $u \in \mathfrak{F}$  спаривается с  $\xi$  по формуле  $\langle u, \xi \rangle = \langle \xi, u \rangle$ . Пусть  $\mathfrak{G}$  дополняет  $\mathfrak{F}$  до  $C^\infty(M; \mathbb{R}^m)$ . Взяв прямую сумму соответствующих естественных гомоморфизмов

$$i_1 : \mathfrak{F} \subset \text{Hom} \cdot \text{Hom } \mathfrak{F}, \quad i_2 : \mathfrak{G} \subset \text{Hom} \cdot \text{Hom } \mathfrak{G}$$

и, учитывая естественные изоморфизмы (2.5) и предложение 2.2, получим

$$\begin{aligned} i_1 \oplus i_2 : C^\infty(M; \mathbb{R}^m) = \mathfrak{F} \oplus \mathfrak{G} &\subset \text{Hom} \cdot \text{Hom } \mathfrak{F} \oplus \text{Hom} \cdot \text{Hom } \mathfrak{G} \cong \\ &\cong \text{Hom}(\text{Hom } \mathfrak{F} \oplus \text{Hom } \mathfrak{G}) \cong \text{Hom} \cdot \text{Hom}(\mathfrak{F} \oplus \mathfrak{G}) \cong \\ &\cong \text{Hom} \cdot \text{Hom}(C^\infty(M; \mathbb{R}^m)) \cong C^\infty(M; \mathbb{R}^m). \end{aligned}$$

Следовательно,  $i_1, i_2$  — изоморфизмы.

Введём теперь категорию модулей  $\text{Mod}_\infty$  и её подкатегории  $\text{Mod}_{\text{fin}}$ ,  $\text{Mod}_m$ , соответствующие категориям векторных расщеплений  $\text{Bd}_\infty$ ,  $\text{Bd}_{\text{fin}}$ ,  $\text{Bd}_m$ , и соответственно им эквивалентные (см. пп. 2.3—2.4).

Объекты категории  $\text{Mod}_\infty$  — всевозможные конечно порождённые проективные  $C^\infty(M)$ -модули, где  $M$  пробегает все гладкие многообразия. Морфизмами категории  $\text{Mod}_\infty$  являются произвольные полугомоморфизмы  $\Phi \in \text{Hom}_*(\mathfrak{F}, \mathfrak{G})$ , где  $\mathfrak{F}, \mathfrak{G}$  пробегают все объекты в  $\text{Mod}_\infty$ , а  $\varphi$  — произвольные (ненулевые) гомоморфизмы соответствующих алгебр.

Изоморфизмами этой категории являются *полуизоморфизмы над  $\varphi$* , то есть взаимно однозначные полугомоморфные над  $\varphi$  отображения  $\mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{G}$ . Нетрудно видеть, что в этом случае  $\varphi$  — изоморфизм соответствующих алгебр.

Подкатегория  $\text{Mod}_{\text{Diff}} \subset \text{Mod}_\infty$  состоит из тех же объектов, что и  $\text{Mod}_\infty$ , а морфизмами в ней являются лишь полугомоморфизмы  $P$  над изоморфизмами  $p: C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(N)$  соответствующих алгебр.

Наконец, объекты категории  $\text{Mod}_M \subset \text{Mod}_\infty$  — всевозможные  $C^\infty(M)$ -модули, где  $M$  фиксировано, а морфизмы — произвольные полугомоморфизмы над эндоморфизмами  $\varphi: C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ .

Одно и то же отображение  $\Phi: \mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{G}$  может являться полуморфизмы  $P$  над изоморфизмами  $p: C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(N)$  соответствующих алгебр, например, нулевой полугомоморфизм, отображающий весь модуль  $\mathfrak{F}$  в нуль. Тем не менее, для широкого класса полугомоморфизмов  $\Phi \in \text{Hom}_*(\mathfrak{F}, \mathfrak{G})$  гомоморфизм  $\varphi$  однозначно определён и тогда можно писать

$$\varphi = \theta(\Phi). \quad (2.13)$$

Например, это справедливо для класса всех полуизоморфизмов — см. ниже. В этом случае, поскольку композиция полуизоморфизмов также полуизоморфизм, вместе с изоморфизмами алгебр  $\theta(P_1), \theta(P_2)$  определён изоморфизм  $\theta(P_1 \circ P_2)$  и

$$\theta(P_1 \circ P_2) = \theta(P_1) \circ \theta(P_2), \quad \theta(P^{-1}) = \theta(P)^{-1}. \quad (2.14)$$

Ясно, что автоморфизмом  $C^\infty(M)$ -модуля  $\mathfrak{F}$  является такой полуморфизм, для которого  $\theta(P) = \text{id}_{C^\infty(M)}$ .

Из (2.14) следует, что если полуизоморфизмы  $P_1, P_2$  удовлетворяют соотношению  $\theta(P_1) = \theta(P_2)$ , то  $P_1 \circ P_2^{-1}$  и  $P_1^{-1} \circ P_2$  — автоморфизмы. В частности, вместе с  $P$  автоморфизмом является и  $P^{-1}$ .

Следующее предложение даёт достаточное условие существования соотношения (2.13), то есть того, что для данного полугомоморфизма  $\Phi \in \text{Hom}_*(\mathfrak{F}, \mathfrak{G})$  гомоморфизм алгебр  $\varphi: C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(N)$  однозначно определён.

**Предложение 2.4.** Полугомоморфизм модулей  $\Phi \in \text{Hom}_*(\mathfrak{F}, \mathfrak{G})$ , где  $\mathfrak{F}$  —  $C^\infty(M)$ -модуль,  $\mathfrak{G}$  —  $C^\infty(N)$ -модуль однозначно определяет гомоморфизм  $\varphi$ , если для  $\forall u \in N$  существуют такие  $\iota \in \mathfrak{F}, \eta \in \mathfrak{G}^*$ , что

$$\langle \eta, \Phi u \rangle|_N \neq 0.$$

В частности, этому условию удовлетворяют полуизоморфизмы.

Доказательство. Допустим противное и пусть  $\varphi_1, \varphi_2: C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(N)$  — различные гомоморфизмы алгебр, причём

$$\Phi(au) = (\varphi_1 a)\Phi u = (\varphi_2 a)\Phi u$$

$$\forall a \in C^\infty(M), \forall u \in \mathfrak{F}.$$

Тогда существует такая точка  $y \in N$  и функция  $a \in C^\infty(M)$ , что  $b_1 = \varphi_1 a(y) \neq \varphi_2 a(y) = b_2$  и, следовательно, имеем:

$$(b_1 - b_2) \langle \eta, \Phi u \rangle|_y = 0 \Rightarrow \langle \eta, \Phi u \rangle|_y = 0 \quad \forall \eta \in \mathcal{G}^*, u \in \mathfrak{F},$$

вопреки условию.

В заключение этого пункта докажем естественный изоморфизм

$$\text{Hom}_\varphi(\mathfrak{F}, \mathcal{G}) \cong (\text{Hom}_\varphi \mathfrak{F}) \otimes \mathcal{G} \quad (2.15)$$

в категории  $\text{Mod}_\infty$ .

Выше было отмечено, что отображение

$$(\text{Hom}_\varphi \mathfrak{F}) \otimes \mathcal{G} \xrightarrow{\chi} \text{Hom}_\varphi(\mathfrak{F}, \mathcal{G}), \quad (2.16)$$

заданное формулой

$$(\chi(\Phi \otimes v))u = (\Phi u)v, \quad u \in \mathfrak{F}, v \in \mathcal{G}, \Phi \in \text{Hom}_\varphi \mathfrak{F},$$

является естественным гомоморфизмом.

Докажем сначала, что  $\chi$  — изоморфизм, если  $\mathfrak{F}$  и  $\mathcal{G}$  свободные модули конечного типа. Обозначим через  $\{u_k\}$  базис в  $\mathfrak{F}$ ,  $\{v_j\}$  — базис в  $\mathcal{G}$ ,  $\{\Phi_i\}$  — базис в  $\text{Hom}_\varphi \mathfrak{F}$ :  $\Phi_i u_k = \delta_{ik}$ . Тогда система  $\{\chi(\Phi_i \otimes v_j)\}$  удовлетворяет соотношениям

$$\chi(\Phi_i \otimes v_j) u_i = (\Phi_i u_i) v_j = v_j,$$

$$\chi(\Phi_i \otimes v_j) u_l = (\Phi_i u_l) v_j = 0, \quad i \neq l,$$

то есть является, на основании предложения 2.2, базисом свободного модуля  $\text{Hom}_\varphi(\mathfrak{F}, \mathcal{G})$ , поэтому  $\chi$  — изоморфизм.

В общем случае обозначим  $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1$ ,  $\mathcal{G} = \mathcal{G}_1$  и пусть  $\mathfrak{F}_2$ ,  $\mathcal{G}_2$  — прямые дополнения к  $\mathfrak{F}_1$ ,  $\mathcal{G}_1$  до свободных модулей конечного типа. Далее, пусть

$$(\text{Hom}_\varphi \mathfrak{F}_i) \otimes \mathcal{G}_j \xrightarrow{\chi_{ij}} \text{Hom}_\varphi(\mathfrak{F}_i, \mathcal{G}_j)$$

— соответствующие естественные гомоморфизмы (2.16),  $\Sigma \chi_{ij}$  — их прямая сумма. Имеем следующую цепочку естественных гомоморфизмов:

$$(\text{Hom}_\varphi(\mathfrak{F}_1 \oplus \mathfrak{F}_2)) \otimes (\mathcal{G}_1 \oplus \mathcal{G}_2) \xrightarrow{i_1} \sum_{i,j} (\text{Hom}_\varphi \mathfrak{F}_i) \otimes \mathcal{G}_j \xrightarrow{\Sigma \chi_{ij}}$$

$$\cong \sum_{i,j} \text{Hom}_\varphi(\mathfrak{F}_i, \mathcal{G}_j) \xrightarrow{i_2} \text{Hom}_\varphi(\mathfrak{F}_1 \oplus \mathfrak{F}_2, \mathcal{G}_1 \oplus \mathcal{G}_2).$$

Здесь композиция  $i_2 \circ \Sigma \chi_{ij} \circ i_1$  является естественным изоморфизмом (2.16) крайних членов, ибо  $\mathfrak{F}_1 \oplus \mathfrak{F}_2$ ,  $\mathfrak{G}_1 \oplus \mathfrak{G}_2$  — свободные модули конечного типа,  $i_1$ ,  $i_2$  — также естественные изоморфизмы, см. (2.5). Следовательно,  $\Sigma \chi_{ij}$  — изоморфизм, поэтому все прямые слагаемые  $\chi_{ij}$  — изоморфизмы.

**2.3. Эквивалентность категорий  $\text{Bd}_\infty$ ,  $\text{Mod}_\infty$ .** Если конечно порожденный проективный  $C^\infty(M)$ -модуль  $\mathfrak{F}$  вложен с помощью инъективного гомоморфизма  $\chi$  в  $C^\infty(M; \mathbb{R}^m)$  в качестве прямого слагаемого

$$C^\infty(M; \mathbb{R}^m) = \chi(\mathfrak{F}) \oplus \mathfrak{G},$$

то ему можно сопоставить векторное расслоение над  $M$ , пользуясь гладким отображением (см. предложение 2.1)

$$x \mapsto \chi(\mathfrak{F})_x \in H_k^m, \quad x \in M, \quad k = \dim \chi(\mathfrak{F})_x,$$

которое индуцирует векторное расслоение

$$\bigsqcup_{x \in M} \chi(\mathfrak{F})_x \subset M \times \mathbb{R}^m, \quad (3.1)$$

см. п. 2.1. Такое сопоставление неудовлетворительно тем, что оно зависит от способа вложения  $\chi$ , — не возникает функториально. Более того, не видно даже, что размерность слоя  $\dim \chi(\mathfrak{F})_x$  от  $\chi$  не зависит.

Существует, однако, инвариантный переход от произвольного конечно порожденного проективного  $C^\infty(M)$ -модуля  $\mathfrak{F}$  к векторному расслоению  $\beta \mathfrak{F}$  над  $M$ , который называется *переходом к расслоению 0-струй модуля  $\mathfrak{F}$*  и который мы сейчас опишем.

Предварительно заметим, что если имеется представление  $C^\infty(M; \mathbb{R}^m) = \mathfrak{F} \oplus \mathfrak{G}$  и если в некоторой точке  $x \in M$  элемент  $s \in \mathfrak{F}$  (являющийся гладким отображением  $M \rightarrow \mathbb{R}^m$ ) обращается в нуль,  $s(x) = 0$ , то найдутся такие гладкие функции  $a_1, \dots, a_m \in C^\infty(M)$  и элементы  $s_1, \dots, s_m \in \mathfrak{F}$ , что

$$s = \sum_{i=1}^m a_i s_i, \quad a_i(x) = 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

Для доказательства запишем  $s$  в виде  $s = \sum_{i=1}^m a_i w_i$ , где

$w_1, \dots, w_m$  — базис в  $C^\infty(M; \mathbb{R}^m)$ . Так как  $\sum_{i=1}^m a_i(x) w_i(x) = 0$ , то  $a_1(x) = \dots = a_m(x) = 0$ . Представив  $w_i$  в виде  $w_i = s_i + v_i$ ,  $s_i \in \mathfrak{F}$ ,  $v_i \in \mathfrak{G}$ ,  $i = 1, \dots, m$ , и учитывая, что  $\mathfrak{F}$  и  $\mathfrak{G}$  — прямые слагаемые, получим

$$s = \sum_{i=1}^m a_i s_i + \sum_{i=1}^m a_i v_i = \sum_{i=1}^m a_i s_i, \quad a_i(x) = 0.$$

Предположим теперь, что  $\mathfrak{F}$  — произвольный конечно порожденный проективный модуль над  $C^\infty(M)$ . Обозначим через  $I_x$  максимальный идеал в  $C^\infty(M)$  всех обращающихся в нуль в точке  $x$  функций (см. § 1). Имеется естественный изоморфизм  $C^\infty(M)/I_x \cong \mathbb{R}$ . Возьмем подмодуль

$$I_x \mathfrak{F} = \left\{ \sum_i a_i u_i \mid a_i \in I_x, u_i \in \mathfrak{F} \right\} \subset \mathfrak{F} \quad (3.2)$$

и образуем фактормодуль

$$\mathfrak{F}/I_x \mathfrak{F} = \{u/I_x \mathfrak{F} \mid u \in \mathfrak{F}\}, \quad (3.3)$$

который можно естественным образом рассматривать над кольцом  $C^\infty(M)/I_x \cong \mathbb{R}$ . Следовательно, этот фактор — вещественное векторное пространство размерности  $\leq m$ , где  $m$  — количество образующих  $u_1, \dots, u_m$  в  $\mathfrak{F}$ , ибо  $m$  элементов  $u_i/I_x \mathfrak{F}$ ,  $i=1, \dots, m$ , являются, очевидно, образующими в  $\mathfrak{F}/I_x \mathfrak{F}$ .

Векторное пространство  $\mathfrak{F}/I_x \mathfrak{F}$  будем называть (*абстрактным*) *слоем модуля  $\mathfrak{F}$  над точкой  $x$* , а элемент  $u/I_x \mathfrak{F} \in \mathfrak{F}/I_x \mathfrak{F}$  — значением элемента  $u$  в точке  $x$ . Будем обозначать его через

$$u_x = u/I_x \mathfrak{F}. \quad (3.4)$$

Определим семейство  $\mathbb{R}$ -линейных суръективных отображений  $J_x^0$ ,  $x \in M$ , по формуле

$$J_x^0: \mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{F}/I_x \mathfrak{F}, \quad u \mapsto J_x^0 u = u_x, \quad u \in \mathfrak{F}. \quad (3.5)$$

Семейство слоев

$$\mathfrak{F}/I_x \mathfrak{F} = J_x^0 \mathfrak{F} = \{u_x \mid u \in \mathfrak{F}\}, \quad x \in M,$$

образует предрасслоение

$$\beta \mathfrak{F} = \bigsqcup_{x \in M} J_x^0 \mathfrak{F}, \quad (3.6)$$

которое мы превратим сейчас в векторное расслоение, пользуясь лишь модульной структурой  $\mathfrak{F}$ .

Определим, прежде всего, инъективный гомоморфизм  $J^0$  модуля  $\mathfrak{F}$  в  $C^\infty(M)$ -модуль всевозможных сечений предрасслоения  $\beta \mathfrak{F}$  по формуле

$$u \mapsto J^0 u: x \mapsto J_x^0 u = u_x, \quad x \in M. \quad (3.7)$$

$C^\infty(M)$ -линейность отображения  $J^0$  очевидна. Докажем его инъективность. Если  $J^0 u = 0$ , то  $J_x^0 u = 0$  для  $\forall x \in M$ , то есть  $u \in I_x \mathfrak{F} \forall x \in M$ , или

$$u = \sum_i a_i u_i, \quad a_i(x) = 0, \quad u_i \in \mathfrak{F}. \quad (3.8)$$

Но мы знаем, что существует инъективный гомоморфизм  $\chi: \mathfrak{F} \rightarrow C^\infty(M; \mathbb{R}^m)$ , следовательно,  $\chi(u) = \sum_i a_i \chi(u_i)$ ,  $a_i(x) = 0$  или  $\chi(u)(x) = 0 \forall x \in M \Leftrightarrow u = 0$ .

Таким образом, образ  $J^0\mathfrak{F}$ , являющийся некоторым подмодулем в  $C^\infty(M)$ -модуле всех сечений предрасслоения  $\beta\mathfrak{F}$ , изоморфен модулю  $\mathfrak{F}$ . Докажем теперь, что размерность слоя  $\dim J_x^0\mathfrak{F}$  не зависит от  $x$ .

Так как  $\chi(\mathfrak{F})$  — прямое слагаемое в  $C^\infty(M; \mathbb{R}^m)$ , то, на основании предложения 2.1, мы имеем гладкое отображение

$$x \mapsto \chi(\mathfrak{F})_x \in H_k^m, \quad x \in M, \quad k = \dim \chi(\mathfrak{F})_x.$$

Покажем, что

$$\dim J_x^0\mathfrak{F} = k \quad \forall x \in M.$$

Определим линейное отображение слоя  $J_x^0\mathfrak{F}$  на подпространство  $\chi(\mathfrak{F})_x \subset \mathbb{R}^m$  по формуле

$$J_x^0 u = u_{x \mapsto \chi(u)(x)}, \quad u \in \mathfrak{F}.$$

Данное определение корректно, ибо если  $J_x^0 u = 0$ , то  $u = \sum_i a_i u_i$ ,  $a_i(x) = 0$ , см. (3.8). Следовательно,

$$\chi(u)(x) = \sum_i a_i(x) \chi(u_i)(x) = 0.$$

Кроме того, это отображение сюръективно, ибо произвольная точка подпространства  $\chi(\mathfrak{F})_x$  имеет вид  $\chi(u)(x)$ ,  $u \in \mathfrak{F}$ .

Покажем, что оно инъективно.

Если  $J_x^0 u \mapsto \chi(u)(x) = 0$ , то, на основании доказанного выше утверждения, найдутся такие функции  $a_i \in C^\infty(M)$  и элементы  $u_i \in \mathfrak{F}$ , что  $\chi(u) = \sum_i a_i \chi(u_i) = \chi\left(\sum_i a_i u_i\right)$ ,  $a_i(x) = 0$ . В силу инъективности  $\chi$ , имеем  $u = \sum_i a_i u_i$ ,  $a_i(x) = 0 \Rightarrow u \in J_x\mathfrak{F} \Rightarrow u_x = 0$ . Итак, независимость размерности слоя  $J_x^0\mathfrak{F}$  от  $x$  доказана.

Объявим в предрасслоении  $\beta\mathfrak{F}$  модуль  $J^0\mathfrak{F}$  модулем всех гладких сечений. Как легко видеть, что превращает  $\beta\mathfrak{F}$  в векторное расслоение над  $M$  (см. предложение 2.2) с модулем сечений, естественно изоморфным  $\mathfrak{F}$ ,

$$\sigma(\beta\mathfrak{F}) = J^0\mathfrak{F} \cong \mathfrak{F}. \quad (3.9)$$

Докажем, что изоморфизм  $\mathfrak{F} \xrightarrow{J^0} J^0\mathfrak{F}$  является естественным в категории  $\text{Mod}_\infty$ . В самом деле,  $J^0$  превращается в ковариантный функтор из  $\text{Mod}_\infty$  в себя, естественно эквивалентный тождественному функтору  $\text{Id}_{\text{Mod}_\infty}$ , если задать его на объектах соответствием

$$\mathfrak{F} \mapsto J^0 \mathfrak{F}, \quad (3.10)$$

а для  $\forall \Omega \in \text{Hom}_{\Phi}(\mathfrak{F}, \mathfrak{G})$ , где  $\mathfrak{F} - C^{\infty}(M)$ -модуль,  $\mathfrak{G} - C^{\infty}(N)$ -модуль,  $\Phi: C^{\infty}(M) \rightarrow C^{\infty}(N)$  — (ненулевой) гомоморфизм алгебр, положить

$$\begin{aligned} J^0 \Omega: J^0 \mathfrak{F} &\rightarrow J^0 \mathfrak{G}, \\ J^0 \Omega(J^0 u) &= J^0(\Omega u), \quad u \in \mathfrak{F}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Ясно, что  $J^0 \Omega \in \text{Hom}_{\Phi}(J^0 \mathfrak{F}, J^0 \mathfrak{G})$ , причем коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & J^0 & \\ \mathfrak{F} & \xrightarrow{\quad} & J^0 \mathfrak{F} \\ \Omega \downarrow J^0 & & \downarrow J^0 \Omega \\ \mathfrak{G} & \xrightarrow{\quad} & J^0 \mathfrak{G} \end{array}$$

Независимо от способа вложения  $\chi$ , расслоение  $\beta \mathfrak{F}$  изоморфно подрасслоению (3.1), где изоморфизм задается отображением

$$J_x^0 u = u_x \mapsto \chi(u)(x), \quad u \in \mathfrak{F}, \quad x \in M.$$

Векторное расслоение  $\beta \mathfrak{F}$  называется *расслоением 0-струй модуля  $\mathfrak{F}$* .

Легко видеть, что дуальным расслоением к  $\beta \mathfrak{F}$  является расслоение  $\beta(\text{Hom } \mathfrak{F})$ ,

$$\text{co}(\beta \mathfrak{F}) \cong \beta(\text{Hom } \mathfrak{F}). \quad (3.12)$$

В самом деле, обозначив через  $\xi$  произвольный элемент из  $\text{Hom } \mathfrak{F}$ , имеем

$$\beta(\text{Hom } \mathfrak{F}) = \bigsqcup_{x \in M} J_x^0(\text{Hom } \mathfrak{F}) = \bigsqcup_{x \in M} \{\xi_x \mid \xi \in \text{Hom } \mathfrak{F}\}.$$

Между векторными пространствами  $\{\xi_x \mid \xi \in \text{Hom } \mathfrak{F}\}$  и  $\{u_x \mid u \in \mathfrak{F}\}$  имеется естественная двойственность, заданная формулой

$$\langle \xi_x, u_x \rangle = \langle \xi, u \rangle|_x, \quad x \in M.$$

Следовательно,

$$J_x^0(\text{Hom } \mathfrak{F}) \cong (J_x^0)^*,$$

поэтому

$$\beta(\text{Hom } \mathfrak{F}) = \bigsqcup_{x \in M} J_x^0(\text{Hom } \mathfrak{F}) \cong \bigsqcup_{x \in M} \text{Hom}(J_x^0 \mathfrak{F}) = \text{co}(\beta \mathfrak{F}).$$

Кроме того, ясно, что модули сечений расслоений  $\text{co}(\beta \mathfrak{F})$  и  $\beta(\text{Hom } \mathfrak{F})$  естественно изоморфны.

Описанные конструкции можно сформулировать в виде следующего предложения.

**Предложение 3.1.** Каждый конечно порожденный проективный  $C^{\infty}(M)$ -модуль  $\mathfrak{F}$  определяет предрасслоение 0-струй этого модуля

$$\beta \mathfrak{F} = \bigsqcup_{x \in M} \mathfrak{F} / I_x \mathfrak{F}, \quad (3.13)$$

слои которого имеют постоянную (не зависящую от  $x$ ) размерность и представляются в виде

$$\mathfrak{F}/I_x\mathfrak{F} = \{u/I_x\mathfrak{F} = u_x = J_x^0 u; u \in \mathfrak{F}\}, \quad (3.14)$$

где  $u_x = J_x^0 u$  — значение элемента  $u$  в точке  $x$ .

Отображение  $J^0$  модуля  $\mathfrak{F}$  в  $C^\infty(M)$ -модуль всех сечений предрасслоения  $\beta\mathfrak{F}$ , определенное формулой

$$u \mapsto (J^0 u: x \mapsto J_x^0 u = u_x, x \in M), \quad (3.15)$$

является инъективным гомоморфизмом.

Объявляя образ  $J^0\mathfrak{F}$  модулем всех гладких сечений, мы превращаем  $\beta\mathfrak{F}$  в векторное расслоение (над  $M$ ) 0-струй модуля  $\mathfrak{F}$ :

$$\beta\mathfrak{F} = \bigsqcup_{x \in M} J_x^0 \mathfrak{F} = \bigsqcup_{x \in M} \{u_x | u \in \mathfrak{F}\}. \quad (3.16)$$

Модуль сечений расслоения  $\beta\mathfrak{F}$  выражается формулой

$$\sigma(\beta\mathfrak{F}) = J^0\mathfrak{F} = \{J^0 u: x \mapsto u_x | x \in M, u \in \mathfrak{F}\}, \quad (3.17)$$

причем отображение  $\mathfrak{F} \xrightarrow{J^0} J^0\mathfrak{F}$  является естественным изоморфизмом

$$\mathfrak{F} \cong J^0\mathfrak{F}, \quad (3.18)$$

ибо соответствия (3.10) — (3.11) превращают  $J^0$  в ковариантный функтор, естественно эквивалентный тождественному функтору.

Мы докажем сейчас, что категория  $\text{Bd}_\infty$  эквивалентна категории  $\text{Mod}_\infty$ . Именно, будут определены два контрвариантных функтора

$$\Sigma: \text{Bd}_\infty \rightarrow \text{Mod}_\infty, \quad \Delta: \text{Mod}_\infty \rightarrow \text{Bd}_\infty$$

и будет доказано, что ковариантные функторы  $\Delta \circ \Sigma$  и  $\Sigma \circ \Delta$  естественно эквивалентны тождественным функторам  $\text{Id}_{\text{Bd}_\infty}$  и  $\text{Id}_{\text{Mod}_\infty}$ .

Пусть  $A, B$  — произвольные векторные расслоения над многообразиями  $M, N$  соответственно,  $F$  — морфизм между ними:

$$A \xrightarrow{F} B, \quad F \in \text{Mor}_f(A, B),$$

где

$$M \xrightarrow{f} N, \quad C^\infty(M) \xleftarrow{f^*} C^\infty(N)$$

— гладкое отображение  $M$  в  $N$  и соответствующий ему гомоморфизм алгебр.

Рассмотрим функтор  $\Sigma$  задав его на объектах формулой

$$A \mapsto \Sigma A = \text{Hom}(\sigma A), \quad (3.19)$$

а на морфизмах — с помощью формул

$$\left. \begin{aligned} \text{Hom}(\sigma A) &\xleftarrow{\Sigma F} \text{Hom}(\sigma B), \\ \langle (\Sigma F)\eta, s \rangle|_x &= \langle \eta_{f(x)}, Fs(x) \rangle \\ \forall \eta \in \text{Hom}(\sigma B), \forall s \in \sigma A. \end{aligned} \right\} \quad (3.20)$$

Корректность данного определения и его функториальность непосредственно проверяются. Легко также видеть, что

$$\Sigma F \in \text{Hom}_{f^*}(\text{Hom}(\sigma B), \text{Hom}(\sigma A)). \quad (3.21)$$

Аналогично, пусть  $\mathfrak{F}, \mathfrak{G} \in \text{Mod}_\infty - C^\infty(M)$ - и  $C^\infty(N)$ -модули, соответственно,  $\Phi$  — полугомоморфизм

$$\mathfrak{F} \xleftarrow{\Phi} \mathfrak{G}, \quad \Phi \in \text{Hom}_\Phi(\mathfrak{G}, \mathfrak{F}),$$

где  $\varphi: C^\infty(N) \rightarrow C^\infty(M)$  — гомоморфизм алгебр. Через  $f: M \rightarrow N$  обозначим гладкое отображение, соответствующее  $\varphi: \varphi = f^*$ . Тогда функтор  $\Delta$  определяется на объектах по формуле

$$\Delta \mathfrak{F} = \beta(\text{Hom } \mathfrak{F}), \quad \Delta \mathfrak{G} = \beta(\text{Hom } \mathfrak{G}) \quad (3.22)$$

а на морфизмах — соотношениями

$$\left. \begin{aligned} \beta(\text{Hom } \mathfrak{F}) &\xrightarrow{\Delta \Phi} \beta(\text{Hom } \mathfrak{G}), \\ \langle (\Delta \Phi)\xi_x, v_{f(x)} \rangle &= \langle \xi, \Phi v \rangle|_x, \\ \forall \xi \in \text{Hom } \mathfrak{F}, \quad \forall v \in \mathfrak{G}. \end{aligned} \right\} \quad (3.23)$$

Ясно, что

$$\Delta \Phi \in \text{Mor}_f(\beta(\text{Hom } \mathfrak{F}), \beta(\text{Hom } \mathfrak{G})).$$

Очевидно, что существует естественный изоморфизм  $A \cong \beta(\sigma A)$ , кроме того, мы имеем естественный изоморфизм  $\text{Hom}(\text{Hom } \mathfrak{F}) \cong \mathfrak{F}$ , — см. п. 2.2, следовательно, см. также (3.17) — (3.18),

$$\begin{aligned} \Delta \Sigma A &= \beta(\text{Hom}(\Sigma A)) = \beta(\text{Hom}[\text{Hom}(\sigma A)]) \cong \\ &\cong \beta(\text{Hom} \circ \text{Hom}(\sigma A)) \cong \beta(\sigma A) \cong A, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Sigma \Delta \mathfrak{F} &= \Sigma(\beta(\text{Hom } \mathfrak{F})) = \text{Hom}(\sigma[\beta(\text{Hom } \mathfrak{F})]) \cong \\ &\cong \text{Hom}(J^0(\text{Hom } \mathfrak{F})) \cong \text{Hom} \circ \text{Hom } \mathfrak{F} \cong \mathfrak{F}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\Delta \circ \Sigma \cong \text{Id}_{\text{Bd}_\infty}, \quad \Sigma \circ \Delta \cong \text{Id}_{\text{Mod}_\infty} \quad (3.25)$$

Доказанная эквивалентность категорий  $\text{Bd}_\infty$  и  $\text{Mod}_\infty$  показывает, что инвариантные конструкции в векторных расслоениях над гладкими многообразиями и в конечно порожденных проективных модулях над алгебрами гладких функций находятся во взаимно-однозначном соответствии. Например, для проведения многих конструкций над векторными расслоениями оказывается более удобным проводить соответствующие конструи-

ции над модулями их сечений и уже после построения окончательных объектов в виде модулей переходить обратно к расслоениям, см. также следующий пункт.

**2.4. Категории  $\text{Vd}_{\text{Diff}}$ ,  $\text{Mod}_{\text{Diff}}$ . Сопряженные морфизмы. Отображения**

$$M \xrightarrow{f=\varphi^*} N, \quad C^\infty(M) \xleftarrow{f^*=\varphi} C^\infty(N)$$

являются «взаимно сопряженными» относительно спаривания

$$\langle x, a \rangle = a(x), \quad \langle y, b \rangle = b(y), \\ x \in M, \quad y \in N; \quad a \in C^\infty(M), \quad b \in C^\infty(N),$$

то есть выполняются тождества

$$\langle fx, b \rangle = \langle x, f^*b \rangle = \langle x, \varphi b \rangle.$$

Часто возникают взаимно сопряженные в аналогичном смысле отображения  $R, S$  спариваний, которые  $\mathbf{R}$ -линейны по обоим аргументам, причем сами отображения линейны, а область значений либо  $\mathbf{R}$  либо алгебра гладких функций. Во всех таких случаях результат перехода от  $R$  к  $S$  и наоборот естественно обозначают звездочкой

$$S = R^*, \quad R = S^*,$$

причем оператор  $*$  имеет в этих случаях функториальный характер и его можно рассматривать, как и в случае перехода  $f \mapsto f^*$  как «функтор подстановки».

Мы рассмотрим здесь взаимно сопряженные морфизмы из категорий  $\text{Vd}_{\text{Diff}}$ ,  $\text{Mod}_{\text{Diff}}$ , то есть взаимно сопряженные отображения расслоений над диффеоморфизмами соответствующих баз или полугомоморфизмы над изоморфизмами соответствующих алгебр. Мы покажем, кроме того, что в этих категориях соответствия  $\beta$  и  $\sigma$ , введенные выше, можно превратить во «взаимно обратные», см. ниже, функторы, устанавливающие эквивалентность категорий  $\text{Vd}_{\text{Diff}}$  и  $\text{Mod}_{\text{Diff}}$ .

Пусть заданы диффеоморфизмы

$$M \xrightleftharpoons[f^{-1}]{f} N \quad (4.1)$$

и предположим, что

$$A = \bigsqcup_{x \in M} A_x, \quad B = \bigsqcup_{y \in N} B_y$$

— векторные расслоения над  $M$  и  $N$ . Двойственные расслоения обозначим через

$$\text{co } A = \bigsqcup_{x \in M} A_x^*, \quad \text{co } B = \bigsqcup_{y \in N} B_y^*,$$

— см. п. 2.1. Сечения в  $A$  и  $B$  будем обозначать  $r$  и  $s$ , сечения в  $\text{co } A$  и  $\text{co } B$  — через  $\mu, \nu : r \in \sigma A, s \in \sigma B, \mu \in \text{co } A, \nu \in \text{co } B$ . Возьмем

произвольный морфизм  $F$  над  $f$ :

$$A \xrightarrow{F} B, \quad F \in \text{Mor}_f(A, B) \quad (4.2)$$

и определим сопряженный к нему морфизм

$$\text{co } A \xleftarrow{F^*} \text{co } B, \quad F^* \in \text{Mor}_{f^{-1}}(\text{co } A, \text{co } B) \quad (4.3)$$

по формуле

$$\langle F^*v(y), r(f^{-1}(y)) \rangle = \langle v(y), Fr(f^{-1}(y)) \rangle \quad (4.4)$$

которая, очевидно, эквивалентна формуле

$$\langle v(f(x), Fr(x)) \rangle = \langle F^*v(f(x)), r(x) \rangle. \quad (4.5)$$

В этих формулах символом  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  обозначается оператор спаривания в соответствующих двойственных слоях расслоений  $A$ ,  $\text{co } A$  и  $B$ ,  $\text{co } B$ . Ясно, что формула (4.4) корректно определяет  $F^*$  по  $F$ , а формулой (4.5), наоборот,  $F$  определяется по  $F^*$ . При этом,

$$F = F^{**}, \quad (4.6)$$

(если, конечно,  $\text{co } (\text{co } A)$  естественно отождествлено с  $A$ ).

Обозначим точку  $r(f^{-1}(y)) = z \in A$ ; тогда формула (4.4) для определения  $F^*$  принимает вид

$$\langle F^*v(y), z \rangle = F^*v(y)(z) = v(y)(F(z)) = v(y) \circ F(z), \quad (4.7)$$

то есть для вычисления линейного функционала  $F^*v(y)$  в соответствующем слое достаточно в  $v(y)$  «подставить»  $F$ .

Предположим теперь, что заданы взаимно обратные изоморфизмы

$$C^\infty(M) \xrightleftharpoons[p^{-1}]{p} C^\infty(N)$$

и пусть  $\mathfrak{F}$ ,  $\mathfrak{G}$  — конечно порожденные проективные  $C^\infty(M)$ - и  $C^\infty(N)$ -модули, соответственно,  $\text{Hom } \mathfrak{F}$ ,  $\text{Hom } \mathfrak{G}$  — двойственные модули. Элементы в этих модулях будем обозначать через

$$u \in \mathfrak{F}, \quad v \in \mathfrak{G}; \quad \xi \in \text{Hom } \mathfrak{F}, \quad \eta \in \text{Hom } \mathfrak{G}.$$

Имеются естественные спаривания

$$\langle \xi, u \rangle \in C^\infty(M), \quad \langle \eta, v \rangle \in C^\infty(N).$$

Возьмем произвольный морфизм  $P$  над  $p$ , то есть полугомоморфизм над  $p$

$$\mathfrak{F} \xrightarrow{P} \mathfrak{G}, \quad P \in \text{Mor}_p(\mathfrak{F}, \mathfrak{G}) = \text{Hom}_p(\mathfrak{F}, \mathfrak{G}) \quad (4.9)$$

и определим сопряженный к нему морфизм — полугомоморфизм  $P^*$  над  $p^{-1}$

$$\text{Hom } \mathfrak{F} \xleftarrow{P^*} \text{Hom } \mathfrak{G}, \quad P^* \in \text{Hom}_{p^{-1}}(\text{Hom } \mathfrak{G}, \text{Hom } \mathfrak{F}) \quad (4.10)$$

по формуле

$$\langle P^*\eta, u \rangle = p^{-1} \langle \eta, Pu \rangle, \quad (4.11)$$

которая эквивалентна формуле

$$\langle \eta, Pu \rangle = p \langle P^*\eta, u \rangle \quad (4.12)$$

Формула (4.11) определяет полугомоморфизм  $P^*$  по  $P$ , формула (4.12) определяет  $P$  по  $P^*$ , при этом (учитывая, что  $\mathfrak{F} \cong \cong \text{Hom} \circ \text{Hom} \mathfrak{F}$ ),

$$P = P^{**}. \quad (4.13)$$

Корректность данных определений здесь также легко проверяется.

Если спаривание  $\langle \eta, u \rangle$  записывать как функцию  $u \mapsto \eta(u) = \langle \eta, u \rangle$ , то формулу (4.11) можно переписать в виде

$$P^*\eta(u) = p^{-1}(\eta(Pu)) = p^{-1}(\eta \circ P(u)) \quad (4.14)$$

то есть для вычисления  $P^*\eta$  на  $u \in \mathfrak{F}$  следует результат подстановки  $\eta \mapsto \eta \circ P$  вычислить на  $u$  и полученную в результате функцию из  $C^\infty(N)$  отправить в  $C^\infty(M)$  с помощью  $p^{-1}$ .

Определим теперь ковариантный функтор

$$\sigma: \text{Vd}_{\text{Diff}} \rightarrow \text{Mod}_{\text{Diff}} \quad (4.15)$$

следующим образом. Произвольному объекту из  $\text{Vd}_{\text{Diff}}$ , то есть векторному расслоению  $A$  над  $M$  мы ставим в соответствие  $C^\infty(M)$ -модуль сечений  $\sigma A$ , см. п. 2.1, а морфизму (4.2) над  $f$  — полугомоморфизм над  $f^{-1*}$

$$\sigma A \xrightarrow{\sigma F} \sigma B, \quad \sigma F \in \text{Hom}_{f^{-1*}}(\sigma A, \sigma B), \quad (4.16)$$

где  $\sigma F$  определяется по формуле

$$(\sigma F)r|_y = F(r \circ f^{-1}(y)) \in B_y, \quad y \in N, \quad (4.17)$$

которую можно переписать в виде

$$(\sigma F)r = F \circ r \circ f^{-1} = s \in \sigma B. \quad (4.18)$$

Корректность определения очевидна; функториальность также ясна, ибо если

$$A \xrightarrow{F} B \xrightarrow{G} C, \quad \sigma A \xrightarrow{\sigma F} \sigma B \xrightarrow{\sigma G} \sigma C,$$

то

$$\sigma(G \circ F) = \sigma G \circ \sigma F, \quad \sigma \text{id}_A = \text{id}_{\sigma A}.$$

Таким образом, соответствие (4.15) является ковариантным функтором.

Аналогично определим ковариантный функтор

$$\beta: \text{Mod}_{\text{Diff}} \rightarrow \text{Vd}_{\text{Diff}},$$

сопоставив произвольному объекту из  $\text{Mod}_{\text{Diff}}$ , то есть конечно

порожденному проективному  $C^\infty(M)$ -модулю  $\mathfrak{F}$  векторное расслоение  $\beta\mathfrak{F}$  по формуле (3.16):

$$\mathfrak{F} \rightarrow \beta\mathfrak{F} = \bigsqcup_{x \in M} J_x^0 \mathfrak{F} = \bigsqcup_{x \in M} \{u_x \mid u \in \mathfrak{F}\}.$$

Чтобы определить  $\beta$  на морфизме (4.9) обозначим через  $f$  диффеоморфизм (4.1), удовлетворяющий условию

$$p = (f^{-1})^*, \quad (4.20)$$

и определим морфизм  $\beta P$  над  $f$

$$\beta\mathfrak{F} \xrightarrow{\beta P} \beta\mathfrak{G}, \quad \beta P \in \text{Mor}_f(\beta\mathfrak{F}, \beta\mathfrak{G}) \quad (4.21)$$

по формуле

$$(\beta P) u_x = P u|_{f(x)}. \quad (4.22)$$

Корректность определения легко проверяется:

$$\begin{aligned} (\beta P)(a u_x) &= P(a u)|_{f(x)} = p a|_{f(x)} P u|_{f(x)} = f^* \circ p^* a|_x P u|_{f(x)} = \\ &= a(x) (\beta P) u_x. \end{aligned}$$

Имеют место следующие очевидные (и формально легко проверяемые) естественные эквивалентности между контрвариантными функторами

$$\begin{aligned} \text{Hom} \circ \sigma &\cong \sigma \circ \text{co}, \\ \text{co} \circ \beta &\cong \beta \circ \text{Hom}. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Запишем сопряженное отображение  $(\sigma F)^*$  к  $\sigma F$  в формуле (4.16), воспользовавшись определением (4.11). Имеем

$$\begin{aligned} \text{Hom} \circ \sigma A &\leftarrow \frac{(\sigma F)^* = \text{Hom} \circ \sigma F}{\text{Hom} \circ \sigma B}, \\ (\sigma F)^* &\in \text{Hom}_{f^*}(\text{Hom} \circ \sigma B, \text{Hom} \circ \sigma A). \end{aligned} \quad (4.24)$$

Аналогично, запишем сопряженное отображение  $(\beta P)^*$  к  $\beta P$  в формуле (4.21) и получим

$$\text{co}(\beta\mathfrak{F}) \leftarrow \frac{(\beta P)^*}{\text{co}(\beta\mathfrak{G})}, \quad (\beta P)^* \in \text{Mor}_{f^{-1}}(\text{co}(\beta\mathfrak{G}), \text{co}(\beta\mathfrak{F})). \quad (4.27)$$

Учитывая изоморфизмы (4.23), можно формулы (4.24) — (4.25) записать в эквивалентном виде

$$\begin{aligned} \sigma \circ \text{co} A &\leftarrow \frac{(\sigma F)^*}{\sigma \circ \text{co} B}, \quad (\sigma F)^* \in \text{Hom}_{f^*}(\sigma \circ \text{co} B, \sigma \circ \text{co} A), \\ \beta \circ \text{Hom} \mathfrak{F} &\leftarrow \frac{(\beta P)^*}{\beta \circ \text{Hom} \mathfrak{G}}, \quad (\beta P)^* \in \text{Mor}_{f^{-1}}(\beta \circ \text{Hom} \mathfrak{G}, \beta \circ \text{Hom} \mathfrak{F}). \end{aligned} \quad (4.26)$$

Сравнивая (4.26), (4.11) и (4.26), (4.3), определяющие  $(\sigma F)^*$  и  $(\beta P)^*$  с формулами, определяющими  $\Sigma F$ ,  $\Delta F$ , см. (3.20), (3.23), мы получаем естественные эквивалентности

$$\Sigma \cong \text{Hom} \circ \sigma \cong \sigma \circ \text{co}; \quad \Delta \cong \beta \circ \text{Hom} \cong \text{co} \circ \beta, \quad (4.27)$$

которые вновь приводят к эквивалентностям (3.25) для более узких категорий  $\text{Vd}_{\text{Diff}}$ ,  $\text{Mod}_{\text{Diff}}$ :

$$\left. \begin{aligned} \Delta \circ \Sigma &\cong \beta \circ \text{Hom} \circ \text{Hom} \circ \sigma \cong \beta \circ \sigma \cong \text{Id}_{\text{BdDiff}} \\ \Sigma \circ \Delta &\cong \sigma \circ \sigma \circ \sigma \circ \beta \cong \sigma \circ \beta \cong \text{Id}_{\text{ModDiff}} \end{aligned} \right\} \quad (4.28)$$

Полученные формулы придают точный смысл утверждению в начале настоящего пункта о взаимной обратности функторов  $\sigma$  и  $\beta$ .

В заключение рассмотрим с точки зрения проведенных в этом пункте конструкций функторы перехода к касательному и кокасательному расслоениям, или, соответственно, к векторным полям и дифференциальным формам. Ограничимся случаем категории гладких многообразий и диффеоморфизмов между ними. Пусть  $f: M \rightarrow N$  — диффеоморфизм. Касательные расслоения к  $M$  и  $N$  обозначим через  $TM$ ,  $TN$  дифференциал отображения  $f$  — через  $Tf$ , то есть  $T$  — соответствующий ковариантный функтор

$$Tf: TM \rightarrow TN, Tf \in \text{Mor}_f(TM, TN).$$

В этом случае  $\sigma$ , см. (4.16) — (4.17), дает соответствия

$$\sigma: TM \rightarrow \text{Der } M, \sigma(Tf) = \sigma \circ Tf: X \mapsto \text{Ad}(f^{-1})^* X$$

где  $X$  — векторное поле на  $M$ . Таким образом,

$$\sigma \circ T \cong \text{Der}, \sigma(Tf) = \text{Ad}(f^{-1})^*.$$

Далее имеем:

$$\sigma \circ \sigma \circ T \cong \text{Hom} \circ \sigma: TM \rightarrow \text{Der}^* M,$$

или

$$\sigma \circ \sigma \circ T \cong \text{Hom} \circ \sigma \circ T \cong \text{Der}^*,$$

ибо  $\text{Hom} \circ \sigma(TM) = \text{Hom}(\text{Der}(M)) = C^\infty(M)$ -модуль дифференциальных форм на  $M$ . Наконец,

$$\text{Hom} \circ \sigma \circ Tf = \text{Hom}(\sigma \circ Tf) = \text{Hom}(\text{Ad } f^{-1})^* = T^* f,$$

см. § 1.

Таким образом, все функторы, рассмотренные в § 1, выражаются через функтор  $T$  и универсальные функторы  $\text{Hom}$ ,  $\sigma$ ,  $\sigma$  (а также  $\beta$ ), применимые к категориям  $\text{Bd}_\infty$ ,  $\text{Mod}_\infty$  или  $\text{BdDiff}$ ,  $\text{ModDiff}$ . Функтор  $T$  специфичен для категории касательных расслоений и расширяет отображения  $f$  с многообразий на соответствующие касательные расслоения.

**2.5. Индуцированные модули — функтор подстановки  $*$ .** Предположим, что заданы гладкое отображение  $f: M \rightarrow N$  и векторное расслоение над  $N$

$$B = \bigsqcup_{y \in N} B_y \subset N \times \mathbb{R}^m.$$

Они определяют предрасслоение над  $M$  по формуле

$$A = \bigsqcup_{x \in M} A_x = \bigsqcup_{x \in M} B_{f(x)} \subset M \times \mathbb{R}^m.$$

Отображение  $x \mapsto B_{f(x)} \in H_k^m$ ,  $k = \dim B_{f(x)}$ , гладкое, поэтому  $A$  превращается в векторное расслоение и легко показать, что, независимо от вложения  $B \subset M \times \mathbb{R}^m$ , все возникающие таким образом расслоения  $A$  изоморфны. Поэтому  $A$  называется *векторным расслоением, индуцированным расслоением  $B$  при отображении  $f$* .

Мы дадим сейчас «функциональное» описание этой конструкции на языке соответствующих модулей сечений, которое приведет к общему понятию функтора подстановки  $*$ , обобщающему функтор

$$f \mapsto f^*: C^\infty(N) \rightarrow C^\infty(M), \quad f^*b = b \circ f, \quad b \in C^\infty(N)$$

и позволяющему рассматривать  $f^*$  как «оператор подстановки» отображения  $f$  не только в элементы кольца  $C^\infty(N)$ , но и в элементы произвольного  $C^\infty(N)$ -модуля  $\mathfrak{G} \in \text{Mod}_\infty$ :

$$f^*v = v \circ f, \quad v \in \mathfrak{G}.$$

Будем рассматривать  $\mathfrak{G}$  как модуль сечений, что всегда возможно, в силу естественного изоморфизма

$$\mathfrak{G} \cong J^0 \mathfrak{G}, \quad J^0 v: y \mapsto J^0 v, \quad y \in N.$$

Выражение  $f^*v = v \circ f$  будем рассматривать как сечение

$$f^*v: x \mapsto v_{f(x)}, \quad x \in M. \quad (5.1)$$

$C^\infty(M)$ -модуль, порожденный всеми сечениями такого вида при произвольном  $v \in \mathfrak{G}$  состоит из отображений

$$x \mapsto \sum_i a_i(x) v_{f(x)}^{(i)}, \quad x \in M; \quad a_i \in C^\infty(M), \quad v^{(i)} \in \mathfrak{G} \cong J^0 \mathfrak{G}.$$

Полученный  $C^\infty(M)$ -модуль обозначим

$$f^* \mathfrak{G} = \left\{ \sum_i a_i f^* v_i \mid a_i \in C^\infty(M), v_i \in \mathfrak{G} \right\}, \quad (5.2)$$

и назовем его модулем, *индуцированным  $C^\infty(N)$ -модулем  $\mathfrak{G}$  при подстановке  $f^*$* .

Элементы модуля  $f^* \mathfrak{G}$  естественно отождествляются с гомоморфизмами из  $\text{Hom}_{f^*} \mathfrak{G}^*$ , ибо действие элемента вида  $f^*v$  на  $\eta \in \mathfrak{G}^*$  можно определить по формуле

$$\langle f^*v, \eta \rangle = f^* \langle v, \eta \rangle,$$

тогда произвольный элемент  $\sum_i a_i f^* v_i \in f^* \mathfrak{G}$  будет действовать по формуле

$$\langle \sum a_i f^* v_i, \eta \rangle = \sum a_i \langle f^* v_i, \eta \rangle = \sum a_i f^* \langle v_i, \eta \rangle.$$

Корректность данного определения легко проверяется.

Очевидны включения

$$\{f^* v \mid v \in \mathfrak{G}\} \subset f^* \mathfrak{G} \subset \text{Hom}_{F^*} \mathfrak{G}^*, \quad (5.3)$$

причем, если  $f^*(C^\infty(M)) = C^\infty(M)$ , то

$$\{f^* v \mid v \in \mathfrak{G}\} = f^* \mathfrak{G}, \quad (5.4)$$

ибо в этом случае

$$\sum_i a_i f^* v_i = \sum_i (f^* b_i) f^* v_i = \sum_i f^* (b_i v_i) = f^* \sum_i b_i v_i = f^* v.$$

Каждому гомоморфизму  $C^\infty(N)$ -модулей  $\chi: \mathfrak{G}' \rightarrow \mathfrak{G}''$  естественно ставится в соответствие гомоморфизм  $C^\infty(M)$ -модулей

$$f^* \chi: f^* \mathfrak{G}' \rightarrow f^* \mathfrak{G}'', \quad f^* \chi \left( \sum_i a_i f^* v_i' \right) = \sum_i a_i f^* \chi v_i'. \quad (5.5)$$

Как легко видеть, для диаграммы

$$\begin{array}{ccccc} \mathfrak{G}' & \xrightarrow{\chi'} & \mathfrak{G}'' & \xrightarrow{\chi''} & \mathfrak{G}''' \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ f^* \mathfrak{G}' & \xrightarrow{f^* \chi'} & f^* \mathfrak{G}'' & \xrightarrow{f^* \chi''} & f^* \mathfrak{G}''' \end{array} \quad (5.6)$$

выполняются соотношения

$$f^*(\chi'' \circ \chi') = f^* \chi'' \circ f^* \chi', \quad f^* \text{id}_{\mathfrak{G}} = \text{id}_{f^* \mathfrak{G}}, \quad (5.7)$$

которые показывают функториальность соотношения  $\mathfrak{G} \mapsto f^* \mathfrak{G}$ . В частности функториальность  $f^*$  влечет импликацию об изоморфизмах

$$\mathfrak{G}' \cong \mathfrak{G}'' \Rightarrow f^* \mathfrak{G}' \cong f^* \mathfrak{G}''. \quad (5.8)$$

Если  $\mathfrak{G}, \mathfrak{H} - C^\infty(N)$ -модули, то имеет место естественный изоморфизм

$$f^*(\mathfrak{G} \oplus \mathfrak{H}) \cong f^* \mathfrak{G} \oplus f^* \mathfrak{H}, \quad (5.9)$$

однозначно определяемый соотношениями

$$\left. \begin{aligned} f^*(v \oplus w) &\mapsto f^* v \oplus f^* w, \quad v \in \mathfrak{G}, \quad w \in \mathfrak{H}, \\ f^*(\chi \oplus \rho) &\mapsto f^* \chi \oplus f^* \rho, \quad \chi \in \text{Hom}(\mathfrak{G}, \mathfrak{G}'), \quad \rho \in \text{Hom}(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}'). \end{aligned} \right\} \quad (5.10)$$

Корректность определения, получающегося из первого соотношения (5.10) гомоморфизма

$$f^*(\mathfrak{G} \oplus \mathfrak{H}) \rightarrow f^* \mathfrak{G} \oplus f^* \mathfrak{H},$$

его инъективность и суръективность, легко доказывается. Очевидна также коммутативность диаграммы

$$\begin{array}{ccc} f^*(v \oplus w) & \mapsto & f^* v \oplus f^* w \\ f^*(\chi \oplus \rho) \downarrow & & \downarrow f^* \chi \oplus f^* \rho \\ f^*(\chi v \oplus \rho w) & \mapsto & f^*(\chi v) \oplus f^*(\rho w) \end{array} \quad (5.11)$$

Докажем теперь основной изоморфизм

$$f^*\mathfrak{G} \cong \text{Hom}_{f^*}\mathfrak{G}^*,$$

который сформулируем в виде следующего предложения.

**Предложение 5.1.** Пусть  $\mathfrak{G}$  — конечно порожденный проективный  $C^\infty(N)$ -модуль. Вложение

$$f^*\mathfrak{G} \subset \text{Hom}_{f^*}\mathfrak{G}^*, \quad (5.12)$$

однозначно определенное формулой

$$\langle f^*v, \eta \rangle = f^*\langle v, \eta \rangle, \quad v \in \mathfrak{G}, \eta \in \mathfrak{G}^*, \quad (5.13)$$

является изоморфизмом, причем естественным, в силу коммутативности диаграммы

$$\begin{array}{ccc} f^*\mathfrak{G} \subset \text{Hom}_{f^*}\mathfrak{G}^* & & \\ f^*\chi \downarrow & \downarrow \text{Hom}_{f^*}\chi^*, \chi \in \text{Hom}(\mathfrak{G}, \mathfrak{G}^*), & \\ f^*\mathfrak{G}' \subset \text{Hom}_{f^*}\mathfrak{G}' & & \end{array} \quad (5.14)$$

Таким образом, мы имеем два эквивалентных естественных изоморфизма

$$f^*\mathfrak{G} \cong \text{Hom}_{f^*}\mathfrak{G}^* \Leftrightarrow f^*\mathfrak{G}^* \cong \text{Hom}_{f^*}\mathfrak{G}, \quad (5.15)$$

ибо  $\mathfrak{G} \cong \mathfrak{G}^{**}$ .

Так как модуль  $\text{Hom}_{f^*}\mathfrak{G}^*$  конечно порожден и проективен, см. п. 2.2, то таковым является и  $f^*\mathfrak{G}$ , и, следовательно,  $f^*$  — функтор на категории  $\text{Mod}_\infty$  в категорию  $\text{Mod}_\infty$ .

**Доказательство.** Докажем сначала изоморфизм (5.12) для свободного  $C^\infty(N)$ -модуля конечного типа. Пусть  $v_1, \dots, v_m$  — базис в  $\mathfrak{G}$ ,  $\eta_1, \dots, \eta_m$  — двойственный базис в  $\mathfrak{G}^*$ . Тогда  $f^*v_1, \dots, f^*v_m$  — базис в свободном  $C^\infty(M)$ -модуле  $\text{Hom}_{f^*}\mathfrak{G}^*$  ранга  $m$ , ибо

$$\langle f^*v_i, \eta_j \rangle = f^*\langle v_i, \eta_j \rangle = f^*\delta_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} e, & i=j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Следовательно,  $f^*\mathfrak{G} = \text{Hom}_{f^*}\mathfrak{G}$ , ибо все базисные элементы  $f^*v_i \in f^*\mathfrak{G}$ . Коммутативность диаграммы непосредственно проверяется по определению  $\text{Hom}_{f^*}\chi^*$  в п. 2.2.

В общем случае, пусть  $\mathfrak{H}$  — прямое дополнение к  $\mathfrak{G}$  до свободного модуля  $\mathfrak{G} \oplus \mathfrak{H}$  конечного типа. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccc} f^*\mathfrak{G} \oplus f^*\mathfrak{H} & \xrightarrow{i=i_1 \oplus i_2} & \text{Hom}_{f^*}\mathfrak{G}^* \oplus \text{Hom}_{f^*}\mathfrak{H}^* \\ I_1 \uparrow & \text{id} & \uparrow I_2 \\ f^*(\mathfrak{G} \oplus \mathfrak{H}) & \xrightarrow{\quad} & \text{Hom}_{f^*}(\mathfrak{H} \oplus \mathfrak{G})^*, \end{array}$$

где  $I_1, I_2$  — естественные изоморфизмы (5.9), (2.5),  $\text{id}$  — тождественный изоморфизм, существование которого только что доказано для свободных модулей, наконец,

$$i_1: f^*\mathfrak{G} \rightarrow \text{Hom}_{f^*}\mathfrak{G}^*, \quad i_2: f^*\mathfrak{H} \rightarrow \text{Hom}_{f^*}\mathfrak{H}^*$$

— естественные вложения (5.12). Очевидно, диаграмма коммутативна, поэтому  $i \circ I_1 = \text{id} \circ I_2 = I_2$ , то есть  $i = i_1 \oplus i_2 = I_2 \circ I_1^{-1}$  — естественный изоморфизм, следовательно,

$$i_1: f^* \mathcal{G} \rightarrow \text{Hom}_{f^*} \mathcal{G}$$

— естественный изоморфизм.

В качестве непосредственного следствия доказанного предложения получаем естественный изоморфизм

$$f^* \circ \text{Hom} \mathcal{G} \cong \text{Hom} \circ f^* \mathcal{G}. \quad (5.16)$$

В самом деле, имеем естественное вложение  $f^* \circ \text{Hom} \mathcal{G} \subset \subset \text{Hom} \circ f^* \mathcal{G}$ , ибо всякий элемент вида  $f^* \eta$ ,  $\eta \in \mathcal{G}^*$ , естественно действует как гомоморфизм на элементы  $f^* v \in f^* \mathcal{G}$  по формуле

$$\langle f^* \eta, f^* v \rangle = f^* \langle \eta, v \rangle. \quad (5.17)$$

С другой стороны, если  $\xi \in \text{Hom} \circ f^* \mathcal{G}$ , то  $\xi$  можно естественно отождествить с элементами из  $\text{Hom}_{f^*} \mathcal{G}$ , так как положив  $\xi(v) = \langle \xi, f^* v \rangle$  (легкую проверку корректности определения мы опускаем), получим

$$\begin{aligned} \xi(bv) &= \langle \xi, f^* bv \rangle = \langle \xi, (f^* b) f^* v \rangle = \\ &= (f^* b) \langle \xi, f^* v \rangle = (f^* b) \xi(v). \end{aligned}$$

Следовательно, на основании второго из естественных изоморфизмов (5.15) можно считать, что  $\xi \in f^* \circ \text{Hom} \mathcal{G}$ , откуда следует обратное включение  $f^* \circ \text{Hom} \mathcal{G} \supset \subset \text{Hom} \circ f^* \mathcal{G}$ .

Еще одним полезным следствием естественных изоморфизмов (5.15), (5.16) является естественный изоморфизм

$$\mathcal{G}^{\perp f^*} \cong (f^* \mathcal{G})^{\perp}.$$

В самом деле (см. п. 2.2), имеем

$$\begin{aligned} (f^* \mathcal{G})^{\perp} &= \{ \xi \in \text{Hom} \circ f^* \mathcal{G} \mid \langle \xi, f^* v \rangle = 0 \ \forall v \in \mathcal{G} \} \cong \\ &\cong \{ \Omega \in \text{Hom}_{f^*} \mathcal{G} \mid \langle \Omega, v \rangle = 0 \ \forall v \in \mathcal{G} \} = \mathcal{G}^{\perp \varphi}. \end{aligned}$$

Важным и очень полезным изоморфизмом является легко доказываемый естественный изоморфизм для тензорных произведений

$$\left. \begin{aligned} f^* (\mathcal{G} \otimes \mathcal{H}) &\cong f^* \mathcal{G} \otimes f^* \mathcal{H}, \\ f^* (v \otimes w) &\mapsto f^* v \otimes f^* w, \quad v \in \mathcal{G}, \quad w \in \mathcal{H}. \end{aligned} \right\} \quad (5.18)$$

Если  $\chi: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}'$ ,  $\rho: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$  — гомоморфизмы  $C^{\infty}(N)$ -модулей, то мы имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} f^* (v \otimes w) & \mapsto & f^* v \otimes f^* w \\ \downarrow f^* (\chi \otimes \rho) & & \downarrow f^* \chi \otimes f^* \rho \\ f^* (\chi v \otimes \rho w) & \mapsto & f^* (\chi v) \otimes f^* (\rho w). \end{array}$$

Воспользовавшись этим изоморфизмом легко получить следующее обобщение естественного изоморфизма (5.16).

Для произвольных конечно порожденных проективных  $C^\infty(N)$ -модулей  $\mathcal{G}$ ,  $\mathcal{H}$  имеет место естественный изоморфизм

$$f^* \circ \text{Hom}(\mathcal{G}, \mathcal{H}) \xrightarrow{I} \text{Hom}(f^*\mathcal{G}, f^*\mathcal{H}), \quad (5.19)$$

где изоморфизм  $I$  определяется отождествлением элемента  $f^*\Omega$ ,  $\Omega \in \text{Hom}(\mathcal{G}, \mathcal{H})$  с гомоморфизмом из  $f^*\mathcal{G}$  в  $f^*\mathcal{H}$  по формуле

$$I(f^*\Omega)(af^*v) = af^*(\Omega v), \quad a \in C^\infty(M), \quad v \in \mathcal{G}. \quad (5.20)$$

Для доказательства воспользуемся естественным изоморфизмом, см. (2.15),

$$\text{Hom}(\mathcal{G}, \mathcal{H}) \cong (\text{Hom } \mathcal{G}) \otimes \mathcal{H}, \quad (5.21)$$

и изоморфизмами (5.16), (5.18); мы получим

$$\begin{aligned} f^* \circ \text{Hom}(\mathcal{G}, \mathcal{H}) &\cong f^*(\text{Hom } \mathcal{G}) \otimes \mathcal{H} \cong f^* \circ \text{Hom } \mathcal{G} \otimes f^*\mathcal{H} \cong \\ &\cong (\text{Hom} \circ f^*\mathcal{G}) \otimes f^*\mathcal{H} \cong \text{Hom}(f^*\mathcal{G}, f^*\mathcal{H}). \end{aligned}$$

Соответствие  $f^*\Omega \mapsto I(f^*\Omega)$  следует из (5.21), (5.18), (5.16).

Можно явно описать естественность изоморфизма  $I$  с помощью следующей коммутативной диаграммы. Предположим, что заданы гомоморфизмы  $C^\infty(N)$ -модулей

$$\mathcal{G} \xleftarrow{\chi} \mathcal{G}, \quad \mathcal{H} \xrightarrow{\rho} \mathcal{H}'.$$

Тогда определим функториальный гомоморфизм

$$\text{Hom}(\mathcal{G}, \mathcal{H}) \xrightarrow{\text{Hom}(\chi, \rho)} \text{Hom}(\mathcal{G}', \mathcal{H}')$$

по формуле

$$\Omega \mapsto \text{Hom}(\chi, \rho)\Omega = \rho \circ \Omega \circ \chi.$$

В этих обозначениях диаграмма запишется в виде

$$\begin{array}{ccc} f^* \circ \text{Hom}(\mathcal{G}, \mathcal{H}) & \xrightarrow{I} & \text{Hom}(f^*\mathcal{G}, f^*\mathcal{H}) \\ f^* \circ \text{Hom}(\chi, \rho) \downarrow & & \downarrow \text{Hom}(f^*\chi, f^*\rho) \\ f^* \circ \text{Hom}(\mathcal{G}', \mathcal{H}') & \xrightarrow{I} & \text{Hom}(f^*\mathcal{G}', f^*\mathcal{H}') \end{array}$$

Ее коммутативность легко доказывается.

Предложение 5.2. Пусть заданы гладкие отображения

$$M \xrightarrow{f} L \xrightarrow{g} N$$

и конечно порожденный проективный  $C^\infty(N)$ -модуль  $\mathcal{G}$ . Имеет место естественный изоморфизм

$$\begin{aligned} f^* \circ g^* \mathcal{G} &\cong (g \circ f)^* \mathcal{G}, \\ f^* \circ g^* (v) &\mapsto I(v) = (g \circ f)^* (v), \end{aligned} \quad (5.22)$$

действующий, следовательно, по формуле

$$I: \sum_i a_i (f^* \circ g^* v_i) \mapsto \sum_i a_i (g \circ f)^* v_i, \quad a_i \in C^\infty(M), \quad v_i \in \mathcal{G}. \quad (5.23)$$

Учитывая изоморфизм (5.15), изоморфизм (5.22) можно записать в виде

$$\text{Hom}_{f^*\circ}\text{Hom}_{g^*}\cong\text{Hom}_{(g\circ f)^*}. \quad (5.24)$$

Если  $\chi\in\text{Hom}(\mathcal{G}, \mathcal{H})$ , то коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} f^*\circ g^*\mathcal{G} & \xrightarrow{f^*\circ g^*\chi} & f^*\circ g^*\mathcal{H} \\ I\downarrow & & \downarrow I \\ (g\circ f)^*\mathcal{G} & \xrightarrow{(g\circ f)^*\chi} & (g\circ f)^*\mathcal{H}. \end{array}$$

Доказательство. Чтобы избежать путаницы в обозначениях, положим  $f^*|_{C^\infty(L)}=\varphi$ ,  $g^*|_{C^\infty(N)}=\gamma$ . В силу доказанных выше естественных изоморфизмов, имеем

$$f^*\circ g^*\mathcal{G}\cong\text{Hom}_{f^*\circ}\text{Hom}_{g^*}\mathcal{G}\cong\text{Hom}_{f^*\circ g^*}(\text{Hom}\mathcal{G}).$$

Следовательно, произвольный элемент

$$u=\sum a_i f^*\circ g^*v_i\in f^*\circ g^*\mathcal{G}$$

можно применить к элементу  $g^*\eta$ ,  $\eta\in\text{Hom}\mathcal{G}$ , по формуле (см. (5.23)):

$$\begin{aligned} \langle u, g^*\eta \rangle &= \langle \sum_i a_i f^*\circ g^*v_i, g^*\eta \rangle = \sum_i a_i \varphi \langle g^*v_i, g^*\eta \rangle = \\ &= \sum_i a_i \varphi \gamma \langle v_i, \eta \rangle = \sum_i a_i (g\circ f)^* \langle v_i, \eta \rangle = \\ &= \langle \sum_i a_i (g\circ f)^*v_i, \eta \rangle = \langle Iu, \eta \rangle \end{aligned}$$

Из полученной формулы непосредственно следует корректность определения гомоморфизма  $I$  и его инъективность. В самом деле, для  $\forall \eta\in\text{Hom}\mathcal{G}$  имеем  $\langle Iu, \eta \rangle = \langle u, g^*\eta \rangle = 0$  — корректность! Наоборот, если  $Iu=0$ , то  $\langle Iu, \eta \rangle = \langle u, g^*\eta \rangle = 0$  для  $\forall \eta\in\text{Hom}\mathcal{G}$ , следовательно,  $u=0$ , ибо семейство  $\{g^*\eta; \eta\in\text{Hom}\mathcal{G}\}$  является семейством образующих для  $g^*\circ\text{Hom}\mathcal{G}$  — инъективность!

Суръективность очевидна, ибо правая часть в (5.23) выражает произвольный элемент в  $(g\circ f)^*\mathcal{G}$ . Коммутативность диаграммы также легко проверяется.

Следствие. Если  $f:M\rightarrow N$  — диффеоморфизм, то полугомоморфизм над  $\varphi=f^*$

$$\mathcal{G} \xrightarrow{I_\varphi} f^*\mathcal{G}, \quad v \mapsto I_\varphi v = f^*v$$

является полуизоморфизмом.

Доказательство. Полугомоморфизм над  $\varphi^{-1}$  определим соотношениями

$$I_{\varphi^{-1}}: f^*\mathcal{G} \rightarrow (f^{-1})^*\circ f^*\mathcal{G},$$

$$\sum_i a_i f^* v_i \mapsto \sum_i \varphi^{-1}(a_i) (f^{-1})^* \circ f^* \mathfrak{G}.$$

Он является обратным к  $I_\varphi$ , ибо

$$I_{\varphi^{-1} \circ \varphi} \mathfrak{G} \cong f^{-1*} \circ f^* \mathfrak{G} \cong (f \circ f^{-1})^* \mathfrak{G} \cong \mathfrak{G},$$

$$I_\varphi \circ I_{\varphi^{-1}} f^* \mathfrak{G} \cong f^* \circ f^{-1*} (f^* \mathfrak{G}) \cong (f^{-1} \circ f)^* f^* \mathfrak{G} \cong f^* \mathfrak{G}.$$

### § 3. Потоки на модулях и векторных расслоениях

В этом параграфе мы будем рассматривать дифференциальные уравнения в рамках «функционального языка», развитого выше, который позволяет нелинейные объекты — обыкновенные дифференциальные уравнения на гладких многообразиях рассматривать как линейные операторные уравнения в соответствующем функциональном пространстве. Построение содержательного исчисления потоков, порожденных этими уравнениями с необходимостью требует также рассмотрения более общих операторных уравнений на конечно порожденных проективных модулях. Основные результаты данного параграфа — это формула вариаций (см. (3.1)) и общая теорема существования потока на конечно порожденном проективном модуле (см. п. 3.4).

**3.1. Дифференцирования и связности в категории  $\text{Mod}_M$ .** Начнем со следующего полезного для дальнейшего замечания.

Если  $\mathfrak{F}$  — конечно порожденный проективный  $C^\infty(M)$ -модуль, отличный от  $\{0\}$ , то он является *точным* (или *строгим*), то есть из условия  $au=0 \ \forall u \in \mathfrak{F}$  вытекает, что  $a=0$ .

В самом деле, пусть  $\chi$  — вложение  $\mathfrak{F}$  в  $C^\infty(M; \mathbb{R}^m)$  в качестве прямого слагаемого:  $\chi(\mathfrak{F}) \oplus \mathfrak{G} = C^\infty(M; \mathbb{R}^m)$  для  $\mathfrak{G} \subset C^\infty(M; \mathbb{R}^m)$ . Допустим, что утверждение не имеет места, то есть существует такая точка  $x \in M$ , что  $a(x) \neq 0$ . В этом случае

$$\{0\} = a(x) \chi(\mathfrak{F})_x = \{a(x) u(x) \mid u \in \chi(\mathfrak{F})\} = \{u(x) \mid u \in \chi(\mathfrak{F})\} = \chi(\mathfrak{F})_x.$$

По предложению 2.1 § 2,  $\dim \chi(\mathfrak{F})_x = \dim \chi(\mathfrak{F})_y \ \forall y$ , поэтому  $\chi(\mathfrak{F})_y = \{0\}$  для  $\forall y \in M$ , откуда вытекает, что  $\{0\} = \chi(\mathfrak{F})$ , вопреки предположению.

Пусть  $\mathfrak{F}$  — конечно порожденный проективный модуль. Назовем *дифференцированием* этого модуля  $\mathbb{R}$ -линейное отображение  $D: \mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{F}$  такое, что для  $\forall a \in C^\infty(M)$ ,  $u \in \mathfrak{F}$

$$D(au) = (Xa)u + aDu,$$

где  $X$  — некоторое векторное поле на  $M$ . Это векторное поле  $X$  определено однозначно. В самом деле, если  $D(au) = X_1(a)u + aDu = X_2(a)u + aDu$  для любых  $a \in C^\infty(M)$ ,  $u \in \mathfrak{F}$  с  $X_1, X_2 \in \text{Der } M$ , то  $X_1 = X_2$  ибо  $(X_1(a) - X_2(a))u = 0$ , откуда, в силу точности модуля  $\mathfrak{F}$ ,  $X_1(a) = X_2(a) \ \forall a \in C^\infty(M)$ , то есть,  $X_1 = X_2$ .

Следовательно, корректно определено отображение  $\theta$ , сопоставляющее произвольному дифференцированию  $D$  модуля  $\mathfrak{F}$  соответствующее векторное поле  $X$ :

$$\theta(D) = X.$$

Обозначим через  $\text{Der } \mathfrak{F}$  множество всех дифференцирований модуля  $\mathfrak{F}$ ; это множество имеет естественную структуру  $C^\infty(M)$ -модуля, отображение  $\theta : \text{Der } \mathfrak{F} \rightarrow \text{Der } M$  является гомоморфизмом  $C^\infty(M)$ -модулей  $\text{Der } \mathfrak{F}$ ,  $\text{Der } M$  и ядро этого гомоморфизма  $\ker \theta$  состоит из множества  $\text{End } \mathfrak{F}$  эндоморфизмов (то есть  $C^\infty(M)$ -линейных отображений  $\mathfrak{F}$  в себя).

Всякое векторное поле  $X \in \text{Der } M$  является дифференцированием  $C^\infty(M)$ -модуля  $C^\infty(M)$  в смысле данного определения, так что

$$\text{Der } M \subset \text{Der } C^\infty(M)$$

и это включение — строгое, так как дифференцированием  $C^\infty(M)$ -модуля  $C^\infty(M)$  является также произвольный его эндоморфизм, то есть оператор умножения на произвольную функцию  $a_0$ ,  $a \mapsto a_0 \cdot a \quad \forall a \in C^\infty(M)$ .

Кроме модульной структуры,  $\text{Der } \mathfrak{F}$  имеет естественную структуру вещественной алгебры Ли с умножением — коммутированием дифференцирований  $D_1, D_2 \in \text{Der } \mathfrak{F}$ :

$$[D_1, D_2] = D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1.$$

При этом,  $\theta : \text{Der } \mathfrak{F} \rightarrow \text{Der } M$  есть также гомоморфизм алгебр Ли  $\text{Der } \mathfrak{F}$  и  $\text{Der } M$ :

$$\theta([D_1, D_2]) = [\theta(D_1), \theta(D_2)] \quad \forall D_1, D_2 \in \text{Der } \mathfrak{F}.$$

В самом деле, высказанное утверждение доказывает формальная выкладка  $\forall a \in C^\infty(M), u \in \mathfrak{F}$

$$\begin{aligned} [D_1, D_2](au) &= (D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1)(au) = D_1(\theta(D_2)(a)u + aD_2u) - \\ &- D_2(\theta(D_1)(a)u + aD_1u) = \theta(D_1) \circ \theta(D_2)(a)u + \theta(D_2)(a)D_1u + \\ &+ \theta(D_1)(a)D_2u + aD_1 \circ D_2u - \theta(D_2) \circ \theta(D_1)(a)u - \theta(D_1)(a)D_2u - \\ &- \theta(D_2)(a)D_1u - aD_2 \circ D_1u = [\theta(D_1), \theta(D_2)](a)u + a[D_1, D_2]u. \end{aligned}$$

Справедливо

**Предложение 1.1.** Пусть  $\mathfrak{F}$  — конечно порожденный проективный  $C^\infty(M)$ -модуль. Отображение  $\theta : \text{Der } \mathfrak{F} \rightarrow \text{Der } M$  обладает следующими свойствами:

- 1)  $\ker \theta = \text{End } \mathfrak{F}$ .
- 2) Существует гомоморфизм модулей  $\nabla : \text{Der } M \rightarrow \text{Der } \mathfrak{F}$  таковой, что

$$\theta \circ \nabla = \text{id}_{\text{Der } M}.$$

- 3)  $\text{Der } \mathfrak{F} = \text{End } \mathfrak{F} \oplus \nabla \text{Der } M \cong \text{End } \mathfrak{F} \oplus \text{Der } M$ .

**Доказательство.** Утверждение 1) уже доказано. Докажем утверждение 2). Ясно, что достаточно рассмотреть случай, когда  $\mathfrak{F}$  является прямым слагаемым в  $C^\infty(M; \mathbb{R}^m)$ : существует подмодуль  $\mathfrak{G} \subset C^\infty(M; \mathbb{R}^m)$  такой, что  $C^\infty(M; \mathbb{R}^m) = \mathfrak{F} \oplus \mathfrak{G}$ .

Пусть  $\text{pr}_{\mathfrak{F}}$  — эндоморфизм свободного модуля  $C^\infty(M; \mathbb{R}^m)$ , сопоставляющий элементу  $w = u + v$  ( $u \in \mathfrak{F}, v \in \mathfrak{G}$ ) элемент  $u \in \mathfrak{F}$ . Для любого векторного поля  $X \in \text{Der } M$  определим дифференцирование  $\vec{X}$  свободного модуля  $C^\infty(M; \mathbb{R}^m)$  по формуле

$$\vec{X}(w^1, \dots, w^m) = (Xw^1, \dots, Xw^m), \quad w = (w^1, \dots, w^m) \in C^\infty(M; \mathbb{R}^m).$$

Положим теперь

$$\nabla_X = \text{pr}_{\mathfrak{F}} \circ \vec{X}|_{\mathfrak{F}},$$

определяя, таким образом, отображение

$$\nabla : \text{Der } M \rightarrow \text{Der } \mathfrak{F}, \quad X \mapsto \nabla_X, \quad X \in \text{Der } M.$$

Тогда  $\nabla$  — гомоморфизм модулей  $\text{Der } \mathfrak{F}$  и  $\text{Der } M$ , ибо  $\forall a \in C^\infty(M)$ ,  $u \in \mathfrak{F}$

$$\begin{aligned} \nabla_X(au) &= \text{pr}_{\mathfrak{F}} \circ \vec{X}(au) = \text{pr}_{\mathfrak{F}}((Xa)u + a\vec{X}u) = \\ &= (Xa)u + a \text{pr}_{\mathfrak{F}} \circ \vec{X}u = (Xa)u + a\nabla_X u \end{aligned}$$

и

$$\nabla_{aX}(u) = \text{pr}_{\mathfrak{F}}(a\vec{X}u) = a\nabla_X u.$$

При этом, по самому определению,  $\theta(\nabla_X) = X$ , так что

$$\theta \circ \nabla = \text{id}_{\text{Der } M}.$$

Утверждение 3) предложения есть прямое следствие 1) и 2).

Предложение доказано.

Отображение  $\nabla$ , фигурирующее в формулировке предложения 1.1, называется *связностью на модуле*  $\mathfrak{F}$ .

Если  $\nabla$  — некоторая связность на  $\mathfrak{F}$ , то  $\nabla_X \in \text{Der } \mathfrak{F}$  и любое дифференцирование  $D \in \text{Der } \mathfrak{F}$  с  $\theta(D) = X$  имеет вид

$$D = \nabla_X + H,$$

где  $H$  — некоторый эндоморфизм модуля  $\mathfrak{F}$ .

Оператор  $\nabla_X$  называется *ковариантным дифференцированием вдоль векторного поля*  $X$ .

К рассмотрению связностей мы ещё вернёмся в п. 3.6 настоящего параграфа и в § 4.

В заключение этого пункта отметим, что если  $\mathfrak{F}$  — конечно порождённый проективный модуль, то множество  $\text{Der } \mathfrak{F}$  его дифференцирований также является конечно порождённым проективным модулем, так что для любого целого  $k$  итерации

$$\text{Der} \underbrace{(\dots (\text{Der } \mathfrak{F}) \dots)}_{k \text{ раз}}$$

дают серию конечно порождённых проективных модулей.

В самом деле,  $\text{Der } \mathfrak{F} \cong \text{End } \mathfrak{F} \oplus \text{Der } M$ . Так как  $\mathfrak{F}$  — конечно порождённый проективный модуль, то  $\text{End } \mathfrak{F}$  — конечно порождённый проективный модуль (см. § 2, следствие из предложения 2.2). Проективность модуля  $\text{Der } M$  следует из предложения 2.1 § 2 (см. следствие 1 этого предложения).

**3.2. Нестационарные векторные поля, дифференцирования и потоки на многообразиях и проективных модулях.** Начиная с этого момента мы будем считать, что на алгебре  $C^\infty(M)$  задана стандартная топология, превращающая её в пространство Фреше (полное, метризуемое локально выпуклое пространство). Эта топология может быть задана различными способами, например, с помощью семейства полунорм

$$\|a\|_{s,K,x} = \sup_{x \in K} \left\{ \sum_{j=1}^s |X_1 \circ \dots \circ X_j a(x)| + |a(x)| \right\}, \quad a \in C^\infty(M),$$

где  $K$  пробегает все компактные подмножества  $M$ ,  $s \in \mathbb{N}$ ,  $X = (X_1, \dots, X_s)$ ,  $X_j \in \text{Der } M$ . Если многообразие  $M$  регулярно вложено в пространство  $\mathbb{R}^d$ , то, как нетрудно показать, эта топология совпадает с топологией  $C^\infty(M)$ , описанной в [2], [4].

Обозначим через  $\mathcal{L}(M)$  ассоциативную алгебру всех  $\mathbb{R}$ -линейных непрерывных отображений  $C^\infty(M)$  в себя с топологией простой (поточечной) сходимости: последовательность операторов  $\{T_j\} \subset \mathcal{L}(M)$  сходится к нулевому оператору в  $\mathcal{L}(M)$  в том и только том случае, если  $T_j a \rightarrow 0$ ,  $j \rightarrow \infty$  для  $\forall a \in C^\infty(M)$ .

Из определения топологии  $C^\infty(M)$  непосредственно вытекает, что  $\text{Der } M \subset \mathcal{L}(M)$ . Кроме того,  $\text{Iso } M \subset \mathcal{L}(M)$ , где  $\text{Iso } M$  — множество всех автоморфизмов алгебры  $C^\infty(M)$ ; элементы последнего множества мы иногда будем называть также диффеоморфизмами (см. предложение 2.1 § 1, оправдывающее эту терминологию).

Обозначим через  $\mathcal{L}(M; \mathbb{R})$  множество всех линейных непрерывных функционалов на  $C^\infty(M)$ ; точки  $x$  многообразия  $M$  (рассматриваемые как линейные функционалы, обладающие свойством мультипликативности — см. § 1, предложение 1.1.), являются, очевидно, элементами  $\mathcal{L}(M; \mathbb{R})$ .

Свободный модуль  $C^\infty(M; \mathbb{R}^m)$  канонически наделяется топологией пространства Фреше — топологией прямого произведения  $m$  экземпляров  $C^\infty(M)$ .

Если  $\mathfrak{F}$  — конечно порождённый проективный  $C^\infty(M)$ -модуль, то на  $\mathfrak{F}$  можно ввести топологию пространства Фреше, определив её как проективную (или инициальную) топологию, порождённую сопряжённым модулем  $\text{Hom } \mathfrak{F}$  — а именно, это слабейшая топология, в которой непрерывны все отображения

$$\mathfrak{F} \rightarrow C^\infty(M), \quad u \mapsto \langle \chi, u \rangle, \quad \chi \in \text{Hom } \mathfrak{F}.$$

Из определения вытекает непрерывность любого гомоморфизма  $\chi \in \text{Hom}(\mathfrak{F}, \mathfrak{G})$  модулей  $\mathfrak{F}, \mathfrak{G}$ , в частности эндоморфизмов модуля  $\mathfrak{F}$ . Отсюда также следует, что если  $\mathfrak{F}$  является подмодулем свободного модуля  $C^\infty(M; \mathbb{R}^m)$ , то индуцированная из  $C^\infty(M; \mathbb{R}^m)$  топология на нём совпадает с определённой выше

топологией. Более того, можно доказать, что топология  $\mathfrak{F}$  совпадает с проективной топологией, порождённой семейством  $\{\text{Hom}_p \mathfrak{F}; p \in \text{Iso } M\}$ , в частности, отсюда вытекает непрерывность произвольного полуизоморфизма модуля  $P \in \text{Hom}_p(\mathfrak{F}, \mathfrak{F})$  над диффеоморфизмом  $p$ .

Докажем, что множество  $\mathcal{L}(\mathfrak{F})$  всех  $\mathbb{R}$ -линейных непрерывных отображений проективного конечно порождённого модуля  $\mathfrak{F}$  в себя содержит множество  $\text{Der}(\mathfrak{F})$  дифференцирований этого модуля.

В самом деле, пусть  $\mathfrak{F}$  — прямое слагаемое в  $C^\infty(M; \mathbb{R}^m)$ . Тогда (см. предложение 1.1 этого параграфа), любое дифференцирование  $D \in \text{Der } \mathfrak{F}$  с  $\theta(D) = X$ , может быть представлено в виде  $D = \nabla_X + H$ , где  $H$  — некоторый эндоморфизм  $\mathfrak{F}$ , а  $\nabla_X$  — каноническое ковариантное дифференцирование,  $\nabla_X = \text{pr}_{\mathfrak{F}} \vec{X}|_{\mathfrak{F}}$ ;  $\vec{X}$  — дифференцирование свободного модуля  $C^\infty(M; \mathbb{R}^m)$ ,

$$\vec{X}(w^1, \dots, w^m) = (Xw^1, \dots, Xw^m) \quad \forall (w^1, \dots, w^m) \in C^\infty(M, \mathbb{R}^m).$$

Поскольку  $H \in \text{End } \mathfrak{F}$ ,  $\text{pr}_{\mathfrak{F}} \in \text{End } C^\infty(M; \mathbb{R}^m)$  непрерывны, то для доказательства непрерывности  $D$  достаточно установить непрерывность дифференцирования  $\vec{X}$  свободного модуля  $C^\infty(M; \mathbb{R}^m)$  — она, в свою очередь, вытекает из непрерывности поля  $X \in \text{Der } M$  и определения топологии  $C^\infty(M; \mathbb{R}^m)$ .

Используя топологии  $C^\infty(M)$  и конечно порождённого проективного  $C^\infty(M)$ -модуля  $\mathfrak{F}$ , на однопараметрические семейства  $a_t, t \in \mathbb{R}$ , и  $u_t, t \in \mathbb{R}$ , элементов  $C^\infty(M)$  и  $\mathfrak{F}$  соответственно, можно перенести основные конструкции анализа.

*Непрерывность и дифференцируемость* этих семейств по параметру  $t \in \mathbb{R}$ , не требует специальных пояснений, поскольку  $C^\infty(M)$ ,  $\mathfrak{F}$  — линейные топологические пространства.

Семейство  $a_t, t \in \mathbb{R}$ , элементов  $C^\infty(M)$  называется *измеримым*, если для  $\forall x \in M$  измерима скалярная функция  $x \mapsto a(x)$ ; соответственно, семейство  $u_t, t \in \mathbb{R}$  элементов модуля  $\mathfrak{F}$  называется *измеримым*, если для  $\forall x \in \text{Hom } \mathfrak{F}$  измеримо семейство  $a_t = \langle x, u_t \rangle$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , элементов  $C^\infty(M)$ . Измеримое семейство  $a_t, t \in \mathbb{R}$ , элементов  $C^\infty(M)$  называется *локально интегрируемым*, если локально интегрируема скалярная функция  $t \mapsto \|a_t\|_{s,h}, X$  для любой полунормы  $\|\cdot\|_{s,h}, x$ . При этом, *интегралом* локально интегрируемого семейства  $a_t, t \in \mathbb{R}$ , в пределах от  $t_1$  до  $t_2$  называется функция

$$x \mapsto \int_{t_1}^{t_2} a_t(x) dt.$$

Можно доказать (см., например, [3]), что эта функция принадлежит  $C^\infty(M)$  и при этом для любой полунормы  $\|\cdot\|_{s,K}, x$  и для  $\forall t_2 \geq t_1$

$$\left\| \int_{t_1}^{t_2} a_t dt \right\|_{s, K, X} \leq \int_{t_1}^{t_2} \|a_t\|_{s, K, X} dt.$$

Соответственно, семейство  $u_t$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , элементов  $\mathfrak{F}$  *локально интегрируемо*, если для  $\forall \chi \in \text{Hom } \mathfrak{F}$  локально интегрируемо семейство  $a_t = \langle \chi, u_t \rangle$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , элементов  $C^\infty(M)$ . В этом случае однозначно определен элемент  $\int_{t_1}^{t_2} u_t dt$  модуля  $\mathfrak{F}$ , называемый *интегралом* локально интегрируемого семейства в пределах от  $t_1$  до  $t_2$ ; он характеризуется соотношением (при естественном отождествлении  $\text{Hom} \circ \text{Hom } \mathfrak{F}$  с  $\mathfrak{F}$ ):

$$\left\langle \chi, \int_{t_1}^{t_2} u_t dt \right\rangle = \int_{t_1}^{t_2} \langle \chi, u_t \rangle dt.$$

Семейство  $a_t$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , элементов  $C^\infty(M)$  называется *абсолютно непрерывным*, если существует локально интегрируемое семейство  $b_t$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , такое, что для любых  $t_0$ ,  $t \in \mathbb{R}$

$$a_t = a_{t_0} + \int_{t_0}^t b_\tau d\tau.$$

В этом случае  $a_t$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , дифференцируемо при почти всех  $t \in \mathbb{R}$ , и  $\frac{d}{dt} a_t = b_t$  (доказательство см., например, в [1]). Соответственно, семейство  $u_t$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , элементов  $\mathfrak{F}$  называется *абсолютно непрерывным*, если существует такое локально интегрируемое семейство  $v_t$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , элементов  $\mathfrak{F}$ , что  $\forall t$ ,  $t_0 \in \mathbb{R}$

$$u_t = u_{t_0} + \int_{t_0}^t v_\tau d\tau;$$

в этом случае также при почти всех  $t \in \mathbb{R}$  существует  $\frac{du_t}{dt} = v_t$ .

В алгебре  $\mathcal{L}(\mathfrak{F})$ , как и в алгебре  $\mathcal{L}(M)$ , введём топологию простой (поточечной) сходимости. Тогда *измеримость*, *локальная интегрируемость*, *дифференцируемость* семейства  $T_t$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , операторов из  $\mathcal{L}(\mathfrak{F})$  (или из  $\mathcal{L}(M)$ ) определяется требованием, чтобы для любого  $u \in \mathfrak{F}$  (для любого  $a \in C^\infty(M)$ ) семейство  $v_t = T_t u$ ,  $t \in \mathbb{R}$  ( $b_t = T_t a$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ) обладало бы этим свойством.

*Производной* дифференцируемого в точке  $t_0$  семейства  $T_t$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , операторов из  $\mathcal{L}(\mathfrak{F})$  (или из  $\mathcal{L}(M)$ ) называется линейный оператор

$$T'_{t_0} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\delta t} \{T_{t_0 + \delta t} - T_{t_0}\}.$$

Его непрерывность следует из теоремы Банаха — Штейнгауза.

*Интегралом* локально интегрируемого семейства операторов  $T_t, t \in \mathbb{R}$ , из  $\mathcal{L}(\mathfrak{F})$  (или из  $\mathcal{L}(M)$ ) называется оператор

$$\left( \int_{t_1}^{t_2} T_\tau d\tau \right) u = \int_{t_1}^{t_2} T_\tau u d\tau, \quad u \in \mathfrak{F} \quad (u \in C^\infty(M)).$$

Доказательство его непрерывности проводится также, как в [3].

Семейство  $P_t, t \in \mathbb{R}$ , операторов из  $\mathcal{L}(\mathfrak{F})$  (или из  $\mathcal{L}(M)$ ) называется *абсолютно непрерывным*, если существует такое локально интегрируемое семейство  $Q_t, t \in \mathbb{R}$ , что  $\forall t, t_0 \in \mathbb{R}$ ,

$$P_t = P_{t_0} + \int_{t_0}^t Q_\tau d\tau.$$

В этом случае при почти всех  $t \in \mathbb{R}$  существует  $\frac{dP_t}{dt} = Q_t$ .

Отметим, что если семейства операторов  $T'_t, T''_t, t \in \mathbb{R}$ , из  $\mathcal{L}(\mathfrak{F})$  (или из  $\mathcal{L}(M)$ ) абсолютно непрерывны, то абсолютно непрерывно семейство  $T_t = T'_t \circ T''_t, t \in \mathbb{R}$ , и при этом имеет место *формула Лейбница*

$$\frac{d}{dt} T'_t \circ T''_t = \frac{dT'_t}{dt} \circ T''_t + T'_t \circ \frac{dT''_t}{dt}.$$

Приведённые выше понятия естественным образом также переносятся на однопараметрические семейства функционалов  $\xi_t, t \in \mathbb{R}$ , из  $\mathcal{L}(M, \mathbb{R})$

*Нестационарным векторным полем*  $X_t, t \in \mathbb{R}$ , или просто *полем* на многообразии  $M$  назовём произвольное локально интегрируемое семейство  $X_t, t \in \mathbb{R}$ , элементов  $\text{Der } M \subset \mathcal{L}(M)$ .

Если поле  $X_t, t \in \mathbb{R}$  задано, то мы можем рассмотреть обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d}{dt} A_t = A_t \circ X_t \quad (2.1)$$

с начальным условием

$$A_t|_{t=0} = \text{id}, \quad (2.2)$$

где  $\text{id} = \text{id}_{C^\infty(M)}$  — тождественное отображение  $C^\infty(M)$ , относительно семейства  $A_t, t \in \mathbb{R}$ , элементов  $\mathcal{L}(M)$  и аналогичное ему уравнение

$$\frac{d}{dt} B_t = -X_t \circ B_t \quad (2.3)$$

с начальным условием

$$B_t|_{t=0} = \text{id}, \quad (2.4)$$

которое называется *сопряжённым* к (2.1). Подчёркнём, что эти уравнения линейны. Решением уравнения (2.1) при условии (2.2) называется абсолютно непрерывное семейство  $A_t, t \in \mathbb{R}$ , элементов  $\mathcal{L}(M)$ , удовлетворяющее уравнению (2.1) при почти всех  $t \in \mathbb{R}$  и начальному условию (2.2). Абсолютная непрерывность гарантирует эквивалентность (2.1), (2.2) интегральному уравнению

$$A_t = A_0 + \int_0^t A_\tau \circ X_\tau d\tau. \quad (2.5)$$

Аналогичным образом определяется решение уравнения (2.3) с условием (2.4) и эквивалентность (2.3) — (2.4) интегральному уравнению

$$B_t = B_0 - \int_0^t X_\tau \circ B_\tau d\tau. \quad (2.6)$$

Абсолютно непрерывное семейство  $T_t, t \in \mathbb{R}$ , элементов  $\mathcal{L}(M)$  называется *обратимым*, если каждый оператор  $T_t$  ( $t \in \mathbb{R}$ ) обратим и обратное семейство  $T_t^{-1}, t \in \mathbb{R}$ , абсолютно непрерывно.

Назовём *поток* на многообразии  $M$  произвольное абсолютно непрерывное семейство  $p_t, t \in \mathbb{R}$ , диффеоморфизмов (то есть абсолютно непрерывное семейство автоморфизмов алгебры  $C^\infty(M)$ ), удовлетворяющее условию  $p_0 = \text{id}$ .

Если  $p_t, t \in \mathbb{R}$ , — поток на  $M$ , то семейство  $f_t, f_t^* = p_t$ , диффеоморфизмов многообразия  $M$  абсолютно непрерывно и его также называют *поток*ом. Из теоремы об обратной функции следует абсолютная непрерывность семейства  $f_t^{-1}, t \in \mathbb{R}$ , и, следовательно, семейства  $p_t^{-1} = (f_t^{-1})^*$ . Поэтому любой поток обратим.

Предложение 2.1. Если хотя бы одно из уравнений (2.1), (2.2) и (2.3), (2.4) имеет обратимое решение, то обратимое решение имеет и второе уравнение. Эти решения единственны и являются взаимно обратными потоками.

Доказательство. Заметим, во-первых, что любое решение  $A_t, t \in \mathbb{R}$ , уравнения (2.1) с начальным условием (2.2) является левым обратным для произвольного решения  $B_t, t \in \mathbb{R}$ , уравнения (2.3) с начальным условием (2.4), ибо, в силу формулы Лейбница,

$$\frac{d}{dt} A_t \circ B_t = \frac{dA_t}{dt} \circ B_t + A_t \circ \frac{dB_t}{dt} = A_t \circ X_t \circ B_t - A_t \circ X_t \circ B_t = 0,$$

а вследствие абсолютной непрерывности семейства  $A_t \circ B_t$ , получаем  $A_t \circ B_t \equiv \text{id}$ .

Далее, если  $T_t, t \in \mathbb{R}$ , — обратимое решение одного из уравнений (2.1) или (2.3), то  $T_t^{-1}, t \in \mathbb{R}$ , — обратимое решение, соответственно, уравнения (2.3) или (2.1). Действительно, так как  $\text{id} = T_t \circ T_t^{-1}$ , то, в силу формулы Лейбница,

$$0 = \frac{dT_t}{dt} \circ T_t^{-1} + T_t \circ \frac{dT_t^{-1}}{dt},$$

откуда

$$\frac{dT_t^{-1}}{dt} = -T_t^{-1} \circ \frac{dT_t}{dt} \circ T_t^{-1}.$$

Следовательно, если, например,  $T_t, t \in \mathbb{R}$ , удовлетворяет (2.3) то  $\frac{dT_t^{-1}}{dt} = -T_t^{-1} \circ \frac{dT_t}{dt} \circ T_t^{-1} = T_t^{-1} \circ X_t \circ T_t \circ T_t^{-1} = T_t^{-1} \circ X_t$ . Поэтому решения единственны. В самом деле, если  $T_t, A_t, t \in \mathbb{R}$ , — решения (2.1) — (2.2) и  $A_t$  — обратимо, то, по доказанному,  $B_t = A_t^{-1}$  — решение (2.3) и значит  $T_t \circ B_t = \text{id}$ , откуда  $T_t = B_t^{-1} = A_t$ . Аналогично, если  $T_t, B_t, t \in \mathbb{R}$ , — решения (2.3) и  $B_t$  обратимо, то  $A_t = B_t^{-1}$  — решение (2.1) и опять  $A_t \circ T_t = \text{id}$ , откуда  $T_t = A_t^{-1} = B_t$ .

Из обратимости и единственности решений уравнений (2.1), (2.2) и (2.3), (2.4) вытекает (подробности см. в [3]), что  $A_t, B_t$  — взаимно обратные потоки.

Предложение доказано.

Пусть  $p_t, t \in \mathbb{R}$ , — поток, удовлетворяющий уравнению (2.1). Тогда для любой точки  $x \in M$  семейство  $x \circ p_t, t \in \mathbb{R}$ , является абсолютно непрерывным семейством мультипликативных функционалов из  $\mathcal{L}(M; \mathbb{R})$ , то есть абсолютно непрерывной кривой на многообразии  $M$ , удовлетворяющей обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{dx_t}{dt} = x \circ \frac{d}{dt} p_t = x \circ P_t \circ X_t = x_t \circ X_t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Обратно, если  $f_t(x), t \in \mathbb{R}$ , — абсолютно непрерывное семейство диффеоморфизмов многообразия  $M$  удовлетворяющее уравнению

$$\frac{d}{dt} f_t(x) = f_t(x) \circ X_t, \quad f_0(x) = x,$$

то  $p_t = f_t^*, t \in \mathbb{R}$ , — поток, удовлетворяющий (2.1), ибо семейство  $p_t, t \in \mathbb{R}$ , обратимо и  $f_t(x) = x \circ p_t$ , так что  $\frac{d}{dt} f_t(x) = \frac{d}{dt} x \circ p_t = x \circ \frac{d}{dt} p_t = x \circ p_t \circ X_t$ , откуда, в силу произвольности  $x$ ,

$$\frac{dp_t}{dt} = p_t \circ X_t.$$

Следовательно, вопрос о существовании потока сводится к выяснению условий существования потока, определяемого обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\frac{dx_t}{dt} = x_t \circ X_t, \quad x_0 = x. \quad (2.7)$$

Если рассматривать (2.7) как уравнение относительно абсолютно непрерывного семейства  $x_t, t \in \mathbf{R}$ , функционалов из  $\mathcal{L}(M; \mathbf{R})$  (не обязательно мультипликативных), то в условиях предложения 2.1 это уравнение не может иметь более одного решения. В самом деле, если  $B_t, t \in \mathbf{R}$ , — поток, удовлетворяющий (2.3) то, «умножая» (2.7) на  $B_t$  получаем:

$$\frac{d}{dt} x_t \circ B_t = x_t \circ X_t \circ B_t = -x_t \circ \frac{dB_t}{dt},$$

откуда

$$x_t \circ B_t = x,$$

и, следовательно,  $x_t = x \circ A_t, t \in \mathbf{R}$ . Так как  $A_t, t \in \mathbf{R}$  — поток, то  $x_t = x \circ A_t$  — мультипликативный функционал<sup>1)</sup> и потому других решений, кроме абсолютно непрерывных кривых в  $M$ , уравнение (2.7) иметь не может.

Итак, единственным обратимым решением уравнения (2.1) может быть только поток, определяемый обыкновенным дифференциальным уравнением (2.7).

Из теоремы существования решения обыкновенного дифференциального уравнения на многообразии вытекает, что решение уравнения (2.7) существует локально по времени  $t$  и локально по  $x$ . Существование (и единственность, в силу предложения 2.1) потока имеет место в случае, если, например, носители полей  $X_t, t \in \mathbf{R}$ , лежат в некотором фиксированном компактном подмножестве  $K \subset M : \{\text{supp } X_t; t \in \mathbf{R}\} \subset K$ .

Нестационарное векторное поле  $X_t, t \in \mathbf{R}$ , называется *полным*, если существует поток  $p_t, t \in \mathbf{R}$ , удовлетворяющий уравнению (2.1).

Обозначим через  $\overrightarrow{\exp} \int_0^t X_\tau d\tau$  и  $\overleftarrow{\exp} \int_0^t -X_\tau d\tau$  — (единственные)

решения уравнений (2.1), (2.2) и (2.3), (2.4); если они существуют, то, на основании предложения 2.1, они являются взаимно обратными потоками, что выражается формулой

$$\left( \overrightarrow{\exp} \int_0^t X_\tau d\tau \right)^{-1} = \overleftarrow{\exp} \int_0^t -X_\tau d\tau. \quad (2.8)$$

<sup>1)</sup> Если  $x$  мультипликативен

Мы называем  $\overrightarrow{\exp} \int_0^t X_\tau d\tau$  и  $\overleftarrow{\exp} \int_0^t X_\tau d\tau$  соответственно *правой*

и *левой хронологическими экспонентами*, порождёнными (нестационарным) векторным полем  $X_t, t \in \mathbb{R}$ , на многообразии  $M$ . Стрелка в обозначении  $\exp$  указывает, куда выносится поле  $X_t$  при дифференцировании соответствующей экспоненты по времени  $t$ :

$$\frac{d}{dt} \overrightarrow{\exp} \int_0^t X_\tau d\tau = \overrightarrow{\exp} \int_0^t X_\tau d\tau \circ X_t, \quad \frac{d}{dt} \overleftarrow{\exp} \int_0^t X_\tau d\tau = X_t \circ \overleftarrow{\exp} \int_0^t X_\tau d\tau.$$

Рассмотрим теперь аналогичные понятия для операторных уравнений на конечно порождённом проективном  $C^\infty(M)$ -модуле  $\mathfrak{F}$ .

*Потоком* на модуле  $\mathfrak{F}$  будем называть произвольное абсолютно непрерывное семейство полуизоморфизмов  $P_t, t \in \mathbb{R}$ , этого модуля, удовлетворяющее условию  $P_0 = \text{id}$ .

Если  $P_t, t \in \mathbb{R}$ , — поток на  $C^\infty(M)$ -модуле  $\mathfrak{F}$ , то ему однозначно (см. § 2) соответствует семейство

$$p_t = \theta(P_t), \quad t \in \mathbb{R},$$

автоморфизмов  $C^\infty(M)$  или, эквивалентно, — абсолютно непрерывное семейство диффеоморфизмов  $p_t^*, t \in \mathbb{R}$ , многообразия  $M$ .

Из абсолютной непрерывности семейства  $P_t, t \in \mathbb{R}$ , вытекает, что это семейство  $p_t = \theta(P_t), t \in \mathbb{R}$ , также абсолютно непрерывно и, так как  $P_0 = \text{id}_{\mathfrak{F}}$ ,  $p_t, t \in \mathbb{R}$ , является потоком на  $M$ .

Поток  $P_t, t \in \mathbb{R}$ , на  $M$  (если он существует) естественно рассматривать как результат распространения потока  $p_t, t \in \mathbb{R}$ , базы (многообразия  $M$ ) до потока на модуле и соответствующем векторном расслоении. Существование такого расширения будет доказано в п. 3.4 этого параграфа.

Заметим, что всякий поток  $P_t, t \in \mathbb{R}$ , на  $\mathfrak{F}$  является *обратимым семейством*: обратное семейство  $P_t^{-1}, t \in \mathbb{R}$ , существует и абсолютно непрерывно. При этом

$$\theta(P_t^{-1}) = \theta(P_t)^{-1}.$$

Пусть  $P_t, t \in \mathbb{R}$ , — поток на конечно порождённом проективном  $C^\infty(M)$ -модуле  $\mathfrak{F}$ . Определим семейства операторов

$$D_t = P_t^{-1} \circ \frac{d}{dt} P_t, \quad \Delta_t = \frac{d}{dt} P_t^{-1} \circ P_t.$$

Тогда  $D_t, \Delta_t, t \in \mathbb{R}$ , — локально интегрируемые семейства дифференцирований модуля  $\mathfrak{F}$  и при этом

$$\theta(D_t) = X_t, \quad \Delta_t = -D_t,$$

где  $X_t, t \in \mathbb{R}$ , — векторное поле, соответствующее потоку

$$p_t = \theta(P_t) = \exp \int_0^t \overrightarrow{X_\tau} d\tau.$$

В самом деле, например, для  $D_t$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , имеем, в силу формулы Лейбница:  $\forall a \in C^\infty(M)$ ,  $u \in \mathfrak{F}$

$$\begin{aligned} D_t(au) &= P_t^{-1} \circ \frac{d}{dt} P_t(au) = P_t^{-1} \circ \frac{d}{dt} p_t a \cdot P_t u = \\ &= P_t^{-1} \left( \frac{dP_t a}{dt} P_t u + (p_t a) \frac{dP_t}{dt} u \right) = P_t^{-1} \left( p_t (X_t a) P_t u + (p_t a) \frac{dP_t}{dt} u \right) = \\ &= (X_t a) u + a P_t^{-1} \frac{dP_t}{dt} u = (X_t a) u + a D_t u. \end{aligned}$$

Введем обозначения

$$P_t = \exp \int_0^t \overrightarrow{D_\tau} d\tau, \quad P_t^{-1} = \exp \int_0^t \overleftarrow{D_\tau} d\tau = \exp \int_0^t -D_\tau d\tau.$$

Формально, эти правая и левая хронологические экспоненты от семейств  $D_t$  и  $-D_t$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , дифференцирований модуля  $\mathfrak{F}$  являются решениями операторных дифференциальных уравнений

$$\frac{dP_t}{dt} = P_t \circ D_t, \quad P_0 = \text{id}, \quad (2.9)$$

и

$$\frac{dQ_t}{dt} = -D_t \circ Q_t, \quad Q_0 = \text{id}, \quad (2.10)$$

аналогичных паре сопряжённых уравнений (2.1), (2.2) и (2.3), (2.4)

Решениями этих уравнений будем называть произвольные абсолютно непрерывные семейства  $P_t$ ,  $Q_t$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , элементов  $\mathcal{L}(\mathfrak{F})$ , удовлетворяющие этим уравнениям при почти всех  $t \in \mathbb{R}$  и для которых выполнены соответствующие начальные условия. Имеет место следующий аналог предложения 2.1.

**Предложение 2.2.** Пусть  $D_t$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , — локально интегрируемое семейство дифференцирований конечно порождённого проективного модуля  $\mathfrak{F}$ . Если хотя бы одно из уравнений (2.9), (2.10) имеет обратимое решение, то обратимое решение имеет и второе уравнение; эти решения единственны и являются взаимно обратными потоками

$$P_t = \exp \int_0^t \overrightarrow{D_\tau} d\tau, \quad \left( \exp \int_0^t \overrightarrow{D_\tau} d\tau \right)^{-1} = \exp \int_0^t \overleftarrow{D_\tau} d\tau = P_t^{-1}.$$

При этом

$$p_t = \theta \exp \int_0^t \overrightarrow{D_\tau} d\tau = \exp \int_0^t \overrightarrow{\theta D_\tau} d\tau,$$

$$p_t^{-1} = \theta \exp \int_0^t \overleftarrow{-D_\tau} d\tau = \exp \int_0^t \overleftarrow{-D_\tau} d\tau.$$

— потоки на многообразии  $M$ , порождённые нестационарным векторным полем  $\theta D_t, t \in \mathbb{R}$ .

Доказательство проводится по той же схеме, что и доказательство предложения 2.1. В самом деле, любое решение  $P_t, t \in \mathbb{R}$ , уравнения (2.9) является левым обратным для произвольного решения  $Q_t, t \in \mathbb{R}$ , уравнения (2.10), ибо

$$\frac{d}{dt} P_t \circ Q_t = \frac{dP_t}{dt} \circ Q_t + P_t \circ \frac{dQ_t}{dt} = P_t \circ D_t \circ Q_t - P_t \circ D_t \circ Q_t = 0.$$

С другой стороны, если  $P_t, t \in \mathbb{R}$ , — обратимое решение одного из уравнений (2.9), (2.10), то обратное семейство  $Q_t = P_t^{-1}, t \in \mathbb{R}$ , является решением второго уравнения и потому решения единственны. Наконец, поток  $\exp \int_0^t \overrightarrow{D_\tau} d\tau$  или  $\exp \int_0^t \overleftarrow{-D_\tau} d\tau$  (если он существует) является решением (2.9) или (2.10); так как поток обратим, то других решений (в силу единственности) нет. Предложение доказано.

Следствие. Пусть  $\mathfrak{F}$  — конечно порожденный проективный  $C^\infty(M)$ -модуль и существует поток

$$\exp \int_0^t \overleftarrow{-D_\tau} d\tau, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Тогда существует и единственно решение дифференциального уравнения

$$\frac{d}{dt} u_t = D_t u_t \quad (2.11)$$

с начальным условием

$$u_t|_{t=0} = u_0 \in \mathfrak{F}. \quad (2.12)$$

(Под решением этого уравнения понимается произвольное абсолютно непрерывное семейство  $u_t, t \in \mathbb{R}$ , элементов  $\mathfrak{F}$ , удовлетворяющее начальному условию (2.12) и уравнению (2.11) при почти всех  $t \in \mathbb{R}$ .)

Доказательство. Существование решения очевидно: этим решением является абсолютно непрерывное семейство

$$u_t = \exp \int_0^t \overleftarrow{-D_\tau} d\tau u_0, \quad \text{ибо}$$

$$\frac{du_t}{dt} = \frac{d}{dt} \exp \int_0^t \overleftarrow{-D_\tau} d\tau u_0 = D_t \circ \exp \int_0^t \overleftarrow{-D_\tau} d\tau u_0 = D_t u_t.$$

В силу предложения 2.2, существует поток  $\overrightarrow{\exp} \int_0^t -D_\tau d\tau =$   
 $= \left( \overleftarrow{\exp} \int_0^t D_\tau d\tau \right)^{-1}$ . Поэтому, если  $u_t$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , — произвольное решение рассматриваемого уравнения, то

$$\frac{d}{dt} \overrightarrow{\exp} \int_0^t -D_\tau d\tau u_t = - \overrightarrow{\exp} \int_0^t D_\tau d\tau \circ D_t u_t + \overrightarrow{\exp} \int_0^t D_\tau d\tau \circ D_t u_t = 0$$

откуда

$$u_0 \equiv \overrightarrow{\exp} \int_0^t -D_\tau d\tau u_t \Rightarrow u_t = \overleftarrow{\exp} \int_0^t D_\tau d\tau u_0,$$

то есть решение единственно.

**3.3. Основные формулы хронологического исчисления.** В этом пункте мы установим ряд формул для хронологических экспонент  $\overrightarrow{\exp} \int_0^t D_\tau d\tau$  и  $\overleftarrow{\exp} \int_0^t D_\tau d\tau$ , порожденных локально интегрируемым семейством дифференцирований конечно порожденного проективного  $C^\infty(M)$ -модуля  $\mathcal{G}$  и соответствующие формулы для хронологических экспонент

$$\theta \overrightarrow{\exp} \int_0^t D_\tau d\tau = \overrightarrow{\exp} \int_0^t \theta D_\tau d\tau, \quad \theta \overleftarrow{\exp} \int_0^t D_\tau d\tau = \overleftarrow{\exp} \int_0^t \theta D_\tau d\tau.$$

Из соображений единственности (см. предложение 2.2) сразу получаются формулы

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\exp} \int_0^t D_{t-\tau} d\tau &= \overleftarrow{\exp} \int_0^t \overrightarrow{\exp} \int_0^\tau D_\tau d\tau, \\ \overrightarrow{\exp} \int_0^t D_\tau d\tau &= \overrightarrow{\exp} \int_0^{t_1} D_\tau d\tau \circ \overrightarrow{\exp} \int_{t_1}^t D_\tau d\tau \quad \forall t, t_1 \in \mathbb{R}, \\ \overrightarrow{\exp} \int_0^t D_\sigma d\sigma &= \overrightarrow{\exp} \int_0^T D_{\theta(\tau)} \theta'(\tau) d\tau \end{aligned}$$

(для строго монотонной абсолютно непрерывной функции  $\theta$ ,  $\theta(0)=0$ ,  $\theta(t)=T$ ).

Наиболее важная формула — это *формула вариаций*, выражающая возмущенный с помощью локально интегрируемого семейства  $D_t''$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , дифференцирований поток

$$\overrightarrow{\exp} \int_0^t (D'_\tau + D''_\tau) d\tau$$

через невозмущенный поток

$$\overrightarrow{\exp} \int_0^t D'_\tau d\tau.$$

Прежде чем сформулировать соответствующее утверждение, заметим, что если  $\mathfrak{F}$  — конечно порожденный проективный  $C^\infty(M)$ -модуль, то множество  $\text{Der } \mathfrak{F}$  его дифференцирований является конечно порожденным проективным  $C^\infty(M)$ -модулем (см. п. 3.1 § 3). Любое дифференцирование  $D \in \text{Der } \mathfrak{F}$  модуля  $\mathfrak{F}$  порождает естественным образом дифференцирование  $\text{ad } D$  модуля  $\text{Der } \mathfrak{F}$ :

$$\text{ad } DD' = [D, D'] \quad \forall D' \in \text{Der } \mathfrak{F}.$$

В самом деле, то, что  $\text{ad } D$  — дифференцирование доказывается формальной выкладкой:  $\forall a \in C^\infty(M), D' \in \text{Der } \mathfrak{F} \quad \text{ad } D(aD') = [D, aD'] = D(aD') - aD' \circ D = X(a)D \circ D' + aD \circ D' - aD' \circ D = (Xa)D' + \text{ad } D(D')$ . При этом  $\theta(\text{ad } D) = \theta(D)$ . Следовательно, можно говорить о хронологической экспоненте (потоке) от семейства  $\text{ad } D_t, t \in \mathbb{R}$ , на конечно порожденном проективном модуле  $\text{Der } \mathfrak{F}$ , если задано семейство  $D_t, t \in \mathbb{R}$ , дифференцирований конечно порожденного проективного модуля  $\mathfrak{F}$ .

Пусть, как и выше (см. § 1), для полуизоморфизма  $P: \mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{F}$  модуля  $\mathfrak{F}$  через  $\text{Ad } P$  обозначается оператор

$$D \mapsto \text{Ad } PD: \text{Der } \mathfrak{F} \rightarrow \text{Der } \mathfrak{F}, \quad \text{Ad } PD = P \circ D \circ P^{-1}.$$

Имеет место

**Предложение 3.1.** Пусть  $D'_t, D''_t, t \in \mathbb{R}$ , — локально интегрируемые семейства дифференцирований конечно порожденного проективного  $C^\infty(M)$ -модуля  $\mathfrak{F}$ . Тогда, если существует поток

$$\overrightarrow{\exp} \int_0^t D'_\tau d\tau,$$

то потоки

$$\overrightarrow{\exp} \int_0^t (D'_\tau + D''_\tau) d\tau, \quad \overrightarrow{\exp} \int_0^t \overrightarrow{\exp} \int_0^\tau \text{ad } D'_\theta d\theta D''_\tau d\tau$$

существуют (или не существуют) одновременно и при этом имеет место *формула вариаций*

$$\overrightarrow{\exp} \int_0^t (D'_\tau + D''_\tau) d\tau = \overrightarrow{\exp} \int_0^t \overrightarrow{\exp} \int_0^\tau \text{ad } D'_\theta d\theta D''_\tau d\tau \circ \overrightarrow{\exp} \int_0^t D'_\tau d\tau =$$

$$= \overrightarrow{\exp} \int_0^t \text{Ad} \overrightarrow{\exp} \int_0^t D'_\theta d\theta D'_\tau d\tau \circ \overrightarrow{\exp} \int_0^t D'_\tau d\tau. \quad (3.1)$$

В частности,

$$\text{Ad} \overrightarrow{\exp} \int_0^t D'_\tau d\tau = \overrightarrow{\exp} \int_0^t \text{ad} D'_\tau d\tau. \quad (3.2)$$

Доказательство. По определению оператора  $\text{Ad}$ , для  $\forall D \in \text{Der } \mathfrak{g}$

$$\text{Ad} \overrightarrow{\exp} \int_0^t D'_\tau d\tau D = \overrightarrow{\exp} \int_0^t D'_\tau d\tau \circ D \circ \overrightarrow{\exp} \int_0^t -D'_\tau d\tau.$$

Дифференцируя это соотношение по  $t$ , получаем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \text{Ad} \overrightarrow{\exp} \int_0^t D'_\tau d\tau &= \overrightarrow{\exp} \int_0^t D'_\tau d\tau \circ (D'_t \circ D - D \circ D'_t) \circ \overrightarrow{\exp} \int_0^t -D'_\tau d\tau = \\ &= \text{Ad} \overrightarrow{\exp} \int_0^t D'_\tau d\tau \circ \text{ad} D'_t D. \end{aligned}$$

Таким образом,  $\text{Ad} \overrightarrow{\exp} \int_0^t D'_\tau d\tau$  является решением уравнения

$$\frac{d}{dt} P_t = P_t \circ \text{ad} D'_t,$$

с начальным условием  $P_0 = \text{id}$ , в модуле  $\text{Der } \mathfrak{g}$  и, следовательно, по предложению 2.2,

$$P_t = \overrightarrow{\exp} \int_0^t \text{ad} D'_\tau d\tau = \text{Ad} \overrightarrow{\exp} \int_0^t D'_\tau d\tau.$$

Этим доказана формула (3.2). Для доказательства (3.1) запишем

$$\overrightarrow{\exp} \int_0^t (D'_\tau + D''_\tau) d\tau = C_t \circ \overrightarrow{\exp} \int_0^t D'_\tau d\tau. \quad (3.3)$$

Тогда, дифференцируя это соотношение, находим, что подлежащий определению поток  $C_t$  (если он существует), удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( C_t \circ \overrightarrow{\exp} \int_0^t D'_\tau d\tau \right) &= \frac{dC_t}{dt} \circ \overrightarrow{\exp} \int_0^t D'_\tau d\tau + C_t \circ \overrightarrow{\exp} \int_0^t D'_\tau d\tau D'_t = \\ &= C_t \circ \overrightarrow{\exp} \int_0^t (D'_\tau + D''_\tau) d\tau, \end{aligned}$$

или

$$\frac{d}{dt} C_t = C_t \circ \text{Ad} \exp \int_0^t D'_\tau d\tau D''_t,$$

то есть получаем, что поток  $C_t$ , в силу предложения 2.2, выражается формулой

$$C_t = \exp \int_0^t \text{Ad} \exp \int_0^\tau D'_\theta d\theta D''_\tau d\tau.$$

Следовательно, учитывая (3.2), (3.3) получаем (3.1)

Предложение доказано.

Аналогичную формулу можно получить и для левой экспоненты. Отметим, что из (3.1) вытекает также формула

$$\begin{aligned} \exp \int_0^t (D'_\tau + D''_\tau) d\tau &= \exp \int_0^t D'_\tau d\tau \circ \exp \int_0^t \text{Ad} \exp \int_0^\tau D'_\theta d\theta D''_\tau d\tau = \\ &= \exp \int_0^t D'_\tau d\tau \circ \exp \int_0^t \exp \int_0^\tau \text{ad} D'_\theta d\theta D''_\tau d\tau. \end{aligned} \quad (3.4)$$

В частности, при  $\mathfrak{G} = C^\infty(M)$  и при  $D'_t = X_t$ ,  $D''_t = Y_t$ , где  $X_t$ ,  $Y_t$  — (нестационарные) векторные поля на  $M$ , т. е. элементы  $\text{Der} M$ , получаем формулы:

$$\begin{aligned} \exp \int_0^t (X_\tau + Y_\tau) d\tau &= \exp \int_0^t \exp \int_0^\tau \text{ad} X_\theta d\theta Y_\tau d\tau \circ \exp \int_0^t X_\tau d\tau = \\ &= \exp \int_0^t \text{Ad} \exp \int_0^\tau X_\theta d\theta Y_\tau d\tau \circ \exp \int_0^t X_\tau d\tau, \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\exp \int_0^t \text{ad} X_\tau d\tau = \text{Ad} \exp \int_0^t X_\tau d\tau, \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} \exp \int_0^t (X_\tau + Y_\tau) d\tau &= \exp \int_0^t X_\tau d\tau \circ \exp \int_0^t \exp \int_0^\tau \text{ad} X_\theta d\theta Y_\tau d\tau = \\ &= \exp \int_0^t X_\tau d\tau \circ \exp \int_0^t \text{Ad} \exp \int_0^\tau X_\theta d\theta Y_\tau d\tau. \end{aligned} \quad (3.7)$$

и соответствующие формулы для левых экспонент.

С помощью формулы вариаций (3.1) можно установить важную формулу для производной по параметру  $\varepsilon$  от хронологической экспоненты

$$\exp \int_0^t D_\tau(\varepsilon) d\tau,$$

где  $D_t(\varepsilon)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , локально интегрируемое семейство дифференцирований конечно порожденного проективного  $C^\infty(M)$ -модуля  $\mathfrak{F}$ , гладко зависящее от параметра  $\varepsilon \in \mathbb{R}$ :

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \overrightarrow{\exp} \int_0^t D_\tau(\varepsilon) d\tau = \int_0^t \overrightarrow{\exp} \int_0^\tau \text{ad } D_0(\varepsilon) d\theta \frac{\partial D_\tau(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} d\tau \circ \overrightarrow{\exp} \int_0^t D_\tau(\varepsilon) d\tau. \quad (3.10)$$

В самом деле,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \overrightarrow{\exp} \int_0^t D_\tau(\varepsilon) d\tau &= \lim_{\delta \varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\delta \varepsilon} \left\{ \overrightarrow{\exp} \int_0^t D_\tau(\varepsilon + \delta \varepsilon) d\tau - \overrightarrow{\exp} \int_0^t D_\tau(\varepsilon) d\tau \right\} = \\ &= \lim_{\delta \varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\delta \varepsilon} \left\{ \overrightarrow{\exp} \int_0^t \left[ D_\tau(\varepsilon) + \delta \varepsilon \frac{\partial D_\tau(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} + o_\tau(\varepsilon) \right] d\tau - \overrightarrow{\exp} \int_0^t D_\tau(\varepsilon) d\tau \right\} = \\ &= \lim_{\delta \varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\delta \varepsilon} \left\{ \overrightarrow{\exp} \int_0^t \overrightarrow{\exp} \int_0^\tau \text{ad } D_0(\varepsilon) d\theta \left( \frac{\partial D_\tau(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} + o_\tau(\varepsilon) \right) d\tau \circ \right. \\ &\quad \left. \circ \overrightarrow{\exp} \int_0^t D_\tau(\varepsilon) d\tau - \overrightarrow{\exp} \int_0^t D_\tau(\varepsilon) d\tau \right\} = \\ &= \lim_{\delta \varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\delta \varepsilon} \left\{ \overrightarrow{\exp} \int_0^t D_\tau(\varepsilon) d\tau + \int_0^t \overrightarrow{\exp} \int_0^\tau \text{ad } D_0(\varepsilon) d\theta \left[ \frac{\partial D_\tau(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} + o_\tau(\varepsilon) \right] d\tau \circ \right. \\ &\quad \left. \circ \overrightarrow{\exp} \int_0^t D_\tau(\varepsilon) d\tau + \dots + \left( -\overrightarrow{\exp} \int_0^t D_0(\varepsilon) d\theta \right) \right\} = \\ &= \int_0^t \overrightarrow{\exp} \int_0^\tau \text{ad } D_0(\varepsilon) d\theta \frac{\partial D_\tau(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} d\tau \circ \overrightarrow{\exp} \int_0^t D_\tau(\varepsilon) d\tau. \end{aligned}$$

Аналогичным образом получается формула:  $\forall D' \in \text{Der } \mathfrak{F}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \overrightarrow{\exp} \int_0^t \text{ad } D_\tau(\varepsilon) d\tau D' &= \\ &= \left[ \int_0^t \overrightarrow{\exp} \int_0^\tau \text{ad } D_0(\varepsilon) d\theta \frac{\partial D_\tau(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} d\tau, \overrightarrow{\exp} \int_0^t \text{ad } X_\tau(\varepsilon) d\tau D' \right]. \quad (3.11) \end{aligned}$$

Имеет место следующий мультипликативный аналог формулы интегрирования по частям, установленный А. В. Сарычевым [6]: если  $D_t$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , — абсолютно непрерывное семейство дифференцирований конечно порожденного проективного  $C^\infty(M)$ -модуля  $\mathfrak{F}$  и — измеримая и ограниченная функция, то

$$\overrightarrow{\exp} \int_0^t u(\tau) D_\tau d\tau = \overrightarrow{\exp} \int_0^t - \int_0^1 e^{\theta \text{ad}_{v(\tau)} V_\tau} d\theta v(\tau) \dot{D}_\tau d\tau \circ e^{v(t)D}, \quad (3.12)$$

где  $v(t) = \int_0^t u(\tau) d\tau$ ,  $\dot{D}_\tau = \frac{d}{d\tau} D_\tau$

$$e^D = \overrightarrow{\exp} \int_0^1 D d\tau = \overleftarrow{\exp} \int_0^1 D d\tau \quad \forall D \in \text{Der } \mathfrak{F}.$$

Пусть  $P_t = \overrightarrow{\exp} \int_0^t D_\tau d\tau$  — поток на конечно порожденном

проективном модуле  $\mathfrak{F}$ , порожденный локально интегрируемым семейством дифференцирований  $D_t$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Тогда (см. § 2) мы можем рассмотреть сопряженный поток  $P_t^*$  в модуле  $\text{Der } \mathfrak{F}$ . По определению (см. § 2),

$$\langle P_t^* \chi, u \rangle = p_t^{-1} \langle \chi, P_t u \rangle, \quad p_t = \theta(P_t)$$

$$\forall u \in \mathfrak{F}, \quad \chi \in \text{Hom } \mathfrak{F}.$$

Поскольку для  $\forall \chi \in \text{Hom } \mathfrak{F}$ ,  $u \in \mathfrak{F}$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle P_t^* \chi, u \rangle &= \frac{d}{dt} p_t^{-1} \langle \chi, P_t u \rangle = -X_t \circ p_t^{-1} \langle \chi, P_t u \rangle + \\ &+ p_t^{-1} \circ \langle \chi, P_t \circ D_t u \rangle, \end{aligned} \quad (3.13)$$

то, если обозначить через  $D_t^*$  оператор

$$D_t^*: \mathfrak{F}^* \rightarrow \mathfrak{F}^*, \quad D_t^* \chi = -X_t \circ \chi + \chi \circ D_t, \quad (3.14)$$

то  $D_t^*$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , является локально интегрируемым семейством дифференцирований сопряженного модуля  $\text{Hom } \mathfrak{F} = \mathfrak{F}^*$ , ибо  $\forall a \in C^\infty(M)$ ,  $\chi \in \text{Hom } \mathfrak{F}$

$$D_t^*(a\chi) = -X_t \circ a\chi_t + \chi \circ D_t = -(X_t a)\chi + D_t \chi,$$

причем,  $\theta(D_t^*) = -X_t$ . Поэтому (3.13) дает, что

$$P_t^* = \overleftarrow{\exp} \int_0^t D_\tau^* d\tau.$$

В частности, данная конструкция, примененная к потоку

$$P_t = \overrightarrow{\exp} \int_0^t \text{ad } X_\tau d\tau$$

на модуле  $\text{Der } M$  ( $X_t$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , — нестационарное векторное поле на  $M$ ), приводит к важной формуле

$$\left(\overrightarrow{\exp} \int_0^t \text{ad } X_\tau d\tau\right)^* = \overleftarrow{\exp} \int_0^t -L_{X_\tau} d\tau = \left(\overrightarrow{\exp} \int_0^t L_{X_\tau} d\tau\right)^{-1}, \quad (3.15)$$

где  $L_{X_t}\omega$  — производная Ли 1-формы  $\omega$  вдоль векторного поля  $X_t$ :

$$L_{X_t}\omega = X_t\omega - \omega \circ \text{ad } X_t = -(\text{ad } X_t)^*\omega. \quad (3.16)$$

По хронологической экспоненте  $\overrightarrow{\exp} \int_0^t D_\tau d\tau$  однозначно восстанавливается порождающее эту экспоненту локально интегрируемое семейство  $D_t$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , дифференцирований конечно порожденного проективного модуля  $\mathfrak{F}$ . Поэтому корректно определено отображение  $\overrightarrow{\text{In}}$ ,

$$\overrightarrow{\text{In}} \left( \overrightarrow{\exp} \int_0^t D_\tau d\tau \right) = \int_0^t D_\tau d\tau,$$

называемое *хронологическим логарифмом* потока  $\overrightarrow{\exp} \int_0^t D_\tau d\tau$ .

Из формулы вариаций следует, что хронологический логарифм от произведения потоков  $\overrightarrow{\exp} \int_0^t D'_\tau d\tau \circ \overrightarrow{\exp} \int_0^t D''_\tau d\tau$  равен

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{In}} \left( \overrightarrow{\exp} \int_0^t D'_\tau d\tau \circ \overrightarrow{\exp} \int_0^t D''_\tau d\tau \right) &= \\ &= \int_0^t \left\{ \text{Ad} \overleftarrow{\exp} \int_0^\tau -D''_\theta d\theta D'_\tau + D''_\tau \right\} d\tau \end{aligned} \quad (3.17)$$

**3.4. Теоремы существования потока.** Здесь будет доказана основная теорема о существовании потока в произвольном конечно порожденном проективном модуле  $\mathfrak{F}$  над  $C^\infty(M)$ . Она получается как простое следствие общей теоремы «об устойчивости конечно порожденного  $C^\infty(M)$ -модуля» — см. теорему 4.2.

**3.4.1. Теорема существования для свободного модуля.** Рассмотрим свободный модуль  $C^\infty(M; \mathbb{R}^m)$  ранга  $m$ . На этом модуле определена (см. п. 3.1. настоящего параграфа) каноническая связность  $\nabla: \text{Der } M \rightarrow \text{Der } C^\infty(M; \mathbb{R}^m)$ ,  $X \mapsto \nabla_X = \vec{X}$ , где  $\vec{X}(u^1, \dots, u^m) = (Xu^1, \dots, Xu^m) \forall u = (u^1, \dots, u^m) \in C^\infty(M; \mathbb{R}^m)$ . Если  $D_X$  — произвольное дифференцирование модуля  $C^\infty(M; \mathbb{R}^m)$  и  $\theta(D_X) = X$ , то, в силу предложения 1.1 § 3,

$$D_X = \nabla_X + H,$$

где  $H$  — некоторый эндоморфизм свободного модуля  $C^\infty(M; \mathbb{R}^m)$ , представляющий из себя  $m \times m$ -матрицу  $(h_\beta^\alpha)$ , компоненты  $h_\beta^\alpha$  которой — элементы  $C^\infty(M)$ . Таким образом,  $\forall u = (u^1, \dots, u^m) \in C^\infty(M; \mathbb{R}^m)$

$$D_X(u^1, \dots, u^m) = (Xu^1, \dots, Xu^m) + \left( \sum_{\beta=1}^m h_\beta^1 u^\beta, \dots, \sum_{\beta=1}^m h_\beta^m u^\beta \right).$$

Если  $P$  — произвольный полуизоморфизм свободного модуля  $C^\infty(M; \mathbb{R}^m)$  над автоморфизмом  $p \in \text{Iso } M$ , то он представляется в виде

$$P = \hat{p} \circ A,$$

где  $\hat{p}$  — канонический полуизоморфизм  $C^\infty(M; \mathbb{R}^m)$ , порожденный автоморфизмом  $p$ :

$$\hat{p}(u^1, \dots, u^m) = (pu^1, \dots, pu^m) \quad \forall u = (u^1, \dots, u^m) \in C^\infty(M; \mathbb{R}^m),$$

а  $A$  — некоторый автоморфизм свободного модуля  $C^\infty(M; \mathbb{R}^m)$ , то есть  $m \times m$ -матрица  $A = (a_\beta^\alpha)$ , компоненты которой  $a_\beta^\alpha$  принадлежат  $C^\infty(M)$  такая, что  $\det(a_\beta^\alpha(x)) \neq 0$ ,

$$(Au)^\alpha = \sum a_\beta^\alpha u^\beta, \quad \alpha = 1, \dots, m.$$

Лемма 4.1. Пусть  $p \in \text{Iso } M$ ,  $H \in \text{End } C^\infty(M; \mathbb{R}^m)$ . Тогда

$$\text{Ad } \hat{p} H = \hat{p} H = (ph_\beta^\alpha). \quad (4.1)$$

Доказательство состоит в прямом вычислении:  $\forall u = (u^1, \dots, u^m) \in C^\infty(M; \mathbb{R}^m)$

$$\begin{aligned} \text{Ad } \hat{p} H(u^1, \dots, u^m) &= \hat{p} \circ H \circ \hat{p}^{-1}(u^1, \dots, u^m) = \hat{p} \circ H(p^{-1}u^1, \dots, p^{-1}u^m) = \\ &= \hat{p} \left( \sum_{\alpha=1}^m h_\alpha^1 p^{-1}u^\alpha, \dots, \sum_{\alpha=1}^m h_\alpha^m p^{-1}u^\alpha \right) = \\ &= \left( \sum_{\alpha=1}^m p(h_\alpha^1 p^{-1}u^\alpha), \dots, \sum_{\alpha=1}^m p(h_\alpha^m p^{-1}u^\alpha) \right) = \\ &= \left( \sum_{\alpha=1}^m ph_\alpha^1 u^\alpha, \dots, \sum_{\alpha=1}^m ph_\alpha^m u^\alpha \right) = (\hat{p} H)(u^1, \dots, u^m). \end{aligned}$$

Лемма 4.2. Пусть  $X_t$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , — локально интегрируемое семейство элементов  $\text{Der } M$  такое, что существует поток

$$\exp \int_0^t X_\tau d\tau.$$

Тогда семейство дифференцирований  $\nabla_{X_t}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , где  $\nabla$  — стандартная связность на  $C^\infty(M; \mathbb{R}^m)$ , локально интегрируемо и существует поток

$$\overrightarrow{\exp} \int_0^t \nabla_{X_\tau} d\tau = \left( \overrightarrow{\exp} \int_0^t X_\tau d\tau \right). \quad (4.2)$$

Доказательство:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left( \overrightarrow{\exp} \int_0^t X_\tau d\tau \right) (u^1, \dots, u^m) = \\ &= \frac{d}{dt} \left( \overrightarrow{\exp} \int_0^t X_\tau d\tau u^1, \dots, \overrightarrow{\exp} \int_0^t X_\tau d\tau u^m \right) = \\ &= \left( \overrightarrow{\exp} \int_0^t X_\tau d\tau \right) (X_t u^1, \dots, X_t u^m). \end{aligned}$$

Поэтому, в силу единственности потока  $\overrightarrow{\exp} \int_0^t X_\tau d\tau$  (предложение 2.2),

$$\overrightarrow{\exp} \int_0^t X_\tau d\tau = \overrightarrow{\exp} \int_0^t \nabla_{X_\tau} d\tau.$$

Лемма доказана

Л е м м а 4.3. Пусть  $H_t$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , — произвольное локально интегрируемое семейство эндоморфизмов свободного модуля  $C^\infty(M; \mathbb{R}^m)$ . Тогда существует поток

$$\overrightarrow{\exp} \int_0^t H_\tau d\tau.$$

Доказательство. По определению, поток  $\overrightarrow{\exp} \int_0^t H_\tau d\tau$  (если он существует), является решением уравнения

$$\frac{dP_t}{dt} = P_t \circ H_t, \quad P_0 = \text{id}. \quad (4.3)$$

Пусть  $x \in M$  — некоторая точка  $M$ , тогда применяя мультипликативный функционал  $x: C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$  к обеим частям (4.3), получаем:

$$\begin{aligned} x \circ \frac{d}{dt} P_t &= x \circ P_t \circ H_t = \frac{d}{dt} x P_t = x P_t \cdot x H_t, \\ x H_t &= (x h_{\beta, t}^\alpha) = (h_{\beta, t}^\alpha(x)), \end{aligned}$$

то есть

$$\frac{d}{dt} xP_t = xP_t \cdot xH_t. \quad (4.4)$$

Уравнение (4.4) — это обыкновенное матричное дифференциальное уравнение (зависящее от параметра  $x \in M$ ). Следовательно, оно имеет единственное решение, гладко зависящее от  $x \in M$ , представимое в виде равномерно и абсолютно сходящегося матричного ряда

$$\begin{aligned} xP_t &= \exp \int_0^t xH_\tau d\tau = I + \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t d\tau_1 \dots \int_0^{\tau_{k-1}} d\tau_k (xH_{\tau_1}) \dots (xH_{\tau_k}) = \\ &= I + x \circ \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t d\tau_1 \dots \int_0^{\tau_{k-1}} d\tau_k (H_{\tau_1} \circ \dots \circ H_{\tau_k}). \end{aligned}$$

При этом

$$\exp \int_0^t xH_\tau d\tau \in \text{Aut } C^\infty(M; \mathbb{R}^m).$$

Следовательно, существует (и единственно, в силу предложения 2.2 этого параграфа), решение уравнения (4.3) и имеет место формула

$$x \circ \exp \int_0^t H_\tau d\tau = \exp \int_0^t xH_\tau d\tau. \quad (4.5)$$

Лемма доказана.

Простая проверка показывает, что если  $D \in \text{Der } \mathfrak{F}$ ,  $H \in \text{End } \mathfrak{F}$ , то  $[D, H] \in \text{End } \mathfrak{F}$ .

Имеет место

**Теорема 4.1.** Пусть  $C^\infty(M; \mathbb{R}^m)$  — свободный модуль ранга  $m$ ,  $D_{X_t}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , — локально интегрируемое семейство дифференцирований этого модуля,  $\theta(D_{X_t}) = X_t$ , такое, что существует поток

$$\exp \int_0^t X_\tau d\tau.$$

Тогда существует поток  $\exp \int_0^t D_{X_\tau} d\tau$ . Если  $D_{X_t} = \nabla_{X_t} + H_t$ ,

$H_t \in \text{End } C^\infty(M; \mathbb{R}^m)$ , то имеет место равенство

$$\exp \int_0^t D_{X_\tau} d\tau = \exp \int_0^t \exp \int_0^\tau \text{ad } \nabla_{X_\theta} d\theta H_\tau d\tau \circ \exp \int_0^t \nabla_{X_\tau} d\tau. \quad (4.6)$$

**Доказательство.** Поскольку семейство  $D_{X_t}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , представлено в виде  $D_{X_t} = \nabla_{X_t} + H_t$ , где  $\nabla_{X_t}$  — каноническое кова-

риантное дифференцирование свободного модуля вдоль  $X_t, H_t$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , — локально интегрируемое семейство эндоморфизмов  $C^\infty(M; \mathbb{R}^m)$ , то мы можем воспользоваться формулой вариаций (3.1) для доказательства существования потока

$$\overrightarrow{\exp} \int_0^t D_{X_\tau} d\tau = \overrightarrow{\exp} \int_0^t (\nabla_{X_\tau} + H_\tau) d\tau.$$

А именно, формально

$$\overrightarrow{\exp} \int_0^t D_{X_\tau} d\tau = \overrightarrow{\exp} \int_0^t \overrightarrow{\exp} \int_0^\tau \text{ad } \nabla_{X_\theta} d\theta H_\tau d\tau \overrightarrow{\exp} \int_0^t \nabla_{X_\tau} d\tau,$$

и потоки,  $\overrightarrow{\exp} \int_0^t D_{X_\tau} d\tau$  и  $\overrightarrow{\exp} \int_0^t \overrightarrow{\exp} \int_0^\tau \text{ad } \nabla_{X_\theta} d\theta H_\tau d\tau$ , ввиду

существования (см. лемме 4.2) потока  $\overrightarrow{\exp} \int_0^t \nabla_{X_\tau} d\tau$ , существуют (или не существуют) одновременно. Докажем, что существует поток

$$\overrightarrow{\exp} \int_0^t \overrightarrow{\exp} \int_0^\tau \text{ad } \nabla_{X_\theta} d\theta H_\tau d\tau.$$

В самом деле, в силу (3.2),

$$\overrightarrow{\exp} \int_0^t \overrightarrow{\exp} \int_0^\tau \text{ad } \nabla_X d\theta H_\tau d\tau = \overrightarrow{\exp} \int_0^t \text{Ad } \overrightarrow{\exp} \int_0^\tau \nabla_{X_\theta} d\theta H_\tau d\tau,$$

и потоки в левой и правой части этого равенства существуют (или не существуют) одновременно. Поскольку существует поток

$$\overrightarrow{\exp} \int_0^t \nabla_{X_\theta} d\theta,$$

то существует и поток

$$\left( \overrightarrow{\exp} \int_0^t \nabla_{X_\theta} d\theta \right)^{-1} = \overleftarrow{\exp} \int_0^t -\nabla_{X_\theta} d\theta.$$

Так как

$$\overrightarrow{\exp} \int_0^t \nabla_{X_\tau} d\tau = \left( \overrightarrow{\exp} \int_0^t X_\tau d\tau \right),$$

то, по лемме 4.1,

$$\text{Ad } \overrightarrow{\exp} \int_0^t \nabla_{X_\tau} d\tau H_t = \overrightarrow{\exp} \int_0^t X_\tau d\tau H_t.$$

Это значит, что существует и локально интегрируемо семейство эндоморфизмов

$$\text{Ad} \exp \int_0^t \nabla_{X_\tau} d\tau H_t = \overrightarrow{\exp} \int_0^t \text{ad} \nabla_{X_\tau} d\tau H_t$$

модуля  $C^\infty(M; \mathbb{R}^m)$ . По лемме 4.3, тогда существует

$$\overrightarrow{\exp} \int_0^t \overrightarrow{\exp} \int_0^\tau \text{ad} \nabla_{X_\theta} d\theta H_\tau d\tau.$$

Следовательно, в силу предложения 3.1, существует поток

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\exp} \int_0^t D_{X_\tau} d\tau &= \overrightarrow{\exp} \int_0^t (\nabla_{X_\tau} + H_\tau) d\tau = \\ &= \overrightarrow{\exp} \int_0^t \overrightarrow{\exp} \int_0^\tau \text{ad} \nabla_{X_\theta} d\theta H_\tau d\tau \circ \overrightarrow{\exp} \int_0^t \nabla_{X_\tau} d\tau. \end{aligned}$$

**3.4.2. Теорема об устойчивости конечно порожденного модуля.** Пусть  $\mathfrak{F}$  — конечно порожденный подмодуль свободного модуля  $C^\infty(M; \mathbb{R}^m)$ ,  $D$  — некоторое дифференцирование свободного модуля  $C^\infty(M; \mathbb{R}^m)$ . Будем говорить, что дифференцирование  $D$  сохраняет модуль  $\mathfrak{F}$ , если

$$Du \in \mathfrak{F} \quad \forall u \in \mathfrak{F}.$$

Пусть теперь  $D_t, t \in \mathbb{R}$ , — локально интегрируемое семейство дифференцирований свободного модуля  $C^\infty(M; \mathbb{R}^m)$ . Естественно назвать это семейство сохраняющим модуль  $\mathfrak{F}$ , если  $D_t u \in \mathfrak{F} \quad \forall u \in \mathfrak{F}$  и для почти всех  $t \in \mathbb{R}$ . Однако, отсюда, вообще говоря, не следует, что для каждой системы образующих  $u_1, \dots, u_l$  этого модуля можно указать такие локально интегрируемые семейства  $b_{\alpha, t}^\beta, t \in \mathbb{R}$ , что

$$D_t u_\beta = \sum_{\alpha=1}^l b_{\beta, t}^\alpha u_\alpha, \quad \beta=1, \dots, l. \quad (4.7)$$

Поэтому мы будем говорить, что семейство дифференцирований  $D_t, t \in \mathbb{R}$ , сохраняет модуль  $\mathfrak{F}$ , если для каждой системы образующих  $u_1, \dots, u_l$  модуля  $\mathfrak{F}$  существуют такие локально интегрируемые семейства  $b_{\beta, t}^\alpha, t \in \mathbb{R}$  элементов  $C^\infty(M)$ , что выполнено (4.7). Ясно, что это условие достаточно проверить хотя бы для одной системы образующих  $u_1, \dots, u_l$ .

**Теорема 4.2.** Пусть  $D_t, t \in \mathbb{R}$ , — локально интегрируемое семейство дифференцирований свободного модуля  $C^\infty(M; \mathbb{R}^m)$  такое, что  $\theta(D_t) = X_t$ , и существует поток

$$\overrightarrow{\exp} \int_0^t X_\tau d\tau.$$

Предположим, что семейство  $D_t, t \in \mathbb{R}$ , сохраняет конечно порожденный подмодуль  $\mathfrak{F} \subset C^\infty(M; \mathbb{R}^m)$ . Тогда существуют потоки

$$\overrightarrow{\exp} \int_0^t D_\tau d\tau, \quad \overleftarrow{\exp} \int_0^t -D_\tau d\tau,$$

сохраняющие модуль  $\mathfrak{F}$ , то есть для  $\forall u \in \mathfrak{F}, t \in \mathbb{R}$

$$\overrightarrow{\exp} \int_0^t D_\tau d\tau u \in \mathfrak{F}, \quad \overleftarrow{\exp} \int_0^t -D_\tau d\tau u \in \mathfrak{F}.$$

В частности, если  $X$  — полное векторное поле на многообразии  $M$  и дифференцирование  $D_X$  модуля  $\mathfrak{F}$  с  $\theta(D_X^u) = X$  сохраняет подмодуль  $\mathfrak{F}$ :  $D_X u \in \mathfrak{F} \forall u \in \mathfrak{F}$ , то поток

$$e^{tD} = \overrightarrow{\exp} \int_0^t D d\tau = \overleftarrow{\exp} \int_0^t D d\tau$$

сохраняет этот подмодуль:  $\forall t \in \mathbb{R}, u \in \mathfrak{F}$

$$e^{tD} u \in \mathfrak{F}.$$

Эта теорема называется *теоремой об устойчивости конечно порожденного модуля*.

Доказательство. Докажем, что уравнение

$$\frac{du_t}{dt} = -D_t u_t, \quad u_t|_{t=0} = u_0 \quad (4.8)$$

при  $u_0 \in \mathfrak{F}$  имеет решение  $u_t \in \mathfrak{F} \forall t \in \mathbb{R}$ . В самом деле, для любого  $a = (a^1, \dots, a^l) \in C^\infty(M, \mathbb{R}^l)$  определим семейство

$$u_t = \sum_{\alpha=1}^l (P_t a)^\alpha u_\alpha \in \mathfrak{F},$$

где  $P_t$  — поток в свободном модуле  $C(M; \mathbb{R}^l)$ , удовлетворяющий уравнению

$$\frac{dP_t}{dt} = -(\nabla_X + B_t) \circ P_t, \quad P_t|_{t=0} = \text{id},$$

$\nabla$  — стандартная связность на  $C^\infty(M; \mathbb{R}^l)$ ,  $u_1, \dots, u_l$  — система образующих  $\mathfrak{F}$  и  $B_t$  — соответствующая этому семейству  $u_1, \dots, u_l$  матрица  $B_t = (b_{\beta,i}^\alpha)$  из определения сохранения семейством  $D_t, t \in \mathbb{R}$ , модуля  $\mathfrak{F}$  (см. (4.7)):

$$D_t u_\alpha = \sum_{k=1}^l b_{\alpha,i}^k u_k.$$

Тогда непосредственно проверяется, что  $\frac{du_t}{dt} = -D_t u_t$ .

Поскольку  $a^j$  произвольны, а  $u_1, \dots, u_l$  — семейство образующих модуля  $\mathfrak{F}$ , то  $a^j$  можно взять такими, что

$$u_i|_{t=0} = \sum_{\alpha=1}^l a^\alpha u_\alpha = u_0$$

для  $\forall u_0 \in \mathfrak{F}$ .

Поскольку уравнение (4.8), в силу следствия предложения 2.2 §3, имеет единственное решение и этому уравнению удовлетворяет

$$v_t = \exp \int_0^t \overleftarrow{D}_\tau d\tau u_0,$$

то получаем отсюда, что  $v_t \equiv u_t \in \mathfrak{F} \quad \forall t \in \mathbb{R}$ .

Докажем теперь, что для  $\forall t \in \mathbb{R}$ ,  $u_0 \in \mathfrak{F}$

$$\bar{u}_t = \exp \int_0^t \overrightarrow{D}_\tau d\tau u_0 \in \mathfrak{F}.$$

Для этого достаточно проверить справедливость следующего утверждения:

для любых  $u_0 \in \mathfrak{F}$ ,  $\hat{t} \in \mathbb{R}$  существует элемент  $\hat{u} \in \mathfrak{F}$  такой, что

$$\exp \int_0^{\hat{t}} \overleftarrow{D}_\tau d\tau \hat{u} = u_0.$$

В самом деле, если это так, то в силу соотношения

$$\hat{u} = \exp \int_0^{\hat{t}} \overrightarrow{D}_\tau d\tau u_0,$$

мы получаем, что  $\bar{u}_{\hat{t}} = \exp \int_0^{\hat{t}} \overrightarrow{D}_\tau d\tau u_0 = \hat{u} \in \mathfrak{F}$  вследствие единственности решения.

Докажем сформулированное утверждение. Для этого положим  $a = P_{\hat{t}}^{-1} c$ ,  $c \in C^\infty(M, \mathbb{R}^l)$ , где  $P_t$  — поток в  $C^\infty(M, \mathbb{R}^l)$ , определенный выше. Тогда семейство  $w_t = \sum_{\alpha=1}^l (P_t a)^\alpha u_\alpha$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{dw_t}{dt} = -D_t w_t, \quad w_t|_{t=0} = \sum_{\alpha=1}^l a^\alpha u_\alpha,$$

и при  $t = \hat{t}$

$$w_{\hat{t}} = \sum_{\alpha=1}^l (P_{\hat{t}} a)^\alpha u_\alpha = \sum_{\alpha=1}^l (P_{\hat{t}} P_{\hat{t}}^{-1} c)^\alpha u_\alpha = \sum_{\alpha=1}^l c^\alpha u_\alpha.$$

Следовательно, для  $u_0 = \sum c^\alpha u_\alpha$  и любого  $\hat{t} \in \mathbb{R}$ ,  $w_{\hat{t}} = u_0$ .

**3.4.3. Теорема существования для конечно порожденного проективного модуля.** Пусть  $\mathfrak{F}$  — конечно порожденный проективный  $C^\infty(M)$ -модуль, вложенный как прямое слагаемое в свободный модуль  $C^\infty(M; \mathbb{R}^m)$ : существует подмодуль  $\mathfrak{G} \subset C^\infty(M; \mathbb{R}^m)$  такой, что  $C^\infty(M; \mathbb{R}^m) = \mathfrak{F} \oplus \mathfrak{G}$ . Пусть далее  $D_t, t \in \mathbb{R}$ , — локально интегрируемое семейство дифференцирований модуля  $\mathfrak{F}$ ,  $\theta(D_t) = X_t$ . Это семейство продолжается до семейства  $\tilde{D}_t, t \in \mathbb{R}$ , дифференцирований модуля  $C^\infty(M; \mathbb{R}^m)$  по формуле

$$\tilde{D}_t = D_t \oplus \text{pr}_{\mathfrak{G}} \nabla_{X_t},$$

где  $\text{pr}_{\mathfrak{G}}: C^\infty(M; \mathbb{R}^m) \rightarrow \mathfrak{G}$  — проектор  $C^\infty(M; \mathbb{R}^m)$  на  $\mathfrak{G}$ ,  $\nabla$  — каноническая связность на  $C^\infty(M; \mathbb{R}^m)$ .

Легко видеть, что семейство  $\tilde{D}_t, t \in \mathbb{R}$ , сохраняет модуль  $\mathfrak{F}$  и следовательно, из теоремы 4.2 немедленно получается следующая теорема существования потока для произвольного конечно порожденного проективного модуля  $\mathfrak{F}$ :

**Теорема 4.3.** Пусть  $D_t, t \in \mathbb{R}$ , — локально интегрируемое семейство дифференцирований конечно порожденного проективного  $C^\infty(M)$ -модуля  $\mathfrak{F}$  с  $\theta(D_t) = X_t$  такое, что существует поток

$$\overrightarrow{\exp} \int_0^t X_\tau d\tau$$

Тогда существует поток

$$\overrightarrow{\exp} \int_0^t D_\tau d\tau$$

на  $\mathfrak{F}$ .

Таким образом, мы видим, что произвольный поток  $\overrightarrow{\exp} \int_0^t X_\tau d\tau$  на многообразии  $M$  может быть *поднят* до потока на произвольном конечно порожденном проективном  $C^\infty(M)$ -модуле  $\mathfrak{F}$  и, следовательно, до потока на соответствующем векторном расслоении.

**3.5. Некоторые приложения — теорема Стефана—Суссмана об орбитах и интегрируемость распределений.** В этом пункте мы применим развитую выше технику для доказательства теоремы Стефана—Суссмана [11], [12] и покажем, как последняя может быть использована для получения условий полной интегрируемости гладких распределений на многообразии  $M$ .

Напомним, см. § 1, что диффеоморфизм  $f: M \rightarrow M$  порождает автоморфизм  $p = f^*: C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$  алгебры  $C^\infty(M)$  по формуле  $f^*b = b \circ f \quad \forall b \in C^\infty(M)$ . Если  $x \in M$ , то  $x$  можно отождествить с мультипликативным функционалом на  $C^\infty(M)$ , и при этом

отождествлении  $x \circ p = f(x)$ ; в этих обозначениях дифференциал  $Tf: TM \rightarrow TM$  отображения  $f$  действует на касательные векторы по формуле

$$T_x f(X_x) = f(x) \circ \text{Ad } f^{*-1} X = x \circ p \circ \text{Ad } p^{-1} X \quad \forall X \in \text{Der } M.$$

Пусть  $\mathfrak{X} \subset \text{Der } M$  — произвольное семейство полных векторных полей на многообразии  $M$ . Рассмотрим подгруппу  $\mathfrak{P}$  группы автоморфизмов  $\text{Iso } M$  алгебры  $C^\infty(M)$ , порожденную элементами

$$p = e^{t_1 X_1} \circ \dots \circ e^{t_k X_k}, \quad t_j \in \mathbb{R}, \quad X_j \in \mathfrak{X}, \quad k \in \mathbb{N},$$

где  $e^{tX} = \exp \int_0^t X d\tau = \exp \int_0^t X d\tau$ . Пусть, далее,  $\mathfrak{D}$  — семейство векторных полей  $\mathfrak{D} = \{\text{Ad } p X; p \in \mathfrak{P}, X \in \mathfrak{X}\}$  и  $\Pi_x = \text{span} \{x \circ X; X \in \mathfrak{D}\}$ .

Назовем *орбитой*  $\mathfrak{D}_x$  семейства  $\mathfrak{X}$  векторных полей, проходящей через точку  $x$ , множество

$$\mathfrak{D}_x = \{x \circ p; p \in \mathfrak{P}\} = \{f(x); p = [* \in \mathfrak{P}] \subset M.$$

Определим на  $\mathfrak{D}_x$  топологию, как *финальную топологию*, порожденную семейством отображений

$$(t_1, \dots, t_k) \mapsto x \circ e^{t_1 X_1} \circ \dots \circ e^{t_k X_k}: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathfrak{D}_x, \\ X_j \in \mathfrak{X}, \quad t = (t_1, \dots, t_k) \in \mathbb{R}^k, \quad k \in \mathbb{N},$$

то есть топология  $\mathfrak{D}_x$  — это *сильнейшая* топология, в которой непрерывны все такие отображения.

**Теорема 5.1.** Пусть  $\mathfrak{X}$  — семейство полных векторных полей на многообразии  $M$ . Тогда для любого  $x_0 \in M$  орбита  $\mathfrak{D}_{x_0}$  семейства  $\mathfrak{X}$ , проходящая через точку  $x_0$ , является (иммерсированным) подмногообразием  $M$ . При этом, касательное пространство к орбите  $\mathfrak{D}_{x_0}$  в точке  $x \in \mathfrak{D}_{x_0}$  совпадает с  $\Pi_x$ :

$$T_x \mathfrak{D}_{x_0} = \Pi_x \quad \forall x \in \mathfrak{D}_{x_0}.$$

**Доказательство.** Докажем сначала, что размерность плоскости  $\Pi_x$  постоянна на любой орбите  $\mathfrak{D}_{x_0}$ .

В самом деле, пусть  $x, y \in \mathfrak{D}_{x_0}$ ; докажем, что  $\dim \Pi_x = \dim \Pi_y$ . Так как  $x, y \in \mathfrak{D}_{x_0}$ , то существует  $p \in \mathfrak{P}$  такой, что  $y = x \circ p = f(x)$ . Следовательно, для  $\forall q \in \mathfrak{P}, X \in \mathfrak{X}$  имеем:

$$y \circ \text{Ad } q X = x \circ p \circ \text{Ad } q X = x \circ p \circ \text{Ad } p^{-1} \circ \text{Ad } p \circ \text{Ad } q X = \\ = x \circ p \circ \text{Ad } p^{-1} \text{Ad } (pq) X = f(x) \circ \text{Ad } (f^{-1})^* \text{Ad } pq X = \\ = T_x f(\text{Ad } pq X) \in T_x f \Pi_x,$$

откуда  $\Pi_y \subset T_x f \Pi_x$ . Аналогично,  $\Pi_x \subset T_y f^{-1} \Pi_y$ . Так как  $T_x f, T_y f^{-1}$  — изоморфизмы, то  $\dim \Pi_x = \dim \Pi_y$ .

В дальнейшем *размерностью орбиты*  $\mathfrak{D}_{x_0}$  мы будем называть размерность плоскости  $\Pi_{x_0}$ .

Пусть  $k$  — размерность орбиты  $\mathfrak{D}_{x_0}$  и  $x \in \mathfrak{D}_{x_0}$  — произвольная точка. Тогда можно найти  $k$  векторных полей

$$\text{Ad } p_1 X_1, \dots, \text{Ad } p_k X_k,$$

таких, что векторы

$$x \circ \text{Ad } p_1 X_1, \dots, x \circ \text{Ad } p_k X_k$$

линейно независимы и, следовательно, порождают плоскость  $\Pi_x$ . Определим отображение

$$\varphi_x: (t_1, \dots, t_k) \mapsto x \circ \text{Ad } p_1 e^{t_1 X_1} \circ \dots \circ \text{Ad } p_k e^{t_k X_k}: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathfrak{D}_{x_0}$$

Ранг дифференциала этого отображения в точке  $t = (t_1, \dots, t_k) = 0$  равен  $k$ , ибо

$$T_0 \varphi_x \frac{d}{dt_j} \Big|_0 = \frac{\partial}{\partial t_j} \varphi_x(0, \dots, 0) = x \circ \text{Ad } p_j X_j, \quad j = 1, \dots, k.$$

Следовательно, по теореме об обратной функции, существует такая окрестность  $V_x$  начала координат пространства  $\mathbb{R}^k$ , что  $S_x = \varphi_x(V_x)$  является  $k$ -мерным подмногообразием  $M$  и  $\varphi_x$  — диффеоморфизм  $V_x$  на  $S_x$ , так что, в частности, ранг  $\varphi_x$  равен  $k$  всюду на  $V_x$ . Заметим, что  $S_x \subset \mathfrak{D}_{x_0}$ . Пару  $(S_x, \varphi_x^{-1}|_{S_x})$  естественно взять в качестве *карты* на  $\mathfrak{D}_{x_0}$ . Если мы докажем *согласованность* соответствующего семейства карт  $\{(S_x, \varphi_x^{-1}|_{S_x}); x \in \mathfrak{D}_{x_0}\}$ , то есть дифференцируемость отображений

$$\varphi_x^{-1} \circ \varphi_y: V_y \rightarrow V_x, \quad \varphi_y^{-1} \circ \varphi_x: V_x \rightarrow V_y, \quad (5.1)$$

то  $\mathfrak{D}_{x_0}$  будет гладким подмногообразием  $M$ .

Назовем карты  $(S_x, \varphi_x^{-1}|_{S_x})$  и  $(S_y, \varphi_y^{-1}|_{S_y})$  *инцидентными*, если *центры*  $x$  и  $y$  этих карт таковы, что  $x \in S_y$  и  $y \in S_x$ . Достаточно проверить дифференцируемость отображений (5.1) для произвольной пары инцидентных карт.

Пусть карты  $(S_x, \varphi_x^{-1}|_{S_x})$  и  $(S_y, \varphi_y^{-1}|_{S_y})$  инцидентны. Тогда  $\exists t^0 \in V_x$ :  $y = \varphi_x(t_1^0, \dots, t_k^0) = x \circ \text{Ad } p_1 e^{t_1^0 X_1} \circ \dots \circ \text{Ad } p_k e^{t_k^0 X_k}$ . Рассмотрим отображение  $F_x: V_y \times V_x \rightarrow M$ , определенное формулой

$$\begin{aligned} F_x(s_1, \dots, s_k, t_1, \dots, t_k) = \\ = x \circ \text{Ad } p_1 e^{t_1 X_1} \circ \dots \circ \text{Ad } p_k e^{t_k X_k} \circ e^{-s_k Y_k} \circ \dots \circ e^{-s_1 Y_1} \circ \text{Ad } q_1^{-1}, \end{aligned}$$

где  $Y_j, q_j, j = 1, \dots, k$ , — определяющие элементы карты  $(S_y, \varphi_y^{-1}|_{S_y})$ :

$$\varphi_y(s_1, \dots, s_k) = y \circ \text{Ad } q_1 e^{s_1 Y_1} \circ \dots \circ \text{Ad } q_k e^{s_k Y_k}.$$

Поскольку  $F_x(0, t^0) = y$  и ранг отображения  $t \mapsto F(s, t)$  в точке  $(0, t^0)$  равен  $k$  (ибо равен  $k$  в точке  $t^0$  ранг отображения  $t \mapsto \varphi_x(t) = F_x(0, t)$ ), то ранг отображения

$$f_{x,y}: V_y \times V_x \rightarrow V_y, \quad f_{xy}(s, t) = \varphi_y^{-1} \circ F_x(s, t)$$

также равен  $k$  в точке  $(0, t^0)$ . Поскольку  $f_{x,y}(0, t^0) = 0$ , то по теореме о неявной функции, существуют окрестности нуля в  $\mathbf{R}^k$  и  $t^0 \in V_x$ , а также гладкая функция  $t = t(s)$  такие, что

$$f_{xy}(s, t(s)) = 0$$

в окрестности нуля. Следовательно,  $s \mapsto t(s) = \varphi_x^{-1} \circ \varphi_y(s)$  — гладкое отображение. Аналогичным образом доказывается гладкость отображения  $t \mapsto \varphi_y^{-1} \circ \varphi_x(t)$ .

Для завершения доказательства теоремы остается заметить, что касательным пространством к  $\mathcal{D}_{x_0}$  в точке  $x \in \mathcal{D}_{x_0}$  является плоскость  $\Pi_x$ . В самом деле, пусть  $y \in \mathcal{D}_{x_0}$  — произвольная точка  $\mathcal{D}_{x_0}$  и  $(S_x, \varphi_x|_{S_x})$  карта, такая, что

$$y = \varphi_x(t_1, \dots, t_k).$$

Тогда для  $t = (t_1, \dots, t_k)$  имеем:

$$\begin{aligned} T_y \varphi_x \left( \frac{\partial}{\partial t_j} \right) &= t_0 \frac{\partial}{\partial t_j} x \circ \text{Ad } p_1 e^{t_1 X_{10}} \dots \circ \text{Ad } p_k e^{t_k X_k} = \\ &= x \circ \text{Ad } p_1 e^{t_1 X_{10}} \dots \circ \text{Ad } p_j e^{t_j X_j} X_j \circ \text{Ad } p_{j+1} e^{t_{j+1} X_{j+10}} \dots \circ \text{Ad } p_k e^{t_k X_k} = \\ &= x \circ \text{Ad } p_1 e^{t_1 X_{10}} \dots \circ \text{Ad } p_k e^{t_k X_k} e^{-t_k X_k} \text{Ad } p_k^{-1} \dots \circ e^{-t_{j+1} X_{j+10}} \text{Ad } p_{j+1}^{-1} \\ &\quad X_j \text{Ad } p_{j+1} e^{t_{j+1} X_{j+10}} \dots \circ \text{Ad } p_k e^{t_k X_k} = x \circ \text{Ad } p_1 e^{t_1 X_{10}} \dots \circ \text{Ad } p_k e^{t_k X_k} \\ &\quad \text{Ad } (e^{-t_{j+1} X_{j+10}} \text{Ad } p_{j+1}^{-1} \dots \circ \text{Ad } p_k^{-1}) = \\ &= \varphi_x(t_1, \dots, t_k) \circ \text{Ad } q X = y \circ \text{Ad } q X \in \Pi_y, \end{aligned}$$

где  $q = e^{-t_{j+1} X_{j+10}} \text{Ad } p_{j+1}^{-1} \dots \circ e^{-t_k X_k} \text{Ad } p_k^{-1}$ . Следовательно,

$$T_y \mathcal{D}_{x_0} = \Pi_y \quad \forall y \in \mathcal{D}_{x_0}.$$

Теорема доказана,

**Замечание.** Если  $M$  — вещественно аналитическое многообразие и  $\mathcal{X}$  — семейство вещественно аналитических векторных полей на  $M$ , то орбита  $\mathcal{D}_x$ , проходящая через произвольную точку  $x_0 \in M$  является вещественно аналитическим подмногообразием.

Назовем *приведенной орбитой*, или *t-орбитой*  $\mathcal{D}_x(t)$  семейства  $\mathcal{X} \subset \text{Der } M$ , проходящей через точку  $x$ , множество

$$\mathcal{D}_x(t) = \{x \circ e^{t_1 X_{10}} \dots \circ e^{t_k X_k}; t_j \in \mathbf{R}, \sum t_j = t, X_j \in \mathcal{X}, k \in \mathbf{N}\}.$$

Пусть

$$\mathfrak{P}_t = \{e^{t_1 X_{10}} \dots \circ e^{t_k X_k}; X_j \in \mathcal{X}, t_j \in \mathbf{R}, \sum t_j = t, k \in \mathbf{N}\},$$

$$\Pi'_x = \{x \circ Y; Y \in \mathfrak{D}_t\},$$

где  $\mathfrak{D}_t = \{\text{Ad } p(X - Y); p \in \mathfrak{P}_t, X, Y \in \mathcal{X}\} \subset \text{Der } M$ ,

Небольшое изменение рассуждений, использовавшихся при

доказательстве теоремы 5.1, приводит к следующему утверждению.

**Предложение 5.1.** Всякая  $t$ -орбита  $\mathfrak{D}_{x_0}(t)$  семейства  $\mathfrak{X} \subset \text{Deg } M$  полных векторных полей на многообразии  $M$  является иммерсированным подмногообразием  $M$ . При этом, касательное пространство  $T_{y\mathfrak{D}_{x_0}(t)}$  к  $\mathfrak{D}_{x_0}$  совпадает с  $\Pi'_y$ . Более того,  $\mathfrak{D}_{x_0}(t) \subset \mathfrak{D}_{x_0}$  и коразмерность  $\mathfrak{D}_{x_0}(t)$  в  $\mathfrak{D}_{x_0}$  равна нулю или единице. При любых  $t', t'' \in \mathbb{R}$  орбиты  $\mathfrak{D}_{x_0}(t')$  и  $\mathfrak{D}_{x_0}(t'')$  диффеоморфны.

Теорема 5.1 часто используется при изучении вопросов интегрируемости гладких распределений на многообразии  $M$ .

Напомним, что *распределением*  $\Delta$  на многообразии  $M$  называется отображение, сопоставляющее точке  $x \in M$  линейное подпространство  $\Delta(x) \subset T_x M$ . Всякий набор  $\mathfrak{X}$  векторных полей на  $M$  естественным образом порождает распределение  $\Delta$  на  $M$ , а именно, распределение

$$\Delta(x) = \text{span}\{x \circ X; X \in \mathfrak{X}\}$$

Заметим, что далеко не все распределения возникают таким способом, например, при  $M = \mathbb{R}$  распределение  $\Delta$ ,  $\Delta(x) = \mathbb{R}$  при  $x = 0$  и  $\Delta(x) = 0$  при  $x \neq 0$ , не порождается никаким семейством гладких векторных полей. Те распределения, которые порождаются некоторым набором  $\mathfrak{X}$  векторных полей называются *гладкими* распределениями, а само семейство  $\mathfrak{X}$  — *семейством образующих* этого распределения. Существует для данного гладкого распределения  $\Delta$  на  $M$  максимальное множество  $\mathcal{M}(\Delta)$  образующих этого распределения. Это множество  $\mathcal{M}(\Delta)$  состоит из всех векторных полей  $X \in \text{Deg } M$ , таких, что  $x \circ X \in \Delta(x) \forall x \in X$  (в этом случае говорят, что векторное поле  $X$  принадлежит распределению  $\Delta$  и пишут  $X \in \Delta$ ). Ясно, что  $\mathcal{M}(\Delta)$  — это  $C^\infty(M)$ -подмодуль  $C^\infty(M)$ -модуля  $\text{Deg } M$  и по распределению  $\Delta$  этот модуль восстанавливается однозначно. На этом основании гладкие распределения  $\Delta$  часто отождествляют с  $\mathcal{M}(\Delta)$ : то есть гладким распределением на многообразии  $M$  называется такой  $C^\infty(M)$ -подмодуль  $\mathfrak{X} \subset \text{Deg } M$ , что из условия  $x \circ X \in \mathfrak{X}_x = \{x \circ Y; Y \in \mathfrak{X}\}$  следует, что  $X \in \mathfrak{X}$ . Последнее условие называется также условием *полноты* модуля  $\mathfrak{X}$ .

Всюду далее мы рассматриваем только гладкие распределения.

Распределение  $\Delta(x)$ ,  $x \in M$ , называется *инволютивным*, если из условия  $X, Y \in \Delta$  следует, что  $[X, Y] \in \Delta$ .

Распределение  $\Delta(x)$ ,  $x \in M$  называется *регулярным*, если

$$\dim \Delta(x) \equiv \text{const}.$$

Регулярные распределения естественным образом отождествляются с подрасслоениями касательного расслоения  $TM$  многообразия  $M$ .

Связное гладкое подмногообразие  $N \subset M$  называется *интегральным многообразием* распределения  $\Delta(x)$ ,  $x \in M$ , если для  $\forall x \in N$   $T_x N = \Delta(x)$ . Распределение  $\Delta$  на  $M$  называется *вполне интегрируемым*, если через каждую точку  $x \in M$  проходит интегральное многообразие этого распределения.

Очевидным необходимым условием полной интегрируемости распределения  $\Delta$  является его инволютивность. В общем случае, из инволютивности гладкого распределения  $\Delta$  на  $M$  не следует его интегрируемость. Однако, имеет место

**Предложение 5.2.** Если  $\Delta(x)$ ,  $x \in M$ , — гладкое распределение на  $M$  такое, что оно инволютивно и модуль

$$\mathcal{M}(\Delta) = \{X \in \text{Der } M \mid x \circ X \in \Delta(x) \quad \forall x \in M\}$$

конечно порожден, то  $\Delta(x)$ ,  $x \in M$ , вполне интегрируемо.

**Доказательство.** Из максимальной  $\mathcal{M}(\Delta)$  и инволютивности  $\Delta$  вытекает *инволютивность*  $C^\infty(M)$ -модуля  $\mathcal{M}(\Delta)$ :

$$X, Y \in \mathcal{M}(\Delta) \Rightarrow [X, Y] \in \mathcal{M}(\Delta).$$

Поэтому для любого  $X \in \mathcal{M}(\Delta)$  оператор  $\text{ad } X$  сохраняет конечно порождённый модуль  $\mathcal{M}(\Delta)$ . Следовательно, по теореме 4.2 об устойчивости конечно порождённого модуля, имеет место включение

$$e^{t \text{ad } X} Y \in \mathcal{M}(\Delta) \quad \forall t \in \mathbb{R}, X, Y \in \mathcal{M}(\Delta).$$

В частности,

$$T_x f(\Delta(x)) = \Delta(f(x)) \quad \forall x \in M, t \in \mathbb{R}, \text{ где } f^* = e^{tX}.$$

Отсюда следует, что для любых  $X, X_1, \dots, X_k \in \mathcal{M}(\Delta)$ ,  $t_j \in \mathbb{R}$ ,

$$e^{t_1 \text{ad } X_1} \circ \dots \circ e^{t_k \text{ad } X_k} X \in \mathcal{M}(\Delta).$$

Пусть  $\mathfrak{D}_x$  — орбита семейства  $\mathcal{M}(\Delta)$ , проходящая через  $x \in M$ . Касательное пространство к  $\mathfrak{D}_x$  в точке  $y \in \mathfrak{D}_x$ , в силу теоремы 5.1 равно

$$T_y \mathfrak{D}_x = \text{span} \{y \circ \text{Ad } pX; X \in \mathcal{M}(\Delta), p \in \mathfrak{P}\} = \Pi_y,$$

где  $\mathfrak{P} = \{e^{t_1 X_1} \circ \dots \circ e^{t_k X_k}; X_j \in \mathcal{X}\}$ . По доказанному,  $\forall p = e^{t_1 X_1} \circ \dots \circ e^{t_k X_k} \in \mathfrak{P}$

$$\text{Ad } pX = e^{t_1 \text{ad } X_1} \circ \dots \circ e^{t_k \text{ad } X_k} X = \text{Ad} (e^{t_1 X_1} \circ \dots \circ e^{t_k X_k}) X \in \mathcal{M}(\Delta).$$

Поэтому

$$\Pi_y \subset \Delta(y) = \{y \circ X; X \in \mathcal{M}(\Delta)\},$$

откуда следует, что  $P_y = \Delta_y$ . Поэтому, в силу того, что орбита — гладкое подмногообразие  $M$ , мы получаем, что распределение  $\Delta$  вполне интегрируемо и его интегральными многообразиями являются орбиты семейства  $\mathcal{M}(\Delta)$  векторных полей.

Предложение доказано.

**З а м е ч а н и е.** Заключение предложения 5.2 справедливо также в случае, когда  $\mathcal{M}(\Delta)$  — локально конечно порождённый модуль, то есть когда конечно порождён  $C^\infty(U)$ -модуль

$$\mathcal{M}(\Delta)|_U = \{X|_U; X \in \mathcal{M}(\Delta)\},$$

где  $U$  — некоторая окрестность произвольной точки  $x \in M$ .

В качестве прямых следствий предложения 5.2 получаются следующие классические результаты:

**Предложение 5.3** (Теорема Фробениуса, см. [8]). Если  $\Delta$  — регулярное распределение на  $M$ , то оно вполне интегрируемо в том и только том случае, если оно инволютивно.

**Предложение 5.4** (Теорема Нагано, [10], [12]). Если  $\Delta$  — распределение на вещественно аналитическом многообразии  $M$ , порождённое семейством вещественно аналитических векторных полей, то оно вполне интегрируемо в том и только том случае, если оно инволютивно. При этом, его максимальные интегральные многообразия являются вещественно аналитическими подмногообразиями многообразия  $M$ .

**3.6. Дальнейшие приложения — поднятия диффеоморфизмов базы, плоские связности и параллельный перенос.** В этом пункте мы рассмотрим некоторые другие приложения основных результатов данного параграфа — формулы вариаций и теоремы существования.

**3.6.1. Поднятия диффеоморфизмов базы.** Пусть  $\mathfrak{F}$  — конечно порождённый проективный  $C^\infty(M)$ -модуль; в силу естественного изоморфизма  $\mathfrak{F} \cong I^0 \mathfrak{F}$  — см. § 2, мы можем всегда считать, что  $\mathfrak{F}$  реализован как  $C^\infty(M)$ -модуль гладких сечений соответствующего векторного расслоения.

Если  $N \subset M$  — гладкое подмногообразие  $M$ ,  $i_N: N \rightarrow M$  — вложение, то любой поток

$$p_t = \exp \int_0^t X_\tau d\tau = f_t^*$$

определяет полуизоморфизм над  $p_t$   $C^\infty(N)$ -модулей  $i_N^* \mathfrak{F}$  и  $i_t^* \mathfrak{F}$ , где  $i_t = f_t \circ i_N$ :

$$\sum a_\alpha i_N^* u_\alpha \mapsto \sum p_t a_\alpha i_t^* P_t u_\alpha, \quad u_\alpha \in C^\infty(N),$$

где  $P_t = \exp \int_0^t \nabla X_\tau d\tau$ ,  $\nabla$  — некоторая связность на  $\mathfrak{F}$ .

Простое обобщение этой процедуры позволяет доказать также, что если  $f, g: N \rightarrow M$  — гомотопные отображения, то  $C^\infty(N)$ -модули  $f^*\mathfrak{F}$  и  $g^*\mathfrak{F}$  изоморфны. В самом деле, пусть  $F: [0, 1] \times M \rightarrow M$  — гладкая гомотопия,  $F(0, x) = f(x)$ ,  $F(1, x) = g(x)$ ,  $x \in N$ . Чтобы не включать в рассмотрение многообразия с краем, будем считать, что  $F$  некоторым образом продолжено на всё многообразие  $\mathbb{R} \times N$ . Определим вложения  $i_\tau: N \rightarrow \mathbb{R} \times N$ ,  $\tau \in \mathbb{R}$ , формулой  $i_\tau(x) = (\tau, x)$ . Легко видеть, что  $i_0^* F^* \mathfrak{F} \approx f^* \mathfrak{F}$ ,  $i_1^* F^* \mathfrak{F} \approx g^* \mathfrak{F}$ .

В то же время поток  $\Phi_t: (\tau, x) \mapsto (\tau + t, x)$  в  $\mathbb{R} \times M$  определяет изоморфизмы

$$i_{t_1}^* F^* \mathfrak{F} \approx i_{t_2}^* F^* \mathfrak{F}, \quad \forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}.$$

Отсюда следует, между прочим, что произвольное векторное расслоение над стягиваемым многообразием тривиально.

**3.6.2. Плоские связности.** Пусть  $\nabla: \text{Der } M \rightarrow \text{Der } \mathfrak{F}$  — связность на конечно порожденном проективном  $C^\infty(M)$ -модуле  $\mathfrak{F}$ . Напомним, что  $\nabla$  — это инъективный гомоморфизм  $C^\infty(M)$ -модулей  $\text{Der } M$  и  $\text{Der } \mathfrak{F}$ :

$$\nabla ax = a \nabla x, \quad \nabla_{X_1 + X_2} = \nabla_{X_1} + \nabla_{X_2},$$

$$\forall a \in C^\infty(M), \quad X, X_1, X_2 \in \text{Der } M \text{ и } \theta \cdot \nabla = \text{id}.$$

Однако, этот гомоморфизм лишь модульный — вообще говоря

$$[\nabla_X, \nabla_Y] \neq \nabla_{[X, Y]}.$$

Отклонение  $\nabla$  от гомоморфизма  $\text{Der } M$  и  $\text{Der } \mathfrak{F}$  как алгебр Ли характеризует *кривизна*  $R_\nabla$  связности  $\nabla$  — билинейное отображение  $R_\nabla: \text{Der } M \times \text{Der } M \rightarrow \text{End } \mathfrak{F}$ , определенное формулой

$$R_\nabla(X, Y) = [\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X, Y]} \quad \forall X, Y \in \text{Der } M. \quad (6.1)$$

Связность  $\nabla$  называется *плоской*, если кривизна этой связности равна нулю:

$$R_\nabla = 0.$$

**Предложение 6.1.** Пусть  $\nabla$  — некоторая связность на конечно порожденном проективном  $C^\infty(M)$ -модуле  $\mathfrak{F}$ . Отображение

$$I: \overrightarrow{\exp} \int_0^t X_\tau d\tau \mapsto \overrightarrow{\exp} \int_0^t \nabla_{X_\tau} d\tau, \quad t \in \mathbb{R},$$

является гомоморфизмом группы потоков на многообразии  $M$  в группу потоков на модуле  $\mathfrak{F}$  в том и только том случае, если  $\nabla$  — плоская связность.

Доказательство основывается на следующем утверждении, которое представляет и самостоятельный интерес.

Л е м м а 6.1. Соотношения

$$\left. \begin{aligned} \overleftarrow{\exp} \int_0^t \text{ad } \nabla_{X_\tau} d\tau \nabla_Y &= \nabla_{\overleftarrow{\exp} \int_0^t \text{ad } X_\tau d\tau Y} \\ \overrightarrow{\exp} \int_0^t \text{ad } \nabla_{X_\tau} d\tau \nabla_Y &= \nabla_{\overrightarrow{\exp} \int_0^t \text{ad } X_\tau d\tau Y} \end{aligned} \right\} \quad (6.2)$$

справедливы в том и только том случае, если  $\nabla$  — плоская связность.

Доказательство. Предположим, что  $\nabla$  — плоская связность. Тогда

$$[\nabla_{X_t}, \nabla_Y] = \nabla_{[X_t, Y]}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \nabla_{\overrightarrow{\exp} \int_0^t \text{ad } X_\tau d\tau Y} &= \nabla_{\overrightarrow{\exp} \int_0^t \text{ad } X_\tau d\tau} [X_t, Y] = \nabla_{\overrightarrow{\exp} \int_0^t \text{ad } X_\tau d\tau} [\nabla_{X_t}, \nabla_Y]; \\ \frac{d}{dt} \overrightarrow{\exp} \int_0^t \text{ad } \nabla_{X_\tau} d\tau Y &= \overrightarrow{\exp} \int_0^t \text{ad } \nabla_{X_\tau} d\tau [\nabla_{X_t}, \nabla_Y], \end{aligned}$$

откуда вытекает, что потоки  $\overrightarrow{\exp} \int_0^t \text{ad } \nabla_{X_\tau} d\tau$ ,  $\nabla_{\overrightarrow{\exp} \int_0^t \text{ad } X_\tau d\tau}$  удовлетворяют одному и тому же уравнению. Поскольку при  $t=0$

$$\overrightarrow{\exp} \int_0^t \text{ad } \nabla_{X_\tau} d\tau \nabla_Y = \nabla_{\overrightarrow{\exp} \int_0^t \text{ad } X_\tau d\tau Y} = \nabla_Y,$$

то, в силу единственности, см. предложение 2.2,

$$\overrightarrow{\exp} \int_0^t \text{ad } \nabla_{X_\tau} d\tau Y = \nabla_{\overrightarrow{\exp} \int_0^t \text{ad } X_\tau d\tau Y}.$$

Обратно, если имеет место последнее соотношение, то, повторяя рассуждения в обратном порядке, получаем, что  $R_\nabla = 0$

Лемма доказана.

Используя эту лемму, при  $R_\nabla = 0$  имеем:

$$\begin{aligned}
I\left(\overrightarrow{\exp} \int_0^t X_\tau d\tau\right) \circ I\left(\overrightarrow{\exp} \int_0^t Y_\tau d\tau\right) &= \overrightarrow{\exp} \int_0^t \nabla_{X_\tau} d\tau \circ \overrightarrow{\exp} \int_0^t \nabla_{Y_\tau} d\tau = \\
&= \overrightarrow{\exp} \int_0^t \overleftarrow{\exp} \int_0^\tau -\operatorname{ad} \nabla_{Y_\theta} d\theta (\nabla_{X_\tau} + \nabla_{Y_\tau}) d\tau = \\
&= \overrightarrow{\exp} \int_0^t \nabla_{\overleftarrow{\exp} \int_0^\tau \operatorname{ad} Y_\theta d\theta (X_\tau + Y_\tau)} d\tau = I\left(\overrightarrow{\exp} \int_0^t X_\tau d\tau \circ \overrightarrow{\exp} \int_0^t Y_\tau d\tau\right).
\end{aligned}$$

Эта же выкладка, проведенная в обратном порядке, дает, в силу леммы 6.1, что  $R_\nabla = 0$ , если  $I$  — гомоморфизм.

Предложение доказано.

Пусть  $\nabla$  — плоская связность и  $p_t(s)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , — семейство потоков на  $M$ , гладко зависящее от параметра  $s \in \mathbb{R}$ :

$$\sqrt{p_t(s) = \overrightarrow{\exp} \int_0^t X_\tau(s) d\tau.}$$

Допустим, что при  $t=1$  поток  $p_t(s)$  не зависит от  $s \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial s} p_1(s) &= 0. \quad \text{Тогда, поскольку} \quad \frac{\partial}{\partial s} \overrightarrow{\exp} \int_0^t D_\tau(s) d\tau = \\
&= \overrightarrow{\exp} \int_0^t D_\tau(s) d\tau \circ \int_0^t \overrightarrow{\exp} \int_0^\tau \operatorname{ad} D_\theta(s) d\theta \frac{\partial D_\tau(s)}{\partial s} d\tau, \text{ имеем:}
\end{aligned}$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial s} p_1(s) = \overrightarrow{\exp} \int_0^1 X_\tau(s) d\tau \circ \int_0^1 \overrightarrow{\exp} \int_0^\tau \operatorname{ad} X_\theta(s) d\theta \frac{\partial X_\tau(s)}{\partial s} d\tau,$$

откуда, сокращая на поток  $\overrightarrow{\exp} \int_0^1 X_\tau(s) d\tau$ , получаем, что

$$\int_0^1 \overrightarrow{\exp} \int_0^\tau \operatorname{ad} X_\theta(s) d\theta \frac{\partial X_\tau(s)}{\partial s} d\tau = 0.$$

Следовательно, по лемме 6.1,

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial s} \overrightarrow{\exp} \int_0^1 \nabla_{X_\tau(s)} d\tau = \\
&= \overrightarrow{\exp} \int_0^1 \nabla_{X_\tau(s)} d\tau \circ \int_0^1 \overrightarrow{\exp} \int_0^\tau \operatorname{ad} \nabla_{X_\theta(s)} d\theta \frac{\partial}{\partial s} \nabla_{X_t(s)} dt = \\
&= \overrightarrow{\exp} \int_0^1 \nabla_{X_\tau(s)} d\tau \int_0^1 \overrightarrow{\exp} \int_0^\tau \operatorname{ad} \nabla_{X_\theta(s)} d\theta \nabla_{\frac{\partial}{\partial s} X_t(s)} dt =
\end{aligned}$$

$$= \exp \int_0^1 \nabla_{X_\tau(s)} d\tau \circ \nabla \xrightarrow{\exp \int_0^t \text{ad}_{X_\tau(s)} d\tau \frac{\partial}{\partial s} X_t(s) d\tau} = \exp \int_0^1 \nabla_{X_\tau} d\tau \nabla_0 = 0,$$

и этим доказано

Предложение 6.2. Если  $\nabla$  — плоская связность на конечно порожденном проективном  $C^\infty(M)$ -модуле  $\mathfrak{F}$ , то из условия

$$\frac{\partial}{\partial s} \exp \int_0^1 X_\tau(s) d\tau = 0$$

следует, что

$$\frac{\partial}{\partial s} \exp \int_0^1 \nabla_{X_\tau(s)} d\tau = 0.$$

**3.6.3. Параллельный перенос.** Пусть, как и выше,  $\mathfrak{F}$  — конечно порожденный проективный  $C^\infty(M)$ -модуль, реализованный как  $C^\infty(M)$ -модуль сечений; элементы  $\mathfrak{F}$  — это гладкие сечения  $u: x \mapsto u_x \in I_x \mathfrak{F}$ . В этом случае, по аналогии с обозначениями, принятыми ранее для алгебры  $C^\infty(M)$ , мы будем писать  $x \circ u$  для обозначения «значения» элемента  $u$  в точке  $x$ :

$$x \circ u = u_x = u|_x \mathfrak{F}.$$

Точно также мы будем приписывать точку слева и от операторов  $\mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{F}$ . Например, если  $D$  — дифференцирование модуля  $\mathfrak{F}$ , то  $(x \circ D)f = (Df)_x$  и  $x \circ (D(af)) = x \circ (aDf + (Xa)f) = a(x) \circ (Df)_x + (X_x a)f = a(x) \circ (Df)_x + (x \circ X)(a)f = a(x)(Df)_x + (Xa)(x)f = a(x)(x \circ Df) + (x \circ X)(a)f$ , что согласуется с принятыми ранее обозначениями (см. § 1).

Пусть  $p_t = \exp \int_0^t X_\tau d\tau$ ,  $q_t = \exp \int_0^t Y_\tau d\tau$  — потоки на  $M$  такие, что для некоторой точки  $x \in M$ ,  $x \circ p_t = x \circ q_t \quad \forall t \in \mathbb{R}$ . Оказывается, что тогда для любой связности  $\nabla$  на  $\mathfrak{F}$

$$x \circ \exp \int_0^t \nabla_{X_\tau} d\tau u = x \circ \exp \int_0^t \nabla_{Y_\tau} d\tau u \quad \forall u \in \mathfrak{F}. \quad (6.3)$$

Мы не будем давать здесь довольно громоздкого доказательства этого факта. Отметим только, что при доказательстве нужно воспользоваться следующей формулой композиции

$$x \circ \exp \int_0^{\mu_t(x)} D_\tau d\tau = x \circ \exp \int_0^t \lambda_\tau D_{\mu_\tau(x)} d\tau, \quad (6.4)$$

где  $\frac{d}{dt} \mu_t(x) = \lambda_t \left( x \circ \exp \int_0^{\mu_t(x)} \theta(D_\tau) d\tau \right)$ ,  $D_t \in \text{Der } \mathfrak{F}$ ,  $\lambda_t \in C^\infty(M)$ .

Эта формула доказывается с помощью формулы вариации и является естественным обобщением формулы замены переменной в хронологическом экспоненте (см. п. 3.3 этого параграфа) на случай, когда производится замена времени, гладко зависящая от точки многообразия  $M$ .

Формула (6.3) и наличие связности  $\nabla$  позволяет корректно определить понятие *параллельного переноса* семейства  $u_t$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ,

элементов модуля  $\mathfrak{F}$  вдоль кривой  $x_t = x \circ \exp \int_0^t X_\tau d\tau$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , на многообразии  $M$ . Именно, мы будем говорить, что  $u_t$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , параллельно вдоль кривой  $x_t$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , на  $M$ , если,

$$x \circ P_t \left( \frac{d}{dt} u_t + \nabla_{X_t} u_t \right) = 0,$$

где  $P_t = \exp \int_0^t \nabla_{X_\tau} d\tau$ .

#### § 4. Расслоения и модули с дополнительными структурами

В настоящем параграфе рассматриваются семейства дифференцирований конечно порожденных проективных модулей, в том числе связности специального вида. Описываются порожденные ими алгебры Ли и соответствующие группы потоков. Указана связь с традиционными геометрическими объектами: редукциями главных расслоений, группами голономии и т. д.

**4.1. Группы Ли.** В этом пункте приводятся в нужной нам форме используемые в дальнейшем сведения о группах Ли. Основные факты теории Ли формулируются в несколько большей общности, чем это принято в учебной литературе, однако все они являются простыми следствиями формулы вариаций и теоремы существования потоков, и доказательства мы опускаем.

Напомним, что *группой Ли* называется группа  $G$  с заданной на множестве  $G$  структурой гладкого конечномерного многообразия, причем так, что групповое умножение  $(x, y) \mapsto (xy)$  и взятие обратного элемента  $x \mapsto x^{-1}$  — гладкие отображения соответственно  $G \times G$  в  $G$  и  $G$  в себя.

Пусть  $G$  — группа Ли; для всякого  $x \in G$  через  $\lambda(x) : G \rightarrow G$  обозначим левый сдвиг  $\lambda(x) : y \mapsto xy$ ,  $\forall y \in G$ . Легко видеть, что  $\lambda(x)$  — диффеоморфизм многообразия  $G$ ; соответственно,  $\lambda(x)^*$  — автоморфизм алгебры  $C^\infty(G)$ . Кроме того,  $\lambda(xy)^* = \lambda(x)^* \lambda(y)^*$ , и соответствие  $x \mapsto \lambda(x)^*$  есть изоморфизм  $G$  на некоторую подгруппу  $\lambda(G)^*$  в группе автоморфизмов алгебры  $C^\infty(G)$ .

Рассмотрим теперь произвольное гладкое многообразие  $M$ . Напомним, что через  $\text{Iso } M$  обозначается группа автоморфизмов алгебры  $C^\infty(M)$ .

Множество  $\text{Iso } M$  лежит в пространстве Фреше  $\mathcal{L}(M)$  всех непрерывных линейных операторов в  $C^\infty(M)$ . Подгруппами Ли в  $\text{Iso } M$  называются подгруппы, которые обладают структурой (конечномерных) подмногообразий в  $\mathcal{L}(M)$ , причем групповая операция непрерывна в топологии этих подмногообразий. Описанные выше левые сдвиги дают каноническое представление произвольной группы Ли в виде подгруппы Ли соответствующей группы автоморфизмов.

Пусть  $\text{Der } M \supset \mathfrak{X}$  — произвольное множество векторных полей на  $M$ . Положим

$$\text{Exp } \mathfrak{X} = \left\{ \exp \int_0^t X_\tau d\tau \mid X_\tau \in \mathfrak{X}, t, \tau \in \mathbb{R} \right\} \subset \text{Iso } M.$$

Легко видеть, что  $\text{Exp } \mathfrak{X}$  всегда является линейно связной подгруппой в  $\text{Iso } M$  (но необязательно подгруппой Ли). С другой стороны, пусть  $\text{Iso } M \supset \mathfrak{P}$  — произвольное подмножество в  $\text{Iso } M$ . Положим

$$\text{Ln } \mathfrak{P} = \left\{ p_t^{-1} \circ \frac{d}{dt} p_t \mid p_t \text{ — поток, } p_t \in \mathfrak{P} \forall t \in \mathbb{R} \right\} \subset \text{Der } M.$$

**Теорема 1.1.** 1) Пусть  $G \subset \text{Iso } M$  — подгруппа Ли,  $\mathfrak{g} = \text{Ln } G$ . Тогда  $\mathfrak{g}$  — подалгебра Ли в  $\text{Der } M$ , состоящая из полных векторных полей,  $\dim \mathfrak{g} = \dim G$ .

2) Пусть  $\mathfrak{g}$  — конечномерная подалгебра Ли в  $\text{Der } M$ , состоящая из полных векторных полей. Тогда  $\text{Exp } \mathfrak{g}$  — связная подгруппа Ли в  $\text{Iso } M$ .

3) Операции  $\text{Exp}$  и  $\text{Ln}$  взаимно обратны на множестве конечномерных подалгебр Ли в  $\text{Der } M$ , состоящих из полных векторных полей, и связных подгрупп Ли в  $\text{Iso } M$ .

**4.2. Группа голономии и главные расслоения.** Пусть  $\mathfrak{D} \subset \text{Der } \mathfrak{E}$  — произвольное множество дифференцирований конечно порожденного проективного  $C^\infty(M)$ -модуля  $\mathfrak{E}$ . Положим  $\text{Exp } \mathfrak{D} = \left\{ \exp \int_0^t D_\tau d\tau \mid D_\tau \in \mathfrak{D}, t, \tau \in \mathbb{R} \right\}$ . Легко видеть, что  $\text{Exp } \mathfrak{D}$  — под-

группа в группе  $\text{Iso } \mathfrak{E}$  всех полуизоморфизмов модуля  $\mathfrak{E}$  на себя. Обозначим  $\mathfrak{P} = \text{Exp } \mathfrak{D}$ . Из теоремы 5.1, § 3 (Стефана — Суссмана) вытекает, что орбиты группы  $\theta(\mathfrak{P}) \subset \text{Iso } M$  в  $M$  являются гладкими подмногообразиями в  $M$ . Однако пока мы ничего не знаем о «вертикальной части» группы  $\mathfrak{P}$ , в частности, о структуре группы  $\text{Ker } \theta \cap \mathfrak{P} \subset \text{Aut } \mathfrak{E}$ .

Пусть  $M \supset N$  — подмногообразие,  $i_N: N \rightarrow M$  — вложение,  $i_N^* \mathfrak{E}$  — индуцированный вложением модуль над  $C^\infty(N)$  (отвечаю-

щий «сужению» расслоения  $\beta \in$  на  $N$ , см. § 2). Пусть  $P_i \in \text{Iso } \mathfrak{E}$  таково, что  $\theta(P)$  преобразует подмногообразие  $N$  в себя:  $x \circ \theta(P) \in N \quad \forall x \in N$ . Тогда корректно определен полуизоморфизм  $i_N^* P \in \text{Iso } i_N^* \mathfrak{E}^{(1)}$ . Аналогично, если  $D \in \text{Der } \mathfrak{E}$ , и векторное поле  $\theta(D)$  касается подмногообразия  $N$  (т. е.  $x \circ D \in T_x N \subset T_x M \quad \forall x \in N$ ), то корректно определено дифференцирование  $i_N^* D \in \text{Der } i_N^* \mathfrak{E}$ .

Вернемся к рассмотрению группы  $\mathfrak{P} = \text{Exp } \mathfrak{D}$ . Пусть  $M \supset N$  — некоторая орбита группы  $\theta(\mathfrak{P})$ . Мы хотим изучить  $i_N^* \mathfrak{P}$ ; дабы не загромождать обозначения, в дальнейшем будем предполагать, что  $N = M$  (ясно, что это не ограничивает общности). Итак, мы считаем, что  $\theta(\mathfrak{P})$  транзитивно действует на  $M$ .

Для всякого  $x \in M$  обозначим  $\mathfrak{P}_x = \{P \in \mathfrak{P} \mid x \circ \theta(P) = x\}$  — *стабильную подгруппу* точки  $x$  при действии  $\theta(\mathfrak{P})$ , и  $H_x = i_{\{x\}}^* \mathfrak{P}_x$ . Пусть  $\beta \in \bigsqcup_{x \in M} E_x = E$ . Тогда  $H_x$  — подгруппа в  $\text{GL}(E_x)$ ,  $x \in M$ .

**Предложение 2.1.** Для любых  $x_1, x_2 \in M$  подгруппы  $H_{x_1} \subset \text{GL}(E_{x_1})$  и  $H_{x_2} \subset \text{GL}(E_{x_2})$  подобны.

**Доказательство.** Пусть  $P \in \mathfrak{P}$ , причем  $x_2 \circ \theta(P) = x_1$ , тогда  $i_{\{x_1\}}^*(\text{Ad } P): E_{x_1} \rightarrow E_{x_2}$  отображает подгруппу  $H_{x_1} \subset \text{GL}(E_{x_1})$  на подгруппу  $H_{x_2} \subset \text{GL}(E_{x_2})$ .

**З а м е ч а н и е.** Пусть  $A$  — произвольная группа и  $B \subset A$  — подгруппа. Так же как группа обычно определяется с точностью до изоморфизма, подгруппа определяется с точностью до подобия, т. е. изоморфизма пар  $(A, B)$ .

**О п р е д е л е н и е.** Подгруппу  $H_x \subset \text{GL}(E_x)$  назовем *группой голономии* семейства  $\mathfrak{D} \subset \text{Der } \mathfrak{E}$ .

Дальнейшее изложение концентрируется вокруг понятия главного расслоения реперов, ассоциированного с  $\mathfrak{E}$ . Пусть  $\dim E_x = n$ ,  $x \in M$ . Рассмотрим модуль  $\mathfrak{E}^n = \underbrace{\mathfrak{E} \oplus \dots \oplus \mathfrak{E}}_{n \text{ раз}}$  и обозначим

$E^n = \beta \mathfrak{E}^n$  соответствующее векторное расслоение,  $E_x^n = E_x \oplus \dots \oplus E_x$ ,  $x \in M$ . Имеется естественное правое действие группы  $\text{GL}(n)$  автоморфизмами модуля  $\mathfrak{E}^n$  (а значит и сохраняющее слои правое действие  $\text{GL}(n)$  в  $E^n$ ). Это действие определяется как умножение строки на матрицу:

$$(e_1, \dots, e_n) A = \left( \sum_{i=1}^n e_i a_{i1}, \dots, \sum_{i=1}^n e_i a_{in} \right), \quad A \in \text{GL}(n), \quad e_i \in \mathfrak{E}, \\ i = 1, \dots, n.$$

Обозначим  $R(E_x) = \{(e_1(x), \dots, e_n(x)) \in E_x^n \mid e_1(x), \dots, e_n(x) \text{ линейно независимые векторы в } E_x^n\}$ ,

<sup>1)</sup> Более общим образом, если  $\theta(P)$  отображает подмногообразие  $N_1$  на подмногообразие  $N_2$ , то определен полуизоморфизм  $i_{N_1}^* P: (i_{N_1}^* \mathfrak{E}) \rightarrow (i_{N_2}^* \mathfrak{E})$ .

$$R(E) = \bigcup_{x \in M} R(E_x) \subset E^n.$$

Легко видеть, что  $R(E)$  переходит в себя под действием группы  $GL(n)$ . Кроме того, на каждом слое  $R(E_x)$  группа  $GL(n)$  действует свободно и транзитивно. Многообразие  $R(E)$  с заданным правым действием  $GL(n)$  называется *главным расслоением реперов* (ассоциированным с  $\mathcal{E}$ ) и обозначается  $R(\mathcal{E})$ .

Пусть  $G$  — некоторая подгруппа Ли в  $GL(n)$ , а  $\mathcal{S}$  — гладкое связное подмногообразие в  $R(E)$ . Пара  $(\mathcal{S}, G)$  называется *редукцией расслоения реперов* к подгруппе  $G$ , если для всякого  $x \in M$  множество  $\mathcal{S}_x = R(E_x) \cap \mathcal{S}$  является одной из орбит действия подгруппы  $G$  на  $R(E_x)$ , причем  $\mathcal{S}_x$  гладко зависит от  $x$ .

Под гладкостью здесь подразумевается следующее: каждая точка многообразия  $M$  обладает такой окрестностью  $U$ , что некоторое гладкое сечение расслоения  $\beta|_U: \mathcal{E} \rightarrow U$  принимает значения в множестве  $\mathcal{S}$ .

Каждому полуизоморфизму  $P$  модуля  $\mathcal{E}$  очевидным образом ставится в соответствие полуизоморфизм  $P \oplus \dots \oplus P$  модуля  $\mathcal{E}^n$  и, следовательно, диффеоморфизм тотального пространства  $E^n$ , который, как легко видеть, переводит  $R(E)$  в себя. Если соответствующий диффеоморфизм переводит  $\mathcal{S}$  в себя, то  $P$  называется *диффеоморфизмом редукции*  $(\mathcal{S}, G)$ . Совокупность всех таких диффеоморфизмов обозначим  $\text{Diff}(\mathcal{S}; G)$ . Ясно, что  $\text{Diff}(\mathcal{S}; G)$  является подгруппой в группе  $\beta \text{Iso } \mathcal{E}$ , состоящей из диффеоморфизмов многообразия  $E$ , линейно отображающих слои на слои. Аналогично определяется подгруппа  $\text{Aut}(\mathcal{S}; G)$  в группе  $\beta \text{Aut } \mathcal{E}$ , состоящей из диффеоморфизмов многообразия  $E$ , линейно преобразующих каждый слой в себя. Таким образом,

$$\text{Aut}(\mathcal{S}; G) = \text{Diff}(\mathcal{S}; G) \cap \beta \text{Aut } \mathcal{E}.$$

В дальнейшем, компонента линейной связности, содержащая единицу, в произвольной топологической группе  $\Gamma$  будет обозначаться  $\Gamma^0$ . Подмножество  $\Gamma^0$  является, очевидно, подгруппой (и даже нормальным делителем) в  $\Gamma$ . Например, для группы  $\text{Diff } M$  диффеоморфизмов многообразия  $M$  подгруппа  $(\text{Diff } M)^0$  состоит из всех диффеоморфизмов, которые можно включить в поток.

**Предложение 2.2.** 1) Группа  $\text{Diff}(\mathcal{S}; G)^0$  действует транзитивно в подмногообразии  $\mathcal{S}$  и

$$\theta(\text{Diff}(\mathcal{S}; G)^0) = (\text{Diff } M)^0.$$

2) Произвольная орбита группы  $\text{Diff}(\mathcal{S}; G)^0$  в  $R(E)$  имеет вид  $\mathcal{S}A$ , где  $A \in GL(n)$ . В частности, такая орбита определяет редукцию расслоения реперов к подгруппе  $A^{-1}GA$ .

Мы сформулируем еще несколько утверждений и лишь затем, в конце пункта, приведем их доказательства.

Вернемся к рассмотрению группы  $\mathfrak{P} = \text{Exr } \mathfrak{D}$ . Всякий полуавтоморфизм модуля  $\mathfrak{E}$  стандартным образом определяет диффеоморфизм многообразия  $R(E)$ , причем композиции полуавтоморфизмов отвечает композиция диффеоморфизмов. В частности, возникает действие группы  $\mathfrak{P}$  на многообразии  $R(E)$ . Поскольку никаких других действий  $\mathfrak{P}$  на  $R(E)$  мы не рассматриваем, то для обозначения стандартного действия не будем использовать никаких специальных символов.

**Теорема 2.1.** 1) Группа голономии  $H_x$  является подгруппой Ли в  $\text{GL}(E_x)$ .

2) Произвольная орбита группы  $\mathfrak{P}$  в  $R(E)$  есть редукция расслоения реперов к подгруппе, подобной  $H_x$ .

3) Алгебра Ли  $h_x$  группы  $H_x$  описывается следующим образом:

$$h_x = \text{span}\{x \circ \text{Ad } PD \mid P \in \mathfrak{P}, D \in \mathfrak{D}\} \cap \text{gl}(E_x).$$

**Следствие.** Пусть  $\mathcal{G}$  — некоторая орбита группы  $\mathfrak{P}$  в  $R(E)$  и  $H$  — подгруппа в  $\text{GL}(n)$ , подобная группе голономии, так что  $(\mathcal{G}, H)$  — редукция расслоения реперов к подгруппе  $H$ . Орбиты действия (справа) группы  $H^0$  на  $\mathcal{G}$  определяют отношение эквивалентности на  $\mathcal{G}$ ; факторпространство по этому отношению эквивалентности является накрытием многообразия  $M$ . Легко видеть, что это накрытие связно, поскольку  $\mathcal{G}$  связно как орбита связной группы  $\mathfrak{P}$ . Следовательно, компоненты связности группы голономии  $H_x$  находятся во взаимно однозначном соответствии с классами смежности фундаментальной группы  $\pi_1(M)$  по некоторой подгруппе.

**Следствие.** Пусть  $L(\mathfrak{D})$  — подалгебра Ли в  $\text{Der } \mathfrak{E}$ , порожденная множеством  $\mathfrak{D}$ . Если  $C^\infty(M)$ -модуль, порожденный  $L(\mathfrak{D})$ , имеет конечное число образующих, то  $h_x = x \circ L(\mathfrak{D}) \cap \text{gl}(E_x)$ . В частности, это справедливо, если множество  $\mathfrak{D}$  состоит из аналитических полей.

Последняя наша задача в этом параграфе — дать инфинитезимальное описание редукций расслоения реперов  $R(\mathfrak{E})$ , этой цели послужит обобщение обычной теории Ли на некоторый класс подгрупп в  $\text{Iso } \mathfrak{E}$  и подалгебр Ли в  $\text{Der } \mathfrak{E}$ .

**Определение.** Подалгебру Ли  $\mathfrak{D} \subset \text{Der } \mathfrak{E}$  назовем *главной*, если  $\mathfrak{D}$  является проективным подмодулем в  $\text{Der } \mathfrak{E}$  и  $\theta(\mathfrak{D}) = \text{Der } M$ .

**Предложение 2.3.** Для любой главной подалгебры Ли  $\mathfrak{D}$  в  $\text{Der } \mathfrak{E}$  идеал  $\mathfrak{D} \cap \text{End } \mathfrak{E} = \mathfrak{D} \cap \ker \theta$  в  $\mathfrak{D}$  обладает следующим свойством: подалгебры Ли  $i_{\{x\}}^*(\mathfrak{D} \cap \ker \theta) \subset \text{GL}(E_x)$  подобны друг другу при всех  $x \in M$ .

Для произвольной линейно связной подгруппы  $\mathfrak{P} \subset \text{Diff } \mathfrak{E}$  положим

$$\text{Ln } \mathfrak{P} = \left\{ P_t^{-1} \circ \frac{d}{dt} P_t \mid P_t \in \mathfrak{P} \ \forall t \in \mathbb{R}, P_0 = \text{id} \right\} \subset \text{Der } \mathfrak{E}.$$

Пусть  $G \subset GL(n)$  — подгруппа Ли и  $\mathfrak{g} \subset gl(n)$  — ее подалгебра Ли.

Теорема 2.2. 1) Пусть  $\mathfrak{P} = \text{Diff}(\mathcal{G}; G)^0$  для некоторой редукции  $(\mathcal{G}, G)$  расслоения реперов к подгруппе  $G$ . Тогда  $\text{Lp } \mathfrak{P}$  — главная подалгебра Ли в  $\text{Der } \mathfrak{E}$ , причем подалгебра Ли  $i_{\{x\}}^*$  ( $\ker \theta \cap \text{Lp } \mathfrak{P}$ )  $\subset gl(E_x)$  подобна  $\mathfrak{g} \forall x \in M$ .

2) Обратно, пусть  $\mathfrak{D}$  — главная подалгебра Ли в  $\text{Der } \mathfrak{E}$ , причем подалгебры  $i_{\{x\}}^*$  ( $\ker \theta \cap \mathfrak{D}$ )  $\subset gl(E_x)$  подобны  $\mathfrak{g} \forall x \in M$ .

Тогда  $\text{Exp } \mathfrak{D} = \text{Diff}(\mathcal{G}_0; G_0)^0$  для некоторой редукции  $(\mathcal{G}_0, G_0)$  расслоения реперов к подгруппе  $G_0$ , причем связанные компоненты единицы групп  $G_0$  и  $G$  совпадают.

3) Операции  $\text{Exp}$  и  $\text{Lp}$  взаимно обратны на множестве групп  $\text{Diff}(\mathcal{G}; G)^0$  диффеоморфизмов редукций главного расслоения реперов и множестве главных подалгебр Ли в  $\text{Der } \mathfrak{E}$ .

Следствие. Если  $\mathfrak{E} = \text{Der } M$ , то редукции главного расслоения реперов к подгруппе  $G$  называются  $G$ -структурами на  $M$ .

(Например, риманова метрика — это  $O(n)$ -структура, распределение  $k$ -мерных плоскостей — это  $G$ -структура, где  $G$  — подгруппа в  $GL(n)$ , сохраняющая фиксированную  $k$ -мерную плоскость.) Из теоремы 2.2 и предложения 2.1 вытекает, что имеется естественное взаимно однозначное соответствие между главными подалгебрами Ли в  $\text{Der } \text{Der } M$  и всевозможными  $G$ -структурами на  $M$ .

Доказательство большинства из сформулированных выше утверждений о редукциях расслоения реперов основано на существовании специальных связностей в модуле  $\mathfrak{E}$ , связанных с редукциями.

Определение. Связность  $\nabla$  в модуле  $\mathfrak{E}$  называется *связностью на редукции*  $(\mathcal{G}, G)$  расслоения реперов, если 
$$\exp \int_0^t \nabla_{X_\tau} d\tau \in \text{Diff}(\mathcal{G}; G)^0 \text{ для всякого } X_\tau \in \text{Der } M, \tau \in \mathbb{R}.$$

Предложение 2.4. На всякой редукции главного расслоения реперов имеется связность.

Доказательство. Пусть  $(\mathcal{G}, G)$  — редукция к подгруппе  $G$  и  $\mathfrak{g}$  — алгебра Ли группы  $G$ . Предположим сначала, что редукция  $(\mathcal{G}, G)$  имеет сечение  $r: M \rightarrow \mathcal{G}$ ,  $r \in \mathfrak{E}^n$ . Ясно, что любая связность в  $\mathfrak{E}$  однозначно определяется своими значениями на  $r$ , причем  $\nabla_X r = rA(X)$ , где  $X \mapsto A(X)$  — произвольный гомоморфизм из  $\text{Der } M$  в модуль  $C^\infty(M, gl(n))$ . Кроме того, для всякой матрицы  $B \in gl(n)$ ,  $\nabla_X(rB) = (\nabla_X r)B$ . Учитывая то, что  $\mathcal{G} = \bigcup_{x \in M} r(x)G$  и обычные свойства связности, получаем следующее описание всех связностей на редукции  $(\mathcal{G}, G)$ .

Лемма 2.1. Связность  $\nabla$  в  $\mathfrak{E}$  в том и только том случае является связностью на  $(\mathcal{G}, G)$ , когда  $\nabla_X r = rA(X)$ , причем

$X \mapsto A(X)$  является гомоморфизмом из  $\text{Der } M$  в  $C^\infty(M, \mathfrak{g}) \subset C^\infty(M, \mathfrak{gl}(n))$ .

Произвольная редукция расслоения реперов, вообще говоря, не имеет глобальных сечений, однако всегда имеет локальные сечения. Стандартное применение разбиения единицы позволяет склеить из локальных связностей глобальную.

Доказательство предложения 2.2. Докажем сначала утверждения пункта 1. Равенство  $\text{Diff } M^0 = \theta(\text{Diff}(\mathcal{L}; G)^0)$  моментально следует из существования связности на  $(\mathcal{L}, G)$ . Далее, поскольку многообразие  $\mathcal{L}$  связно, для доказательства транзитивности действия группы  $\text{Diff}(\mathcal{L}; G)^0$  в  $\mathcal{L}$  достаточно установить, что, какова бы ни была точка  $\rho_0 \in \mathcal{L}$ , орбита группы  $\text{Diff}(\mathcal{L}; G)^0$ , проходящая через  $\rho_0$ , содержит некоторую окрестность точки  $\rho_0$  в  $\mathcal{L}$ .

Пусть  $\rho_0 \in R(E_{x_0})$  и  $r$  — некоторое локальное сечение расслоения  $(\mathcal{G}, G)$ , проходящее через  $\rho_0$ ,  $r(x_0) = \rho_0$ . Кроме того, пусть  $a \in C^\infty(M)$  — функция, равная единице вблизи  $x_0$  и обращающаяся в нуль вне достаточно малой окрестности точки  $x_0$ . Тогда для всякого  $B \in \mathfrak{gl}(n)$ , корректно определен автоморфизм  $(re^{aB}r^{-1}) \in \text{Aut}(\mathcal{G}; G)$ , при каждом  $x \in M$ ,  $r(x)e^{a(x)B}r^{-1}(x)$  — это такое преобразование пространства  $E_x$ , которое в базисе  $r(x) = (e_1(x), \dots, e_n(x))$  представляется матрицей  $e^{a(x)B}$ ; или (то же другими словами) преобразует репер  $r(x)$  в репер  $r(x)e^{a(x)B}$ .

Пусть  $\nabla$  — некоторая связность на  $(\mathcal{G}, G)$ . Для произвольных  $X \in \text{Der } M$ ,  $B \in \mathfrak{gl}(n)$  преобразование  $e^{\nabla X_0}(re^{aB}r^{-1}) \in \text{Diff}(\mathcal{G}; G)^0$ . Кроме того, отображение

$$(X, B) \mapsto e^{\nabla X_0}(re^{aB}r^{-1})|_{\rho_0}$$

имеет, очевидно, полный ранг в точке  $(0, 0)$ . Следовательно, по теореме о неявной функции, это отображение покрывает окрестность точки  $\rho_0$  в  $\mathcal{L}$ .

Утверждения пункта 2 легко следуют из пункта 1 и очевидного тождества

$$P(\rho A) = P(\rho)A, \quad \forall \rho \in \text{Iso } \mathfrak{E}, \quad A \in \text{GL}(n), \quad \rho \in R(E).$$

Доказательство теоремы 2.1. Пусть  $P \in \text{Iso } \mathfrak{E}$ ,  $A \in \text{GL}(n)$ ,  $\rho \in R(E)$ . Из формулы  $P(\rho)A = P(\rho A)$  вытекает, что  $A$  преобразует орбиты группы  $\mathfrak{P}$  в орбиты. Положим  $G = \{A \in \text{GL}(n) \mid \mathcal{G}A = \mathcal{G}\}$ ;  $G$  — подгруппа в  $\text{GL}(n)$ .

Ясно, что  $\mathcal{G}_x = R(E_x) \cap \mathcal{G}$  является орбитой группы  $G$  на  $R(E_x)$  для всякого  $x \in M$ . Далее, из определения группы монодромии  $G_x$  следует, что она транзитивно (и, очевидно, свободно) действует на  $\mathcal{G}_x$ . Пусть  $\rho = (e_1, \dots, e_n) \in \mathcal{G}_x$  и  $\hat{A}: E_x \rightarrow E_x$  — элемент группы  $H_x$ ; тогда  $\hat{A}\rho = \rho A$  для некоторого однозначно определенного  $A \in G \subset \text{GL}(n)$ . Получаем взаимно однозначное соответ-

бие  $\hat{A} \leftrightarrow A$  групп  $H_x$  и  $G$ . Покажем, что это соответствие — изоморфизм:

$$\hat{A}(\hat{B}(\rho)) = A(\rho B) = (\hat{A}(\rho)) B = \rho AB = \hat{A}B(\rho).$$

Поскольку этот изоморфизм очевидным образом распространяется до изоморфизма  $GL(E_x)$  и  $GL(n)$ , то группы  $H_x$  и  $G$  подобны (ср. с доказательством предложения 2.1).

Доказательство гладкости и описание касательного пространства основывается на тех же аргументах, что и доказательство теоремы Стефана—Суссмана (теорема 5.1, § 3).

Доказательство предложения 2.3. Пусть  $D_\tau \in \mathfrak{D}$ ,  $\tau \in [0, t]$ , тогда изоморфизм  $\exp \int_0^t \text{ad } D_\tau d\tau$  алгебры Ли  $\text{Der } \mathfrak{E}$  преобразует подалгебру  $\mathfrak{D}$  в себя; если при этом  $x_2 \xrightarrow{\exp \int_0^t \theta(D_\tau) d\tau} x_1$ , то  $i_{\{x_1\}}^* \left( \exp \int_0^t \text{ad } D_\tau d\tau \right)$  отображает подалгебру  $i_{\{x_1\}}^*(\ker \theta \cap \mathfrak{D})$  на подалгебру  $i_{\{x_2\}}^*(\ker \theta \cap \mathfrak{D})$ .

Доказательство теоремы 2.2. 1) Равенство  $\theta(\text{Ln } \mathfrak{P}) = \text{Der } M$  вытекает из существования связности на  $(\mathcal{G}, G)$ . Пусть  $U \subset M$  — такая окрестность, что существует сечение  $r: U \rightarrow \mathcal{G}$ . Тогда  $i_U^* \mathfrak{E}$ , следовательно, и  $i_U^* \text{End } \mathfrak{E}$  — свободные  $C^\infty(U)$ -модули. При этом  $(\ker \theta \cap \text{Ln } \mathfrak{P}) \subset i_U^* \text{End } \mathfrak{E}$  состоит из элементов вида

$$x \mapsto r(x) B(x) r^{-1}(x), \quad B(x) \in \mathfrak{g}, \quad \forall x \in U.$$

Из такого локального представления сразу следует, что  $\ker \theta \cap \text{Ln } \mathfrak{P}$  — проективный модуль и  $i_{\{x\}}^*(\ker \theta \cap \text{Ln } \mathfrak{P})$  — подалгебра Ли, подобная  $\mathfrak{g}$  в  $\mathfrak{gl}(n)$ .

Осталось доказать, что  $\text{Ln } \mathfrak{P}$  — подалгебра Ли в  $\text{Der } \mathfrak{E}$ . Снова воспользуемся локальным представлением. Пусть  $\nabla$  — некоторая связность на  $(\mathcal{G}, U)$ , из проведенных рассуждений вытекает, что  $i_U^*(\text{Ln } \mathfrak{P})$  состоит из элементов вида

$$\nabla_x + rB(\cdot)r^{-1}, \quad X \in \text{Der } U, \quad B(\cdot): U \rightarrow \mathfrak{g}.$$

Напомним, что  $\nabla_x r = rA(X)$ , где  $A(X)(x) \in \mathfrak{g}$ ,  $\forall x \in U$ . Тот факт, что  $[\nabla_{x_1} + rB_1(\cdot)r^{-1}, \nabla_{x_2} + rB_2(\cdot)r^{-1}] \in i_U^*(\text{Ln } \mathfrak{P})$  проверяется теперь прямым вычислением.

2) В силу теоремы 2.1, произвольная орбита  $\mathcal{G}$  группы  $\text{Exp } \mathfrak{D}$  в  $R(E)$  является редукцией расслоения реперов к некоторой подгруппе  $G_0$ , причем  $\mathfrak{g}$  — алгебра Ли группы  $G_0$ . Пусть  $\nabla: \text{Der } M \rightarrow \mathfrak{D}$  — связность на  $\mathfrak{E}$ , принимающая значения в  $\mathfrak{D}$ . Тогда, очевидно,  $\nabla$  есть связность на редукции  $(\mathcal{G}, G)$  расслоения реперов. Пусть  $P_i \in \text{Diff}(\mathcal{G}; G)$ ,  $P_i = \exp \int_0^t C_\tau d\tau$  и  $X_i = \theta(C_i)$ .

Тогда  $\left(P_i \exp \int_0^t -\nabla_{X_\tau} d\tau\right) \in \text{Aut}(\mathcal{G}; G)$ . Таким образом, достаточно доказать, что для любого потока  $Q_t \in \text{Aut}(\mathcal{G}; G)$ ,  $\text{Ln}(Q_t) \in \text{Der } \theta \cap \mathfrak{D}$ . Последнее вытекает из очевидных включений  $(i_{i_x}^* \text{Ln } Q_t) \in \ker \theta \cap \mathfrak{D}$  и проективности модуля  $\ker \theta \cap \mathfrak{D}$ .

Утверждение 3 вытекает из рассмотрений, проведенных в 1) и 2).

**4.3. Калибровочные преобразования.** На всяком конечно порожденном проективном  $C^\infty(M)$ -модуле  $\mathcal{E}$  существует некоторая связность  $\nabla$ . В то же время ни откуда не следует, что связность определена однозначно. Попробуем описать всевозможные связности на  $\mathcal{E}$ .

Рассмотрим, во-первых, проективный модуль  $\text{Hom}(\text{Der } M, \text{Der } \mathcal{E})$ . Все связности лежат в этом модуле.

Если  $\nabla^1, \nabla^2$  — некоторые связности на  $\mathcal{E}$ , то, очевидно, для всякого  $X \in \text{Der } M$ ,  $(\nabla_X^1 - \nabla_X^2) \in \text{End } \mathcal{E}$ . Следовательно,

$$(\nabla^1 - \nabla^2) \in \text{Hom}(\text{Der } M, \text{End } \mathcal{E}) \subset \text{Hom}(\text{Der } M, \text{Der } \mathcal{E}).$$

С другой стороны, для произвольного  $H \in \text{Hom}(\text{Der } M, \text{End } \mathcal{E})$  гомоморфизм  $\nabla^1 + H$  — снова связность.

Окончательно, получаем: пусть  $\nabla$  — некоторая фиксированная связность на  $\mathcal{E}$ , тогда все остальные связности имеют вид  $\nabla + H$ , где  $H \in \text{Hom}(\text{Der } M, \text{End } \mathcal{E})$  произвольно.

Таким образом, совокупность всех связностей — это «аффинная плоскость» в модуле  $\text{Hom}(\text{Der } M, \text{Der } \mathcal{E})$ , представляющая собой «сдвиг на элемент  $\nabla$ » подмодуля  $\text{Hom}(\text{Der } M, \text{End } \mathcal{E})$ .

Группа  $\text{Iso } \mathcal{E}$  естественным образом действует на  $\text{Der } \mathcal{E}$  и  $\text{Der } M$  посредством внутренних автоморфизмов. Именно, если  $P \in \text{Diff } \mathcal{E}$  и  $\theta(P) = p \in \text{Diff } M$ , то внутренние автоморфизмы действуют по правилу

$$D \mapsto \text{Ad } PD = P \circ D \circ P^{-1},$$

$$X \mapsto \text{Ad } pX = p \circ X \circ p^{-1}, \quad \forall P \in \text{Der } \mathcal{E}, X \in \text{Der } M.$$

Эти представления задают естественное действие той же группы  $\text{Iso } \mathcal{E}$  в модуле  $\text{Hom}(\text{Der } M, \text{Der } \mathcal{E})$ .

Такое действие, обозначаемое  $P_*$ , определяется формулой

$$P_* A = \text{Ad } P \circ A \circ \text{Ad } p^{-1}, \quad \forall A \in \text{Hom}(\text{Der } M, \text{Der } \mathcal{E}),$$

$$\forall P \in \text{Diff } \mathcal{E}, \theta(P) = p.$$

Легко видеть, что  $P_*$  является полуизоморфизмом модуля  $\text{Hom}(\text{Der } M, \text{Der } \mathcal{E})$ , причем  $\theta(p_*) = \theta(P) = p$ . Кроме того, непосредственно проверяется, что полуизоморфизм  $P_*$  переводит связности в связности; такие преобразования связностей обычно называются *калибровочными*. Если  $\nabla' = P_* \nabla$  для некоторого  $P \in \text{Diff } \mathcal{E}$ , то говорят, что связности  $\nabla$  и  $\nabla'$  *калибровочно*

эквивалентны. Иными словами, классы калибровочной эквивалентности — это орбиты естественного действия группы  $\text{Iso } \mathfrak{G}$  на связности.

Пусть  $R_\nabla$  — тензор кривизны связности  $\nabla$ ,  $R_\nabla \in \text{Hom}(\text{Der } M \wedge \text{Der } M, \text{End } \mathfrak{G})$ . Имеем  $R_{P_*\nabla} = P_*R_\nabla$ , где  $P_*R_\nabla$  — результат естественного действия  $P$  на тензор  $R_\nabla$ , т. е.  $(P_*R_\nabla)(X, Y) = \text{Ad } P R_\nabla(\text{Ad } P^{-1}X, \text{Ad } P^{-1}Y)$ .

Предположим теперь, что задан поток

$$P_t = \exp \int_0^t D_\tau d\tau \text{ в } \text{Diff } \mathcal{E}.$$

Нетрудно найти инфинитезимальную образующую потока  $P_{t*}$ . В самом деле, пусть  $\theta(P_t) = X_t$ , тогда

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} P_{t*} A &= \text{Ad } P_t \circ (\text{ad } D_t \circ A - A \circ \text{ad } X_t) \circ \text{Ad } P_t^{-1} = \\ &= P_{t*} (\text{ad } D_t \circ A - A \circ \text{ad } X_t). \end{aligned}$$

Обозначим  $\rho(D_t)$  — дифференцирование модуля  $\text{Hom}(\text{Der } M, \text{Der } \mathfrak{G})$ , а также модулей гомоморфизмов из «тензорных модулей» над  $M$  в «тензорные модули» над  $\mathfrak{G}$ , действующие по правилу:  $\rho(D_t)A = \text{ad } D_t \circ A - A \circ \text{ad } D_t$ . Тогда

$$\left( \exp \int_0^t D_\tau d\tau \right)_* = \exp \int_0^t \rho(D_\tau) d\tau.$$

Заметим, что

$$\theta(\rho(D)) = \theta(D).$$

Легко показать, что  $\rho(D)$  переводит подмодуль  $\text{Hom}(\text{Der } M, \text{Der } \mathfrak{G})$  в себя и, кроме того, произвольную связность переводит в этот же подмодуль. Проверим это, например, для связности:

$$\begin{aligned} \theta(\rho(D) \nabla_X) &= \theta([D, \nabla_X]) - \theta(\nabla_{[\theta(D), X]}) = \\ &= [\theta(D), X] - [\theta(D), X] = 0. \end{aligned}$$

Если  $D = \nabla_X$ , то  $\rho(D) = \rho(\nabla_X)$  называется *ковариантным дифференцированием вдоль поля  $X$*  (в силу связности  $\nabla$ ). Имеем, в частности,

$$(\rho(\nabla_X) \nabla)(Y) = [\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X, Y]} = R_\nabla(X, Y).$$

Таким образом, кривизна — это ковариантная производная связности в силу себя самой. Для калибровочных преобразований получаем

$$(P_{t*} \nabla)_Y = \left( \exp \int_0^t \rho(\nabla_{X_\tau}) d\tau \nabla \right)_Y = \nabla_Y + \int_0^t (P_{\tau*} \circ \rho(\nabla_{X_\tau}) \nabla)(Y) d\tau =$$

$$= \int_0^t \text{Ad } P_\tau R_\nabla (X_\tau, \text{Ad } p_\tau^{-1} Y) d\tau + \nabla_Y.$$

Тождество

$$\begin{aligned} (P_{t*} \nabla)_Y - \nabla_Y &= \int_0^t \text{Ad } P_\tau R_\nabla (X_\tau, \text{Ad } p_\tau^{-1} Y) d\tau = \\ &= \int_0^t (P_{\tau*} R_\nabla) (\text{Ad } p_\tau X_\tau, Y) d\tau \end{aligned} \quad (3.1)$$

связывает калибровочные преобразования и кривизну. В частности, если  $R_\nabla \equiv 0$ , то  $P_{\tau*} \nabla = \nabla$ . В полном объеме эта связь описывается теоремой о голономии.

Пусть  $\text{im } \nabla = \{\nabla_X | X \in \text{Der } M\} \subset \text{Der } \mathfrak{E} = C^\infty(M)$ -подмодуль. Обозначим через  $H_x(\nabla)$  группу голономии подмодуля  $\text{im } \nabla$  в точке  $x$  и через  $\mathfrak{h}_x(\nabla)$  алгебру Ли этой группы.

Теорема 3.1 (о голономии). Для всякой связности  $\nabla$  на  $\mathfrak{E}$  и любого  $x \in M$  справедливо равенство

$$\mathfrak{h}_x(\nabla) = \text{span} \{x_* (P_* R_\nabla)(X, Y) | P \in \text{Exp}(\text{im } \nabla), X, Y \in \text{Der } M\}.$$

Следствие. Предположим, что  $\nabla$  — аналитическая связность, тогда

$$\mathfrak{h}_x(\nabla) = \text{span} \{x_* \circ (\nabla_{X_k})_* \dots \circ (\nabla_{X_1})_* \nabla_{X_0} | X_i \in \text{Der } M, k \geq 1\}.$$

Доказательство теоремы о голономии. Обозначим  $\mathfrak{P} = \text{Exp}(\text{im } \nabla)$ . Из теоремы 2.1 следует, что

$$\mathfrak{h}_x(\nabla) = \text{span} \{x_* \text{Ad } P \nabla_X | P \in \mathfrak{P}, X \in \text{Der } M\} \cap \mathfrak{gl}(E_x).$$

С другой стороны, очевидно равенство

$$\text{span} \{\text{Ad } P \nabla_X | P \in \mathfrak{P}, X \in \text{Der } M\} = \text{span} \{(P_* \nabla)_Y | P \in \mathfrak{P}, Y \in \text{Der } M\}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \mathfrak{h}_x(\nabla) &= \text{span} \{(P_* \nabla)_Y - \nabla_Y | P \in \mathfrak{P}, Y \in \text{Der } M\} = \\ &= \text{span} \{(P_* \nabla)_Y - (Q_* \nabla)_Y | P, Q \in \mathfrak{P}, Y \in \text{Der } M\}. \end{aligned}$$

Утверждение теоремы теперь следует из тождества (3.1).

4.4. **Линейные связности.** *Линейными* называются связности на модулях векторных полей. Пусть

$$\nabla : \text{Der } M \rightarrow \text{Der}(\text{Der } M)$$

— связность на  $\text{Der } M$ . Для любого подмногообразия  $N$  в  $M$  определена связность  $i_N^* \nabla : \text{Der } N \rightarrow \text{Der}(i_N^* \text{Der } M)$  (здесь  $i_N : N \rightarrow M$  — вложение). Заметим, что подмодуль  $\text{Der } N$  является прямым слагаемым в  $i_N^* \text{Der } M$ .

Подмногообразие  $N$  называется *вполне геодезическим* для связности  $\nabla$ , если для всякого  $X \in \text{Der } N$  дифференцирование

$(i_N^* \nabla)_X$  модуля  $i_N^* \text{Der } M$  оставляет инвариантным подмодуль  $\text{Der } N$ . Одномерные вполне геодезические подмногообразия называются *непараметризованными геодезическими*.

Векторное поле  $X \in \text{Der } N$  (где подмногообразие  $N$  не обязательно вполне геодезическим) называется *геодезическим полем* для связности  $\nabla$ , если  $\nabla_X X = 0$ . Гладкая кривая  $\gamma(\cdot): \mathbb{R} \rightarrow M$  называется *геодезической* (параметризованной), если ее скорость  $\frac{d\gamma}{dt}$  — геодезическое векторное поле на  $\gamma(\mathbb{R}) \subset M$ , т. е.

$$\nabla_{\frac{d\gamma}{dt}} \frac{d\gamma}{dt} = 0.$$

Можно показать, что подмногообразие  $N$  положительной размерности является вполне геодезическим в том и только том случае, когда для всякой геодезической кривой  $\gamma(\cdot)$  и любого  $t \in \mathbb{R}$  условие  $\frac{d\gamma}{dt} \in T_{\gamma(t)} N$  влечет  $\gamma(t) \in N$  для всех  $t$ , близких к  $t$ .

Векторное поле  $X$  тогда и только тогда является геодезическим, когда все его интегральные кривые — геодезические.

Рассмотрим теперь нестационарное векторное поле  $X_t$  на  $N$ , гладко зависящее от  $t \in \mathbb{R}$ . Все интегральные кривые этого поля являются геодезическими в том и только том случае, когда

$$\frac{\partial}{\partial t} X_t + \nabla_{X_t} X_t \equiv 0.$$

Нестационарные поля, удовлетворяющие последнему равенству, называются *геодезическими*. Множества геодезических кривых для двух связностей  $\nabla$  и  $\nabla'$  совпадают тогда и только тогда, когда  $S(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla'_X Y$  — кососимметрическое  $C^\infty(M)$ -билинейное отображение  $\text{Der } M$  в себя.

Для любой связности  $\nabla$  на  $\text{Der } M$  величина

$$T_\nabla(X, Y) \stackrel{\text{def}}{=} \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$$

называется *тензором кручения* связности  $\nabla$ . Ясно, что  $T_\nabla(\cdot, \cdot)$  — кососимметрическое  $C^\infty(M)$ -билинейное отображение  $\text{Der } M$  в себя. Из сказанного выше следует, что связность  $\nabla$  однозначно определяется множеством своих геодезических кривых и тензором кручения. При этом в качестве кручения может быть выбран произвольный элемент из  $\text{Hom}(\text{Der } M \wedge \text{Der } M, \text{Der } M)$  при сохранении множества геодезических.

**4.5. Лево(право)инвариантные связности.** Пусть  $G$  — группа Ли. Не ограничивая общности, можно считать, что  $G$  есть подгруппа группы автоморфизмов алгебры  $C^\infty(M)$  для некоторого гладкого многообразия  $M: G \subset \text{Iso } M$  (см. п. 4.1). Обозначим через  $\mathfrak{g}$  алгебру Ли группы Ли  $G$ . Таким образом,  $G$  — конечномерное подмногообразие в пространстве непрерывных линейных операторов над  $C^\infty(M)$ , а  $\mathfrak{g}$  — касательное пространство к  $G$  в единице. Произвольный касательный век-

тор к  $G$  в точке  $p \in G$  имеет вид  $p \circ X = Y \circ p$ , где  $X, Y \in \mathfrak{g}$ ,  $Y = \text{Ad } pX$ . Произвольные гладкие сечения касательного расслоения — суть векторные поля на  $G$ . Векторное поле является *лево(право)инвариантным*, если оно имеет вид  $p \mapsto p \circ X (p \mapsto Y \circ p)$ , где  $X$  (соответственно,  $Y$ ) не зависит от  $p \in G$ . Таким образом, сопоставив каждому лево(право) инвариантному полю его значение в единице, получим канонический изоморфизм пространства таких полей и  $\mathfrak{g}$ .

Линейная связность на  $G$  называется *лево(право) инвариантной*, если ковариантная производная лево(право) инвариантного поля вдоль лево(право) инвариантного поля снова является лево(право) инвариантным полем.

Пусть  $(X, Y) \mapsto \nabla_X Y$  — произвольное билинейное отображение алгебры Ли  $\mathfrak{g}$  в себя. Определив ковариантную производную поля  $p \circ Y_p$  вдоль поля  $p \circ X_p$ ,  $p \in G$  формулой

$$p \circ (\nabla_X Y_p + (T_p Y) X_p), \quad (5.1_a)$$

получим левоинвариантную связность на  $G$ . Аналогично, определив ковариантную производную поля  $Y_p \circ p$  вдоль поля  $X_p \circ p$ ,  $p \in G$  формулой

$$(-\nabla_X Y_p + (T_p Y) X_p) \circ p, \quad (5.1_n)$$

получим правоинвариантную связность.

Все лево(право) инвариантные связности описываются таким способом, поскольку они полностью определяются своими значениями на лево(право) инвариантных полях.

Положим  $R_\nabla(X, Y) = [\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X, Y]}$ ,  $T_\nabla(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$ ,  $\forall X, Y \in \mathfrak{g}$ . Тензоры кривизны и кручения для связности (5.1<sub>a</sub>) имеют вид

$$(p \circ X_p, p \circ Y_p) \mapsto p \circ R_\nabla(X_p, Y_p)$$

и

$$(p \circ X_p, p \circ Y_p) \mapsto p \circ T_\nabla(X_p, Y_p),$$

а для связности (5.1<sub>n</sub>) — вид

$$(X_p \circ p, Y_p \circ p) \mapsto R_\nabla(X_p, Y_p) \circ p$$

и

$$(X_p \circ p, Y_p \circ p) \mapsto T_\nabla(X_p, Y_p) \circ p, \quad p \in G.$$

Пусть  $p_t$  — абсолютно непрерывная кривая в  $G$ . Элемент  $X_t = p_t^{-1} \circ \frac{d}{dt} p_t = \frac{d}{dt} \ln p_t \in \mathfrak{g}$  называется *левой угловой скоростью* кривой  $p_t$  в момент  $t$ , а  $Y_t = \frac{d}{dt} p_t \circ p_t^{-1} = \frac{d}{dt} \ln p_t \in \mathfrak{g}$  — *правой угловой скоростью*. Эта терминология подчеркивает аналогию с традиционными понятиями, относящимися к группе  $\text{SO}(3)$ .

Параллельный перенос вдоль кривой

$$p_\tau = p_0 \circ \exp \int_0^\tau X_\theta d\theta = \exp \int_0^\tau Y_\theta d\theta \circ p_0, \quad 0 \leq \tau \leq t,$$

в силу левоинвариантной связности (5.1<sub>л</sub>), преобразует касательный вектор  $p_0 \circ z \in T_{p_0}G$  в вектор  $p_t \circ \exp \int_0^t -\nabla_{X_\tau} d\tau$ . Параллельный перенос вдоль той же кривой, в силу правоинвариантной связности (5.1<sub>п</sub>), преобразует касательный вектор  $z \circ p_0 \in T_{p_0}G$  в вектор  $\exp \int_0^t \nabla_{Y_\tau} d\tau \circ p_t$ .

Кривая  $p_t$  в том и только том случае является геодезической для связности (5.1<sub>л</sub>) (связности 5.1<sub>п</sub>), когда она гладкая и

$$\frac{\partial}{\partial t} X_t + \nabla_{X_t} X_t = 0 \quad \left( \frac{\partial}{\partial t} Y_t = \nabla_{Y_t} Y_t \right).$$

## § 5. Возмущения потоков и хронологическая связность

Пусть  $M$  — гладкое многообразие,  $\mathbb{G}$  — проективный конечно порожденный  $C^\infty(M)$ -модуль и  $D_t(\varepsilon)$  — бесконечно дифференцируемо зависящее от  $\varepsilon \in \mathbb{R}$  семейство полных нестационарных дифференцирований модуля  $\mathbb{G}$ , а  $\Delta(\varepsilon)$  — аналогичное семейство стационарных дифференцирований.

Обозначим

$$Q_t(\varepsilon) = \exp \int_0^t \Delta(\varepsilon) d\varepsilon \circ \exp \int_0^t D_\tau(\varepsilon) d\tau —$$

гладко зависящее от параметра  $\varepsilon$  семейство потоков на  $\mathbb{G}$ . Всякому полуизоморфизму  $P$  модуля  $\mathbb{G}$  канонически соответствует диффеоморфизм расслоения реперов  $R(E)$  (см. п. 4.2), для обозначения которого будет использоваться символ  $R(P) : R(E) \rightarrow R(E)$ .

Пусть  $t \in \mathbb{R}$  и  $\rho \in R(E)$  — репер, одним из результатов наших дальнейших вычислений будет инвариантное выражение для касательного вектора в «точке»  $R(Q_t(0))(\rho)$  к кривой  $\varepsilon \mapsto R(Q_t(\varepsilon))(\rho)$  в  $R(E)$  при наличии вырождений сколь угодно высокого порядка.

Воспользовавшись формулой (3.10) из § 3 для дифференциала хронологической экспоненты, получаем

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} Q_t(\varepsilon) = Z_t^{(1)}(\varepsilon) \circ Q_t(\varepsilon), \quad (1)$$

$$\text{где } Z_t^{(1)}(\varepsilon) = \Delta(\varepsilon) + \int_0^t \text{Ad } Q_\tau(\varepsilon) \frac{\partial}{\partial \varepsilon} D_\tau(\varepsilon) d\tau.$$

Обозначим

$$Z_t^{(i)}(\varepsilon) = \frac{\partial^{i-1}}{\partial \varepsilon^{i-1}} \Delta(\varepsilon) + \int_0^t \text{Ad } Q_\tau(\varepsilon) \frac{\partial^i}{\partial \varepsilon^i} D_\tau(\varepsilon) d\tau, \quad i=1, 2, \dots$$

В таком случае (см. (3.11) из § 3)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} Z_t^{(i)}(\varepsilon) &= \frac{\partial^i}{\partial \varepsilon^i} \Delta(\varepsilon) + \int_0^t \text{Ad } Q_\tau(\varepsilon) \frac{\partial^{i+1}}{\partial \varepsilon^{i+1}} D_\tau(\varepsilon) d\tau + \\ &+ \int_0^t (\text{ad } Z_\tau^{(1)}(\varepsilon)) \circ \text{Ad } Q_\tau(\varepsilon) \frac{\partial^i}{\partial \varepsilon^i} D_\tau(\varepsilon) d\tau = \\ &= Z_t^{(i+1)} + \int_0^t (\text{ad } Z_\tau^{(1)}(\varepsilon)) \frac{\partial}{\partial \tau} Z_\tau^{(i)} d\tau = Z_t^{(i+1)} + (Z^{(1)} * Z^{(i)})_t, \end{aligned}$$

где «\*» — операция *хронологического умножения*, сопоставляющая произвольной паре нестационарных дифференцирований  $A_t, B_t$ , абсолютно непрерывно зависящих от  $t$ , дифференцирование  $(A*B)_t = \int_0^t \left[ A_\tau, \frac{d}{d\tau} B_\tau \right] d\tau$ . Заметим, что умножение «\*» неассоциативно, однако справедливо следующее соотношение, более слабое, чем ассоциативность:

$$A*(B*C) - B*(A*C) = (A*B - B*A)*C \quad \forall A, B, C.$$

Итак,

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} Z^{(i)} = Z^{(1)} * Z^{(i)} + Z^{(i+1)}, \quad i=1, 2, \dots \quad (2)$$

$$Z_t^{(i)}(0) = \frac{\partial^{i-1}}{\partial \varepsilon^{i-1}} \Delta(0) + \int_0^t \text{Ad } Q_\tau(0) \frac{\partial^i}{\partial \varepsilon^i} D_\tau(0) d\tau.$$

Соответствие  $\varepsilon \mapsto Q_t(\varepsilon)$  определяет гладкую кривую в пространстве нестационарных дифференцирований модуля  $\mathfrak{G}$ . В силу уравнения (1), эта кривая имеет смысл «правой угловой скорости» для кривой  $\varepsilon \mapsto Q_t(\varepsilon)$  в группе потоков на  $\mathfrak{G}$ .

Пусть  $Z_t^{(i)}(\varepsilon) \approx \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^{i-1} \zeta_t^i$  — разложение в ряд Тейлора. Система (2) дает рекуррентные формулы для последовательного вычисления нестационарных дифференцирований  $\zeta_t^i$ , используя только поток  $Q_t(0)$  и высшие производные по  $\varepsilon$  дифференцирований  $\Delta(\varepsilon)$  и  $D_t(\varepsilon)$  в нуле.

Обозначим

$$\Delta^{(i)} = \frac{\partial^i}{\partial \varepsilon^i} \Delta(0), \quad D_t^{(i)} = \frac{\partial^i}{\partial \varepsilon^i} D_t(0).$$

Имеем, в частности,

$$\begin{aligned}\xi_i^1 &= \Delta^{(0)} + \int_0^t \text{Ad } Q_\tau(0) D_\tau^{(1)} d\tau, \\ \xi_i^2 &= \Delta^{(1)} + \left[ \Delta^{(0)}, \int_0^t \text{Ad } Q_\tau(0) D_\tau^{(1)} d\tau \right] + \\ &+ \int_0^t \left[ \int_0^\tau \text{Ad } Q_\theta(0) D_\theta^{(1)} d\theta, \text{Ad } Q_\tau(0) D_\tau^{(1)} \right] d\tau + \int_0^t \text{Ad } Q_\tau(0) D_\tau^{(2)} d\tau.\end{aligned}$$

Чтобы получить компактную запись выражения для  $\xi_i^i$  при произвольном  $i$ , введем в рассмотрение специальную последовательность полиномов от неассоциативных переменных. Приведем соответствующие определения. Рассмотрим свободную неассоциативную алгебру со счетным числом образующих  $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ , обозначим ее  $\mathfrak{A}(\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ . Факторалгебра  $\mathfrak{A}(\lambda_1, \lambda_2, \dots)$  по идеалу, порожденному элементами  $a(bc) - b(ac) - (ab - ba)c$ ,  $a, b, c \in \mathfrak{A}(\lambda_1, \dots)$  называется *свободной хронологической алгеброй* с образующими  $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ . Обозначим эту свободную хронологическую алгебру буквой  $\Lambda$  и введем в  $\Lambda$  градуировку, положив  $\deg \lambda_i = i, i = 1, 2, \dots$  (Подробности о хронологических алгебрах, в частности, построение базиса свободной хронологической алгебры см. в [4].)

Зададим в алгебре  $\Lambda$  дифференцирование  $\pi$  степени 1, определив его действие на образующих формулой:  $\pi \lambda_i = \lambda_1 \lambda_i + \lambda_{i+1}$ . Интересующие нас полиномы имеют вид

$$\pi_k(\lambda_1, \dots, \lambda_k) = (\pi^{k-1}) \lambda_1.$$

В частности,  $\pi_1(\lambda_1) = \lambda_1$ ,  $\pi_2(\lambda_1, \lambda_2) = \pi \lambda_1 = \lambda_1 \lambda_1 + \lambda_2$ ,  $\pi_3(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \pi(\lambda_1 \lambda_1 + \lambda_2) = (\lambda_1 \lambda_1) \lambda_2 + \lambda_1(\lambda_1 \lambda_1) + 2\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2 \lambda_1 + \lambda_3$ . Соответствие

$$\lambda_i \mapsto \left( \Delta^{(i-1)} + \int_0^t \text{Ad } Q_\tau(0) D_\tau^{(i)} d\tau \right)$$

однозначно определяет гомоморфизм свободной хронологической алгебры  $\Lambda$  в алгебру нестационарных дифференцирований на  $M$  с операцией умножения  $**$ . Имеем

$$\begin{aligned}\xi_i^n &= \pi_n \left( \Delta^{(0)} + \int_0^\tau \text{Ad } Q_\theta(0) D_\theta^{(1)} d\theta, \dots, \Delta^{(n-1)} + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^\tau \text{Ad } Q_\theta(0) D_\theta^{(n)} d\theta \right),\end{aligned}\quad (8)$$

где полином  $\pi_n$  рассматривается относительно умножения  $**$ .

Зафиксируем некоторый момент времени  $T \in \mathbb{R}$ , репер  $\rho_0 \in R(E_{x_0}) \subset R(E)$  и обозначим  $\rho_T(\varepsilon) = R(Q_T(\varepsilon))(\rho_0)$ . Тогда  $\varepsilon \mapsto \rho_T(\varepsilon)$  — гладкая кривая в  $R(E)$ . Проведенные вычисления позволяют выписать явное выражение для касательной к этой кривой в точке  $\rho_T(0) \in R(E)$ , даже если  $\rho_T(0)$  является особой точкой данной кривой сколь угодно высокого порядка.

Каждому дифференцированию  $D$  модуля  $\mathcal{E}$  отвечает векторное поле  $R(D)$  на  $R(E)$ , определяемое правилом:

$$R(D) = \frac{d}{d\theta} \Big|_{\theta=0} R(e^{\theta D}).$$

Пусть  $k$  — наименьший такой номер, что  $\zeta_T^k$  отлично от нуля в точке  $x_0 \in M$ .

Из уравнения (1) без труда выводим

$$\rho_T(\varepsilon) = \rho_T(0) + \frac{\varepsilon^k}{k} R(\text{Ad } Q_T^{-1}(0) \zeta_T^k)(\rho_T(0)) + O(\varepsilon^{k+1}). \quad (4)$$

Нетрудно получить рекуррентные выражения непосредственно для  $\text{Ad } Q_t^{-1}(0) \zeta_t^{(k)}$ . Обозначим

$$Y_t^{(k)}(\varepsilon) = \text{Ad } Q_t^{-1}(0) Z_t^{(k)}(\varepsilon), \quad Y_t^{(1)}(\varepsilon) = \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^{i-1} \eta_t^i,$$

где

$$\eta_t^i = \text{Ad } Q_t^{-1}(0) \zeta_t^i.$$

Воспользовавшись уравнением (2), получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \frac{\partial}{\partial t} Z_t^{(k)} &= \left[ Z_t^{(1)}, \frac{\partial}{\partial t} Z_t^{(k)} \right] + \frac{\partial}{\partial t} Z_t^{(k+1)}, \\ \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left( \frac{\partial}{\partial t} + \text{ad } D_t(0) \right) Y_t^{(k)} &= \left[ Y_t^{(1)}, \left( \frac{\partial}{\partial t} + \text{ad } D_t(0) \right) Y_t^{(k)} \right] + \\ &+ \left( \frac{\partial}{\partial t} + \text{ad } D_t(0) \right) Y_t^{(k+1)}, \\ \left( \frac{\partial}{\partial t} + \text{ad } D_t(0) \right) Y_t^{(k)}(0) &= D_t^{(k)}, \quad Y_0^{(k)}(0) = \Delta^{(k-1)}. \end{aligned}$$

Как мы видим, уравнение для  $Y_t^{(k)}$  отличается от уравнения для  $Z_t^{(k)}$  лишь тем, что вместо  $\frac{\partial}{\partial t}$  используется оператор

$$\frac{\partial}{\partial t} + \text{ad } D_t(0).$$

Для коэффициентов разложения  $Y_t^{(k)}$  в ряд по степеням  $\varepsilon$  получаются уравнения

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial t} + \text{ad } D_t(0) \right) \eta_t^1 &= D_t^{(1)}, \quad \eta_0^{(1)} = \Delta^{(1)}, \\ \left( \frac{\partial}{\partial t} + \text{ad } D_t(0) \right) \eta_t^2 &= [\eta_t^1, D_t^{(1)}] + D_t^{(2)}, \quad \eta_0^2 = \Delta^{(1)} \end{aligned}$$

и т. д.

Следовательно,

$$\eta_t^1 = \exp \int_0^t -\operatorname{ad} D_\tau(0) d\tau \Delta^{(0)} + \int_0^t \exp \int_\tau^t -\operatorname{ad} D_\theta(0) d\theta D_\tau^{(1)} d\tau;$$

$$\eta_t^2 = \exp \int_0^t -\operatorname{ad} D_\tau(0) d\tau \Delta^{(1)} + \int_0^t \exp \int_\tau^t -\operatorname{ad} D_\theta(0) d\theta [\eta_\tau^1, D_\tau^{(1)}] d\tau;$$

и т. д.

Рассмотрим подробнее полученное выше выражение для  $\xi^k$ , представляющее  $\xi^k$  в виде полинома относительно хронологического умножения «\*»; при этом мы будем предполагать, что  $\Delta$  не зависит от  $\varepsilon$ , следовательно,  $\xi_0^k = 0$  при  $k \geq 2$ .

Интегрирование по частям дает для произвольных  $A_t, B_t$ :

$$(A*B)_t - (B*A)_t = [A_t, B_t] - [A_0, B_0].$$

В частности, если  $B_0 = 0$ , то  $A*B - B*A = [A, B]$ . Пусть  $x_0 \in M$ , в силу равенства (4), для нас особенно важно уметь вычислять значение  $\xi_t^k$  в точке  $x_0$  при условии, что  $\xi_t^i$  обращаются в этой точке в нуль для  $i < k$ . Ясно, что это значение не изменится, если к дифференцированию  $\varepsilon^k \xi_t^k$  прибавить произвольный коммутаторный полином от  $\varepsilon^i \xi_t^i$ ,  $i < k$ . В этом смысле, описанная

выше последовательность хронологических полиномов не является единственно возможной. Последовательности, отличающиеся от (3), приведены в [3], [4] (см. также [2]). Сформулированная ниже лемма позволяет обозреть все возможности. Пусть  $\Lambda$ , как и прежде, свободная хронологическая алгебра с образующими  $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ ,  $\deg \lambda_i = i$ .

Операция коммутирования  $(a, b) \mapsto (ab - ba)$ , где  $a, b \in \Lambda$ , определяет в  $\Lambda$  структуру градуированной алгебры Ли — тождество Якоби легко выводится из соотношения  $a(bc) - b(ac) = (ab - ba)c$ . Эту алгебру Ли обозначим символом  $[\Lambda]$  и положим, как обычно,  $(\operatorname{ad} a)b = ab - ba$ ,  $\forall a, b \in \Lambda$ .

Лемма а. Пусть  $\mathfrak{L}$  — подалгебра Ли в  $[\Lambda]$ , порожденная элементами  $\pi_i(\lambda_1, \dots, \lambda_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , а  $\mathfrak{L}_k$  — совокупность всех однородных элементов степени  $k$  в  $\mathfrak{L}$ . Тогда

$$\mathfrak{L}_2 = \operatorname{Span}\{\lambda_1 \lambda_1 + \lambda_2\}, \quad \mathfrak{L}_{k+1} = \pi \mathfrak{L}_k + (\operatorname{ad} \lambda_1) \mathfrak{L}_k, \quad k \geq 2.$$

Доказательство. Ясно, что  $\mathfrak{L}$  — это минимальная подалгебра Ли в  $[\Lambda]$ , содержащая  $\lambda_1$  и выдерживающая дифференцирование  $\pi$ . В пространстве  $[\Lambda] \oplus \mathbb{R}\pi$  можно ввести структуру градуированной алгебры Ли, положив

$$[\pi, a] \stackrel{\text{def}}{=} \pi a, \quad \forall a \in \Lambda, \quad \deg \pi = 1$$

(тождество Якоби вытекает из правила Лейбница для дифференцирования  $\pi$ ). В этом случае подалгебра Ли в  $[\Lambda] \oplus \mathbb{R}\pi$ , порожденная элементами  $\lambda_1, \pi$ , совпадает с  $\mathfrak{L} \oplus \mathbb{R}\pi$ , а однородная

компонента степени  $k$  этой подалгебры совпадает с  $\mathfrak{g}_k$  при  $k \geq 2$ . Утверждение леммы теперь вытекает из стандартных свойств алгебр Ли (см., например, [7], гл. 4, § 8).

Рассмотрим отдельно случай, когда семейство дифференцирований  $D_t(\varepsilon)$  аффинно зависит от  $\varepsilon$  (а  $\Delta$ , по-прежнему, не зависит от  $\varepsilon$ ), иными словами  $D_t(\varepsilon) = A_t + \varepsilon B_t$ . В этой ситуации  $D_t^{(i)} = Z_t^{(i)}(\varepsilon) \equiv 0$  при  $i \geq 2$ , и мы вправе обозначить  $Z_t^{(1)} = Z_t$ . Основные уравнения (1), (2) принимают вид

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} Q_t = Z_t \circ Q_t,$$

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} Z_t = \int_0^t [Z_\tau, \dot{Z}_\tau] d\tau, \quad Z_t(0) = \Delta + \int_0^t \text{Ad } Q_\tau(0) B_\tau d\tau.$$

Таким образом, кривая  $\varepsilon \mapsto Q_t(\varepsilon)$  является геодезической для некоторой правоинвариантной связности  $\nabla$  на группе потоков, причем для произвольного абсолютно непрерывно зависящего от  $\tau$  нестационарного поля  $Z_\tau$  имеем

$$(\nabla_{Z_\tau} Z_\tau)_t = \int_0^t [Z_\tau, \dot{Z}_\tau] d\tau.$$

**З а м е ч а н и е.** Строго говоря, правоинвариантные связности и их геодезические были определены выше только для конечномерных групп Ли. Однако использованные при этом формальные соотношения без всяких изменений переносятся на группу потоков. Кривая  $\varepsilon \mapsto Q_t(\varepsilon)$  и ее разложение получают при этом прозрачную геометрическую интерпретацию.

Искомая нами связность уже определена «на диагонали», чтобы однозначно определить ее везде остается подобрать кручение. Если потребовать выполнения равенства  $T_\nabla = 0$ , то для произвольных нестационарных абсолютно непрерывных полей  $A_\tau, B_0$

$$(\nabla_{A_\tau} B_\tau)_t = \int_0^t [A_\tau, \dot{B}_\tau] d\tau + \frac{1}{2} [A_0, B_0]. \quad (5)$$

При этом кривизна  $R_\nabla(A_\tau, B_\tau) = \frac{1}{4} \text{ad}[B_0, A_0]$ .

Рассмотрим подробнее геодезический поток на группе потоков, определяемый связностью  $\nabla$ .

**П р е д л о ж е н и е.** Пусть  $A_t$  — нестационарное дифференцирование на  $\mathfrak{g}$ , абсолютно непрерывно зависящее от  $t$ ,  $Q_t^0$  — поток на  $\mathfrak{g}$ . Тогда существует единственная геодезическая  $\varepsilon \mapsto Q_t(\varepsilon)$  связности  $\nabla$ , удовлетворяющая условиям  $Q_t(0) = Q_t^0$ ,  $\frac{\partial}{\partial \varepsilon} Q_t(0) = A_t \circ Q_t^0$ . Эта геодезическая определяется формулой

$$Q_t(\varepsilon) = e^{\varepsilon A_0} \overrightarrow{\exp} \int_0^t \varepsilon \dot{A}_\tau d\tau Q_t^0.$$

То, что приведенное выражение действительно определяет геодезическую связности  $\nabla$ , следует из проведенных выше рассуждений. Единственность мы докажем несколько позже.

Обозначим  $\Omega_t(\varepsilon, A)$  правую угловую скорость геодезической

$$Q_t(\varepsilon) = e^{\varepsilon A_0} \overrightarrow{\exp} \int_0^t \varepsilon \dot{A}_\tau d\tau, \quad \frac{\partial}{\partial \varepsilon} Q_t(\varepsilon) = \Omega_t(\varepsilon, A) \circ Q_t(\varepsilon).$$

Из равенства (1) следует, что

$$\Omega_t(\varepsilon, A) = A_0 + \int_0^t \text{Ad } Q_\tau(\varepsilon) \dot{A}_\tau d\tau.$$

Из формулы вариаций прямым вычислением выводится тождество

$$\Omega_t(\varepsilon_1 + \varepsilon_2, A) = \Omega(\varepsilon_1, \Omega(\varepsilon_2, A)). \quad (6)$$

Оказывается, это важное свойство сохраняется, если скаляр заменить на скалярную функцию от  $t$ . Более точно, пусть  $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  — абсолютно непрерывная функция. Положим

$$Q_t(u) = e^{u(0)A_0} \overrightarrow{\exp} \int_0^t \dot{u}(\tau) \dot{A}_\tau d\tau, \quad \Omega_t(u, A) = u_0 A_0 + \int_0^t \text{Ad } Q_\tau(u) \dot{A}_\tau d\tau.$$

Тогда

$$\Omega_t(u + v, A) = \Omega_t(u, \Omega(v, A)), \quad \forall u, v, A. \quad (7)$$

Последнее тождество также является прямым следствием формулы вариаций. Оно выражает тот факт, что соответствие  $u \mapsto \Omega(u, \cdot)$  определяет (нелинейное) действие аддитивной группы  $\{u\} = \mathbb{R} \oplus L^\infty(\mathbb{R})$  в пространстве абсолютно непрерывных по  $t$  нестационарных векторных полей.

Мы воспользуемся тождеством (6) для доказательства единственности геодезической с данными начальными условиями. Собственно, мы должны доказать единственность решения задачи Коши для уравнения

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} V_t(\varepsilon) = \int_0^t [V_\tau(\varepsilon), \dot{V}_\tau(\varepsilon)] d\tau, \quad V_t(0) = A_t. \quad (8)$$

Пусть  $V_t(\varepsilon)$  — некоторое решение; достаточно установить, что  $\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \Omega_t(-\varepsilon, V(\varepsilon)) \equiv 0$ . Поскольку, очевидно,  $V_0(\varepsilon) \equiv A_0$ , то достаточно доказать равенство  $\frac{\partial^2}{\partial \varepsilon \partial t} \Omega_t(-\varepsilon, V(\varepsilon)) \equiv 0$ . Обозначим

$$\omega_t(\varepsilon) = \frac{\partial}{\partial t} \Omega_t(-\varepsilon, V(\varepsilon)) = e^{-\varepsilon \text{ad} A_0} \overrightarrow{\exp} \int_0^t -\varepsilon \text{ad} V_\tau(\varepsilon) d\tau \dot{V}_t(\varepsilon)$$

и

$$\hat{\omega}_t(\varepsilon) = e^{-\varepsilon \text{ad} A_0} \overrightarrow{\exp} \int_0^t -\varepsilon \text{ad} V_\tau(\varepsilon) d\tau V_t(\varepsilon).$$

Дифференцирование хронологических экспонент приводит к тождествам

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{\omega} = \omega - \varepsilon [\omega, \hat{\omega}], \quad \hat{\omega}_0(\varepsilon) = A_0$$

и

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \omega = [\hat{\omega}, \omega] - \left[ \int_0^t \omega + \varepsilon [\hat{\omega}, \omega] d\tau, \omega \right] - [A_0, \omega].$$

Следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \omega = 0.$$

Соотношения, полученные в настоящем параграфе, находят приложения при исследовании гладких управляемых систем. Для этого используется слегка упрощенный вариант развитой здесь теории, при котором вместо семейств дифференцированных  $D_t(\varepsilon)$ ,  $\Delta(\varepsilon)$  модуля  $\mathfrak{G}$  рассматриваются семейства векторных полей на  $M$ . Мы завершим параграф описанием инвариантных коммутаторных выражений для высших вариаций управляемой системы.

Рассмотрим систему

$$\dot{p} = p \circ f_t(u), \quad u \in \mathbb{R}^r, \quad p \in \text{Iso } M. \quad (9)$$

Здесь  $f_t(u)$  — бесконечно дифференцируемо зависящее от  $u \in \mathbb{R}^r$  семейство нестационарных векторных полей на  $M$ . Допустимыми управлениями называются элементы пространства  $L_\infty^r[0, T]$  ограниченных в существенном измеримых  $r$ -мерных вектор-функций на  $[0, T]$ . Предполагается, что все нестационарные поля вида  $f_t(u(t))$ ,  $u(\cdot) \in L_\infty^r[0, T]$  являются полными.

Зафиксируем некоторое допустимое управление  $\tilde{u}(\cdot) \in L_\infty^r[0, T]$  и введем обозначения

$$\begin{aligned} \tilde{f}_t &= f_t(\tilde{u}(t)), \quad \vec{v}^k \tilde{f}_t = \frac{\partial^k}{\partial u^k} f_t|_{u=\tilde{u}(t)} (\overbrace{v, \dots, v}^{k \text{ раз}}), \quad k = 1, 2, \dots, \forall v \in \mathbb{R}^r. \\ \tilde{p}_t &= \overrightarrow{\exp} \int_0^t \tilde{f}_\tau d\tau. \end{aligned}$$

Возмущение начальных условий посредством векторного поля  $\varepsilon \Delta \in \text{Der } M$  и возмущение данного управления  $\tilde{u}(t)$  посредством управляющей функции  $\varepsilon v(t)$  приводит к семейству

$$Q_t(\varepsilon) = e^{\varepsilon \Delta} \circ \exp \int_0^t f_\tau(\tilde{u}(\tau) + \varepsilon v(\tau)) d\tau.$$

Воспользовавшись проведенными ранее вычислениями, получим

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} Q_t = Z^{(1)}(\varepsilon) \circ Q_t, \quad Q_t(0) = \tilde{p}_t.$$

Причем коэффициенты разложения угловой скорости  $Z_t^{(1)}(\varepsilon)$  в ряд Тейлора по степеням  $\varepsilon$ ,  $Z_t^{(1)}(\varepsilon) \approx \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^{k-1} \zeta_t^k$ , имеют вид (см. (3)):

$$\zeta_t^k = \pi_k \left( \Delta + \int_0^t \text{Ad } \tilde{p}_\theta \vec{v}(\theta) \tilde{f}_\theta d\theta, \dots, \int_0^t \text{Ad } \tilde{p}_\theta \vec{v}^k(\theta) \tilde{f}_\theta d\theta \right), \quad (10)$$

Выражение (10) однородно (степени однородности  $k$ ) зависит от возмущения  $(\Delta, v(\cdot))$ . Отображение

$$(\Delta, v(\cdot)) \mapsto \pi_k \left( \Delta + \int_0^t \text{Ad } \tilde{p}_\theta \vec{v}(\theta) \tilde{f}_\theta d\theta, \dots, \int_0^t \text{Ad } \tilde{p}_\theta \vec{v}^k(\theta) \tilde{f}_\theta d\theta \right)$$

называется  $k$ -й вариацией управляемой системы (9) «вдоль  $\tilde{u}(t)$ ».

Разумеется, можно выписать и соответствующие выражения для  $\eta_t^k = \text{Ad } \tilde{p}_t^{-1} \zeta_t^k$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. Аграчев А. А., Вахрамеев С. А. Хронологические ряды и теорема Коши—Ковалевской // Итоги науки и техн. ВИНТИ. Пробл. геометрии.— 1981.— 12.— С. 165—189. (РЖМат, 1981, 10Б307).
2. —, —, Гамкрелидзе Р. В. Дифференциально-геометрические и теоретико-групповые методы в теории оптимального управления // Итоги науки и техн. ВИНТИ. Пробл. геометрии.— 1983.— 14.— С. 3—56 (РЖМат, 1983, 5Б609).
3. —, Гамкрелидзе Р. В. Экспоненциальное представление потоков и хронологическое исчисление // Мат. сб.— 1978.— 107, № 4.— С. 467—532. (РЖМат, 1979, 4Б583).
4. —, — Хронологические алгебры и нестационарные векторные поля // Итоги науки и техн. ВИНТИ. Пробл. геометрии.— 1980.— 11.— С. 135—176. (РЖМат, 1980, 9Б451).
5. Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. I, II. Пер. с англ.— М.: Наука, 1981.— 344 с.;— 414 с.
6. Сарычев А. В. Интегральное представление траекторий управляемой системы с обобщенной правой частью.— Дифференц. уравнения.— 1988.— 24, № 9.— С. 1551—1564.

7. Серр Ж.-П. Алгебры Ли и группы Ли. Пер. с англ.— М.: Мир, 1969.— 375 с. (РЖМат, 1969, 12А528К).
  8. Уорнер Ф. Основы теории гладких многообразий и групп Ли. Пер. с англ.— М.: Мир, 1987.— 304 с.
  9. Gamkrelidze R. Exponential representation of solutions of ordinary differential equations // Proc. Equadiff. V. Conf. Prague, 1977.— Springer, 1978.
  10. Nagano T. Linear differential systems with singularities and applications to transitive Lie algebras // J. Math. Soc. Japan.— 1966.— 18, № 4.— С. 398—404. (РЖМат, 1969, 1А430).
  11. Stefan P. Accessibility, orbits and foliations with singularities // Proc. London Math. Soc.— 1974.— 29, № 4.— С. 699—713. (РЖМат, 1975, 7А755).
  12. Sussmann H. J. Orbits of families of vector fields and integrability of distributions // Trans. Amer. Math. Soc.— 1973.— 79.— С. 171—188. (РЖМат, 1974, 5А596).
-