

Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Аграчев, Квадратичные отображения в геометрической теории управления, *Итоги науки и техн. Сер. Пробл. геом.*, 1988, том 20, 111–205

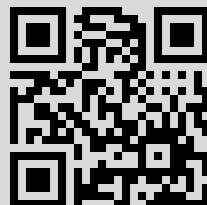
Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 95.129.140.250

17 ноября 2015 г., 13:23:05



КВАДРАТИЧНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ В ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ

А. А. Аграчев

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

1. Пусть M — дифференцируемое многообразие с выделенной точкой $\mu_0 \in M$ и $f_0(\mu)$ — гладкое векторное поле на M . Полю f отвечает кривая на M — решение дифференциального уравнения $\frac{d\mu}{dt} = f_0(\mu)$ с начальным условием $\mu(0) = \mu_0$. Пусть $g(\mu)$ — еще одно гладкое векторное поле. Возмущая поле f_0 с помощью полей, пропорциональных g , получим новые кривые — траектории уравнений вида

$$\frac{d\mu}{dt} = f_0(\mu) + u(t)g(\mu) \quad (1)$$

с тем же начальным условием μ_0 . В качестве $u(t)$ можно брать произвольную локально суммируемую функцию, но коль скоро такая функция выбрана, уравнение (1) (вместе с начальным условием) однозначно определяет траекторию $\mu(t)$, $t \in \mathbb{R}$. Возникают отображения $F_t: u(\cdot) \mapsto \mu(t)$ пространства функций в многообразии M . Отображения довольно замысловатые: в то время как скорость каждой траектории, проходящей через точку $\mu \in M$, лежит в одной и той же аффинной прямой $f_0(\mu) + ug(\mu)$, $u \in \mathbb{R}$, совокупность точек всех траекторий может образовывать множество сколь угодно большой размерности; как правило, образ отображения F_t имеет непустую внутренность в M .

Можно рассмотреть более общую ситуацию, заменив $f_0(\mu) + ug(\mu)$ на произвольное семейство $f(\mu, u)$ векторных полей на M , гладко зависящее от $u \in U$, где U — некоторое гладкое многообразие.

Снова определены отображения $F_t: u(\cdot) \mapsto \mu(t)$, где

$$\frac{d}{dt} \mu(t) = f(\mu(t), u(t)), \quad \mu(0) = \mu_0. \quad (2)$$

Однопараметрическое семейство отображений F_t , $t > 0$, мы называем гладкой управляемой системой.

Согласно принятой в этой работе точке зрения, теория оптимального управления состоит в изучении эволюции образа и

множеств уровня отображений F_t с ростом параметра t . Здесь проводится только локальное исследование — изучается поведение отображений F_t вблизи фиксированной критической точки $\tilde{u}(\cdot)$ (легко видеть, что любая точка, критическая для F_t , критична также для всех F_τ , $0 < \tau < t$).

Взгляд на управляемую систему как на семейство отображений $u(\cdot) \rightarrow \mu_t$, $t \geq 0$, восходит к основополагающим работам Л. С. Понтрягина, В. Г. Болтянского, Р. В. Гамкрелидзе и Е. Ф. Мищенко, подытоженным в книге [14]. В работе [11] явно сформулирован геометрический подход к оптимизационным задачам, при котором оптимальность в том или ином смысле траектории $\bar{\mu}_\tau = F_\tau(u(\cdot))$, $0 \leq \tau \leq t$, интерпретируется как принадлежность точки μ_t границе образа F_t или некоторой модификации этого отображения. Если речь идет о локальной оптимальности, то рассматривается сужение F_t на малую окрестность $\tilde{u}(\cdot)$.

Ключевой результат классической теории — принцип максимума Л. С. Понтрягина — дает необходимое условие оптимальности, полученное при помощи линеаризации системы (2) по переменной u вдоль траектории $\bar{\mu}_\tau$. Этот принцип оказался очень эффективным орудием для решения задач оптимального управления. Тем не менее, во многих задачах, в первую очередь, для важных в приложениях систем, обладающих т. н. особыми экстремальными, применение принципа максимума оказывается недостаточным для выявления оптимальных траекторий (см., например, [10]). Для исследования таких систем усилиями многих специалистов были найдены различные дополнительные условия оптимальности, учитывающие приближения более высокого порядка, прежде всего второго. В рамках геометрического подхода условиями оптимальности высокого порядка, начиная с середины 70-х годов занимались также Р. В. Гамкрелидзе и автор. Для того, чтобы добиться настоящего понимания, пришлось основательно перестроить язык теории и значительно расширить постановку задачи (см. [3] — [7]). Важным моментом в начале этой деятельности явилось знакомство с работой [18].

Интуитивно ясно, что строгая локальная оптимальность траектории $\bar{\mu}_\tau = F_\tau(\tilde{u}(\cdot))$ — это почти то же самое, что изолированность точки $\tilde{u}(\cdot)$ на множествах уровня $F_\tau^{-1}(\bar{\mu}_\tau)$. В настоящей работе предпринято изучение локальной структуры множеств уровня $F_t^{-1}(\bar{\mu}_t)$: традиционный вопрос о том, лежит ли точка μ_t на границе или внутри образа малой окрестности $\tilde{u}(\cdot)$ при отображении F_t , вкладывается в задачу вычисления относительных групп гомологий $H_*(F_t^{-1}(\bar{\mu}_t); F_t^{-1}(\bar{\mu}_t) \setminus \tilde{u}(\cdot))$.

Классическими примерами и образцами являются регулярные вариационные задачи. Стандартная вариационная задача в

R^n с интегральным функционалом

$$I = \int_0^T \varphi \left(x(\tau), \frac{dx(\tau)}{d\tau} \right) d\tau, \quad \varphi > 0,$$

и краевыми условиями $x(0) = x_0$, $x(T) = x_1$, по существу, эквивалентна управляемой системе

$$F_\theta: u(\cdot) \mapsto x(\theta), \quad \text{где} \quad \frac{dx}{d\theta} = \frac{u(\theta)}{\varphi(x, u(\theta))}.$$

В самом деле, замена времени $\theta(t) = \int_0^t \varphi \left(x(\tau), \frac{dx(\tau)}{d\tau} \right) d\tau$ при-

водит к гомеоморфизму множеств уровня $F_\theta^{-1}(x_1)$ и $I^{-1}(\theta)$. При таком гомеоморфизме критические точки отображения F_θ переходят в критические точки (экстремали) функционала I .

Кроме того, при разумных ограничениях на φ оказывается, что:

минимум функционала $\Leftrightarrow x_1$ — граничная точка

I равен θ образа F_θ .

Важнейшую информацию о поведении функционала I в окрестности фиксированной экстремали $\tilde{x}(\cdot)$ дает вторая вариация (гессиан I в $\tilde{x}(\cdot)$). Для регулярных задач вторая вариация является интегральной квадратичной формой конечного индекса, причем индекс этой формы полностью определяет поведение функционала I вблизи $\tilde{x}(\cdot)$.

Аналогом второй вариации для общей управляемой системы является гессиан отображения F_t в критической точке $\tilde{u}(\cdot)$. Однако, в отличие от регулярной вариационной задачи, возникающие квадратичные формы обычно оказываются сингулярными, и, что даже более существенно, гессиан является, вообще говоря, не скалярной квадратичной формой, а векторным квадратичным отображением! Причем эти эффекты возникают не в каких-то патологических случаях, а для совершенно естественных систем: например, когда $f(\mu, u) = f_0(\mu) + ug(\mu)$, $u \in \mathbb{R}$, $f_0(\mu)$, $g(\mu)$ — левоинвариантные поля на полупростой группе Ли. Явления такого рода сильно обогащают предмет по сравнению с классической ситуацией, и существенной частью исследования становится изучение топологии квадратичных отображений. Однако, прежде, чем описывать полученные результаты, необходимо уточнить исходные понятия.

2. На протяжении всей работы гладкость означает бесконечную дифференцируемость, а кусочно-непрерывные и кусочно-гладкие функции вещественного аргумента считаются непрерывными слева; группы гомологий (когомологий) везде, где не оговорено противное, есть группы сингулярных гомологий (когомологий) топологического пространства; утверждение о том, что типичный элемент данного топологического пространства

обладает неким свойством, означает, что это свойство выполнено для всех элементов некоторого открытого всюду плотного подмножества.

Пусть M, U — гладкие многообразия размерностей d и r соответственно, $\mu_0 \in M$ и $\mu \rightarrow f_t(\mu, u)$ — гладко зависящее от $u \in U$ и кусочногладко от $t \in \mathbb{R}$ семейство гладких векторных полей на M . Таким образом, $f_t(\mu, u) \in T_\mu M \forall \mu \in M, u \in U, t \in \mathbb{R}$. Многообразие M называют фазовым пространством, а U — множеством управляющих параметров.

З а м е ч а н и е. Как правило, в теории управления рассматриваются множества управляющих параметров более общей природы, чем гладкие многообразия. Методы настоящей работы вполне приложимы в случае, когда U — многообразие с краем и «с углами». Они рассчитаны на такие приложения, но суть дела, на наш взгляд, лучше видна в чисто гладкой ситуации. Встречаются также задачи, в которых $f_t(\mu, u)$ недифференцируемо зависит от μ , к таким задачам наши методы принципиально неприменимы.

Через $L_\infty([0, t]; U)$, как обычно, обозначается совокупность всех таких измеримых кривых $u(\tau) \in U, \tau \in [0, t]$, что множество $u([0, t] \setminus \Gamma) \subset U$ компактно для некоторого (зависящего от $u(\cdot)$) подмножества меры нуль $\Gamma \subset [0, t]$. Легко видеть, что $L_\infty([0, t], U)$ — банахово многообразие класса C_∞ , моделируемое на $L^\infty_\tau[0, t]$.

Пусть $u(\cdot) \in L_\infty([0, t]; U)$. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{d\mu}{d\tau} = f_\tau(\mu, u(\tau)), \quad \tau \in [0, t] \quad (3)$$

с начальным условием $\mu(0) = \mu_0$.

Решение такого уравнения, вообще говоря, не определено на всем отрезке $[0, t]$. Чтобы избежать подобных затруднений, предположим выполненными следующие условия:

Многообразие M вложено в евклидово пространство $\mathbb{R}^N$ в качестве гладкого подмногообразия и, одновременно, замкнутого подмножества; в частности $f_t(\mu, u) \in T_\mu M \subset T_\mu \mathbb{R}^N = \mathbb{R}^N$. Для любых $K \subseteq U, t > 0$, найдется такая константа $c_t(K)$, что

$$|f_\tau(\mu, u)| \leq c_t(K)(1 + |\mu|) \text{ при } u \in K, \tau \in [0, t], \mu \in M \subset \mathbb{R}^N.$$

Сделанное предположение, очевидно, обеспечивает продолжимость решений уравнений вида (3) на весь отрезок $[0, t]$. Определим отображение $F_t: L_\infty([0, t]; U) \rightarrow M$, положив $F_t(u(\cdot)) = \mu(t)$, где $\mu(\tau), 0 \leq \tau \leq t$, удовлетворяет дифференциальному уравнению (3), $\mu(0) = \mu_0$.

Нетрудно показать, что F_t — бесконечно дифференцируемое отображение. Критические точки отображения F_t по аналогии с классическим вариационным исчислением называются экстремалими.

Зафиксируем некоторую точку $\tilde{u}(\cdot) \in L_\infty([0, t]; U)$, пусть $\tilde{\mu}_t = F_t(\tilde{u}(\cdot))$.

Нас интересуют следующие вопросы:

I) Верно ли, что $\tilde{\mu}_t \in \text{int } F_t(\mathcal{O}_{\tilde{u}(\cdot)})$ для любой окрестности $\mathcal{O}_{\tilde{u}(\cdot)}$ точки $\tilde{u}(\cdot)$ в $L_\infty([0, t]; U)$?

II) Что можно сказать о топологии пересечений множества уровня $F_t^{-1}(\tilde{u}(\cdot))$ с малыми окрестностями точки $\tilde{u}(\cdot)$, в первую очередь, о группах гомологий

$$H_*(F_t^{-1}(\tilde{\mu}_t), F_t^{-1}(\tilde{\mu}_t) \setminus \tilde{u}(\cdot))?$$

Если $\tilde{u}(\cdot)$ — регулярная точка отображения F_t , то, согласно теореме о неявной функции, найдутся такие локальные координаты $\Phi: \mathcal{O}_{\tilde{u}(\cdot)} \rightarrow L_\infty^r[0, t]$ и $\varphi: \mathcal{O}_{\tilde{\mu}_t} \rightarrow \mathbb{R}^d$, определенные в некоторых окрестностях точек $\tilde{u}(\cdot) \in L_\infty([0, t]; U)$ и $\tilde{\mu}_t \in M$, что $\varphi \circ F_t \circ \Phi^{-1}: L_\infty^r[0, t] \rightarrow \mathbb{R}^d$ — линейное сюръективное отображение. Следовательно, ответ на вопрос I) положительный. Множество уровня $F_t^{-1}(\tilde{\mu}_t)$ вблизи $\tilde{u}(\cdot)$ устроено совсем просто: $F_t^{-1}(\tilde{\mu}_t) \cap \mathcal{O}_{\tilde{u}(\cdot)}$ диффеоморфно подпространству коразмерности d в $L_\infty^r[0, t]$, в частности, $H_i(F_t^{-1}(\tilde{\mu}_t), F_t^{-1}(\tilde{\mu}_t) \setminus \tilde{u}(\cdot)) = 0$, $i \geq 0$.

Предположим теперь, что $\tilde{u}(\cdot)$ — экстремаль и, кроме того, $u(\tau)$ кусочно гладко зависит от $\tau \in [0, t]$. Обозначим через F'_t дифференциал отображения F_t в точке $\tilde{u}(\cdot)$, тогда $F'_t: T_{\tilde{u}(\cdot)} L_\infty([0, t]; U) \rightarrow T_{\tilde{\mu}_t} M$ — линейное отображение. Касательное пространство $T_{\tilde{u}(\cdot)} L_\infty([0, t]; U)$ состоит из всех таких измеримых ограниченных в существенном кривых $v(\tau)$, $0 \leq \tau \leq t$, в TU , что $v(\tau) \in T_{\tilde{u}(\tau)} U \forall \tau \in [0, t]$. Каждое из пространств $T_{\tilde{u}(\tau)} U$, $0 \leq \tau \leq t$, изоморфно $\mathbb{R}^r$, причем изоморфизмы $I_\tau: T_{\tilde{u}(\tau)} U \rightarrow \mathbb{R}^r$ можно, разумеется, выбрать кусочно гладко зависящими от τ . Получается изоморфизм $v(\tau) \mapsto I_\tau v(\tau)$, $\tau \in [0, t]$, пространств $T_{\tilde{u}(\cdot)} L_\infty([0, t]; U)$ и $L_\infty^r[0, t]$. Поскольку экстремаль $\tilde{u}(\cdot)$ в дальнейшем фиксирована, удобно, в целях упрощения обозначений, зафиксировать раз и навсегда некоторый изоморфизм пространств $T_{\tilde{u}(\cdot)} L_\infty([0, t]; U)$ и $L_\infty^r[0, t]$, и в дальнейшем вообще не различать эти пространства. В частности, мы будем писать

$$F'_t: L_\infty^r[0, t] \rightarrow T_{\tilde{\mu}_t} M.$$

Тот факт, что $\tilde{u}(\cdot)$ экстремаль (критическая точка отображения F_t), эквивалентен соотношению

$$\text{im } F'_t \neq T_{\tilde{\mu}_t} M.$$

Пусть $L_\infty[0, t] \supset \ker F'_t$ — ядро, а $T_{\tilde{u}_t} M / \text{im } F'_t = \text{coker } F'_t$ — коядро отображения F_t в точке $\tilde{u}(\cdot)$. Обозначим через F_t гессиан отображения F_t в точке $\tilde{u}(\cdot)$, тогда

$$F''_t: \ker F'_t \times \ker F'_t \rightarrow \text{coker } F'_t$$

— симметричное билинейное отображение (см. [1, § 1]).

3. Ответы на вопросы I), II) мы будем искать, изучая квадратичное отображение $v(\cdot) \mapsto F''_t(v(\cdot), v(\cdot))$, $v(\cdot) \in \ker F'_t$. В случае, когда $\dim \text{coker } F'_t = 1$, это квадратичное отображение является, по существу, вещественной квадратичной формой. Если, вдобавок, квадратичная форма оказывается знакоопределенной на некотором подпространстве конечной коразмерности в $\ker F'_t$, то для ответа на интересующие нас вопросы достаточно найти ее индекс инерции (см. [1, § 1]). В действительности, однако, эти замечательные свойства очень часто не выполняются. Чтобы не быть голословным, приведу характерный пример.

Предположим, что на M определена структура полупростой группы Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{M}$, причем $\mu_0 = e$ — единичный элемент в M .

Рассмотрим управляемую систему на M , определяемую дифференциальным уравнением

$$\frac{d\mu}{d\tau} = f_0(\mu) + u(\tau) g(\mu), \quad \mu(0) = e, \quad u(\tau) \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq \tau \leq t,$$

где $f_0(\mu)$, $g(\mu)$ — левоинвариантные векторные поля на M . Положим $\tilde{u}(\tau) = 0$, $0 \leq \tau \leq t$.

Пусть $a = f_0(e)$, $b = g(e)$ — элементы алгебры Ли $\mathfrak{M} = T_e M$. Вместо отображения $F_t: u(\cdot) \mapsto \mu(t)$ удобно рассматривать эквивалентное ему отображение

$$G_t: u(\cdot) \mapsto e^{-ta} \mu(t).$$

Легко видеть, что $G_t(0) = e$, пусть $G'_t: L_\infty[0, t] \rightarrow \mathfrak{M}$, $G''_t: \ker G'_t \times \ker G'_t \rightarrow \text{coker } G'_t$ — дифференциал и гессиан отображения G_t в нуле. Несколько позже, в § 2, будут получены явные выражения для производных сколь угодно высокого порядка произвольной гладкой управляемой системы. Пока же приведем нужные нам формулы без обоснования

$$G'_t v(\cdot) = \int_0^t e^{\tau a} a b v(\tau) d\tau, \quad \forall v(\cdot) \in L_\infty[0, t], \quad (4)$$

$$G''_t(v_1(\cdot), v_2(\cdot)) = \int_0^t \left[\int_0^\tau e^{\theta a} a b v_1(\theta) d\theta, e^{\tau a} a b v_2(\tau) \right] d\tau + \text{im } G'_t,$$

$$\forall v_1(\cdot), v_2(\cdot) \in \ker G'_t;$$

квадратичные скобки $[\cdot, \cdot]$ обозначают, как обычно, коммутатор в алгебре Ли $\mathfrak{M}$, и $(\text{ad}^n a)b = [a, (\text{ad}^{n-1} a)b]$, $n=1, 2, \dots$, $(\text{ad}^0 a)b = b$.

Из (4) следует, что $\text{im } G_i' = \text{span}\{(\text{ad}^n a)b \mid n=0, 1, \dots\}$. Предположим, что a — регулярный элемент полупростой алгебры Ли $\mathfrak{M}$. Пусть H_a — подалгебра Картана, содержащая a , и $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — форма Киллинга на $\mathfrak{M}$. Поскольку $\langle H_a, \text{ad}^n ab \rangle = 0 \forall n > 0$, а сужение формы Киллинга на H_a невырождено, то $\dim(H_a \cap \text{im } G_i') \leq 1$. Следовательно, $\dim \text{coker } G_i' \geq \text{rank } \mathfrak{M} - 1$, где, по определению, $\text{rank } \mathfrak{M} = \dim H_a$.

Таким образом, для любой алгебры Ли ранга не меньше трех G_i'' заведомо является векторным (не скалярным) билинейным отображением. Кроме того, его скалярные проекции

$$\psi G_i'(v_1(\cdot), v_2(\cdot)) = \int_0^t \psi \left[\int_0^\tau e^{\theta \text{ad} a} b v_1(\theta) d\theta, e^{\tau \text{ad} a} b v_2(\tau) \right] d\tau,$$

где $\psi \in (\text{im } G_i')^\perp$, являются вполне непрерывными формами, и ни о какой знакоопределенности думать не приходится.

Возвратимся к общему случаю. Разумным условием невырожденности билинейного отображения F_i'' является требование, чтобы нуль в пространстве $\text{coker } F_i'$ не являлся критическим значением отображения

$$v(\cdot) \mapsto F_i''(v(\cdot), v(\cdot)), \quad v(\cdot) \in \ker F_i' \setminus 0. \quad (5)$$

Если $\dim \text{coker } F_i' = 1$, и F_i'' — вещественная билинейная форма, то это условие невырожденности эквивалентно обычному условию $\ker F_i'' = 0$. Однако в случае $\dim \text{coker } F_i' > 1$ невырожденность F_i'' вовсе не влечет невырожденности всех скалярных форм $\phi F_i''$, $\phi \in (\text{im } F_i')^\perp \setminus 0$ (последнее означало бы, что отображение (5) вообще не имеет критических значений).

Если F_i'' невырожденно в указанном смысле, то конус $\{v \in \ker F_i' \mid F_i''(v, v) = 0\}$ неплохо аппроксимирует множество уровня $F_i'^{-1}(\bar{\mu}_i)$ вблизи точки $\bar{u}(\cdot)$, а естественным «квадратичным» аналогом вопроса 1) из пункта 2 оказывается вопрос о том, является ли квадратичное отображение $v(\cdot) \mapsto F_i''(v(\cdot), v(\cdot))$ существенно сюръективным (см. [1]).

Спаривание произвольных вектора $x \in T_{\bar{u}} M$ и ковектора $\xi \in T_{\bar{u}}^* M$ мы обозначаем просто ξx (как произведение строки на столбец). Таким образом, для любого $\psi \in (\text{im } F_i')^\perp \subset T_{\bar{u}}^* M$ выражение $\psi F_i''$ представляет собой вещественную квадратичную (= симметричную билинейную) форму на $\ker F_i'$. Важнейшим инвариантом произвольной вещественной квадратичной формы q является ее индекс инерции $\text{ind } q$ — целое неотрицательное число либо $+\infty$. Для векторного квадратичного отображения F_i'' роль индекса

играет функция $\psi \mapsto \text{ind } \psi F_t$, $\psi \in (\text{im } F_t')^\perp \setminus 0$, принимающая целые неотрицательные значения и $+\infty$. В работе [1] показано, как с помощью этой функции выявлять различные свойства отображения F_t' . Однако, чтобы успешно применять методы упомянутой работы, необходимо иметь гибкие явные формулы для $\text{ind } \psi F_t'$. Описанию таких формул посвящен § 3. Перед этим, в § 2, мы приводим одно специальное представление разложения Тейлора отображения F_t , из которого, в частности, получается инвариантное выражение для F_t' . Общее исследование квадратичного отображения $v(\cdot) \mapsto F_t'(v(\cdot), v(\cdot))$ завершается в § 4, а § 5 посвящен конкретным вычислениям для некоторых специальных классов систем.

В заключение я выражаю благодарность моему учителю Р. В. Гамкрелидзе за постоянную поддержку и внимание к этой работе.

§ 2. ВАРИАЦИИ УПРАВЛЯЕМОЙ СИСТЕМЫ

1. При работе с гладкими управляемыми системами (как и во многих других случаях) удобно использовать следующую операторную символику.

Точка $\mu \in M$ отождествляется с гомоморфизмом $\varphi \mapsto \varphi(\mu)$ алгебры $C_\infty(M)$ в $\mathbb{R}$. Диффеоморфизму $\Phi: M \rightarrow M$ соответствует автоморфизм $\Phi^*: \varphi(\cdot) \mapsto \varphi(\Phi(\cdot))$ алгебры $C_\infty(M)$; значение $\Phi(\mu)$ диффеоморфизма Φ в точке μ на операторном языке записывается в виде $\mu \circ \Phi^*$ — композиция автоморфизма и мультипликативного функционала (которая снова является мультипликативным функционалом). В то же время, операция композиции $(\Phi_1, \Phi_2) \mapsto \Phi_2 \circ \Phi_1$ превращает совокупность всех диффеоморфизмов в группу, обозначаемую $\text{Diff } M$. Заметим, что $(\Phi_2 \circ \Phi_1)^* = \Phi_1^* \circ \Phi_2^*$, нетрудно показать, что любой автоморфизм алгебры $C_\infty(M)$ имеет вид Φ^* для некоторого $\Phi \in \text{Diff } M$, так что соответствие $\Phi \mapsto \Phi^*$ устанавливает изоморфизм группы $\text{Diff } M$ и группы автоморфизмов алгебры $C_\infty(M)$. Гладкие векторные поля на M отождествляются с дифференцированиями алгебры $C_\infty(M)$, т. е. $\mathbb{R}$ -линейными отображениями $X: C_\infty(M) \rightarrow C_\infty(M)$, удовлетворяющими правилу Лейбница:

$$X(\varphi_1 \varphi_2) = (X\varphi_1)\varphi_2 + \varphi_1(X\varphi_2) \quad \forall \varphi_1, \varphi_2 \in C_\infty(M).$$

Коммутатор $[X, Y] = X \circ Y - Y \circ X$ превращает пространство всех гладких векторных полей в алгебру Ли, обозначаемую $\text{Der } M$. Значение векторного поля X в точке $\mu \in M$ (касательный вектор к многообразию M в точке μ) записывается в виде $\mu \circ X$. Символом $T_\mu M$, как обычно, обозначается касательное пространство к многообразию M в точке μ — для нас это пространство всех $\mathbb{R}$ -линейных функционалов ξ на $C_\infty(M)$, удов-

летворяющих условию $\xi(\varphi_1\varphi_2) = (\xi\varphi_1)\varphi_2(\mu) + \varphi_1(\mu)(\xi\varphi_2)$. Символом $\text{Ad } \Phi$, где $\Phi \in \text{Diff } M$ обозначается внутренний автоморфизм $\text{Ad } \Phi: X \mapsto \Phi^* X \Phi^{*-1}$ алгебры $\text{Der } M$, а символом $\text{ad } Y$, где $Y \in \text{Der } M$, внутреннее дифференцирование $\text{ad } Y: X \mapsto [Y, X]$ той же алгебры Ли, $X \in \text{Der } M$.

Пусть N — еще одно многообразие класса C_∞ , и $\Phi: M \rightarrow N$ — диффеоморфизм. Символом $\Phi_*: \text{Der } M \rightarrow \text{Der } N$ обозначается дифференциал отображения Φ , а символом $\Phi_{*,\mu}: T_\mu M \rightarrow T_{\Phi(\mu)} N$, где $\mu \in M$, — соответствующее линейное отображение касательных пространств — оно определено для любого гладкого отображения, а не только для диффеоморфизмов; если $\Phi \in \text{Diff } M$, то $\Phi_* = \text{Ad } \Phi^{*-1}$.

В алгебре $C_\infty(M)$ вводится топология Уитни — топология равномерной сходимости производных любого порядка на компактах. Топологию Уитни можно задать с помощью семейства полунорм $\|\cdot\|_{k,K}$, $k \geq 0$, $K \in M$, где полунорма $\|\cdot\|_{k,K}$ определяет топологию равномерной сходимости всех производных до порядка k на компакте K . Полунормы $\|\cdot\|_{k,K}$, в отличие от задаваемой ими топологии, не определяются однозначно многообразием M и могут быть выбраны многими способами. В дальнейшем считается, что такой выбор произведен и полунормы фиксированы. Для произвольного векторного поля $X \in \text{Der } M$ положим

$$\|X\|_{k,K} = \sup \{ \|X\varphi\|_{k,K} \mid \|\varphi\|_{k+1,K} = 1 \}, \quad k=0, \quad K \in M.$$

Диффеоморфизмы и векторные поля определяют непрерывные линейные операторы в пространстве Фреше $C_\infty(M)$, а точки и касательные векторы — непрерывные линейные функционалы. В пространстве $\mathcal{L}(C_\infty(M))$ всех непрерывных линейных операторов в M и пространстве $C_\infty(M)^*$ всех непрерывных линейных функционалов на M вводится топология поточечной сходимости: последовательность $A_i \in \mathcal{L}(C_\infty(M))$, $i=1, 2, \dots$ (соответственно, $a_i \in C_\infty(M)^*$) в том и только том случае сходится к $A \in \mathcal{L}(C_\infty(M))$ ($a \in C_\infty(M)^*$), когда $A_i\varphi \rightarrow A\varphi$ ($a_i(\varphi) \rightarrow a(\varphi)$) $\forall \varphi \in C_\infty(M)$.

Пусть φ_t , $t \in \mathbb{R}$ — однопараметрическое семейство элементов из $C_\infty(M)$, оно называется измеримым, если $\forall \mu \in M$ скалярная функция $t \mapsto \varphi_t(\mu)$ измерима; измеримое семейство называется локально интегрируемым, если

$$\int_{t_1}^{t_2} \|\varphi_\tau\|_{k,K} d\tau < +\infty \quad \forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}, \quad k \geq 0, \quad K \in M.$$

Легко видеть, что для локально интегрируемых семейств φ_t функции $\int_{t_1}^{t_2} \varphi_\tau d\tau: \mu \rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \varphi_\tau(\mu) d\tau$, $\mu \in M$, принадлежат $C_\infty(M)$, $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$.

Семейство φ_t , $t \in \mathbb{R}$, называется абсолютно непрерывным, если существует такое локально интегрируемое семейство Ψ_t , что $\varphi_t = \varphi_{t_0} + \int_{t_0}^t \Psi_\tau d\tau$. Воспользовавшись сепарабельностью $C_\infty(M)$, можно доказать также, как и для скалярных функций, что для почти всех t

$$\frac{d}{dt} \varphi_t = \frac{d}{dt} \int_0^t \Psi_\tau d\tau = \Psi_t.$$

Для однопараметрических семейств A_t , $t \in \mathbb{R}$, операторов из $\mathcal{L}(C_\infty(M))$ понятия измеримости, непрерывности, дифференцируемости, локальной интегрируемости, абсолютной непрерывности определяются требованием, чтобы $\forall \varphi \in C_\infty(M)$ семейство $A_t \varphi$ обладало соответствующим свойством. Тот факт, что локально интегрируемое семейство можно интегрировать, а дифференцируемое дифференцировать, а также справедливость формы Лейбница

$$\frac{d}{dt} (A_t \circ B_t) = \left(\frac{d}{dt} A_t \right) \circ B_t + A_t \circ \left(\frac{d}{dt} B_t \right)$$

доказывается с помощью теоремы Банаха — Штейнгауса (более подробно обоснование основных операций анализа для таких семейств см. в [4], [5]). Аналогично для однопараметрических семейств линейных функционалов из $C_\infty(M)$.

Семейство A_t , $t \in \mathbb{R}$, называется абсолютно непрерывным, если оно представимо в виде $A_t = A_{t_0} + \int_{t_0}^t B_\tau d\tau$. Имеем $\frac{d}{dt} A_t = B_t$ для почти всех t .

Локально суммируемые семейства $X_t \in \text{Der } M$, $t \in \mathbb{R}$, называются нестационарными векторными полями на M , а абсолютно непрерывные семейства Φ_t^* , где $\Phi_t \in \text{Diff } M$, $t \in \mathbb{R}$, удовлетворяющие условию $\Phi_0 = \text{id}$, — нестационарными потоками на M или просто потоками (символом id обозначается тождественное отображение). Нестационарное поле X_t , $t \in \mathbb{R}$, определяет обыкновенное дифференциальное уравнение $\frac{d}{dt} \mu = \mu \circ X_t$ на M . Нестационарное поле X_t называется полным, если для $\forall \mu_0 \in M$ найдется абсолютно непрерывное решение этого уравнения $\mu(t)$, удовлетворяющее условию $\mu(0) = \mu_0$ и определенное при всех $t \in \mathbb{R}$. Полное поле определяет поток Φ_t^* — единственное абсолютно непрерывное решение операторного уравнения $\frac{d}{dt} A_t = A_t \circ X_t$ с начальным условием $A_0 = \text{id}$, здесь $\mu(t) = \mu_0 \circ \Phi_t^*$. Для потока Φ_t^* используется следующее обозначение, хорошо отражающее его происхождение

и удобное при вычислениях

$$\Phi_t^* = \overrightarrow{\exp} \int_0^t X_\tau d\tau.$$

Имеет место асимптотическое разложение

$$\overrightarrow{\exp} \int_0^t X_\tau d\tau \approx \text{id} + \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^t d\tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 \dots \int_0^{\tau_{m-1}} (X_{\tau_m} \circ \dots \circ X_{\tau_1}) d\tau_m,$$

точный смысл которого состоит в неравенствах

$$\left\| \overrightarrow{\exp} \int_0^t X_\tau d\tau - \text{id} - \sum_{\alpha=1}^m \int_0^t d\tau_1 \dots \int_0^{\tau_{\alpha-1}} (X_{\tau_\alpha} \circ \dots \circ X_{\tau_1}) d\tau_\alpha \right\|_{k,K} \leqslant c_1 e^{c_2 \int_0^t \|X_\tau\|_{k,\tilde{K}} d\tau} \left(\int_0^t \|X_\tau\|_{k+m,\tilde{K}} d\tau \right)^{m+1} \|\varphi\|_{k+m+1,\tilde{K}}, \quad (1)$$

$$\forall \varphi \in C_\infty(M), \quad k, m \geqslant 0, \quad K \subseteq M,$$

где c_1, c_2 зависят лишь k, m (подробности, включая оценки констант и $\tilde{K} \subseteq M$ см. в [4]).

Далее, семейство операторов $\text{Ad } \Phi_t^*$, $t \in \mathbb{R}$, действующих в пространстве $\text{Der } M$, является единственным абсолютно непрерывным решением операторного уравнения $\frac{d}{dt} \mathcal{A}_t = \mathcal{A}_t \circ \text{ad } X_t$ с начальным условием $\mathcal{A}_0 = \text{id}$, откуда вытекает асимптотическое разложение

$$\text{Ad } \Phi_t^* Y \approx Y + \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^t d\tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 \dots \int_0^{\tau_{m-1}} (\text{ad } X_{\tau_m} \circ \dots \circ \text{ad } X_{\tau_1}) Y d\tau_m,$$

$Y \in \text{Der } M$ с оценками остаточного члена, аналогичными (1) (см. [4]). Эти факты отражены в используемом ниже обозначении

$$\text{Ad } \overrightarrow{\exp} \int_0^t X_\tau d\tau = \overrightarrow{\exp} \int_0^t \text{ad } X_\tau d\tau.$$

В случае, когда X_t не зависит от t , $X_t \equiv X$, $t \in \mathbb{R}$, используются традиционные обозначения

$$\overrightarrow{\exp} \int_0^t X d\tau = e^{tX}, \quad \overrightarrow{\exp} \int_0^t \text{ad } X d\tau = e^{t \text{ad } X}.$$

Для полных нестационарных полей X_t , $X_t + Y_t$ нестационарное поле $\overrightarrow{\exp} \int_0^t \text{ad } X_\tau d\tau Y_t$ также является полным, и справедлива

«формула вариации постоянной»

$$\overrightarrow{\exp} \int_0^t (X_\tau + Y_\tau) d\tau = \overrightarrow{\exp} \int_0^t \left(\overrightarrow{\exp} \int_0^\tau \text{ad } X_\sigma d\sigma Y_\tau \right) d\tau \circ \overrightarrow{\exp} \int_0^t X_\tau d\tau, \quad (2)$$

которая проверяется прямым дифференцированием по t правой и левой частей.

2. Пусть $X_t, Y_t, t \in \mathbb{R}$ — такие нестационарные поля в M , что все нестационарные поля вида $X_t + \varepsilon Y_t, \varepsilon \in \mathbb{R}$ — полные. Рассмотрим однопараметрическое семейство потоков

$$\Phi_t^*(\varepsilon) = \overrightarrow{\exp} \int_0^t (X_\tau + \varepsilon Y_\tau) d\tau, \quad \varepsilon, t \in \mathbb{R}.$$

Из формулы (2) и разложения (1) следует, что

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \Phi_t^*(\varepsilon) = \int_0^t \text{Ad } \Phi_\tau^*(\varepsilon) Y_\tau d\tau \circ \Phi_t^*(\varepsilon). \quad (3)$$

Положим

$$\Xi_t(\varepsilon) = \int_0^t \text{Ad } \Phi_\tau^*(\varepsilon) Y_\tau d\tau.$$

Лемма 1. Предположим, что для данных $t \in \mathbb{R}, k \geq 1$ имеют место равенства

$$\frac{\partial^i}{\partial \varepsilon^i} \Big|_{\varepsilon=0} \Xi_t(\varepsilon) = 0, \quad 0 \leq i < k-1, \quad \frac{\partial^{k-1}}{\partial \varepsilon^{k-1}} \Big|_{\varepsilon=0} \Xi_t(\varepsilon) = \xi_t^k \in T_{\mu_t} M.$$

Тогда

$$\mu_0 \circ \Phi_t^*(\varepsilon) = \left(\mu_0 + \frac{\varepsilon^k}{k} \xi_t^k \right) \circ \Phi_t^*(0) + O(\varepsilon^{k+1}).$$

Утверждение леммы непосредственно следует из (1) и (3). В условиях леммы 1 вектор

$$\xi_t^k \circ \Phi_t^*(0) = (\Phi_t(0))_* \xi_t^k \in T_{\Phi_t(0)(\mu_0)} M$$

касается кривой $\varepsilon \mapsto \Phi_t(\varepsilon)(\mu_0)$ в точке $\Phi_t(0)(\mu_0)$. Иными словами, главный член в разложении в ряд по степеням ε кривой $\varepsilon \mapsto \mu_t(\varepsilon) = \Phi_t(\varepsilon)(\mu_0)$ в M совпадает с точностью до положительного множителя с главным членом разложения в ряд по степеням ε кривой $\varepsilon \mapsto \mu_t(0) \circ \Phi_t(0) \cdot \Xi_t(\varepsilon)$ в $T_{\mu_t(0)} M$. В то же время, если для кривой $\mu_t(\varepsilon)$ лишь главный член разложения является касательным вектором, то все разложение кривой $\mu_t(0) \circ \Phi_t(0) \cdot \Xi_t(\varepsilon)$, по определению, состоит из касательных векторов. Поскольку сказанное относится к произвольным полям X, Y , разложение в ряд по степеням ε семейства полей $\Xi_t(\varepsilon)$ должно, в принципе, дать универсальные выражения для дифференциала, гессiana и всей инвариантной информации о высших производных произвольной управляемой системы.

Воспользовавшись формулой (3), получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \Xi_t(\varepsilon) &= \int_0^t \frac{\partial}{\partial \varepsilon} (\Phi_\tau^*(\varepsilon) Y_\tau (\Phi_\tau^*(\varepsilon))^{-1}) d\tau = \\ &= \int_0^t [\text{Ad } \Phi_\tau^*(\varepsilon) Y_\tau d\vartheta, \text{Ad } \Phi_\tau^*(\varepsilon) Y_\tau] d\tau = \int_0^t \left[\Xi_\tau(\varepsilon), \frac{\partial}{\partial \tau} \Xi_\tau(\varepsilon) \right] d\tau. \end{aligned}$$

Итак,

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \Xi_t(\varepsilon) = \int_0^t \left[\Xi_\tau(\varepsilon), \frac{\partial}{\partial \tau} \Xi_\tau(\varepsilon) \right] d\tau, \quad \Xi_t(0) = \int_0^t \text{Ad } \Phi_\tau^*(0) Y_\tau d\tau.$$

Для произвольных абсолютно непрерывных по τ стационарных полей $\mathcal{A}_\tau, \mathcal{B}_\tau$ положим

$$(\nabla_{\mathcal{A}} \mathcal{B})_t = \int_0^t \left[\mathcal{A}_\tau, \frac{d}{d\tau} \mathcal{B}_\tau \right] d\tau.$$

Имеем

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \Xi. = \nabla_{\Xi} \Xi.$$

Дифференцируя это соотношение по ε , получим

$$\frac{\partial^2}{\partial \varepsilon^2} \Xi. = \nabla_{\nabla_{\Xi} \Xi} \Xi. + \nabla_{\Xi} \nabla_{\Xi} \Xi.$$

Еще раз продифференцировав, получим выражение $\frac{\partial^3}{\partial \varepsilon^3} \Xi$ через Ξ с помощью операции ∇ и т. д. Таким образом, можно выписать все разложение $\Xi_t(\varepsilon)$ в ряд по степеням ε через $\Xi_t(0)$, используя лишь операцию ∇ . Можно, однако, действовать иначе.

Положим

$$Z_t = \text{Ad } \Phi_t^*(0) Y_t = \overrightarrow{\exp} \int_0^t \text{ad } X_\tau d\tau Y_\tau.$$

Из (2) следует, что

$$\begin{aligned} \Xi_t(\varepsilon) &= \int_0^t \text{Ad} \left(\overrightarrow{\exp} \int_0^\tau X_\vartheta + \varepsilon Y_\vartheta d\vartheta \right) Y_\tau d\tau = \\ &= \int_0^t \left(\text{Ad } \overrightarrow{\exp} \int_0^\tau \varepsilon Z_\vartheta d\vartheta \right) \left(\text{Ad } \overrightarrow{\exp} \int_0^\tau X_\vartheta d\vartheta \right) Y_\tau d\tau = \\ &= \int_0^t \overrightarrow{\exp} \int_0^\tau \varepsilon \text{ad } Z_\vartheta d\vartheta Z_\tau d\tau. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\Xi_t(\varepsilon) \approx \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m \int_0^t d\tau_0 \int_0^{\tau_0} d\tau_1 \dots \int_0^{\tau_{m-1}} (\text{ad } Z_{\tau_m} \dots \text{ad } Z_{\tau_1} Z_{\tau_0}) d\tau_m. \quad (4)$$

Рассмотрим более общую ситуацию, заменив семейство полей $X_t + \varepsilon Y_t$ на произвольное гладко зависящее от $\varepsilon \in \mathbf{R}$ семейство полных нестационарных полей $X_t(\varepsilon)$. Из «формулы вариации постоянной» с учетом (1) вытекает равенство

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \exp \int_0^t X_\tau(\varepsilon) d\tau &= \int_0^t \exp \int_0^\tau \text{ad } X_\vartheta(\varepsilon) d\vartheta \frac{\partial}{\partial \varepsilon} X_\tau(\varepsilon) d\tau \\ &\quad \circ \exp \int_0^t X_\tau(\varepsilon) d\tau. \end{aligned}$$

Стало быть, утверждение леммы 1 останется верным, если положить

$$\begin{aligned} \Phi_t^*(\varepsilon) &= \exp \int_0^t X_\tau(\varepsilon) d\tau, \\ \Xi_t(\varepsilon) &= \int_0^t \text{Ad } \Phi_\tau^*(\varepsilon) \frac{\partial}{\partial \varepsilon} X_\tau(\varepsilon) d\tau = \\ &= \int_0^t \left(\exp \int_0^\tau \text{ad } X_\vartheta(\varepsilon) d\vartheta \frac{\partial}{\partial \varepsilon} X_\tau(\varepsilon) \right) d\tau. \end{aligned}$$

Для $k=1, 2, \dots$ положим

$$Z_t^{(k)} = \exp \int_0^t \text{ad } X_\tau(0) d\tau \frac{\partial^k}{\partial \varepsilon^k} \Big|_{\varepsilon=0} X_t(\varepsilon).$$

Нетрудно показать, что все коэффициенты разложения семейства полей $\int_0^t \left(\exp \int_0^\tau \text{ad } X_\vartheta(\varepsilon) d\vartheta \frac{\partial}{\partial \varepsilon} X_\tau(\varepsilon) \right) d\tau$ в ряд по степеням ε выражаются через нестационарные поля $Z_t^{(k)}$, $k=1, 2, \dots$, с помощью ∇ . Мы на этом останавливаться не будем, и выпишем разложение, обобщающее (4). Имеем

$$\begin{aligned} \exp \int_0^t \text{ad } X_\tau(\varepsilon) d\tau &= \exp \int_0^t \text{ad} \left(\exp \int_0^\tau \text{ad } X_\vartheta(0) d\vartheta (X_\tau(\varepsilon) - X_\tau(0)) \right) \\ &\quad \circ \exp \int_0^t \text{ad } X_\tau(0) d\tau \approx \exp \int_0^t \text{ad} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^k}{k!} Z_\tau^{(k)} \right) d\tau \circ \exp \int_0^t \text{ad } X_\tau(0) d\tau. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\int_0^t \left(\exp \int_0^\tau \text{ad } X_\Phi(\varepsilon) d\Phi \right) \frac{\partial}{\partial \varepsilon} X_\tau(\varepsilon) d\tau \approx \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^t d\tau_0 \int_0^{\tau_0} d\tau_1 \dots$$

$$\dots \int_0^{\tau_{m-1}} \left(\left(\sum_{k_m=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^{k_m}}{k_m!} \text{ad } Z_{\tau_m}^{(k_m)} \right) \circ \dots \circ \left(\sum_{k_1=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^{k_1}}{k_1!} \text{ad } Z_{\tau_1}^{(k_1)} \right) \sum_{k_0=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^{R_0}}{k_0!} Z_{\tau_0}^{(k_0+1)} \right) d\tau. \quad (5)$$

Теперь все готово для определения вариаций системы (1.2) в точке $u(\cdot)$. Мы приведем это определение в предположении, что U — открытое подмножество в $\mathbb{R}^r$. Общий случай сводится к этому введением локальных координат в $L_\infty([0, t]; U)$ (вариации, вообще говоря, зависят от выбора локальных координат в пространстве управлений $L_\infty([0, t], U)$, но не зависят от локальных координат в фазовом пространстве M). Полной вариацией системы (1.2) называется однопараметрическое семейство отображений $\mathcal{V}_t: L_\infty([0, t]; V) \times L_\infty^r[0, t] \rightarrow T_{\mu_0}M$, $t > 0$, определяемых правилом

$$\mathcal{V}_t(u(\cdot); v(\cdot)) =$$

$$= \mu_0 \int_0^t \left(\exp \int_0^\tau \text{ad } f_\Phi(\cdot, u(\Phi)) d\Phi \frac{\partial f_\tau}{\partial u}(\cdot, u(\tau)) v(\tau) \right) d\tau.$$

Для $k=1, 2, \dots$, вариацией порядка k в точке $(\tilde{u}(\cdot), 0)$ называется $(k-1)$ -я производная отображения $\mathcal{V}_t$ в точке $(\tilde{u}(\cdot), 0)$. Вариация порядка k обозначается

$$\mathcal{V}_t^{(k)}(\tilde{u}(\cdot)): L_\infty^r[0, t] \times \dots \times L_\infty^r[0, t] \rightarrow T_{\mu_0}M$$

и представляет собой симметричное полилинейное отображение.

Мотивировку такого определения вариаций доставляет лемма 1, а способ вычисления — формула (5). Пусть

$$v(\cdot) \in L_\infty^r[0, t],$$

положив

$$Z_t^{(k)} = \left(\exp \int_0^t \text{ad } f_\tau(\cdot, \tilde{u}(\tau)) d\tau \right) \frac{\partial^k f_\tau}{\partial u^k}(\cdot, \tilde{u}(\tau)) (v(\tau), \dots, v(\tau)),$$

$$k=1, 2, \dots,$$

получим

$$\begin{aligned}
 \mathcal{V}_t^{(1)}(\tilde{u}(\cdot))v(\cdot) &= \mu_0 \circ \int_0^t Z_\tau^{(1)} d\tau, \\
 \mathcal{V}_t^{(2)}(\tilde{u}(\cdot))(v(\cdot), v(\cdot)) &= \mu_0 \circ \int_0^t (Z_\tau^{(2)}) + \left[\int_0^\tau Z_\theta^{(1)} d\theta, Z_\tau^{(1)} \right] d\tau \\
 \mathcal{V}_t^{(3)}(\tilde{u}(\cdot))(v(\cdot), v(\cdot), v(\cdot)) &= \mu_0 \circ \int_0^t (Z_\tau^{(3)} + \int_0^\tau ([Z_\theta^{(2)}, Z_\tau^{(1)}] + \\
 &+ 2[Z_\theta^{(1)}, Z_\tau^{(2)}] + 2 \left[\int_0^\theta Z_{\theta'}^{(1)} d\theta', [Z_\theta^{(1)}, Z_\tau^{(1)}] \right]) d\theta) d\tau \quad (6)
 \end{aligned}$$

и т. д.

Обратимся, наконец, к отображениям F_t . Пусть $\tilde{\Phi}_t^* = \exp \int_0^t f_\tau(\cdot, \tilde{u}(\tau)) d\tau$, $t \in \mathbb{R}$, из леммы 1 вытекают следующие соотношения для дифференциала и гессиана F_t в точке $\tilde{u}(\cdot)$:

$$F'_t v(\cdot) = \tilde{\Phi}_{t*} \mathcal{V}_t^{(1)}(\tilde{u}(\cdot))v(\cdot),$$

$$\forall v(\cdot) \in L_\infty^r[0, t];$$

$$F''_t(v_1(\cdot), v_2(\cdot)) = \tilde{\Phi}_{t*} \mathcal{V}_t^{(2)}(\tilde{u}(\cdot))(v_1(\cdot), v_2(\cdot)) + \text{im } F'_t,$$

$$\forall v_1(\cdot), v_2(\cdot) \in \ker F'_t.$$

Удобно сделать замену переменных в M , рассматривая вместо F_t отображение $G_t = \tilde{\Phi}_t^{-1} \circ F_t$, для которого выполняется равенство $G_t(\tilde{u}(\cdot)) = \mu_0$. Поскольку $\tilde{\Phi}_t$ — диффеоморфизм, то, с точки зрения интересующих нас вопросов, отображения F_t и G_t полностью эквиваленты, например, $F_t^{-1}(\tilde{\mu}_t) = G_t^{-1}(\mu_0)$. Пусть G'_t — дифференциал, а G''_t — гессиан отображения G_t в точке $\tilde{u}(\cdot)$, тогда $F'_t = \tilde{\Phi}_{t*} G'_t$, $F''_t = \tilde{\Phi}_{t*} G''_t$, так что

$$G'_t v(\cdot) = \mathcal{V}_t^{(1)}(\tilde{u}(\cdot))v(\cdot)$$

$$G''_t(v_1(\cdot), v_2(\cdot)) = \mathcal{V}_t^{(2)}(\tilde{u}(\cdot))(v_1(\cdot), v_2(\cdot)) + \text{im } G'_t, \quad (7)$$

$$v(\cdot) \in L_\infty^r[0, t], v_1(\cdot), v_2(\cdot) \in \ker G'_t.$$

§ 3. ВТОРАЯ ВАРИАЦИЯ И СИМПЛЕКТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

1. Начнем с того, что выпишем явные выражения для G'_t и G''_t . Пусть

$$Z_t = \tilde{\Phi}_{t*}^{-1} \frac{\partial}{\partial u} f_t(\cdot, \tilde{u}(t)), \quad H_t = \tilde{\Phi}_{t*}^{-1} \frac{\partial^2}{\partial u^2} f_t(\cdot, \tilde{u}(t)), \quad t \geq 0$$

(напомним, что $\tilde{\Phi}_{i*}^{-1} = \exp \int_0^t \text{ad } f_\tau(\cdot, \tilde{u}(\tau)) d\tau$, а экстремаль $\tilde{u}(\tau)$

кусочно гладко зависит от τ). Тогда $Z_t: \mathbb{R}^r \rightarrow \text{Der } M$ — линейное отображение, а $H_t: \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^r \rightarrow \text{Der } M$ — симметричное билинейное отображение, кусочно гладко зависящие от $t \geq 0$. Из формул (26), (27) следует, что

$$G'_t v(\cdot) = \mu_0 \int_1^t Z_\tau v(\tau) d\tau, \quad \text{im } G'_t = \sum_{0 < \tau < t} (Z_\tau \mathbb{R}^r)$$

$$G'_t(v_1(\cdot), v_2(\cdot)) = \mu_0 \int_0^t (H_\tau(v_1(\tau), v_2(\tau)) + \\ + \left[\int_0^\tau Z_\theta v_1(\theta) d\theta, Z_\tau v_2(\tau) \right]) d\tau + \text{im } G'_t,$$

$$v(\cdot) \in L_\infty^r[0, t], \quad v_1(\cdot), v_2(\cdot) \in \ker G'_t.$$

Зафиксируем момент времени $t > 0$ и положим

$$\Pi = \text{im } G'_t = \sum_{0 < \tau < t} Z_\tau \mathbb{R}^r$$

Пусть $\mathcal{E}_\Pi$ — подмодуль в $\text{Der } M$, состоящий из всех векторных полей, значение которых в точке μ_0 лежит в Π , и $\text{norm}(\mathcal{E}_\Pi)$ — нормализатор подпространства $\mathcal{E}_\Pi$ в алгебре Ли $\text{Der } M$, т. е.

$$\text{norm}(\mathcal{E}_\Pi) = \{X \in \text{Der } M \mid [X, \mathcal{E}_\Pi] \subset \mathcal{E}_\Pi\} \subset \mathcal{E}_\Pi.$$

Положим $E_\Pi = \mathcal{E}_\Pi / \text{norm } \mathcal{E}_\Pi$. Операция коммутирования векторных полей следующим образом определяет структуру нильпотентной алгебры Ли на пространстве $E_\Pi \oplus T_{\mu_0} M / \Pi$.

Пусть $x, y \in E_\Pi$, $\xi, \eta \in T_{\mu_0} M / \Pi$, причем $x = X + \text{norm } \mathcal{E}_\Pi$, $y = Y + \text{norm } \mathcal{E}_\Pi$, где $X, Y \in \mathcal{E}_\Pi$, тогда

$$[x + \xi, y + \eta] \stackrel{\text{def}}{=} (\mu_0 [X, Y] + \Pi) \in T_{\mu_0} M / \Pi.$$

Для любого $\tau \in [0, t]$ обозначим через $h_\tau(v_1, v_2)$ образ вектора $\mu_0 H_\tau(v_1, v_2)$ при факторизации $T_{\mu_0} M \rightarrow T_{\mu_0} M / \Pi$ $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^r$, а через $z_\tau v$ — образ векторного поля $Z_\tau v$ при факторизации $\mathcal{E}_\Pi \rightarrow \mathcal{E}_\Pi / \text{norm } \mathcal{E}_\Pi = E_\Pi$. Тогда

$$G'_t(v_1(\cdot), v_2(\cdot)) = \int_0^t (h_\tau(v_1(\tau), v_2(\tau)) + \\ + \left[\int_0^\tau z_\theta v_1(\theta) d\theta, z_\tau v_2(\tau) \right]) d\tau. \quad (1)$$

Перейдем к описанию пространства E_Π .

Пусть I_{μ_0} — максимальный идеал в алгебре $C_\infty(M)$, состоящий из функций, обращающихся в нуль в точке μ_0 . Следующая

цепочка включений проверяется непосредственно:

$$I_{\mu_0}^2 \text{ Der } M \subset I_{\mu_0} \mathcal{E}_\Pi \subset \text{norm } \mathcal{E}_\Pi \subset I_{\mu_0} \text{ Der } M \subset \mathcal{E}_\Pi. \quad (2)$$

Используя предпоследнее включение в цепочке (2), получаем, что отображение $Z \rightarrow \mu_0 \cdot Z$, сопоставляющее всякому полю $Z \in \mathcal{E}_\Pi$ его значение в точке μ_0 , обращается в нуль на $\text{norm } \mathcal{E}_\Pi$, следовательно, индуцирует некоторое линейное отображение $\bar{\mu}_0: E_\Pi \rightarrow \Pi$. При этом, как нетрудно видеть, $\text{im } \bar{\mu}_0 = \Pi$, $\ker \bar{\mu}_0 = I_{\mu_0} \text{ Der } M / \text{norm } \mathcal{E}_\Pi$. Далее, учитывая первые два включения в цепочке (2), получаем, что отображение $(\varphi, X) \rightarrow \varphi X$, сопоставляющее функции $\varphi \in I_{\mu_0}$ и векторному полю $X \in \text{Der } M$ поле $\varphi X \in I_{\mu_0} \text{ Der } M$, индуцирует некоторое линейное отображение $\bar{j}: T_{\mu_0}^* M \otimes (T_{\mu_0} M / \Pi) \rightarrow E_\Pi$. Легко убедиться, что

$$\text{im } \bar{j} = I_{\mu_0} \text{ Der } M / \text{norm } \mathcal{E}_\Pi, \quad \ker \bar{j} = \Pi^\perp \oplus (T_{\mu_0} M / \Pi).$$

Поскольку $T_{\mu_0}^* M / \Pi^\perp = \Pi^*$, то мы получаем (естественную) точную последовательность

$$0 \rightarrow \Pi^* \oplus (T_{\mu_0} M / \Pi) \xrightarrow{j} E_\Pi \xrightarrow{\bar{\mu}_0} \Pi \rightarrow 0, \quad (3)$$

где вложение j индуцировано отображением $\bar{j}$.

Пусть $\text{codim } \Pi = k > 0$. Из точной последовательности вытекает, что $\dim E_\Pi = (d - k)(k + 1)$. Операция коммутирования в алгебре Ли $E_\Pi \oplus T_{\mu_0} M / \Pi$ следующим образом связана с точной последовательностью (3):

$$[z, j(\omega \oplus v)] = (\omega \bar{\mu}_0 z) v, \quad \forall z \in E_\Pi, \quad \omega \oplus v \in \Pi^* \oplus (T_{\mu_0} M / \Pi).$$

Задание произвольных локальных координат $q = (q_1, \dots, q_d)^T: O \rightarrow \mathbb{R}^d$ в некоторой окрестности O точки μ_0 в M приводит к отождествлению пространства векторных полей на O с пространством гладких отображений $q \mapsto X(q)$ из $\mathbb{R}^d$ в $\mathbb{R}^d$. Оно автоматически определяет также координаты в пространстве E_Π . Пусть координаты q_α таковы, что $q_\alpha(\mu) = 0$, $\alpha = 1, \dots, d$, и подпространство $\Pi \subset T_{\mu_0} M$ отождествляется с плоскостью $q_1 = \dots = q_k = 0$ в $\mathbb{R}^d$. Тогда модуль $\mathcal{E}_\Pi$ отождествляется с подмодулем $\{X = (X_1, \dots, X_d)^T \in C_\infty^d(\mathbb{R}^d) \mid X_i(0) = 0, \quad i = 1, \dots, k\}$ в $C_\infty^d(\mathbb{R}^d)$, а пространство $\text{norm } \mathcal{E}_\Pi$ с подпространством

$$\{X = (X_1, \dots, X_d)^T \in C_\infty^n(\mathbb{R}^d) \mid X(0) = 0, \\ \frac{\partial X_i}{\partial q_j}(0) = 0, \quad i = 1, \dots, k; \quad j = k + 1, \dots, d\}.$$

Следовательно, величины $X_j(0)$; $\frac{\partial X_i}{\partial q_j}(0)$; $i = 1, \dots, k$; $j = k + 1, \dots, d$, задают координаты в пространстве $E_\Pi = \mathcal{E}_\Pi / \text{norm } \mathcal{E}_\Pi$. Пусть $x = (X_{k+1}(0), \dots, X_d(0), \frac{\partial X_1}{\partial q_{k+1}}(0), \dots, \frac{\partial X_k}{\partial q_d}(0))$ — некото-

рый элемент пространства E_Π , выраженный в этих координатах. Ясно, что $\bar{\mu}_0 x = (X_{k+1}(0), \dots, X_d(0))^T$. Таким образом, наши координаты расщепляют точную последовательность (3). Кроме того, для любых $x, y \in E_\Pi$

$$[x, y] = \left(\sum_{j=k+1}^d \left(\frac{\partial Y_1}{\partial q_j} X_j - \frac{\partial X_1}{\partial q_j} Y_j \right), \dots, \sum_{j=k+1}^d \left(\frac{\partial Y_k}{\partial q_j} X_j - \frac{\partial X_k}{\partial q_j} Y_j \right) \right)^T.$$

Заметим, что в важном частном случае $k = \text{codim } \Pi = 1$ отображение $(x, y) \mapsto [x, y]$ из $E_\Pi \times E_\Pi$ в $T_{\mu_0} M / \Pi = \mathbb{R}$ является симплектической формой на E_Π , причем введенные выше координаты — канонические для этой формы. В этом случае алгебра Ли $E_\Pi \oplus T_{\mu_0} M / \Pi = E_\Pi \oplus \mathbb{R}$ изоморфна обобщенной алгебре Гейзенберга (см. [13]), а точная последовательность (3) принимает вид

$$0 \rightarrow \Pi^* \xrightarrow{j} E_\Pi \xrightarrow{\bar{\mu}_0} \Pi \rightarrow 0.$$

Пусть теперь k произвольно и $\psi \in \Pi^\perp \setminus 0$. Отображение $(x, y) \mapsto \psi[x, y]$ определяет кососимметричную билинейную форму на E_Π . Из тождества $\psi[z, j(\omega \otimes v)] = (\omega \mu_0 z)(\psi v)$ вытекает, что ядро этой формы совпадает с $j(\Pi^* \oplus (\psi^\perp))$. Следовательно, форма $(x, y) \mapsto \psi[x, y]$ определяет симплектическую структуру на пространстве

$$E_{\Pi, \psi} = E_\Pi / j(\Pi^* \oplus (\psi^\perp)).$$

Поскольку, очевидно, $(T_{\mu_0} M / \Pi) / (\psi^\perp) \approx \mathbb{R}$, а j — инъективное отображение, то имеется точная последовательность

$$0 \rightarrow \Pi^* \rightarrow E_{\Pi, \psi} \rightarrow \Pi \rightarrow 0, \quad (4)$$

индуцированная последовательностью (3). Как и в случае $k = 1$ введение локальных координат в окрестности точки μ_0 расщепляет точную последовательность (4) и определяет канонические координаты.

Начиная с этого места и до конца настоящего параграфа вектор $\psi \in \Pi^\perp \setminus 0$ фиксирован; положим $\Sigma = E_{\Pi, \psi}$ и обозначим через σ симплектическую структуру на Σ . В соответствии с вышесказанным Σ является факторпространством $\mathcal{E}_\Pi$ по некоторому подпространству коразмерности $2 \dim \Pi = 2(d-k)$ в $\mathcal{E}_\Pi$. Симплектическая структура σ индуцирована кососимметрической формой $(X, Y) \mapsto \psi(\mu_0[X, Y])$ на $\mathcal{E}_\Pi$. Обозначим $\Pi_0 = \ker \bar{\mu}_0$ — образ в Σ подпространства $I_{\mu_0} \mathcal{E}_\Pi$. Ясно, что Π_0 — лагранжево подпространство в Σ . В координатах $(q_1, \dots, q_d)$ каноническая факторизация $\mathcal{E}_\Pi \rightarrow \Sigma$ имеет вид

$$X = (X_1, \dots, X_d) \mapsto (X_{k+1}(0), \dots, X_d(0),$$

$$\sum_{i=1}^k \psi_i \frac{\partial X_i}{\partial q_{k+1}}(0), \dots, \sum_{i=1}^k \psi_i \frac{\partial X_i}{\partial q_d}(0)),$$

где $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_k, 0, \dots, 0)$.

Пусть $z_\tau(\psi)v$ — образ поля $Z_\tau v$ при факторизации $\mathcal{E}_\Pi \rightarrow \Sigma$, тогда

$$\begin{aligned} \psi G'_i(v_1(\cdot), v_2(\cdot)) = & \int_0^t (\psi h_\tau(v_1(\tau), v_2(\tau)) + \\ & + \sigma \left(\int_0^\tau z_\theta(\psi) v_1(\theta) d\theta, z_\tau(\psi) v_2(\tau) \right) d\tau. \end{aligned} \quad (5)$$

Условие $v_i(\cdot) \in \ker G'_i$ эквивалентно соотношению $\int_0^t z_\tau(\psi) v_i(\tau) d\tau \in \Pi_0$.

В дальнейшем, аргумент ψ в обозначении $z_\tau(\psi)$ и $z_\tau^{(i)}(\psi) = \frac{d^i}{d\tau^i} z_\tau(\psi)$, $i \geq 0$ мы будем, как правило, опускать. Поскольку ковектор ψ фиксирован, это не вызовет недоразумений. Положим, наконец, $m = d - k = \dim \Pi$.

2. Основной целью настоящего параграфа является получение явных и возможно более гибких выражений для индекса инерции квадратичной формы $\psi G'_i$. Задача вычисления индекса интегральной квадратичной формы имеет длинную историю; для второй вариации регулярной вариационной задачи она была решена Морсом [19] в терминах т. н. сопряженных точек. В ряде работ (см. [15], [17]) формула Морса обобщалась на некоторые вырожденные ситуации. Достаточно хорошо известна и интерпретация результата Морса в терминах симплектической геометрии (см., например, [9]). Наша задача — получить явное выражение для индекса, устойчивое практически к любым вырождениям. При этом разумно вообще отказаться от того, чтобы следить за сопряженными точками.

В первую очередь следует установить условия конечности $\text{Ind } \psi G'_i$ или (что очень близко) условия неотрицательности $\psi G'_i(v(\cdot), v(\cdot))$ для любых $v(\cdot)$, отличных от нуля лишь на подмножествах достаточно малого диаметра в $[0, t]$.

Лемма 1. Предположим, что для некоторого $l \geq 0$ и полуинтервала $(\bar{\tau}, \tau] \subset (0, t]$ выполняются тождества: $\sigma(z_\theta^{(i)} v_1, z_\theta v_2) = 0$, $\forall \theta \in (\bar{\tau}, \tau]$, $\forall v_1, v_2 \in R^r$, $\forall i \leq l$. Тогда

1) $\sigma(z_\theta^{(i-1)} v_1, z_\theta^{(i)} v_2) = (-1)^i \sigma(z_\theta^{(i)} v_1, z_\theta v_2)$, $\bar{\tau} < \theta \leq \tau$, $v_1, v_2 \in R^r$, $i \leq l$.

2) Если $l \geq 2m$, то $\sigma(z_\theta^{(i)} v_1, z_\theta^{(j)} v_2) = 0$, $\forall i, j \geq 0$, $\bar{\tau} < \theta \leq \tau$, $v_1, v_2 \in R^r$.

Доказательство. 1) Воспользуемся индукцией по величине l . При $l=0$ доказывать нечего. Шаг индукции:

$$\sigma(z_\theta^{(i)} v_1, z_\theta v_2) = \frac{d}{d\theta} \sigma(z_\theta^{(i-1)} v_1, z_\theta v_2) - \sigma(z_\theta^{(i-1)} v_1, z_\theta^{(1)} v_2) =$$

$$\begin{aligned}
&= -\sigma(z_0^{(l-1)}v_1, z_0^{(1)}v_2) = -\frac{d}{d\theta} \sigma(z_0^{(l-2)}v_1, z_0^{(1)}v_2) + \\
&+ \sigma(z_0^{(l-2)}v_1, z_0^{(2)}v_2) = \sigma(z_0^{(l-2)}v_1, z_0^{(2)}v_2) = \dots \\
&\dots = (-1)^r \sigma(z_0^{(l-1)}v_1, z_0^{(1)}v_2).
\end{aligned}$$

2) Поскольку $\dim \Sigma = 2m$, то для всех π из некоторого открытого всюду плотного в $[0, t]$ подмножества справедливо разложение $z_\tau^{(2m)}v = \sum_{i=0}^{2m-1} \alpha_i(\tau, v) z_\tau^{(i)}v$, где $\alpha_i(\tau, v)$ гладко зависят

от τ . Дифференцируя это тождество по τ , мы можем представить производную сколь угодно высокого порядка от $z_\tau v$ в виде линейной комбинации первых $2r-1$ производных. ■

Каждому $\tau \in (0, t]$ следующим образом сопоставим целое число $k_\tau \geq 0$ и квадратичную форму γ_τ на R^r : если форма ψh_θ не равна тождественно нулю ни на каком интервале $\tau < \theta < \tau$, то положим $k_\tau = 0$, $\gamma_\tau(v) = \psi h_\tau(v, v)$, в противном случае пусть k_τ — такое максимальное число k , что $\sigma(z_0^{(i)}v_1, z_0 v_2) \equiv 0$ при $i < 2(k-1)$, $v_1, v_2 \in R^r$ на некотором интервале $\bar{\tau} < \theta < \tau$, $\gamma_\tau(v) = \sigma(z_\tau^{(k_\tau)}v, z_\tau^{(k_\tau-1)}v)$, $v \in R^r$, если же максимального k не существует (т. е. $\sigma(z_0^{(i)}v_1, z_0 v_2) \equiv 0$ при $i \leq 2m$), то положим $k_\tau = m+1$, $\gamma_\tau = 0$.

Предложение 1. Если $\text{ind } \psi G'_t < +\infty$, то:

а) $\sigma(z_\tau^{(k_\tau-1)}v_1, z_\tau^{(k_\tau-1)}v_2) = 0$, $\forall v_1, v_2 \in R^r$, $\tau \in (0, t]$;

б) $\gamma_\tau(v) \geq 0$, $\tau \in (0, t]$, $v \in R^r$.

Обратно, если выполняется условие а) и $\gamma_\tau(v) \geq \varepsilon |v|^2$ для любых $v \in R^r$, $\tau \in (0, t]$ и некоторого $\varepsilon > 0$, то $\text{ind } \psi G'_t < +\infty$.

Доказательство. Предположим, что $\psi h_\tau = 0$ при $\tau \in (t_1, t_2)$, а z_τ — гладкая на этом интервале. Тогда для всякой функции $v(\cdot)$, отличной от нуля лишь на отрезке $[t_1, t_2]$, имеем:

$$\psi G'_t(v(\cdot), v(\cdot)) = \int_{t_1}^{t_2} \sigma \left(\int_{t_1}^{\tau} z_\theta v(\theta) d\theta, z_\tau v(\tau) \right) d\tau.$$

Производя интегрирование по частям (при котором $v(\tau)$ интегрируется, а $\int_{t_1}^{\tau} z_\theta v(\theta) d\theta$ и z_τ дифференцируется) и положив:

$$w_1(\tau) = \int_{t_1}^{\tau} v(\theta) d\theta, \text{ получим}$$

$$\psi G'_t(v(\cdot), v(\cdot)) = - \int_{t_1}^{t_2} \sigma(z_\tau v(\tau), z_\tau w_1(\tau)) d\tau -$$

$$\begin{aligned}
& - \int_{t_1}^{t_2} \sigma \left(\int_{t_1}^{\tau} z_{\theta} v(\theta) d\theta, z_{\tau}^{(1)} w_1(\tau) \right) d\tau + \sigma \left(\int_{t_1}^{t_2} z_{\tau} v(\tau) d\tau, z_{t_2} w_1(t_2) \right) = \\
& = \int_{t_1}^{t_2} \sigma(z_{\tau} w_1(\tau), z_{\tau} v(\tau)) d\tau + \int_{t_1}^{t_2} \sigma(z_{\tau}^{(1)} w_1(\tau), z_{\tau} w_1(\tau)) d\tau + \\
& + \int_{t_1}^{t_2} \sigma \left(\int_{t_1}^{\tau} z_{\theta}^{(1)} w_1(\theta) d\theta, z_{\tau}^{(1)} w_1(\tau) \right) d\tau - \\
& - \sigma \left(\int_{t_1}^{t_2} z_{\tau} w_1(\tau) d\tau, z_{t_2} w_1(t_2) \right).
\end{aligned}$$

Если $k_{\tau} > 1$ при $\tau \in (t_1, t_2]$, то первые два слагаемых в правой части равны нулю; в этом случае третье слагаемое снова проинтегрируем по частям и т. д. Если вдобавок $k_{\tau} = \text{const}$ при $\tau \in (t_1, t_2)$, то в конце концов получим

$$\begin{aligned}
\psi G_t'' &= \int_{t_1}^{t_2} \sigma(z_{\tau}^{(k_{\tau}-1)} w_{k_{\tau}}(\tau), z_{\tau}^{(k_{\tau}-1)} w_{k_{\tau}-1}(\tau)) d\tau + \\
& + \int_{t_1}^{t_2} \gamma_{\tau}(w_{k_{\tau}}(\tau)) d\tau + \int_{t_1}^{t_2} \sigma \left(\int_{t_1}^{\tau} z_{\theta}^{(k_{\tau})} w_{k_{\tau}}(\theta) d\theta, z_{\tau}^{(k_{\tau})} w_{k_{\tau}}(\tau) \right) d\tau - \\
& - \sum_{j=0}^{k_{\tau}-1} (-1)^{k_{\tau}+j} \sigma \left(\int_{t_1}^{\tau} z_{\theta}^{(k_{\tau})} w_{k_{\tau}}(\theta) d\theta, z_{t_2}^{(j)} w_{j+1}(t_2) \right), \quad (6)
\end{aligned}$$

где $w_0(\tau) = v(\tau)$, $w_i(\tau) = \int_{t_1}^{\tau} w_{i-1}(\theta) d\theta$ при $i > 0$.

Заметим, что $\|w_i(\cdot)\|_{\infty} \leq |t_2 - t_1| \cdot \|w_{i-1}(\cdot)\|_{\infty}$. Ясно, что $(v_1, v_2) \mapsto \sigma(z_{\tau}^{(k_{\tau}-1)} v_1, z_{\tau}^{(k_{\tau}-1)} v_2)$ — кососимметричная форма на $\mathbb{R}^r$. Предположим, что эта форма отлична от нуля для некоторого $\tau \in [t_1, t_2]$, не уменьшая общности, можно считать, что $\tau = t_2$. Нетрудно видеть, что на подпространстве коразмерности $r k_{\tau}$ в $L_{\infty}^r[t_1, t_2]$, определяемом условиями $w_j(t_2) = 0, j = 1, \dots, k_{\tau}$, справедливо соотношение

$$\begin{aligned}
\psi G_t''(v(\cdot), v(\cdot)) &= \int_{t_1}^{t_2} \sigma(z_{t_2}^{(k_{\tau}-1)} w_{k_{\tau}}(\tau), z_{t_2}^{(k_{\tau}-1)} w_{k_{\tau}-1}(\tau)) d\tau + \\
& + O(|t_2 - t_1| \|w_{k_{\tau}}(\cdot)\|^2).
\end{aligned}$$

Если форма $\psi G_t''$ имеет конечный индекс, то из неравенства $\|w_{k_{\tau}}(\cdot)\|_{\infty} \leq |t_2 - t_1| \|w_{k_{\tau}-1}(\cdot)\|_{\infty}$ без труда выводим, что форма

$$\int_{t_1}^{t_2} \sigma(z_{t_2}^{(k_{\tau}-1)} w_{k_{\tau}}(\tau), z_{t_2}^{(k_{\tau}-1)} w_{k_{\tau}-1}(\tau)) d\tau \quad (7)$$

также должна иметь конечный индекс. В то же время существует такая инволюция $J: \mathbf{R}^r \rightarrow \mathbf{R}^r$, $J^2 = \text{id}$ пространства $\mathbf{R}^r$, что

$$\sigma(z_{t_1}^{(k_\tau-1)} J v_1, z_{t_2}^{(k_\tau-1)} J v_2) = -\sigma(z_{t_1}^{(k_\tau-1)} v_1, z_{t_2}^{(k_\tau-1)} v_2) \quad \forall v_1, v_2 \in \mathbf{R}^r$$

(соответствующая инволюция имеется, очевидно, для каждой кососимметричной формы на $\mathbf{R}^r$). Следовательно, каждому подпространству в $L_2^r[t_1, t_2]$, на котором форма (7) положительна, соответствует подпространство такой же размерности, на котором форма (7) отрицательна. Поскольку ядро формы (7) имеет, очевидно, бесконечную коразмерность, мы пришли к противоречию.

Итак, конечность индекса формы $\psi G_t''$ влечет тождество

$$\sigma(z_{t_1}^{(k_\tau-1)} v_1, z_{t_2}^{(k_\tau-1)} v_2) = 0, \quad \forall v_1, v_2 \in \mathbf{R}^r.$$

В этом случае из равенства (6) вытекает, что на подпространстве коразмерности $r k_\tau$ в $L_{\infty}^r[t_1, t_2]$, определяемом условиями $w_j(t_2) = 0$, $j = 1, \dots, k_\tau$ выполняется соотношение

$$\psi G_t(v(\cdot), v(\cdot)) = \int_{t_1}^{t_2} \gamma_\tau(w_{k_\tau}(\tau)) d\tau + O(\|t_2 - t_1\|^2 \|w_{k_\tau}(\cdot)\|_\infty^2).$$

Если индекс формы конечен, то должен быть конечен и индекс формы $\int_{t_1}^{t_2} \gamma_\tau(w_{k_\tau}(\tau)) d\tau$, что, очевидно, возможно лишь при $\gamma_\tau \geq 0$.

Предположим теперь, что условие а) из формулировки предложения 1 выполнено и, кроме того, $\gamma_\tau(v) \geq \varepsilon |v|^2$, $\forall v \in \mathbf{R}^r$. Из определения чисел k_τ и форм γ_τ следует, что в этом случае k_τ терпит разрывы лишь в точках нарушения гладкости кривых $\tau \mapsto z_\tau$ и $\tau \mapsto \psi h_\tau$.

Пусть $0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_l = t$ — некоторое разбиение отрезка $[0, t]$, причем среди точек τ_i содержатся все точки нарушения гладкости z_τ и ψh_τ .

Всякая $v(\cdot) \in L_\infty^r[0, t]$ однозначно представляется в виде $v(\cdot) = \sum_{i=1}^l v_i(\cdot)$, где $v_i(\tau)$ отличны от нуля лишь при $\tau_{i-1} < \tau \leq \tau_i$. Пусть $v(\cdot) \in L_\infty^r[0, t]$ — такова, что

$$\int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} z_\tau v(\tau) d\tau = 0, \quad i = 1, \dots, l. \quad (8)$$

Тогда $\psi G_t(v(\cdot), v(\cdot)) = \sum_{i=1}^l \psi G_t(v_i(\cdot), v_i(\cdot))$.

Условия (8) выделяют в $L_\infty^r[0, t]$ подпространство конечной коразмерности. Следовательно, для доказательства конечности индекса формы ψG_i достаточно доказать конечность индекса каждой из форм $v(\cdot) \mapsto \psi G_i(v_i(\cdot), v_i(\cdot))$. В частности, достаточно рассматривать лишь такие $v(\cdot)$, которые обращаются в нуль вне некоторого отрезка $(\tau_{i-1}, \tau_i]$. Поскольку $k_\tau = \text{const}$ при $\tau \in (\tau_{i-1}, \tau_i]$, то справедливо представление (6), где $t_1 = \tau_{i-1}$, $t_2 = \tau_i$. С учетом условия а) получаем, что на подпространстве конечной коразмерности в $L_2^r[\tau_{i-1}, \tau_i]$ наша форма совпадает с формой

$$\int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \gamma_\tau(w_{k_\tau}(\tau)) d\tau + \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \sigma \left(\int_{\tau_{i-1}}^{\tau} z_\theta^{(k_\tau)} w_{k_\tau}(\theta) d\theta, z_\tau^{(k_\tau)} w_{k_\tau}(\tau) d\tau \right),$$

т. е. с сужением на некоторое подпространство формы

$$Q_i(w) = \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \gamma_\tau(w(\tau)) d\tau + \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \sigma \left(\int_{\tau_{i-1}}^{\tau} z_\theta^{(k_\tau)} w(\theta) d\theta, z_\tau^{(k_\tau)} w(\tau) d\tau \right),$$

$$w(\cdot) \in L_2^r[\tau_{i-1}, \tau_i].$$

Однако, согласно классической теореме Гильберта — Шмидта, квадратичная форма Q_i положительно определена на некотором подпространстве конечной коразмерности в $L_2^r[\tau_{i-1}, \tau_i]$.

Как мы уже отмечали, если $\gamma_\tau(v) \geq \varepsilon |v|^2 \quad \forall \tau \in [0, t], \quad v \in \mathbb{R}^r$, то γ_τ и k_τ — кусочно гладкие, непрерывные слева функции на $[0, t]$, гладкие в любой точке гладкости кривой $\tau \mapsto z_\tau$.

Мы сначала научимся вычислять индекс формы $\psi G_i''$ в случае, когда $\gamma_\tau(v) \geq \varepsilon |v|^2$, а затем в п. 6) отметим, что нужно изменить, если γ_τ вырождается. Таким образом, везде ниже, если не оговорено противное, предполагается, что $\gamma_\tau(v) \geq \varepsilon |v|^2 \quad \forall \tau \in [0, t], \quad v \in \mathbb{R}^r$ и некоторого $\varepsilon > 0$.

3. В этом и следующем пунктах широко используются обозначения и результаты симплектической геометрии, собранные в приложении к настоящему параграфу.

Рассмотрим семейства подпространств

$$\Gamma_\tau = \sum_{i=0}^{k_\tau-1} z_\tau^{(i)} R^i, \quad \bar{\Gamma}_\tau = \sum_{j=k_\tau}^{2k_\tau-1} z_\tau^{(j)} R^j.$$

Лемма 2. а) $\bar{\Gamma}_\tau \cap \Gamma_\tau^< = 0, \Gamma_\tau \cap \bar{\Gamma}_\tau^< = 0$; б) $\dim \Gamma_\tau = \dim \bar{\Gamma}_\tau = r k_\tau$; в) семейства подпространств $\Gamma_\tau, \bar{\Gamma}_\tau$ кусочно гладко зависят от $\tau \in [0, t]$, причем эта зависимость гладкая в любой точке гладкости кривых $\tau \mapsto z_\tau, \tau \mapsto \psi h_\tau$.

Доказательство. а) Тождество $\sigma(z_\tau^{(i)}, z_\tau^{(j)}) = 0, \quad i, j < k_\tau$, равносильное включению $\Gamma_\tau \subset \Gamma_\tau^<$, вытекает из леммы 1. Предпо-

ложим, что $\left(\sum_{j=k_\tau}^n z_\tau^{(j)} v_j\right) \in \Gamma$, причем $v_n \neq 0$, $k_\tau \leq n \leq 2k_\tau - 1$. Тогда

$$0 = \sigma \left(z_\tau^{(2k_\tau - n - 1)} v_n, \sum_{j=k_\tau}^n z_\tau^{(j)} v_j \right) = \sigma \left(z_\tau^{(2k_\tau - n - 1)} v_n, z_\tau^{(n)} v_n \right) = \\ = (-1)^{n+k_\tau-1} \gamma_\tau(v_n),$$

что противоречит положительной определенности формы γ_τ . Следовательно, $\bar{\Gamma}_\tau \cap \Gamma_\tau^< = 0$.

Аналогичные рассуждения доказывают соотношение $\bar{\Gamma}_\tau \cap \Gamma_\tau^< = 0$, а также утверждение б). Утверждение в) следует из б) и постоянства k_τ вблизи любой точки гладкости кривых z_τ , $\psi h(\tau)$.

Форма γ_τ , как и всякая квадратичная форма на $\mathbf{R}^r$, определяется некоторым самосопряженным отображением $\hat{\gamma}_\tau: \mathbf{R}^r \rightarrow \mathbf{R}^{r*}$ так, что $\gamma_\tau(v) = (\hat{\gamma}_\tau v) v$. Обозначим через $\hat{\gamma}_\tau^{-1}$ квадратичную форму на $\mathbf{R}^{r*}$, определяемую отображением $\hat{\gamma}_\tau^{-1}$, т. е. $\hat{\gamma}_\tau^{-1}(v^*) = v^* (\hat{\gamma}_\tau^{-1} v^*)$. Далее, для всякого $x \in \Sigma$ отображение $v \mapsto \sigma(z_\tau^{(k_\tau)} v, x)$ есть линейная форма на $\mathbf{R}^r$, таким образом, $\sigma(z_\tau^{(k_\tau)}, x) \in \mathbf{R}^r$, а соответствие

$$x \mapsto \frac{1}{2} \gamma_\tau^{-1}(\sigma(z_\tau^{(k_\tau)}, x)), \quad x \in \Sigma, \quad (9)$$

определяет квадратичную форму на симплектическом пространстве Σ .

Предположим, что $v_\tau^1, \dots, v_\tau^r$ — такой базис в $\mathbf{R}^r$, что $(\hat{\gamma}_\tau v_\tau^i) v_\tau^j = 0$ при $i \neq j$, тогда

$$\frac{1}{2} \gamma_\tau^{-1}(\sigma(z_\tau^{(k_\tau)}, x)) = \sum_{i=1}^r \frac{\sigma(z_\tau^{(k_\tau)} v_\tau^i, x)^2}{2 \gamma_\tau(v_\tau^i)}.$$

Всякая гладкая функция на симплектическом пространстве — гамильтониан — определяет гамильтонову систему дифференциальных уравнений на этом пространстве; если гамильтониан зависит от времени τ , то система нестационарна, если гамильтониан — квадратичная форма, то гамильтонова система линейна. Нестационарному квадратичному гамильтониану (9) отвечает гамильтонова система

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^r \frac{\sigma(z_\tau^{(k_\tau)} v_\tau^i, x)}{\gamma_\tau(v_\tau^i)} z_\tau^{(k_\tau)} v_{\tau i}; \quad x \in \Sigma, \quad \tau \in [0, t],$$

которая называется системой Якоби для рассматриваемой экстремали управляемой системы. Поток на Σ , определяемый системой Якоби, представляет собой однопараметрическое семейство

линейных симплектических преобразований пространства Σ . Поскольку симплектические преобразования переводят лагранжевы плоскости в лагранжевы, система (10) определяет также поток на лагранжевом грассманиане $L(\Sigma)$. В соответствии с обозначениями, приведенными в приложении, этот поток на $L(\Sigma)$ порождается нестационарным векторным полем $\frac{1}{2} \gamma_\tau^{-1} (\sigma(z_\tau^{(k_\tau)}, \Lambda))$, $\Lambda \in L(\Sigma)$. Дифференциальное уравнение

$$\dot{\Lambda} = \frac{1}{2} \gamma_\tau^{-1} (\sigma(z_\tau^{(k_\tau)}, \Lambda)), \quad \Lambda \in L(\Sigma), \quad \tau \in [0, t] \quad (11)$$

также назовем уравнением Якоби.

В дальнейшем, решениями уравнения (11) будем называть не только непрерывные, но и кусочно-непрерывные кривые, считая производной по τ в точке разрыва предел слева соответствующих производных. Таким образом, чтобы однозначно определить решение уравнения Якоби, нужно, кроме начального значения, задать еще скачки в точках разрыва.

Следующее понятие является для дальнейшего ключевым.

Определение. Якобиевой кривой называется кусочно-гладкая кривая Λ_τ на $L(\Sigma)$ удовлетворяющая уравнению Якоби и условиям $\Lambda_0 = \Pi_0$, $\Lambda_{\tau_i+0} = \Lambda_{\tau_i-0}^{\Gamma_{\tau_i+0}}$, $\forall \tau \in [0, t]$.

Прямое вычисление показывает, что $\sigma(\Lambda_\tau, \Gamma_\tau) = 0$, следовательно, $\Gamma_\tau \subset \Lambda_\tau, \forall \tau \in [0, t]$, поэтому кривая является непрерывной в любой точке непрерывности Γ_τ .

Пусть набор точек $0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_l = t$ содержит все точки нарушения гладкости кривых z_τ, ψ_{h_τ} . Более явно кривая Λ_τ описывается следующим образом:

$$\Lambda_0 = \Pi_0, \quad \Lambda_{\tau_i+0} = (\Lambda_{\tau_i} + \Gamma_{\tau_i+0})^\perp \cap \Gamma_{\tau_i+0}, \quad i = 0, 1, \dots, l-1,$$

$$\Lambda_\tau = \left\{ x_\tau \in \Sigma \mid \dot{x}_\tau = \sum_{i=1}^{\tau} \frac{\sigma(z_\theta^{(k_\theta)} v_\theta^i, x_\theta)}{\gamma_\theta(v_\theta^i)} z_\theta^{(k_\theta)} v_\theta^i, \quad \tau_i < \theta \leq \tau, \quad x_{\tau_i+0} \in \Gamma_{\tau_i+0} \right\}$$

при $\tau_i < \tau \leq \tau_{i+1}$.

Для вычисления индекса квадратичной формы ψG_i^* нам потребуется один симплектический инвариант тройки лагранжевых плоскостей. Пусть $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3 \subset \Sigma$ — лагранжевы плоскости, и $\hat{\lambda} \in (\Lambda_1 + \Lambda_3) \cap \Lambda_2 / \bigcap_{i=1}^3 \Lambda_i$. Тогда $\hat{\lambda}$ представляется в виде

$$\hat{\lambda} = \hat{\lambda}_1 + \hat{\lambda}_3, \quad \text{где } \hat{\lambda}_j \in \Lambda_j / \bigcap_{i=1}^3 \Lambda_i, \quad j = 1, 3. \quad \text{Предположим, что}$$

$$\hat{\lambda}_j = \lambda_j + \bigcap_{i=1}^3 \Lambda_i, \quad j = 1, 3 \quad \text{и положим } q(\hat{\lambda}) = \sigma(\lambda_1, \lambda_3). \quad \text{Легко видеть,}$$

что величина $q(\hat{\lambda})$ определена корректно, т. е. выражение $\sigma(\lambda_1, \lambda_3)$ не зависит от выбора представителей соответствующих смежных

классов. Таким образом, соответствие $\hat{\lambda} \mapsto q(\hat{\lambda})$ определяет квадратичную форму на $(\Lambda_1 + \Lambda_3) \cap \Lambda_2 / \bigcap_{i=1}^3 \Lambda_i$. Введем обозначение:

$$\text{ind}_{\Lambda_*}(\Lambda_1, \Lambda_3) = \text{ind } q + \frac{1}{2} \dim \ker q = \text{ind } q + \frac{1}{2} (\dim(\Lambda_1 \cap \Lambda_2) + \dim(\Lambda_3 \cap \Lambda_2)) - \dim \left(\bigcap_{i=1}^3 \Lambda_i \right),$$

где $\text{ind } q$ — индекс инерции квадратичной формы $q(\hat{\lambda})$, а $\ker q$ — ядро этой формы.

Ясно, что $0 \leq \text{ind}_{\Lambda_*}(\Lambda_1, \Lambda_3) \leq m$, причем $\text{ind}_{\Lambda_*}(\Lambda_1, \Lambda_1) = 0$,

$$\text{ind}_{\Lambda_*}(\Lambda_1, \Lambda_2) = \text{ind}_{\Lambda_*}(\Lambda_1, \Lambda_2) = \frac{1}{2} (m - \dim(\Lambda_1 \cap \Lambda_2)),$$

$$\text{ind}_{\Lambda_*}(\Lambda_1, \Lambda_3) + \text{ind}_{\Lambda_*}(\Lambda_3, \Lambda_1) + \dim(\Lambda_1 \cap \Lambda_3) = m.$$

Мы рассмотрим другие формальные свойства этого индекса (и, в частности, его выражение через индекс Маслова тройки лагранжевых плоскостей) в п. 4, а пока еще одно определение.

Определение. Пусть Λ_t , $t \in [t_0, t_1]$, — некоторая кусочно-гладкая кривая на многообразии лагранжевых плоскостей $L(\Sigma)$. Кривая Λ называется простой, если существует такая лагранжева плоскость $\mathcal{P} \subset \Sigma$, что

$$\Lambda_t \cap \mathcal{P} = 0, \quad \text{ind}_{\mathcal{P}}(\Lambda_t, \Lambda_{t+0}) = 0 \quad \forall t \in [t_0, t_1].$$

Лемма 3. Пусть Λ_t , $t \in [t_0, t_1]$, — кусочно-гладкая кривая на $L(\Sigma)$. Тогда для всякого $t \in [t_0, t_1]$ найдется такая окрестность O_t точки t в $[t_0, t_1]$, что кривая $\Lambda|_{O_t}$ — простая.

Доказательство. Из предложения П 5 приложения к настоящему параграфу вытекает существование такое лагранжевой плоскости $\mathcal{P}$, что квадратичная форма $\lambda \mapsto \sigma(\lambda_t, \lambda_{t+0})$ на $(\Lambda_t + \Lambda_{t+0}) \cap \mathcal{P}$, где $\lambda = \lambda_t + \lambda_{t+0}$, $\lambda_t \in \Lambda_t$, $\lambda_{t+0} \in \Lambda_{t+0}$, неотрицательна, и $\Lambda_t \cap \mathcal{P} = \Lambda_{t+0} \cap \mathcal{P} = 0$. В этом случае $\text{ind}_{\mathcal{P}}(\Lambda_t, \Lambda_{t+0}) = 0$.

Теорема 1. Пусть Λ_τ , $0 \leq \tau \leq t$ — якобиева кривая, и $\tau_{i+1} = 0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_l = t$ — произвольное разбиение отрезка $[0, t]$. Тогда

$$\sum_{i=0}^l \text{ind}_{\Pi_*}(\Lambda_{\tau_i}, \Lambda_{\tau_{i+1}}) \leq \text{ind } \psi G_t'' + m. \quad (12)$$

Если же данное разбиение отрезка $[0, t]$ таково, что все куски $\Lambda|_{[\tau_i, \tau_{i+1}]}$ якобиевой кривой простые, $0 \leq i < l$, то неравенство в формуле (12) обращается в равенство.

Прежде, чем доказывать теорему, опишем еще некоторые способы вычисления $\text{ind } \psi G_t''$, все они тесно связаны с формулой (12).

Рассмотрим зависящее от $s \in [0, t]$ семейство квадратичных форм

$$\begin{aligned} \psi G_s''(v(\cdot), v(\cdot)) = & \int_0^s \psi h_\tau(v(\tau)) d\tau + \\ & + \int_0^s \sigma \left(\int_0^\tau z_\theta v(\theta) d\theta, z_\tau v(\tau) \right) d\tau, \\ v(\cdot) \in L_\infty'[0, s], \quad & \int_0^s z_\tau v(\tau) d\tau \in \Pi_0. \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что $\text{ind } \psi G_s''$ — неубывающая непрерывная слева функция параметра s . Эта функция полностью характеризуется своими скачками в точках разрыва, т. е. величинами $\text{ind } \psi G_{s+0}'' - \text{ind } \psi G_s''$. Если в теореме 1 $\text{ind } \psi G_t''$ представлен в виде «интегральной суммы», то теперь мы хотим явно вычислить «производную» этого «интеграла». Чтобы это сделать, придется ввести еще одно семейство подпространств в Σ ; впрочем, для построения этого семейства не нужно даже решать дифференциальных уравнений.

Пусть $0 \leq \alpha \leq \beta \leq t$, положим

$$\Delta_\beta^\alpha = \Pi_0 \cap \{z_\tau v \mid \alpha < \tau \leq \beta, v \in \mathbb{R}^r\}^\perp, \quad \Delta_{\beta+0}^\alpha = \bigcup_{\varepsilon > 0} \Delta_{\beta+\varepsilon}^\alpha.$$

Легко видеть, что

$$\dim \Delta_\beta^\alpha = \text{codim} \left(\sum_{\alpha < \tau \leq \beta} \bar{\mu}_0 z_\tau \mathbb{R}^r \right).$$

В самом деле, это следует из очевидных соотношений:

$$\Delta_\beta^\alpha \perp = \Pi_0 + \sum_{\alpha < \tau \leq \beta} z_\tau \mathbb{R}^r, \quad \ker \bar{\mu}_0 = \Pi_0.$$

В частности, $\Delta_t^0 = 0$, так как $\sum_{0 < \tau \leq t} \bar{\mu}_0 z_\tau \mathbb{R}^r = \Pi$. Заметим еще, что

$\Delta_\beta^\alpha \subset \Delta_{\beta+0}^\alpha \subset \Delta_\beta^\alpha$, если $\bar{\alpha} \leq \alpha < \beta < \bar{\beta}$. Если же $\bar{\mu}_0 z_\tau$ аналитично зависит от $\tau \in [0, t]$, то $\Delta_{\alpha+0}^\alpha = 0 \quad \forall \alpha \in [0, t]$.

Теорема 2. Для любого $s \in [0, t]$ справедливо соотношение:

$$\begin{aligned} \text{ind } \psi G_{s+0}'' - \text{ind } \psi G_s'' = & \dim (\Lambda_{s+0} \cap \Pi_0 / \Lambda_{s+0} \cap \Delta_{s+0}^s) - \dim (\Delta_s^0 / \Delta_{s+0}^0) + \\ & + \text{ind}_{\Pi_0} (\Lambda_s, \Lambda_{s+0}) + \frac{1}{2} (\dim (\Lambda_s \cap \Pi_0) - \dim (\Lambda_{s+0} \cap \Pi_0)). \end{aligned}$$

Приведенное выражение внешне выглядит достаточно громоздко, однако последние три слагаемых дают вклад лишь в том случае, когда s — точка разрыва кривой Якоби, второе слагаемое почти тривиально.

Точка $s \in (0, t)$ называется сопряженной нулю точкой для уравнения Якоби, если $\Lambda_s \cap \Pi_0 \neq 0$, а величина $\dim(\Lambda_s \cap \Pi_0)$ называется кратностью сопряженной точки s . Следующее утверждение указывает точные рамки, в которых справедлива классическая формула Морса для индекса второй вариации.

Следствие. Предположим, что $\Delta_s^0 = \Delta_{s+0}^s$, и s — точка непрерывности якобевой кривой Δ . Тогда

$$\text{ind } \psi G_{s+0}^* - \text{ind } \psi G_s^* = \dim(\Lambda_s \cap \Pi_0).$$

4. Доказательство теорем 1, 2 будет приведено в п. 5, а в настоящем пункте дана гомотопическая интерпретация формулы (12).

Пусть $\Lambda \in L(\Sigma)$. Ниже без специальных оговорок постоянно используется отождествление касательного пространства $T_\Lambda L(\Sigma)$ с пространством квадратичных форм на Λ , описанное в приложении к настоящему параграфу.

Определение. Кусочно гладкая кривая $\mathcal{A}_\tau$, $\tau \in [t_0, t_1]$, на $L(\Sigma)$ называется неубывающей, если скорость $\frac{d}{d\tau} \mathcal{A}_\tau \in T_{\mathcal{A}_\tau} L(\Sigma)$ есть неотрицательная квадратичная форма на $\mathcal{A}_\tau$.

Иными словами, $\mathcal{A}_\tau$ — неубывающая кривая, если $\frac{d}{d\tau} \mathcal{A}_\tau \geq 0$ $\forall \tau \in [t_0, t_1]$. В частности, якобева кривая Λ_τ — неубывающая, поскольку

$$\frac{d}{d\tau} \Lambda_\tau = \frac{1}{2} \gamma_\tau^{-1} (\sigma(z_\tau^{(k_\tau)}, \Lambda_\tau)) \geq 0.$$

Лемма 4. Любые две лагранжевы плоскости $\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1 \in L(\Sigma)$ можно соединить простой гладкой неубывающей кривой $\mathcal{A}_\tau$, $0 \leq \tau \leq 1$.

Доказательство. Из леммы 3 следует существование такой лагранжевой плоскости $\mathcal{B}$, что $\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1 \in \mathcal{B}^\perp$ и $\text{ind } \mathcal{B}(\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1) = 0$. В предложении П1 и его следствии на множестве $\mathcal{B}^\perp$ определена структура аффинного пространства. Прямолинейный отрезок, соединяющий $\mathcal{A}_0$ с $\mathcal{A}_1$ в этом аффинном пространстве, является, как нетрудно видеть, простой неубывающей кривой в $L(\Sigma)$.

В предложении П6 приведена формула, позволяющая вычислять индекс Маслова данной непрерывной замкнутой кривой через индексы Маслова подходящих троек лагранжевых плоскостей. Если кривая — неубывающая, удобнее использовать индекс, участвующий в формулировке утверждения теоремы 1. Для начала выразим один индекс через другой.

Лемма 5. Пусть $\Lambda_i \in L(\Sigma)$, $i = 1, 2, 3$, тогда

$$\mu(\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3) + 2\text{ind}_\Lambda(\Lambda_1, \Lambda_3) + \dim(\Lambda_1 \cap \Lambda_3) = m.$$

Доказательство. Напомним, что

$$\text{ind}_{\Lambda_2}(\Lambda_1, \Lambda_3) = \text{ind } q + \frac{1}{2} \dim \ker q,$$

где q — квадратичная форма, заданная на пространстве $\Lambda_2 \cap (\Lambda_1 + \Lambda_3) / \bigcap_{i=1}^3 \Lambda_i$. При этом $q(\hat{\lambda}) = \sigma(\lambda_1, \lambda_3)$, где $\lambda_j \in \Lambda_j$, $j = 1, 3$, $\hat{\lambda} = \lambda_1 + \lambda_3 + \bigcap_{i=1}^3 \Lambda_i$. В то же время $\mu(\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3)$ совпадает с сигнатурой формы q . Утверждение леммы вытекает теперь из равенства

$$\dim(\Lambda_2 \cap (\Lambda_1 + \Lambda_3) / \bigcap_{i=1}^3 \Lambda_i) = m - \dim(\Lambda_1 \cap \Lambda_3).$$

Следствие. Пусть $\Lambda_1 \cap \Lambda_3 \supset S$ — изотропное подпространство в Σ . Тогда

$$\text{ind}_{\Lambda_2}(\Lambda_1, \Lambda_3) = \text{ind}_{\Lambda_2^S}(\Lambda_1, \Lambda_3).$$

В самом деле, $\Lambda_1^S = \Lambda_1$, $\Lambda_3^S = \Lambda_3$, $\mu(\Lambda_1^S, \Lambda_2^S, \Lambda_3^S) = \mu(\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3)$.

Предложение 2. Пусть $\mathcal{A}_\tau$, $t_0 \leq \tau \leq t_1$, — непрерывная замкнутая неубывающая кривая на $L(\Sigma)$, и $t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_N < \tau_{N+1} = t_1$ — некоторое разбиение отрезка $[t_0, t_1]$, $\mathcal{B} \in L(\Sigma)$. Тогда

$$\sum_{i=0}^N \text{ind}_{\mathcal{B}}(\mathcal{A}_{\tau_i}, \mathcal{A}_{\tau_{i+1}}) \leq \text{Ind } \mathcal{A}. \quad (13)$$

Если же разбиение отрезка $[t_0, t_1]$ таково, что все кривые $\mathcal{A}|_{[\tau_i, \tau_{i+1}]}$ — простые, то неравенство в формуле (13) обращается в равенство.

Доказательство. Сначала рассмотрим случай, когда кривые $\mathcal{A}|_{[\tau_i, \tau_{i+1}]}$ — простые.

Пусть T_i — лагранжева плоскость, трансверсальная к кривой $\mathcal{A}|_{[\tau_i, \tau_{i+1}]}$, $i = 0, \dots, N$. Тогда, согласно предложению П6,

$$2 \text{Ind } \mathcal{A} = \sum_{i=0}^N (\mu(T_i, \mathcal{B}, \mathcal{A}_{\tau_i}) - \mu(T_i, \mathcal{B}, \mathcal{A}_{\tau_{i+1}})).$$

В то же время из цепного правила для индекса Маслова следует

$$\begin{aligned} \mu(T_i, \mathcal{B}, \mathcal{A}_{\tau_i}) - \mu(T_i, \mathcal{B}, \mathcal{A}_{\tau_{i+1}}) &= \mu(\mathcal{B}, \mathcal{A}_{\tau_i}, \mathcal{A}_{\tau_{i+1}}) - \\ &- \mu(T_i, \mathcal{A}_{\tau_i}, \mathcal{A}_{\tau_{i+1}}) = -\mu(\mathcal{A}_{\tau_i}, \mathcal{B}, \mathcal{A}_{\tau_{i+1}}) - \mu(T_i, \mathcal{A}_{\tau_i}, \mathcal{A}_{\tau_{i+1}}), \end{aligned}$$

Пусть $\tau \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$, обозначим через $p_\tau: \Sigma \rightarrow \mathcal{A}_\tau$ проектор пространства Σ на $\mathcal{A}_\tau$ параллельно T_i . Тогда $-\mu(T_i, \mathcal{A}_{\tau_i}, \mathcal{A}_{\tau_{i+1}})$ совпадает с сигнатурой квадратичной формы $\alpha \mapsto \sigma(p_{\tau_{i+1}} \alpha, \alpha)$,

заданной на пространстве $\mathcal{A}_{\tau_i}$. Поскольку $\mathcal{A}_{\tau}$ — неубывающая кривая, то квадратичная форма $\alpha \mapsto \sigma(\dot{p}_{\tau}\alpha, \alpha)$ неотрицательна на $\mathcal{A}_{\tau}$, $\forall \tau \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$. В то же время, из тождества $\sigma(p_{\tau}x, \xi) = \sigma(x, \xi)$, верного для любых $\tau \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$, $x \in \Sigma$, $\xi \in T_i$ (см. П1), вытекает, что $\sigma(\dot{p}_{\tau}x, \xi) = 0$, $\forall x \in \Sigma$, $\xi \in T_i$. Поэтому форма $\alpha \mapsto \sigma(\dot{p}_{\tau}\alpha, \alpha)$, будучи неотрицательной на подпространстве $\mathcal{A}_{\tau}$, являющемся прямым дополнением к T_i в Σ , неотрицательна также на всем Σ . Далее, для любого $\alpha \in \mathcal{A}_{\tau_i}$ имеем

$$\sigma(p_{\tau_{i+1}}\alpha, \alpha) = \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \sigma(\dot{p}_{\tau}\alpha, \alpha) d\tau \geq 0.$$

Ядро формы $\alpha \mapsto \sigma(p_{\tau_{i+1}}\alpha, \alpha)$ на $\mathcal{A}_{\tau_i}$ совпадает с $\mathcal{A}_{\tau_i} \cap \mathcal{A}_{\tau_{i+1}}$. Следовательно,

$$-\mu(T_i, \mathcal{A}_{\tau_i}, \mathcal{A}_{\tau_{i+1}}) = m - \dim(\mathcal{A}_{\tau_i} \cap \mathcal{A}_{\tau_{i+1}}).$$

Согласно лемме 5,

$$-\mu(\mathcal{A}_{\tau_i}, \mathcal{B}, \mathcal{A}_{\tau_{i+1}}) = 2 \operatorname{ind}_{\mathcal{B}}(\mathcal{A}_{\tau_i}, \mathcal{A}_{\tau_{i+1}}) - m.$$

Все складывая, получаем

$$\operatorname{Ind} \mathcal{A} = \sum_{i=0}^N \operatorname{ind}_{\mathcal{B}}(\mathcal{A}_{\tau_i}, \mathcal{A}_{\tau_{i+1}}).$$

Неравенство (13) теперь является следствием «неравенства треугольника» для ind , которое важно и само по себе.

Лемма 6. Для любых $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3, \mathcal{B} \in L(\Sigma)$ справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \dim(\Lambda_1 \cap \Lambda_3) + \operatorname{ind}_{\mathcal{B}}(\Lambda_1, \Lambda_3) &\leq \operatorname{ind}_{\mathcal{B}}(\Lambda_1, \Lambda_2) + \\ &+ \operatorname{ind}_{\mathcal{B}}(\Lambda_2, \Lambda_3) + \dim\left(\bigcap_{i=1}^3 \Lambda_i\right). \end{aligned}$$

Доказательство. В силу следствия леммы 5, достаточно рассмотреть случай $\bigcap_{i=1}^3 \Lambda_i \subset \mathcal{B}$. Соединим простыми непрерывными неубывающими кривыми последовательно Λ_1 с Λ_2 , Λ_2 с Λ_3 и Λ_3 с Λ_1 . В результате получится непрерывная неубывающая замкнутая кривая. Согласно уже доказанной части предложения 2 индекс Маслова d этой кривой можно вычислить по формуле

$$\begin{aligned} d &= \operatorname{ind}_{\mathcal{B}}(\Lambda_1, \Lambda_2) + \operatorname{ind}_{\mathcal{B}}(\Lambda_2, \Lambda_3) + \operatorname{ind}_{\mathcal{B}}(\Lambda_3, \Lambda_1) = \\ &= \operatorname{ind}_{\mathcal{B}}(\Lambda_1, \Lambda_2) + \operatorname{ind}_{\mathcal{B}}(\Lambda_2, \Lambda_3) + m - \dim(\Lambda_1 \cap \Lambda_3) - \operatorname{ind}_{\mathcal{B}}(\Lambda_1, \Lambda_3). \end{aligned}$$

Воспользуемся тем, что это равенство справедливо при любом $\mathcal{B}$. Подставляя вместо $\mathcal{B}$ лагранжеву плоскость Λ_1 , получим

$$\begin{aligned} d &= \text{ind}_{\Lambda_1}(\Lambda_1, \Lambda_2) + \text{ind}_{\Lambda_1}(\Lambda_2, \Lambda_3) + \text{ind}_{\Lambda_1}(\Lambda_3, \Lambda_1) = \\ &= \frac{1}{2}(m - \dim(\Lambda_1 \cap \Lambda_2)) + \frac{1}{2}(m - \dim(\Lambda_1 \cap \Lambda_3)) + \\ &\quad + \text{ind}_{\Lambda_1}(\Lambda_2, \Lambda_3) \geq m - \dim\left(\bigcap_{i=1}^3 \Lambda_i\right). \end{aligned}$$

Сравнивая два выражения для d , приходим к неравенству

$$\text{ind}_{\mathcal{B}}(\Lambda_1, \Lambda_2) + \text{ind}_{\mathcal{B}}(\Lambda_2, \Lambda_3) - \text{ind}_{\mathcal{B}}(\Lambda_1, \Lambda_3) \geq \dim(\Lambda_1 \cap \Lambda_3) - \dim\left(\bigcap_{i=1}^3 \Lambda_i\right).$$

Лемма 7. Пусть $\mathcal{A}_\tau$, $t_0 \leq \tau \leq t_1$ — простая неубывающая кривая в $L(\Sigma)$. Тогда $\mathcal{A}_{t_0} \cap \mathcal{A}_{t_1} = \bigcap_{t_0 \leq \tau \leq t_1} \mathcal{A}_\tau$.

Доказательство. Из предложения 2 вытекает равенство

$$\text{ind}_{\mathcal{B}}(\mathcal{A}_{t_0}, \mathcal{A}_{t_1}) = \text{ind}_{\mathcal{B}}(\mathcal{A}_{t_0}, \mathcal{A}_\tau) + \text{ind}_{\mathcal{B}}(\mathcal{A}_\tau, \mathcal{A}_{t_1}),$$

$\forall \tau \in [t_0, t_1]$, $\mathcal{B} \in L(\Sigma)$. Поэтому, согласно лемме 6,

$$\dim(\Lambda_{t_0} \cap \Lambda_{t_1}) \leq \dim(\Lambda_{t_0} \cap \Lambda_\tau \cap \Lambda_{t_1}).$$

Последнее возможно лишь в случае $\Lambda_{t_0} \cap \Lambda_{t_1} \subset \Lambda_\tau$.

Следствие. Пусть $\mathcal{A}_\tau$, $t_0 \leq \tau \leq t_1$, — непрерывная неубывающая замкнутая кривая в $L(\Sigma)$. Тогда

$$\text{Ind } \mathcal{A} \geq m - \dim\left(\bigcap_{t_0 \leq \tau \leq t_1} \mathcal{A}_\tau\right).$$

Доказательство. Обозначим $\mathcal{B} = \mathcal{A}_{t_0} = \mathcal{A}_{t_1}$, и пусть $t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_N < \tau_{N+1} = t_1$ — такое разбиение отрезка $[t_0, t_1]$, что все кривые $\mathcal{A}|_{[\tau_i, \tau_{i+1}]}$ — простые. Тогда

$$\begin{aligned} \text{Ind } \mathcal{A} &= m - \frac{1}{2}(\dim(\mathcal{B} \cap \mathcal{A}_{\tau_1}) + \dim(\mathcal{B} \cap \mathcal{A}_{\tau_N})) + \\ &\quad + \sum_{i=1}^{N-1} \text{ind}_{\mathcal{B}}(\mathcal{A}_{\tau_i}, \mathcal{A}_{\tau_{i+1}}) \geq m + \sum_{j=2}^{N-1} \dim(\mathcal{B} \cap \mathcal{A}_{\tau_j}) - \\ &\quad - \sum_{i=1}^{N-1} \dim(\mathcal{A}_{\tau_i} \cap \mathcal{B} \cap \mathcal{A}_{\tau_{i+1}}) \geq m - \dim\left(\mathcal{B} \bigcap_{i=1}^N \mathcal{A}_{\tau_i}\right). \end{aligned}$$

Воспользовавшись леммой 7, получаем $\mathcal{B} \bigcap_{i=1}^N \mathcal{A}_{\tau_i} = \bigcap_{t_0 \leq \tau \leq t_1} \mathcal{A}_\tau$.

Теорема 3. Пусть Λ_τ , $\tau \in [0, t]$, — якобиева кривая, $\tau_1, \dots, \tau_N$ — все ее точки разрыва. Соединим в указанном ниже порядке простыми непрерывными неубывающими кривыми Π_0 с Λ_{τ_0} , Λ_{τ_i} с $\Lambda_{\tau_{i+1}}$, $i = 1, \dots, N$, Λ_t с Π_0 . Якобиева кривая Λ_τ

вместе с добавленными таким способом кусками образует непрерывную неубывающую замкнутую кривую в $L(\Sigma)$, которую мы обозначим $\bar{\Lambda}$. Тогда

$$\text{ind } \psi G_i^* = \text{ind } \bar{\Lambda}_i - m.$$

Доказательство немедленно следует из теоремы 1 и предложения 3.

5. Доказательство теоремы 1. Из неравенства треугольника (Лемма 6) следует, что достаточно доказать теорему в случае, когда все кривые $\Lambda|_{[\tau_i, \tau_{i+1}]}$ простые. В то же время, из предложения 2 вытекает, что для неубывающей простой кривой $\Lambda|_{[\tau_i, \tau_{i+1}]}$ и произвольного $\tau \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$ справедливо равенство

$$\text{ind}_{\Pi_i}(\Lambda_{\tau_i}, \Lambda_{\tau}) + \text{ind}_{\Pi_i}(\Lambda_{\tau}, \Lambda_{\tau_{i+1}}) = \text{ind}_{\Pi_i}(\Lambda_{\tau_i}, \Lambda_{\tau_{i+1}}),$$

т. е. неравенство треугольника в этом случае превращается в равенство.

Таким образом, теорему 1 достаточно доказать для какого-нибудь одного произвольного достаточно мелкого разбиения отрезка $[0, t]$. В частности, мы будем считать, что среди точек $\tau_1, \dots, \tau_l$ содержатся все точки нарушения гладкости кривой Λ_{τ} , $\tau \in [0, t]$; когда k_{τ} постоянно на полуинтервалах $[\tau_i, \tau_{i+1}]$, положим $k_{\tau} = k_i$ при $\tau \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$, $i = 0, 1, \dots, l-1$.

В дальнейшем мы будем использовать специальные пространства распределений с носителями на заданном отрезке вещественной прямой — соболевские пространства с отрицательными номерами. Напомним определение этих пространств.

Пусть $-\infty < t_0 < t_1 < +\infty$ и $k \geq 0$ — целое. В пространстве $C_{\infty}'[t_0, t_1]$ введем скалярное произведение

$$(a, b)_{k, [t_0, t_1]} = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=0}^k (a_{\tau}^{(i)}, b_{\tau}^{(i)}) d\tau, \quad \forall a_{\tau}, b_{\tau} \in C_{\infty}'[t_0, t_1];$$

здесь $a_{\tau}^{(i)} = \frac{d^i}{d\tau^i} a_{\tau}$, $b_{\tau}^{(i)} = \frac{d^i}{d\tau^i} b_{\tau}$, $(\cdot, \cdot)$ — стандартное скалярное произведение в $\mathbb{R}^r$.

Полношение пространства $C_{\infty}'[t_0, t_1]$ в норме $\|a\|_{k, [t_0, t_1]} = \sqrt{(a, a)_{k, [t_0, t_1]}}$ является, очевидно, гильбертовым пространством. Оно называется соболевским пространством порядка k и обозначается $H_k'[t_0, t_1]$. Легко видеть, что $H_k'[t_0, t_1]$ состоит из таких $k-1$ раз непрерывно дифференцируемых функций a_{τ} , что $a_{\tau}^{(k-1)}$ абсолютно непрерывна и $a_{\tau}^{(k)} \in L_2'[t_0, t_1]$.

Далее, пусть $u(\tau) \in L_2'[t_0, t_1] = H_0'[t_0, t_1]$. Отображение $a_{\tau} \mapsto \int_{t_0}^{t_1} (a_{\tau}, u(\tau)) d\tau$, где $a_{\tau} \in H_k'[t_0, t_1]$, определяет линейный

непрерывный функционал на $H_k^r[t_0, t_1]$. Положим $\|u(\cdot)\|_{k, [t_0, t_1]} = \sup_{\|a\|_{k, [t_0, t_1]}=1} \int_{t_0}^{t_1} (a_\tau, u(\tau)) d\tau$ — обычная операторная норма.

Пополнение пространства $L_2^r[t_0, t_1]$ в норме $\|\cdot\|_{-k, [t_0, t_1]}$ называется соболевским пространством порядка $(-k)$ и обозначается $H_{-k}^r[t_0, t_1]$. Пространство $H_{-k}^r[t_0, t_1]$, очевидно, изоморфно сопряженному пространству к $H_k^r[t_0, t_1]$, следовательно, оно гильбертово. Кроме того, поскольку любой функционал на $C_\infty^r[t_0, t_1]$, непрерывный в норме $\|\cdot\|_{k, [t_0, t_1]}$, тем более непрерывен в стандартной топологии пространства $C_\infty^r[t_0, t_1]$, то $H_k^r[t_0, t_1]$ содержится в пространстве всех r -мерных векторных распределений с носителем в $[t_0, t_1]$. Распределения, лежащие в $H_{-k}^r[t_0, t_1]$, могут быть охарактеризованы следующим образом: пусть $\chi^i(\tau) = \begin{cases} 0, & \tau \leq 0 \\ \tau^i, & \tau > 0, i = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$

$\chi^0(\tau) = \chi(\tau)$ (функция Хевисайда), и знак $*$ означает операцию свертки двух распределений: векторное распределение $\tilde{u}(\tau) = (u^1(\tau), \dots, u^r(\tau))^T$ с носителем в $[t_0, t_1]$ в том и только том случае лежит в $H_{-k}^r[t_0, t_1]$, когда распределение $\chi^{k-1}(\cdot) * u(\cdot) = (\chi^{k-1}(\cdot) * u^1(\cdot), \dots, \chi^{k-1}(\cdot) * u^r(\cdot))^T$ является локально суммируемой вектор-функцией, причем

$$\chi^{k-1}(\cdot) * u(\cdot)|_{[t_0, t_1]} \in L_2^r[t_0, t_1] = H_0^r[t_0, t_1].$$

Заметим, что, каково бы ни было распределение v с носителем в $[t_0, t_1]$, результат его свертки с χ^{k-1} имеет носитель в $[t_0, +\infty)$, причем на полуограниченном интервале $[t_1, +\infty)$ совпадает с некоторым полиномом степени не выше $k-1$. Коэффициенты этого полинома вместе с ограничением $\chi^{k-1} * v$ на $[t_0, t_1]$ содержат полную информацию о распределении v . В случае, когда $v \in H_{-k}^r[t_0, t_1]$, это дает возможность определить норму, эквивалентную $\|\cdot\|_{-k, [t_0, t_1]}$ при помощи нормы пространства L_2^r . Поскольку для наших целей не имеет смысла различать эквивалентные нормы, мы сохраним для новой нормы обозначение $\|\cdot\|_{-k, [t_0, t_1]}$. Точное определение таково: для всякого $u \in H_{-k, [t_0, t_1]}^r$ положим

$$\|u\|_{-k, [t_0, t_1]} = \left(\int_{t_0}^{t_1} |\chi^{k-1} * u(\tau)|^2 d\tau + \sum_{i=0}^{k-1} |\langle u, \chi^i \rangle|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

(угловые скобки $\langle u, \chi^i \rangle$ означают результат применения векторного распределения u к функции τ^i , если

$$u \in L_1^r[t_0, t_1], \text{ то } \langle u, \chi^i \rangle = \int_{t_0}^{t_1} \tau^i u(\tau) d\tau \in \mathbb{R}^r.$$

Вернемся к рассмотрению разбиения $0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_l < \tau_{l+1} = t$ отрезка $[0, t]$. Поскольку любая функция из $L_\infty^r[0, t]$, будучи сужена на отрезок $[\tau_i, \tau_{i+1}]$, заведомо принадлежит пространству $H_{-k_i}^r[\tau_i, \tau_{i+1}] \supset H_0^r[\tau_i, \tau_{i+1}] \supset L_\infty^r[\tau_i, \tau_{i+1}]$, то на пространстве $L_\infty^r[0, t]$ определена норма

$$\|\cdot\|_{-k, t} = \left(\sum_{i=0}^{l-1} \|\cdot\|_{-k_i, [\tau_i, \tau_{i+1}]}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Лемма 8. Билинейная форма $\psi G_l''$ непрерывна в норме $\|\cdot\|_{-k, t}$.

Доказательство. Достаточно, очевидно, доказать, что для всякого i , удовлетворяющего условию $k_i > 0$, квадратичная форма

$$v(\cdot) \mapsto \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \sigma \left(\int_{\tau_i}^{\tau} z_\theta v(\theta), z_\tau v(\tau) \right) d\tau$$

непрерывна в норме $\|\cdot\|_{-k_i, [\tau_i, \tau_{i+1}]}$. Но это непосредственно следует из равенства (6), выведенного при доказательстве предложения 1, и очевидного неравенства

$$\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |w(\tau)|^2 d\tau \leq \|v(\cdot)\|_{-k_i, [\tau_i, \tau_{i+1}]}^2,$$

где $w(\tau) = \int_0^\tau \frac{(\tau-\theta)^{k_i-1}}{(k_i-1)!} d\theta$ — k_i -кратный неопределенный интеграл от $v(\cdot)$.

Пополнением пространства $L_\infty^r[0, t]$ в норме $\|\cdot\|_{-k, t}$ является гильбертово пространство $\bigoplus_{i=0}^l H_{-k_i}^r[\tau_i, \tau_{i+1}]$. Введем обозначение

$H_{-k, t}^r = \bigoplus_{i=0}^l H_{-k_i}^r[\tau_i, \tau_{i+1}]$; элемент

$$\left(\begin{pmatrix} u_0^1 \\ \vdots \\ u_0^r \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} u_{l-1}^1 \\ \vdots \\ u_{l-1}^r \end{pmatrix} \right) = (u_0, \dots, u_{l-1}) \in H_{-k, t}^r[0, t]$$

будем обозначать единым символом u ; заметим, что $u = (u_0, \dots, u_{l-1})$ не является, вообще говоря, распределением на отрезке $[0, t]$, поскольку в точках τ_j , $j = 1, \dots, l$, этот элемент принимает «два значения»: например, если $u_{l-1} = \delta_{\tau_l} \in H_{-1}[\tau_{l-1}, \tau_l]$, а $u_l = \delta_{\tau_l}^* \in H_{-2}[\tau_l, \tau_{l+1}]$. Пространство $H_{-k, t}^r[0, t]$

является двойственным к пространству $H_{k, t}^r[0, t] = \bigoplus_{i=0}^{\text{def } l-1} H_{k_i}^r[\tau_i, \tau_{i+1}]$.

В свою очередь, любая кусочно гладкая функция на $[0, t]$, гладкая на каждом интервале (τ_i, τ_{i+1}) , $i=0, 1, \dots, l$, очевидным образом отождествляется с элементом пространства $H_k[0, t]$, элементы пространства $H_{-k}^r[0, t]$ действуют на такие функции, как обычные векторные распределения — на гладкие:

$$\langle u, a \rangle = \sum_{i=0}^l \langle u_i, a|_{[\tau_i, \tau_{i+1}]} \rangle \quad (\text{именно «раздвоенность» } u \in H_{-k}^r[0, t])$$

в точках τ_i позволяет u действовать на функции, имеющие разрывы в этих точках, но гладкие и слева, и справа). Элементы $H_{-k}^r[0, t]$ можно также умножать на кусочно гладкие функции, гладкие на интервалах (τ_i, τ_{i+1}) , и на матрицы, элементы которых являются такими функциями. В частности, для $v \in H_{-k}^r[0, t]$ определены $z \cdot v$ и $\bar{\mu}_0 z \cdot v$, которые при фиксировании базисов в пространствах Σ и Π становятся элементами из $H_{-k}^{2m}[0, t]$ и $H_{-k}^m[0, t]$ соответственно.

Пополнением области определения формы $\psi G_t''$ в норме $\|\cdot\|_{-k, t}$ является подпространство

$$\{v \in H_{-k}^r[0, t] \mid \langle \bar{\mu}_0 z \cdot v, 1 \rangle = 0\} \stackrel{\text{def}}{=} \{\bar{\mu}_0 z \cdot\}_{-k}^\perp.$$

— гильбертово подпространство коразмерности m в $H_{-k}^r[0, t]$.

Билинейная форма $\psi G_t''$ однозначно продолжается по непрерывности до формы Q , заданной на пространстве $\{\bar{\mu}_0 z \cdot\}_{-k}^\perp$. При этом $\text{ind } Q = \text{ind } \psi G_t''$.

Чтобы записать форму Q в явном виде, надо придать точный смысл выражению $\chi * (z \cdot v)$, где $v \in H_{-k}^r[0, t]$, а χ , как и раньше, функция Хевисайда (двусмысленность может возникнуть опять-таки из-за «раздвоения» v в точках τ_i). Пусть $u = (u_0, \dots, u_{l-1})$, $u_i \in H_{-k}^r[\tau_i, \tau_{i+1}]$, распределение $\chi * u_i$ имеет носитель в $[\tau_i, +\infty)$, причем на интервале $(\tau_{i+1}, +\infty)$ оно совпадает с вектором $\langle u_i, 1 \rangle \in \mathbb{R}^r$. В свою очередь, распределение $((\chi * u_i)(\tau) - \langle u_i, 1 \rangle \chi(\tau - \tau_{i+1})) \in H_{1-k}[\tau_i, \tau_{i+1}] \subset H_{-k}[\tau_i, \tau_{i+1}]$. Положим $\chi * u = (w_0, \dots, w_{l-1})$, где

$$w_i(\tau) = \left(\sum_{j=0}^{i-1} \langle u_j, 1 \rangle \right) (\chi(\tau - \tau_i) - \chi(\tau - \tau_{i+1})) + (\chi * u_i)(\tau) - \langle u_i, 1 \rangle \chi(\tau - \tau_{i+1}).$$

Пусть $\bar{h}_\tau$ — симметричная $r \times r$ -матрица, отвечающая квадратичной форме ψh_τ , т. е. $\psi h_\tau(v_1, v_2) = (\bar{h}_\tau v_1, v_2)$.

Лемма 9. Каково бы ни было $v \in \{\bar{\mu}_0 z \cdot\}_{-k}^\perp$, векторное распределение $\sigma(\chi * (z \cdot v), z \cdot \cdot)^T + \bar{h} \cdot v$ лежит в пространстве $H_k^r[0, t] \subset$

$\subset H_{-k}^r[0, t]$, при этом

$$Q(v, v) = \langle v^T, \sigma(\chi_*(zv), z \cdot)^T + \bar{h}v \rangle.$$

Доказательство. Достаточно доказать существование такой константы c , что

$$\left\| \sigma \left(\int_0^\tau z_\theta v(\theta) d\theta, z_{\tau \cdot} \right)^T + \bar{h}_\tau v(\tau) \right\|_{k, t} \leq c \|v\|_{-k, t}, \quad \forall v \in C_\infty^r[0, t],$$

из этого неравенства утверждения леммы выводятся по непрерывности. Для доказательства последнего неравенства достаточно, в свою очередь, установить неравенства

$$\left\| \sigma \left(\int_{\tau_i}^\tau z_\theta v(\theta) d\theta, z_{\tau \cdot} \right) \right\|_{k_i, [\tau_i, \tau_{i+1}]} \leq c_i \|v\|_{-k_i, [\tau_i, \tau_{i+1}]}, \quad \forall v \in C_\infty^r[\tau_i, \tau_{i+1}],$$

$$i = 0, 1, \dots, l-1$$

при некоторых константах c_i .

Пусть $0 \leq n \leq k_i$, тогда, учитывая лемму 1, получаем

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{d\tau^n} \sigma \left(\int_{\tau_i}^\tau z_\theta v(\theta) d\theta, z_{\tau \cdot} \right) &= \sigma \left(\int_{\tau_i}^\tau z_\theta v(\theta) d\theta, z_{\tau \cdot}^{(n)} \right) = \\ &= (-1)^{k_i-1} \sigma(z_{\tau \cdot}^{(k_i-1)} w(\tau), z_{\tau \cdot}^{(n)}) + (-1)^{k_i} \sigma \left(\int_{\tau_i}^\tau z_\theta^{(k_i)} w(\theta) d\theta, z_{\tau \cdot}^{(n)} \right), \end{aligned}$$

где

$$w(\tau) = \int_{\tau_i}^\tau \frac{(\tau-\theta)^{k_i-1}}{(k_i-1)!} v(\theta) d\theta.$$

Требуемое неравенство теперь вытекает непосредственно из определения норм $\|\cdot\|_{k_i, [\tau_i, \tau_{i+1}]}$ и $\|\cdot\|_{-k_i, [\tau_i, \tau_{i+1}]}$.

Лемма 10. Квадратичная форма Q положительно определена на подпространстве конечной размерности в $\{\bar{\mu}_0 z\}_{-k}^\perp$.

Доказательство. Для $i = 0, 1, \dots, l-1$ имеем

$$H_{-k_i}^r[\tau_i, \tau_{i+1}] \subset H_{-k_i}^r[0, t] = \bigoplus_{i=0}^{l-1} H_{-k_i}^r[\tau_i, \tau_{i+1}];$$

при этом

$$\begin{aligned} &H_{-k_i}^r[\tau_i, \tau_{i+1}] \cap \{\bar{\mu}_0 z\}_{-k_i}^\perp = \\ &= \{v \in H_{-k_i}^r[\tau_i, \tau_{i+1}] \mid \langle \bar{\mu}_0 zv, 1 \rangle = 0\} \stackrel{\text{def}}{=} \{\bar{\mu}_0 z\}_{-k_i}^\perp. \end{aligned}$$

Подпространство $\bigoplus_{i=0}^{l-1} \{\bar{\mu}_0 z\}_{-k_i}^\perp$ имеет, очевидно, конечную коразмерность в $\{\bar{\mu}_0 z\}_{-k}^\perp$. Квадратичная форма Q , будучи сужена на подпространство $\bigoplus_{i=0}^{l-1} \{\bar{\mu}_0 z\}_{-k_i}^\perp$, распадается в прямую сумму форм:

$$Q(v, v) = \sum_{i=0}^{l-1} \langle v_i^T, \sigma(\chi^*(zv_i), z \cdot)^T + \bar{h}v_i \rangle,$$

если

$$v = (v_0, \dots, v_{l-1}), \quad v_i \in \{\bar{\mu}_0 z\}_{-k_i}^\perp, \quad i = 0, 1, \dots, l-1.$$

Поэтому для доказательства леммы 10 достаточно установить положительную определенность каждой из форм

$$Q^i(v, v) \stackrel{\text{def}}{=} \langle v_i^T, \sigma(\chi^*(zv_i), z \cdot)^T + \bar{h}v_i \rangle$$

на подпространстве конечной коразмерности в $\{\bar{\mu}_0 z\}_{-k_i}^\perp$,

$i = 0, 1, \dots, l-1$. Обозначим $w_i = \frac{\chi^{k_i-1}}{(k_i-1)!} * v_i$. Если

$$\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} z_\tau^{(k_i)} w_i(\tau) d\tau = 0, \text{ то}$$

$$Q^i(v_i, v_i) = \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \gamma_\tau(w_i(\tau)) d\tau + \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \sigma \left(\int_{\tau_i}^{\tau} z_\theta^{(k_i)} w_i(\theta) d\theta, z_\tau^{(k_i)} w_i(\tau) \right) d\tau. \quad (14)$$

В самом деле, в случае, когда $v_i \in L_\infty^r[\tau_i, \tau_{i+1}]$, равенство (14) вытекает из (6), а общий случай получается по непрерывности. В свою очередь, поскольку $\gamma_\tau(w) \geq \varepsilon |w|^2$, квадратичная форма, стоящая в правой части равенства (14), положительно определена на некотором подпространстве конечной коразмерности в $H_{-k_i}^r[\tau_i, \tau_{i+1}]$. Это следствие теоремы Гильберта—Шмидта о спектре компактного самосопряженного оператора. Отсюда следует, что форма Q положительно определена на некотором подпространстве конечной коразмерности в $H_{-k}^r[0, t]$.

Замечание. Очень существенно, что форма Q , в отличие от ψG_t^r , не просто положительна на подпространстве конечной коразмерности, а положительно определена.

Лемма 11. Пусть p — непрерывная квадратичная форма на гильбертовом пространстве E , положительно определенная на некотором подпространстве конечной коразмерности в E . Для

произвольного замкнутого подпространства V в E символ $p|V$ обозначает сужение квадратичной формы p на подпространство V , и

$$V_p^\perp = \{e \in E \mid p(e, v) = 0, \forall v \in V\}.$$

Тогда

$$\text{ind } p = \text{ind } (p|V) + \text{ind } (p|V_p^\perp) + \dim(V \cap V_p^\perp) - \dim(V \cap \ker p). \quad (15)$$

Доказательство. Переходя, если надо к пространству $E/\ker p$ можем считать, что $\ker p = 0$. Если вдобавок пространство E конечномерно, то утверждение леммы превращается в стандартный факт линейной алгебры. Доказательство общего случая дословно повторяет конечномерное, поскольку условия леммы обеспечивают конечность всех входящих в равенство (15) величин, а также (при $\ker p = 0$) выполнение тождества $\dim W_p^\perp = \text{codim } W$ для любого замкнутого подпространства W конечной коразмерности.

Пусть $V_i = \{v = (v_0, \dots, v_{i-1}) \in (\mu_0 z)^\perp_{-k_i} \mid v_j = 0 \text{ при } i \leq j \leq l-1\}$. В частности, $V_0 = 0$, $V_l = (\mu_0 z)^\perp_{-k_l}$. Введем обозначение $Q_i = Q|V_i$. Тогда, в силу леммы 1,

$$\text{ind } Q_{i+1} = \text{ind } Q_i + \text{ind } (Q_{i+1}|V_{iQ_{i+1}}^\perp) + \dim(V_i \cap V_{iQ_{i+1}}^\perp) - \dim(V_i \cap \ker Q_{i+1}). \quad (16)$$

Лемма 12. Пусть

$$\mathcal{R}_i = \{(\lambda, v_i) \in \Lambda_{\tau_i} \oplus H_{-k_i}[\tau_i, \tau_{i+1}] \mid \lambda + \langle zv_i, 1 \rangle \in \Pi_0\} \subset \Lambda_{\tau_i} \oplus \oplus H_{-k_i}[\tau_i, \tau_{i+1}]$$

и

$$R_i: (\lambda, v_i) \mapsto \langle v_i^T, \sigma(\lambda + \chi_*(zv_i), z \cdot)^T + \bar{h}v_i \rangle, \quad (\lambda, v_i) \in \mathcal{R}_i$$

— квадратичная форма на $\mathcal{R}_i$. Тогда

$$1) \text{ind } (Q_{i+1}|V_{iQ_{i+1}}^\perp) = \text{ind } R_i$$

$$2) \dim(V_i \cap V_{iQ_{i+1}}^\perp) - \dim(V_i \cap \ker Q_{i+1}) = \dim(\Pi_0 \cap \Lambda_{\tau_i} / \Pi_0 \cap \Lambda_{\tau_i} \cap \Lambda_{\tau_{i+1}}) - \dim\left(\bigcap_{0 \leq \tau \leq \tau_i} \Lambda_\tau / \bigcap_{0 \leq \tau \leq \tau_{i+1}} \Lambda_\tau\right).$$

Доказательство. Легко видеть, что

$$V_{iQ_{i+1}}^\perp = \{v \in V_{i+1} \mid \bar{h}_\tau v(\tau) + \sigma((\chi_* zv)(\tau) + \eta, z_\tau \cdot)^T = 0\}$$

при $0 \leq \tau \leq \tau_i$ для некоторого $\eta \in \Pi_0$.

Представим $v \in V_{iQ_{i+1}}^\perp$ в виде $v = (u, v_i)$, где

$$u \in \bigoplus_{j=0}^{i-1} H_{-k_j}[\tau_j, \tau_{j+1}], \quad v_i \in H_{-k_i}[\tau_i, \tau_{i+1}],$$

и положим $\hat{y} = \eta + \chi^*(zu)$. Пусть $\tau \in (0, \tau_i) \setminus \{\tau_1, \dots, \tau_{i-1}\}$; дифференцируя соотношение

$$\bar{h}_\tau v(\tau) + \sigma(\hat{y}(\tau), z_\tau)^T = 0$$

$2k_\tau$ раз по τ с учетом леммы 1, получим

$$\bar{\gamma}_\tau u(\tau) + (-1)^{k_\tau} \sigma(\hat{y}_\tau, z_\tau^{(2k_\tau)})^T = 0,$$

где $\bar{\gamma}_\tau$ — симметричная $r \times r$ -матрица, отвечающая квадратичной форме γ_τ . Следовательно,

$$\frac{d}{d\tau} \hat{y} = (-1)^{k_\tau-1} z_\tau^{(2k_\tau)} \bar{\gamma}_\tau^{-1} (\sigma(\hat{y}_\tau, z_\tau^{(2k_\tau)})^T).$$

Поэтому распределение $\hat{y}$ (а, стало быть, и u) является гладкой функцией вблизи τ , причем ее производные равномерно ограничены по τ . Таким образом, если $u = (u_0, u_1, \dots, u_{i-1})$, то каждое из u_j представляется в виде суммы гладкой функции на $[\tau_j, \tau_{j+1}]$ и распределения порядка $k_j - 1$, сосредоточенного в точках π_j и π_{j+1} (напомним, что а priori $u_j \in H_{-k_j}^r[\tau_j, \pi_{j+1}]$).

Следовательно, $\hat{y}$ также представляется в виде суммы некоторой кусочно гладкой функции y_τ и распределений, сосредоточенных в точках π_j , $j = 0, \dots, i$. Ясно, что $(y_{\tau_{j+0}} - y_{\tau_j}) \in \Gamma_{\tau_j} + \Gamma_{\tau_{j+0}}$, причем любой вектор из $\Gamma_{\tau_j} + \Gamma_{\tau_{j+0}}$ может быть представлен в виде $y_{\tau_{j+0}} - y_{\tau_j}$ за счет подходящего выбора «точечной части» распределений u_{j-1} и u_j . Кроме того, $y_0 = \eta \in \Gamma_0$, $y_\tau = \langle zu, 1 \rangle + \eta$ при $\tau \geq \tau_i$.

Для $v = (u, v_i) \in V_{i+1}$ имеем

$$\begin{aligned} Q_{i+1}(v, v) &= \langle v^T(\tau), \sigma(y_\tau - \eta, z_\tau)^T + \bar{h}_\tau v \rangle = \\ &= \langle v^T(\tau), \sigma(y_\tau, z_\tau)^T + \bar{h}_\tau v \rangle - \sigma(\eta, \langle zv, 1 \rangle) = \\ &= \langle v_i^T, \sigma(y_{\tau_i} + \chi^* z v_i, z_\tau)^T + \bar{h} v_i \rangle - 0 \end{aligned}$$

(В этой выкладке мы воспользовались условием $\langle zv, 1 \rangle \in \Pi_0 \forall v \in V_{i+1}$, а также тождеством $\sigma(y_\tau, z_\tau)^T + \bar{h}_\tau u(\tau) = 0$ при $0 \leq \tau \leq \tau_i$).

Утверждение 1) леммы 12 вытекает теперь из следующего представления яковиевой кривой.

Л е м м а 13. Пусть

$$\Delta_\tau = \left\{ y_\tau \in \Sigma \left| \begin{array}{l} 0 \mapsto y_\theta \ (0 \leq \theta \leq \tau) \text{ — кусочно-гладкая кривая,} \\ \dot{y}_\theta = z_\theta u_\theta \text{ при } \theta \neq \tau_j; \ \sigma(y_\theta, z_\theta)^T + \bar{h}_\theta u_\theta \equiv 0, \ y_0 \in \Pi_0, \\ (y_{\tau_{j+0}} - y_{\tau_j}) \in \Gamma_{\tau_j} + \Gamma_{\tau_{j+0}}. \end{array} \right. \right\}.$$

Тогда $\Lambda_\tau = \Delta_\tau \oplus \Gamma_\tau$

Доказательство. Дифференцируя соотношение $\sigma(y_\theta,$

$z_{\theta} \cdot)^T + h_{\theta} u_{\theta} \equiv 0$ $2k_{\theta}$ раз по θ в силу уравнения $y_{\theta} = z_{\theta} u_{\theta}$ получаем

$$\sigma(y_{\theta}, z_{\theta}^{(i)}) \equiv 0, \quad i = 0, 1, \dots, 2k_{\theta} - 1, \quad u_{\theta} = (-1)^{k_{\theta}-1} \gamma_{\theta}^{-1} \sigma(y_{\theta}, z_{\theta})^T.$$

Отсюда заключаем, что $\Delta_{\tau} \subset (\Gamma_{\tau} + \bar{\Gamma}_{\tau})^{\leq} = \Gamma_{\tau}^{\leq} \cap \bar{\Gamma}_{\tau}^{\leq}$ *).

Кроме того, $\dim \Delta_{\tau}$ локально постоянно при $\tau \neq \tau_j$.

Пусть теперь $x_{\theta} \in \Lambda_{\theta}$, причем x_{θ} удовлетворяет уравнению Якоби при $0 \leq \theta \leq \tau$, тогда

$$\frac{d}{d\theta} \sigma(x_{\theta}, y_{\theta}) \equiv \sigma(\gamma_{\theta}^{-1} z_{\theta}^{(k_{\theta})} \sigma(z_{\theta}^{(k_{\theta})}, x)^T, y_{\theta}) + \sigma(x_{\theta}, z_{\theta} u_{\theta}) \equiv 0,$$

$$\sigma(x_{\tau_j}, y_{\tau_j}) = 0, \quad \tau_j < \tau.$$

Следовательно, $\Delta_{\tau} \subset \Lambda_{\tau}^{\leq} = \Delta_{\tau}$. Таким образом, $\Delta_{\tau} \subset \Lambda_{\tau} \cap \bar{\Gamma}^{\leq}$.

Далее,

$$\Delta_{+0} = (\Pi_0 + \Gamma_{+0}) \cap \Gamma_{+0}^{\leq} \cap \bar{\Gamma}_{+0}^{\leq} = \Lambda_{+0} \cap \bar{\Gamma}^{\leq}.$$

Из соображений размерности получаем, что $\Delta_{\tau} = \Lambda_{\tau} \cap \bar{\Gamma}_{\tau}^{\leq}$ при $0 < \tau \leq \tau_1$. Поскольку $\bar{\Gamma}_{\tau}^{\leq} \cap \Gamma_{\tau} = 0$ и $\Gamma_{\tau} \subset \Lambda_{\tau}$, то $\Lambda_{\tau} = \Delta_{\tau} \oplus \Gamma_{\tau}$ при $0 < \tau \leq \tau_1$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \Delta_{\tau_1+0} &= (\Delta_{\tau_1} + \Gamma_{\tau_1} + \Gamma_{\tau_1+0}) \cap \Gamma_{\tau_1+0}^{\leq} \cap \bar{\Gamma}_{\tau_1+0}^{\leq} = \Lambda_{\tau_1+0}^{\Gamma_{\tau_1+0}} \cap \bar{\Gamma}_{\tau_1+0}^{\leq} = \\ &= \Lambda_{\tau_1+0} \cap \bar{\Gamma}_{\tau_1+0}^{\leq}, \end{aligned}$$

$\Lambda_{\tau_1+0} = \Delta_{\tau_1+0} \oplus \Gamma_{\tau_1+0}$ и т. д. для любого τ получаем равенство $\Lambda_{\tau} = \Delta_{\tau} \oplus \Gamma_{\tau}$.

Перейдем к доказательству утверждения 2) леммы 12.

Элемент $(u, v_i) \in V_{iQ_{i+1}}^{\perp}$ в том и только том случае лежит в $V_i \cap \cap V_{iQ_{i+1}}^{\perp} = \ker Q_i$, когда $v_i = 0$; элемент $(u, 0) \in V_{iQ_{i+1}}^{\perp}$ тогда и только тогда лежит в V_i , когда $\eta + \langle zu, 1 \rangle \in \Pi_0 \cap \Lambda_{\tau_i}$ для некоторого $\eta \in \Pi_0$. Следовательно,

$$\dim(V_i \cap V_{iQ_{i+1}}^{\perp}) = \dim\left(\Pi_0 \cap \Lambda_{\tau_i} \mid \bigcap_{0 < \tau < \tau_i} \Lambda_{\tau}\right).$$

Элемент $(u, 0) \in \ker Q_i$ в том и только том случае лежит в $V_i \cap \cap \ker Q_{i+1}$, когда $\eta + \langle zu, 1 \rangle \in \Pi_0 \cap \bigcap_{\tau_i < \tau < \tau_{i+1}} \Lambda_{\tau}$ для некоторого $\eta \in \Pi_0$.

Поэтому

$$\dim(V_i \cap \ker Q_{i+1}) = \dim\left(\Pi_0 \cap \bigcap_{\tau_i < \tau < \tau_{i+1}} \Lambda_{\tau} \mid \bigcap_{0 < \tau < \tau_{i+1}} \Lambda_{\tau}\right).$$

Напомним, что $\Lambda|_{[\tau_i, \tau_{i+1}]}$ — простая неубывающая кривая и, согласно лемме 7, $\bigcap_{\tau_i < \tau < \tau_{i+1}} \Lambda_{\tau} = \Lambda_{\tau_i} \cap \Lambda_{\tau_{i+1}}$.

Лемма 12 окончательно доказана.

*) Определение и свойства пространств $\bar{\Gamma}_{\tau}$ см. в начале п. 3.

Итак, применение леммы 11 позволило нам все свести к вычислению индекса формы R_i , это вычисление мы сделаем также, многократно применяя лемму 11. Сначала преодолеем возможный разрыв в точке τ_i .

Пространство $H_{-k_i}^r[\tau_i, \tau_{i+1}]$ содержит rk_i -мерное пространство $H_{-k_i}^r(\tau_i+0)$, состоящее из векторных распределений, сосредоточенных в точке τ_i . Положим

$$I = \mathcal{R} \cap \{ \Lambda_{\tau_i} \oplus H_{-k_i}^r(\tau_i+0) \} = \\ = \left\{ \left(\lambda, \sum_{j=0}^{k_i-1} a_j \frac{\partial^j}{\partial \tau^j} \right) \Big|_{\tau_i+0} \right\} \lambda \in \Lambda_{\tau_i}, \left(\lambda + \sum_{j=0}^{k_i-1} z_{\tau_i+0}^{(j)} a_j \right) \in \Pi_0 \}.$$

Элементарное вычисление показывает, что

$$R_i \left(\left(\lambda, \sum_{j=0}^{k_i-1} a_j \frac{\partial^j}{\partial \tau^j} \right) \Big|_{\tau_i+0} \right) = \sigma \left(\lambda, \sum_{j=0}^{k_i-1} z_{\tau_i+0}^{(j)} a_j \right), \quad (17)$$

а индекс формы $R_i | I_{R_i}^\perp$ совпадает с индексом формы

$$R_i^+ : (\lambda, v) \mapsto \langle v^\top, \sigma(\lambda + \chi^*(zv) + \bar{h}v, z \cdot)^\top \rangle,$$

заданной на пространстве

$$\mathcal{R}_i^+ = \{ (\lambda, v) \in \Lambda_{\tau_i+0} \oplus H_{-k_i}[\tau_i, \tau_{i+1}] \mid (\lambda + \langle zv, 1 \rangle) \in \Pi_0 \}$$

(выражения для форм R_i и R_i^+ совпадают, а области определения несколько отличаются; напомним, что $\Lambda_{\tau_i+0} = (\Lambda_{\tau_i} + \Gamma_{\tau_i+0}) \cap \Pi_{\tau_i+0}$). Следующее равенство — прямое следствие определений и соотношения (17):

$$\text{ind}(R_i | I) = \text{ind}_{\Pi_0}(\Lambda_{\tau_i}, \Lambda_{\tau_i+0}) - \frac{1}{2} (\dim(\Lambda_{\tau_i} \cap \Pi_0) + \\ + \dim(\Lambda_{\tau_i+0} \cap \Pi_0)) + \dim(\Lambda_{\tau_i} \cap \Lambda_{\tau_i+0} \cap \Pi_0).$$

Далее, элемент $(\lambda, \sum_j a_j \frac{\partial^j}{\partial \tau^j} \Big|_{\tau_i+0})$ из I в том и только том случае лежит в $\ker(R_i | I)$, когда $(v + \lambda + \sum_j z_{\tau_i+0}^{(j)} a_j) \in \Lambda_{\tau_i+0} \cap \Pi_0$ для некоторого $v \in \Lambda_{\tau_i} \cap \Pi_0$. Этот элемент лежит в $I \cap \ker R_i$ если и только если

$$(v + \lambda + \sum_j z_{\tau_i}^{(j)} a_j) \in \Pi_0 \cap_{\tau_i < \tau < \tau_{i+1}} \Lambda_\tau = \Pi_0 \cap \Lambda_{\tau_i+0} \cap \Lambda_{\tau_{i+1}}.$$

Следовательно,

$$\text{ind } R_i = \text{ind}(R_i | I) + \text{ind } R_i^+ + \dim \ker(R_i | I) - \dim(\ker R_i \cap I) =$$

$$= \text{ind } R_i^+ + \text{ind}_{\Pi_0} (\Lambda_{\tau_i}, \Lambda_{\tau_i+0}) + \frac{1}{2} \dim (\Lambda_{\tau_i} \cap \Pi_0) - \frac{1}{2} \dim (\Lambda_{\tau_i} \cap \Pi_0) - \\ - \dim (\Lambda_{\tau_i} \cap \Lambda_{\tau_{i+1}} \cap \Pi_0) + \dim (\Lambda_{\tau_i} \cap \Lambda_{\tau_{i+1}} \cap \Pi_0).$$

С учетом равенства (16) и леммы 12 получаем

$$\text{ind } Q_{i+1} = \text{ind } Q_i + \text{ind}_{\Pi_0} (\Lambda_{\tau_i}, \Lambda_{\tau_i+0}) + \text{ind } R_i^+ + \\ + \frac{1}{2} \dim (\Lambda_{\tau_i} \cap \Pi_0) + \frac{1}{2} \dim (\Lambda_{\tau_i+0} \cap \Pi_0) - \\ - \dim (\Lambda_{\tau_i+0} \cap \Lambda_{\tau_{i+1}} \cap \Pi_0) - \dim \left(\bigcap_{0 \leq \tau < \tau_i} \Lambda_{\tau} \bigcap_{0 \leq \tau < \tau_{i+1}} \Lambda_{\tau} \right). \quad (18)$$

Осталось вычислить $\text{ind } R_i^+$. Как видно из предыдущих рассуждений, использование нашего основного орудия — леммы 11 сопряжено с довольно громоздкими вычислениями. Чтобы упростить эти вычисления хотя бы внешне, в дальнейшем будем предполагать, что $k_i > 0$, и следовательно, $h_{\tau} = 0$ при $\tau_i < \tau \leq \tau_{i+1}$. В действительности, случай $k_i = 0$ самый простой, но некоторые выражения являются более симметричными при $k_i > 0$.

Рассмотрим подпространство

$$W_i = \{(\lambda, v) \in \mathcal{R}_i^+ \mid \lambda + \langle zv, 1 \rangle = 0\} \subset \mathcal{R}_i^+.$$

Лемма 14. Если разбиение $0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_l = t$ достаточно мелкое, то формы $R_i^+|W_i$ неотрицательны, т. е.

$$\text{ind } (R_i|W_i) = 0, \quad i = 0, \dots, l-1.$$

Доказательство. Подпространство $\hat{W}_i = \{(\lambda, v) \in W_i \mid v \in L_2^+[\tau_i, \tau_{i+1}]\}$ всюду плотно в W_i , поэтому достаточно доказать неотрицательность формы R_i^+ на $\hat{W}_i$. Положим $w(\tau) = \int_{\tau_i}^{\tau} \frac{(\theta - \tau)^{k_i-1}}{(k_i-1)!} v(\theta) d\theta$, обычная процедура интегрирования по частям приводит к включению

$$\left(\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} z_{\tau} v(\tau) d\tau + \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} z_{\tau}^{(k_i)} w(\tau) d\tau \right) \in \Gamma_{\tau_{i+1}}.$$

Поэтому для $(\lambda, v) \in \hat{W}_i$ имеем $\left(\lambda - \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} z_{\theta}^{(k_i)} w(\theta) d\theta \right) \in \Gamma_{\tau_{i+1}}$ и

$$R_i^+((\lambda, v)) = \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \sigma \left(\lambda + \int_{\tau_i}^{\tau} z_{\theta} v(\theta) d\theta, z_{\tau} v(\tau) \right) d\tau = \\ = \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \sigma \left(\lambda - \int_{\tau_i}^{\tau} z_{\theta}^{(k_i)} w(\theta) d\theta, z_{\tau} v(\tau) \right) d\tau.$$

Многokrатно интегрируя последнее выражение по частям ($v(\tau)$ интегрируется, а все остальное дифференцируется), получим

$$R_l^+((\lambda, v)) = \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \sigma \left(\int_{\tau_i}^{\tau} z_{\theta}^{(k_i)} w(\theta) d\theta - \lambda, z_{\tau}^{(k_i)} w(\tau) \right) + \gamma_{\tau}(w(\tau)) d\tau.$$

Достаточно установить неотрицательность квадратичной формы от (λ, w) , стоящей в правой части последнего равенства, на пространстве

$$\mathcal{L} = \left\{ (\lambda, w) \in \Lambda_{\tau_i+0} \oplus L_2^r[\tau_i, \tau_{i+1}] \left| \left(\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} z_{\tau}^{(k_i)} w(\tau) d\tau - \lambda \right) \in \Gamma_{\tau_{i+1}} \right. \right\},$$

если $\tau_{i+1} - \tau_i$ достаточно мало.

Положим $x_{\tau} = \int_{\tau_i}^{\tau} z_{\theta}^{(k_i)} w(\theta) d\theta - \lambda$, $\tau_i < \tau \leq \tau_{i+1}$, и пусть

$$\mathcal{L}_0 = \{ (\lambda, w) \in \mathcal{L} \mid x_{\tau_{i+1}} = 0 \},$$

$$\mathcal{L}_1 = \{ (\lambda, w) \in \mathcal{L} \mid \sigma(x_{\tau}, z_{\tau}^{(k_i)})^{\top} + \bar{\gamma}_{\tau} w(\tau) = 0, \tau_i < \tau \leq \tau_{i+1} \}$$

Пара (λ, w) , очевидно, в том и только том случае лежит в $\mathcal{L}_1$, когда кривая x_{τ} является решением системы Якоби (10) с краевыми условиями $x_{\tau_{i+0}} \in \Lambda_{\tau_{i+0}}$, $x_{\tau_{i+1}} \in \Gamma_{\tau_{i+1}}$. Так как $\Gamma_{\tau_{i+1}} \subset \subset \Lambda_{\tau_{i+1}}$, то, по определению якобиевой кривой Λ_{τ} , любое решение системы Якоби x_{τ} , удовлетворяющее условию $x_{\tau_{i+1}} \in \Gamma_{\tau_{i+1}}$, удовлетворяет также и условию $x_{\tau_{i+0}} \in \Lambda_{\tau_{i+0}}$. Следовательно,

$$\dim \mathcal{L}_1 = \dim \Gamma_{\tau_{i+1}}, \quad \mathcal{L} = \mathcal{L}_0 \oplus \mathcal{L}_1.$$

Кроме того, пространство $\mathcal{L}_1$ содержится, очевидно, в ядре нашей квадратичной формы, а при $(\lambda, w) \in \mathcal{L}_0$ эта форма имеет вид

$$\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \left(\int_{\tau_i}^{\tau} z_{\theta}^{(k_i)} w(\theta) d\theta, z_{\tau}^{(k_i)} w(\tau) \right) d\tau + \gamma_{\tau}(w(\tau)) d\tau. \quad (19)$$

Поскольку $\gamma_{\tau}(w(\tau)) \geq \varepsilon |w(\tau)|^2$, то форма (19) положительна при $\tau_{i+1} - \tau_i$ достаточно малом. ■

Мы вправе с самого начала выбрать сколь угодно мелкое разбиение $0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_l = t$, поэтому, согласно лемме 14,

$$\text{ind } R_l^+ = \text{ind}(R_l^+ | W_{R_l}^{\perp}) + \dim(W \cap W_{R_l}^{\perp}) - \dim(W \cap \ker R_l^+).$$

Пара (λ, v) из R_i^+ в том и только том случае лежит в $W_{R_i^+}^\perp$, когда

$$\sigma(\lambda + (\chi^*(zv))(\tau), z_\tau) \equiv \sigma(\lambda_0, z_\tau), \quad \tau_i < \tau \leq \tau_{i+1},$$

для некоторого $\lambda_0 \in \Lambda_{\tau_i+0}$.

Положим $\hat{y} = \lambda - \lambda_0 + \chi^*(zv)$. Те же аргументы, что и при доказательстве леммы 12, показывают, что распределение $\hat{y}$ представляется в виде суммы вектор-функции y_τ , гладкой на $(\tau_i, \tau_{i+1}]$, и распределения порядка $k_i - 1$, сосредоточенного в точках τ_i, τ_{i+1} . Из леммы 13 вытекает, что $y_{\tau_{i+1}} \in \Lambda_{\tau_{i+1}}$. При этом

$$\begin{aligned} R_i^+((\lambda, w)) &= \langle v^\top, \sigma(\lambda + \chi^*(zv), z_\cdot)^\top \rangle = \langle v^\top, \sigma(\lambda_0, z_\cdot)^\top \rangle = \\ &= \sigma(\lambda_0, \langle zv, 1 \rangle) = \sigma(\lambda_0, y_{\tau_{i+1}}). \end{aligned}$$

Напомним, что $\lambda_0 + g_{i+1} = (\lambda + \langle zv, 1 \rangle) \in \Pi_0$.

Из приведенных соотношений следует, что индекс квадратичной формы $R_i^+|W_{R_i^+}^\perp$ совпадает с индексом заданной на $(\Lambda_{\tau_i+0} + \Lambda_{\tau_{i+1}}) \cap \Pi_0$ квадратичной формы, которая сопоставляет каждому

$$\alpha = (\lambda_1 + \lambda_2) \in (\Lambda_{\tau_i+0} + \Lambda_{\tau_{i+1}}) \cap \Pi_0 \text{ (где } \lambda_1 \in \Lambda_{\tau_i+0}, \lambda_2 \in \Lambda_{\tau_{i+1}})$$

величину $\sigma(\lambda_1, \lambda_2)$. Таким образом,

$$\begin{aligned} \text{ind}(R_i^+|W_{R_i^+}^\perp) &= \text{ind}_{\Pi_0}(\Lambda_{\tau_i+0}, \Lambda_{\tau_{i+1}}) - \frac{1}{2} \dim(\Lambda_{\tau_i+0} \cap \Pi_0) - \\ &- \frac{1}{2} \dim(\Lambda_{\tau_{i+1}} \cap \Pi_0) + \dim(\Pi_0 \cap \Lambda_{\tau_i+0} \cap \Lambda_{\tau_{i+1}}). \end{aligned}$$

Далее, пусть $(\lambda, v) \in W \cap W_{R_i^+}^\perp$, тогда

$$\lambda + \langle zv, 1 \rangle - \lambda_0 = -\lambda_0 \in \Lambda_{\tau_{i+1}} \cap \Lambda_{\tau_i+0} = \bigcap_{\tau_i < \tau < \tau_{i+1}} \Lambda_\tau.$$

В этом случае $y_\tau \equiv -\lambda_0$ — константа; стало быть, $v(\tau) \equiv 0$ и $\lambda = -\langle zv, 1 \rangle = 0$. Следовательно,

$$W \cap W_{R_i^+}^\perp = 0, \quad \text{ind } R_i^+ = \text{ind}(R_i^+|W_{R_i^+}^\perp).$$

Подставляя выражение для $\text{ind}(R_i^+|W_{R_i^+}^\perp)$ в (18), получаем

$$\begin{aligned} \text{ind } Q_{i+1} - \text{ind } Q_i &= \text{ind}_{\Pi_0}(\Lambda_{\tau_i}, \Lambda_{\tau_i+0}) + \text{ind}_{\Pi_0}(\Lambda_{\tau_i+0}, \Lambda_{\tau_{i+1}}) + \\ &+ \frac{1}{2} \dim(\Lambda_{\tau_i} \cap \Pi_0) - \frac{1}{2} \dim(\Lambda_{\tau_{i+1}} \cap \Pi_0) + \\ &+ \dim\left(\bigcap_{0 < \tau < \tau_{i+1}} \Lambda_\tau\right) - \dim\left(\bigcap_{0 < \tau < \tau_i} \Lambda_\tau\right), \quad i = 0, 1, \dots, l-1. \quad (20) \end{aligned}$$

Из предложения 2 и леммы 4 вытекает, что

$$\text{ind}_{\Pi_0}(\Lambda_{\tau_i}, \Lambda_{\tau_i+0}) + \text{ind}_{\Pi_0}(\Lambda_{\tau_i+0}, \Lambda_{\tau_{i+1}}) = \text{ind}_{\Pi_0}(\Lambda_{\tau_i}, \Lambda_{\tau_{i+1}}).$$

Кроме того $Q_i = Q$ и

$$\text{ind}_{\Pi_0}(\Lambda_t, \Lambda_0) = \text{ind}_{\Pi_0}(\Lambda_t, \Pi_0) = \frac{1}{2}(m - \dim(\Lambda_t \cap \Pi_0)).$$

Поэтому, складывая равенства (20), получаем

$$\text{ind } Q = \sum_{i=0}^l \text{ind}_{\Pi_0}(\Lambda_{\tau_i}, \Lambda_{\tau_{i+1}}) + \dim\left(\bigcap_{0 \leq \tau \leq t} \Lambda_{\tau}\right) - m. \quad (21)$$

Лемма 15. Для любых $t_1, t_2 \in [0, t]$, $t_1 < t_2$, справедливо равенство

$$\bigcap_{t_1 < \tau \leq t_2} \Lambda_{\tau} = \Lambda_{t_1} \cap \left(\sum_{t_1 < \tau \leq t_2} z_{\tau} R^r \right)^{\leq}.$$

Доказательство. 1) Если z_{τ} гладко на полуинтервале $t_1 < \tau \leq t_2$, то

$$\bigcap_{t_1 < \tau \leq t_2} \Lambda_{\tau} = \Lambda_{t_1+0} \cap \left(\sum_{t_1 < \tau \leq t_2} z_{\tau}^{(k_{\tau})} R^r \right)^{\leq}.$$

В самом деле, если $\lambda \in \left(\sum_{t_1 < \tau \leq t_2} z_{\tau}^{(k_{\tau})} R^r \right)$, то λ — неподвижная точка системы Якоби (10) на $[t_1, t_2]$, т. е. постоянный вектор $x_{\tau} \equiv \lambda$, $t_1 < \tau \leq t_2$, является решением системы (10). Обратно, пусть $\lambda \in \bigcap_{t_1 < \tau \leq t_2} \Lambda_{\tau}$, тогда $\lambda \in \bigcup_{t_1 < \tau \leq t_2} \Lambda_{\tau}$. Следовательно, для всякого решения системы (10) x_{τ} , удовлетворяющего условию $x_{t_1+0} \in \Lambda_{t_1+0}$, выполняется тождество $\sigma(\lambda, x_{\tau}) = 0$, $t_1 < \tau \leq t_2$. Дифференцируя по τ , получаем

$$\begin{aligned} 0 &= \sigma \left(\lambda, \sum_{i=1}^r \sigma(z_{\tau}^{(k_{\tau})} v_{\tau}^i, x_{\tau}) z_{\tau}^{(k_{\tau})} v_{\tau}^i \right) = \sum_{i=1}^r \sigma(z_{\tau}^{(k_{\tau})} v_{\tau}^i, x_{\tau}) \sigma(\lambda, z_{\tau}^{(k_{\tau})} v_{\tau}^i) = \\ &= \sigma \left(\sum_{i=1}^n \sigma(\lambda, z_{\tau}^{(k_{\tau})} v_{\tau}^i) z_{\tau}^{(k_{\tau})} v_{\tau}^i, x_{\tau} \right). \end{aligned}$$

Следовательно, $\sum_{i=1}^r \sigma(\lambda, z_{\tau}^{(k_{\tau})} v_{\tau}^i) z_{\tau}^{(k_{\tau})} v_{\tau}^i \in \Lambda_{\tau}$. Поскольку λ также лежит в лагранжевой плоскости Λ_{τ} , то

$$0 = \sigma \left(\lambda, \sum_{i=1}^r \sigma(\lambda, z_{\tau}^{(k_{\tau})} v_{\tau}^i) z_{\tau}^{(k_{\tau})} v_{\tau}^i \right) = \sum_{i=1}^r (\sigma(\lambda, z_{\tau}^{(k_{\tau})} v_{\tau}^i))^2.$$

Стало быть, $\lambda \in (z_{\tau}^{(k_{\tau})} v_{\tau}^i)^{\leq}$, $i = 1, \dots, r$; $t_1 < \tau \leq t_2$.

2) При тех же условиях

$$\Lambda_{t_1+0} \cap \left(\sum_{t_1 < \tau < t_2} z_\tau^{(k_\tau)} R^r \right)^\perp = \Lambda_{t_1+0} \cap \left(\sum_{t_1 < \tau < t_2} z_\tau R^r \right)^\perp.$$

В самом деле, из очевидного включения

$$z_\tau' v \in \sum_{t_1 < \tau < t_2} z_\tau R^r \quad \forall \tau \in (t_1, t_2), \quad v \in R^r$$

следует, что

$$\left(\sum_{t_1 < \tau < t_2} z_\tau R^r \right)^\perp \subset \left(\sum_{t_1 < \tau < t_2} z_\tau^{(k_\tau)} R^r \right)^\perp.$$

С другой стороны, $z_\tau v \in \Lambda_\tau = \Lambda_\tau^\perp$, следовательно,

$$\left(\sum_{t_1 < \tau < t_2} z_\tau R^r \right)^\perp \supset \left(\bigcap_{t_1 < \tau < t_2} \Lambda_\tau \right) = \Lambda_{t_1+0} \cap \left(\sum_{t_1 < \tau < t_2} z_\tau^{(k_\tau)} R^r \right)^\perp.$$

3) Пусть $\tau \in [t_1, t_2]$, причем τ не обязана быть точкой гладкости кривой z . Имеем

$$\Lambda_\tau \cap \Lambda_{\tau+0} = \Lambda_\tau \cap \Gamma_{\tau+0}^\perp.$$

Поскольку

$$\begin{aligned} \Gamma_{\tau+0} &= \text{span} \{ z_{\tau+\theta}^i v \mid 0 \leq i < k_{\tau+0}, v \in R^r \} \subset \\ &\subset \text{span} \{ z_\theta v \mid \tau < \theta \leq \tau + \varepsilon, v \in R^r \}, \end{aligned}$$

то, в силу 1) и 2)

$$\bigcap_{\tau < \theta \leq \tau + \varepsilon} \Lambda_\theta \supset \Lambda_\tau \cap \left(\sum_{\tau < \theta \leq \tau + \varepsilon} z_\theta R^r \right)^\perp. \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Обратное включение непосредственно вытекает из 1), 2).

Следствие. $\Pi_0 \bigcap_{t_1 < \tau < t_2} \Lambda_\tau = \Lambda_{t_2} \cap \Delta_{t_1}^{t_2*}$. В частности,

$$\bigcap_{0 \leq \tau \leq t} \Lambda_\tau = \Delta_t^0 = 0.$$

Для завершения доказательства теоремы 1 остается воспользоваться равенством (21) и вспомнить, что

$$\text{ind } \psi G_t'' = \text{ind } Q.$$

Доказательство теоремы 2. Применяя теорему 1 к формам $\psi G_s''$ и $\psi G_{s+\varepsilon}''$, получим, что при достаточно малом $\varepsilon > 0$

$$\text{ind } \psi G_{s+\varepsilon}'' - \text{ind } \psi G_s'' = \text{ind}_{\Pi_0} (\Lambda_s, \Lambda_{s+\varepsilon}) + \text{ind}_{\Pi_0} (\Lambda_{s+\varepsilon}, \Pi_0) -$$

*) Определение пространства $\Delta_{t_1}^{t_2}$ см. на стр. 138 (перед формулировкой теоремы 2).

$$-\operatorname{ind}_{\Pi_0}(\Lambda_s, \Pi_0) - \dim(\Delta_s^0 / \Delta_{s+\varepsilon}^0) = \operatorname{ind}_{\Pi_0}(\Lambda_s, \Lambda_{s+\varepsilon}) + \\ + \frac{1}{2}(\dim(\Lambda_s \cap \Pi_0) - \dim(\Lambda_{s+\varepsilon} \cap \Pi_0)) - \dim(\Delta_s^0 / \Delta_{s+\varepsilon}^0)$$

Далее, $\operatorname{ind}_{\Pi_0}(\Lambda_s, \Lambda_{s+\varepsilon}) = \operatorname{ind}_{\Pi_0}(\Lambda_s, \Lambda_{s+0}) + \operatorname{ind}_{\Pi_0}(\Lambda_{s+0}, \Lambda_{s+\varepsilon})$. Легко видеть, что отображение $\tau \rightarrow \Lambda_\tau \cap \Pi_0$ полунепрерывно сверху (относительно включения подпространств) в любой точке непрерывности кривой Λ_τ . Поэтому при ε , достаточно близких к нулю, подпространства $\Pi_0 \cap \Lambda_{s+\varepsilon}$ монотонно не возрастают с ростом ε . Кроме того, коль скоро Λ_τ — неубывающая кривая в $L(\Sigma)$ то $\operatorname{ind}_{\Pi_0}(\Lambda_{s+0}, \Lambda_{s+\varepsilon})$ не убывает с ростом ε $\operatorname{ind}_{\Pi_0}(\Lambda_{s+0}, \Lambda_{s+0}) = \Lambda$. Отсюда нетрудно заключить, что при ε достаточно близких к нулю

$$\operatorname{ind}_{\Pi_0}(\Lambda_{s+0}, \Lambda_{s+\varepsilon}) = \dim(\Lambda_{s+0} \cap \Pi_0) - \dim(\Lambda_{s+\varepsilon} \cap \Pi_0) = \\ = \dim(\Lambda_{s+0} \cap \Pi_0) - \dim(\Pi_0 \cap \Lambda_\tau)_{s < \tau < s+\varepsilon}.$$

Утверждение теоремы 2 вытекает теперь из следствия леммы 15.

6. Уравнение Якоби и формула для вычисления индекса квадратичной формы $\psi G_t''$ были получены в предположении, что $\gamma_\tau(v) \geq \varepsilon |v|^2$. Однако, согласно предложению I, необходимым условием конечности $\operatorname{ind} \psi G_t''$ является лишь неотрицательность форм γ_τ . В настоящем пункте мы кратко опишем, как следует видоизменить уравнение Якоби, если формы γ_τ вырождаются.

Пусть $0 \leq k \leq m$, $\tau \in (0, t]$. Обозначим через V_τ^k подпространство в R^r , состоящее из всех таких $v \in R^r$, для которых найдется гладкая кривая v_θ , определенная на некотором отрезке $\bar{\tau} \leq \theta \leq \tau$ и удовлетворяющая условиям:

$$v_\tau = v, \quad h_\theta(w, v(\theta)) = \sigma(z_\theta^{(i)} w, z_\theta v(\theta)) = 0, \quad \bar{\tau} \leq \theta \leq \tau, \quad 0 \leq i < 2k,$$

для любого $w \in R^r$.

Ясно, что $V_\tau^{k_1} \subset V_\tau^{k_2}$ при $k_1 < k_2$; кроме того $v_\tau^k = R^r$ при $k < k_\tau$, $V_\tau^{k_\tau} = \ker \gamma_\tau$.

Для $0 < k \leq m$ положим

$$\gamma_\tau^k: (v + V_\tau^k) \mapsto (-1)^{k-1} \sigma(z_\tau^{2k} v, z_\tau v), \quad v \in V_\tau^{k-1}$$

— квадратичная форма на v_τ^{k-1} / V_τ^k .

Пусть, кроме того, $V_\tau^{-1} \stackrel{\text{def}}{=} R^r$, $\gamma_\tau^0 \stackrel{\text{def}}{=} h_\tau$.

Имеем $\gamma_\tau^k = 0$ при $k < k_\tau$, $\gamma_\tau^{k_\tau} = \gamma_\tau$.

Следующее утверждение является существенным усилением предложения 1, хотя его доказательство отличается от доказа-

тельства предложения 1 лишь необходимостью использования большего количества индексов.

Предложение 3. Если $\text{ind } \psi G_i'' < +\infty$, то

а) $\sigma(z_\tau^{(2k)} v_1, z_\tau v_2) = 0 \quad \forall v_1, v_2 \in V_\tau^k, 0 \leq k < m, \tau \in (0, t]$;

б) $\gamma_\tau^k \geq 0, 0 \leq k \leq m, \tau \in (0, t]$. Обратно, если выполняется условие а) и $\gamma_\tau^k(\bar{v}) \geq \varepsilon |\bar{v}|^2$ для любых $\bar{v} \in V_\tau^{k-1} / V_\tau^k, 0 \leq k \leq m, \tau \in (0, t]$ и некоторого $\varepsilon > 0$, то $\text{ind } \psi G_i'' < +\infty$.

Нетрудно видеть, что

$$\lim_{\theta \uparrow \tau} V_\theta^k \supset V_\tau^k, 0 \leq k \leq m, \tau \in (0, t];$$

если же τ — точка гладкости z_θ и $\dim V_\theta^k = \text{const}$ при θ близких к τ , то V_θ^k гладко зависит от θ вблизи τ . Предположим, что выполнено достаточное условие конечности $\text{ind } \psi G_i''$, приведенное в предложении 3, тогда подпространства $V_\tau^k, 0 \leq k \leq m$, кусочно гладко зависят от $\tau \in (0, t]$, причем гладко в любой точке гладкости $z_\tau, \psi h_\tau$. Оказывается, при выполнении этого условия конечности $\text{ind } \psi G_i''$ можно так определить (обобщенное) уравнение Якоби и якобиеву кривую Λ_τ , чтобы выполнялось утверждение теоремы 1 (и разумеется, все ее следствия).

Положим

$$\Gamma_\tau^k = \text{span} \left\{ \frac{d^i}{d\tau^i} (z_\tau v_\tau) \mid v_\theta \in V_\theta^{k-1}, 0 \leq i < k \right\}, 0 \leq k \leq m,$$

$$\hat{\Gamma}_\tau = \sum_{k=0}^{\infty} \Gamma_\tau^k, \tau \in (0, t]$$

— кусочно гладкие семейства изотропных подпространств в Σ .

Пусть $\tau \in (0, t]$ и $V_\theta^{k-1} \ni v_\theta$ — такая гладкая кривая, определенная при θ , близких к τ , что $v_\tau \in V_\tau^k$. Тогда, очевидно, $\frac{d^k}{d\tau^k} (z_\tau v_\tau) \in \Gamma_\tau^k + \Gamma_\tau^{k+1}$. Поэтому, каково бы ни было $x \in (\Gamma_\tau^k + \Gamma_\tau^{k+1})$, соответствие

$$\zeta_\tau^k(x): \bar{v} \rightarrow \sigma \left(\frac{d^k}{d\tau^k} (z_\tau v_\tau), x \right).$$

где

$$\bar{v} = (v_\tau + V_k) \in V_\tau^{k-1} / V_\tau^k \text{ и } v_\theta \in V_\theta^{k-1} \quad \forall \theta,$$

корректно определяет линейную форму $\eta_\tau^k(x)$ на V_τ^{k-1} / V_τ^k . Следовательно, отображение

$$x \mapsto \frac{1}{2} (\gamma_\tau^k)^{-1} (\eta_\tau^k(x)), \quad x \in (\Gamma_\tau^k + \Gamma_\tau^{k+1})$$

определяет квадратичную форму на $(\Gamma_\tau^k + \Gamma_\tau^{k+1})^\perp$

$$x \rightarrow \frac{1}{2} \sum_{k=0}^m (\gamma_\tau^k)^{-1} (\eta_\tau^k(x)), \quad x \in (\hat{\Gamma}_\tau^k + \Gamma_\tau^{k+1}),$$

а отображение

$$x \rightarrow \frac{1}{2} \sum_{k=0}^m (\gamma_\tau^k)^{-1} (\eta_\tau^k(x)), \quad x \in \hat{\Gamma}_\tau, \quad (22)$$

— квадратичную форму на $\hat{\Gamma}_\tau \subset \Sigma$.

Продолжим форму (22) произвольным образом до некоторой квадратичной формы J_τ на всем пространстве Σ . Форма J_τ определяет векторное поле $\Lambda \mapsto J_\tau(\Lambda)$ на $L(\Sigma)$. Дифференциальное уравнение

$$\dot{\Lambda} = J_\tau(\Lambda), \quad \Lambda \in L(\Sigma), \quad \tau \in [0, t], \quad (23)$$

назовем (обобщенным) уравнением Якоби. Заметим, что уравнение (23) определено однозначно лишь для таких τ, Λ , для которых $\Lambda \in \hat{\Gamma}_\tau$.

Как и для уравнения (11), решениями уравнения (23) называются не только непрерывные, но и кусочно-непрерывные кривые. Якобиевой кривой называется решение Λ_τ уравнения (23), удовлетворяющее условиям

$$\Lambda_0 = \Pi_0, \quad \Lambda_{\tau+0} = \Lambda_\tau^{\Gamma_\tau+0}, \quad \forall \tau \in [0, t].$$

Нетрудно показать, что $\hat{\Gamma}_\tau \subset \Lambda_\tau$, $\forall \tau \in (0, t]$. Следовательно, якобиева кривая (в отличие от обобщенного уравнения Якоби) однозначно определяется формой (22) и не зависит от выбора продолжения этой формы на все пространство Σ . Если выполнено достаточное условие конечности $\text{ind } \psi G_i''$ из предложения 1, то кривая Λ_τ , очевидно, совпадает с якобиевой кривой, определенной для этого случая в п. 3.

Предложение 4. Предположим, что выполнено достаточное условие конечности $\text{ind } \psi G_i''$, сформулированное в предложении 3, и Λ_τ , $\tau \in [0, t]$, — якобиева кривая. Тогда для кривой Λ_τ справедливо утверждение теоремы 1.

Предложение 4, обобщающее теорему 1, доказывается тем же способом, что и эта теорема, только еще более громоздко из-за необходимости использования большего числа индексов.

Мы научились строить якобиеву кривую и вычислять $\text{ind } \psi G_i''$ в более общей ситуации, чем в теореме 1, тем не менее, между необходимым и достаточным условиями конечности $\text{ind } \psi G_i''$ остается еще некоторый зазор.

Предположим, что выполнены условия а), б) предложения 3, и пусть

$$T = \bigcap_{\varepsilon > 0} ([0, t] \setminus \mathcal{H}_\varepsilon),$$

где

$$\mathcal{H}_\varepsilon = \{\tau \in (0, t] \mid |\gamma_\tau^k(\bar{v})| \geq \varepsilon |\bar{v}|^2, \forall \bar{v} \in V_\tau^{k-1}/V_\tau^k, 0 \leq k \leq m\}.$$

Нетрудно показать, что множество T нигде не плотно на $[0, t]$, если же z_τ кусочно аналитично зависит от τ , то T состоит из конечного числа точек.

Дальнейшие рассуждения проводятся в предположении, что T — конечное множество (кусочная аналитичность необязательна).

Для всякого $\tau \in (0, t] \setminus T$ определены изотропное пространство Γ_τ и квадратичная форма (22). Уравнение Якоби (23) не определено (имеет особенности) лишь при $\tau \in T$. Пусть $\delta > 0$ и $\chi_\delta(\tau)$ — кусочно постоянная функция на $[0, t]$, равная нулю на δ -окрестности $O_\delta T$ множества T и единице — вне замыкания этой δ -окрестности.

Рассмотрим «урезанное» уравнение Якоби

$$\dot{\Lambda} = \chi_\delta(T) J_\tau(\Lambda), \quad \Lambda \in L(\Sigma), \quad (236)$$

определенное уже для всех $\tau \in [0, t]$.

Обозначим через Λ_τ^δ решение уравнения (236), локально постоянное в $O_\delta T$ и удовлетворяющее условиям

$$\Lambda_0 = \Pi_0, \quad \Lambda_{\tau+0} = \Lambda_\tau^{\mathbb{F}} \tau + 0, \quad \forall \tau \in [0, t] \setminus O_\delta T.$$

Предложение 5. Пусть $\delta > 0$ и $\pi_{i+1} = 0 = \pi_0 < \tau_1 < \dots < \tau_l = t$ — такое разбиение отрезка $[0, t]$, что все куски $\Lambda_{\tau_i}^\delta|_{[\tau_i, \tau_{i+1}]}$, $0 \leq i < l$, кривой Λ_τ^δ — простые. Положим

$$i(\delta) = \sum_{i=0}^l \text{ind}_{\Pi_0}(\Lambda_{\tau_i}, \Lambda_{\tau_{i+1}}).$$

Тогда $i(\delta) \uparrow \text{ind } \Psi G_t^* + m$ при $\delta \downarrow 0$.

Это предложение, по существу, содержится в предыдущих результатах. В самом деле, обозначим Q_δ сужение формы ψG_t^* на пространство функций, обращающихся в нуль на $O_\delta T$. Нетрудно показать, что $\text{ind } Q_\delta \uparrow \text{ind } \psi G_t^*$ при $\delta \downarrow 0$. Перейти от ψG_t^* к Q_δ — это то же самое, что «вырезать» $O_\delta T$ из временной оси. После такого вырезания оказывается выполненным достаточное условие конечности индекса из предложения 3, причем Λ_τ^δ — якобиева кривая для формы Q_δ и, согласно предложению 4, $\text{ind } Q_\delta = i(\delta) - m$. ■

Замечание 1. В предложении 5 $\lim_{\delta \downarrow 0} i(\delta) = \text{ind } \psi G_t^*$ может быть как конечным, так и бесконечным.

Замечание 2. Отметим, что и в том случае, когда z_τ гладко, или даже аналитично зависит от τ , кривые Λ_τ^δ оказываются, вообще говоря, разрывными. Это одна из причин, по которым мы упорно рассматриваем не только гладкие, но и кусочно гладкие кривые. Учет разрывов помогает и в гладкой ситуации: если уравнение Якоби имеет изолированную особенность, мы получаем рецепт, в соответствии с которым следует состыковывать решения, определенные слева и справа от особенности.

ДОБАВЛЕНИЕ К § 3. ЛАГРАНЖЕВ ГРАССМАНИАН

Здесь в нужной нам форме приведены сведения из симплектической геометрии, использованные в § 3. Доказательства, как правило, заменяются ссылками на литературу. Везде ниже Σ — симплектическое пространство размерности $2m$ с симплектической формой σ . Выражение $S_1 \angle S_2$ для подмножеств $S_1, S_2 \subset \Sigma$ означает, что $\sigma(s_1, s_2) = 0, \forall s_1 \in S_1, s_2 \in S_2$. Через $S^\angle$ обозначается косоортогональное дополнение подмножества $S \subset \Sigma, S^\angle = \{x \in \Sigma \mid \sigma(x, s) = 0 \forall s \in S\}$.

Подпространство $\Gamma \subset S$ называется изотропным, если $\Gamma \subset \Gamma^\angle$, и лагранжевым (лагранжевой плоскостью), если $\Gamma = \Gamma^\angle$. Множество всех лагранжевых подпространств образует замкнутое подмногообразие в грассманиане $G_m(\Sigma)$, это подмногообразие обозначается $L(\Sigma)$ и называется лагранжевым грассманианом. Таким образом,

$$L(\Sigma) = \{\Lambda \subset \Sigma \mid \Lambda^\angle = \Lambda\}.$$

I. Естественный атлас в $L(\Sigma)$. Пусть $\Delta \in L(\Sigma)$, обозначим через Δ^{Δ} совокупность всех лагранжевых плоскостей в $L(\Sigma)$, трансверсальных Δ , и для произвольного $\Delta \in \Delta^{\Delta}$ пусть $P_\Delta: \Sigma \rightarrow \Delta$ — проектор Σ на Δ параллельно $\Delta^\angle$.

Предложение II. Для всякого $\Delta \in L(\Sigma)$ и $\Lambda \in \Delta^{\Delta}$ справедливы тождества:

- i) $\delta(P_\Delta x_1, x_2) + \sigma(x_1, P_\Delta x_2) = \sigma(x_1, x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in \Sigma;$
- ii) $P_\Delta \Delta = \{\emptyset\}.$

Обратно, если некоторый линейный оператор $P: \Sigma \rightarrow \Sigma$ удовлетворяет условиям i), ii), то $P = P_\Delta$ для некоторого $\Delta \in \Delta^{\Delta}$. Доказательство см. в [12, стр. 136—137].

Следствие. Множество Δ^{Δ} обладает структурой аффинного пространства, причем ассоциированное с ним линейное пространство естественно изоморфно пространству $\mathcal{P}(\Sigma/\Delta)$ всех симметричных билинейных форм на Σ/Δ .

В самом деле, то, что совокупность линейных операторов, удовлетворяющих условиям i), ii), образует аффинное пространство, очевидно. Из этих условий, кроме того, следует, что

$\forall \Lambda_1, \Lambda_2 \in \Delta^{\text{д}}$ выражение $\sigma((P_{\Lambda_1} - P_{\Lambda_2})x_1, x_2), x_1, x_2 \in \Sigma$ определяет симметричную билинейную форму на $\mathcal{P}(\Sigma/\Delta)$. Нетрудно показать, что любая форма из $\mathcal{P}(\Sigma/\Delta)$ реализуется таким образом.

Совокупность аффинных пространств $\Delta^{\text{д}}$ для всевозможных Λ является естественным атласом в $L(\Sigma)$, $\dim L(\Sigma) = \frac{m(m+1)}{2}$.

II. Касательное пространство $T_{\Lambda}L(\Sigma)$. Пусть $\Lambda \in L(\Sigma)$, и $\Lambda_{\varepsilon} \in \mathbb{R}$ — гладкая кривая в $L(\Sigma)$, удовлетворяющая условию $\Lambda_0 = \Lambda$.

В таком случае, $\xi = \frac{d}{d\varepsilon} \Lambda_{\varepsilon}|_{\varepsilon=0}$ касательный вектор к $L(\Sigma)$ в точке Λ . Пусть $\lambda \in \Lambda$ и λ_{ε} — гладкая кривая в Σ , удовлетворяющая условиям $\lambda_{\varepsilon} \in \Lambda_{\varepsilon} \forall \varepsilon, \lambda_0 = \lambda$. Легко видеть, что смежный класс $\frac{d}{d\varepsilon} \lambda_{\varepsilon}|_{\varepsilon=0} + \Lambda$ зависит лишь от $\lambda \in \Lambda$ и $\frac{d}{d\varepsilon} \Lambda_{\varepsilon}|_{\varepsilon=0}$, а не от выбора кривой λ_{ε} . Следовательно, соответствие $\lambda \rightarrow \frac{d}{d\varepsilon} \lambda_{\varepsilon}|_{\varepsilon=0}$ определяет

линейное преобразование $D_{\xi}: \Lambda \rightarrow \Sigma/\Lambda$. Ясно, что отображение $\xi \rightarrow D_{\xi}$ линейно, причем $D_{\xi} = 0$ в том и только том случае, когда $\xi = 0$.

До сих пор мы нигде не воспользовались тем, что имеем дело с лагранжевыми подпространствами, все сказанное верно для любого касательного вектора к грассманову многообразию. Из лагранжевости следует, что корректно определена билинейная форма $\frac{1}{2} \sigma(D_{\xi} \lambda_1, \lambda_2), \lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$. Более того, из тождества

$$0 = \frac{d}{d\varepsilon} \sigma(\lambda^1, \lambda_{\varepsilon}^2)|_{\varepsilon=0} = \sigma(D_{\xi} \lambda_1, \lambda_2) + \sigma(\lambda_1, D_{\xi} \lambda_2)$$

следует симметричность этой формы. Соответствующую квадратичную форму на Λ обозначим символом $\frac{1}{2} \sigma(D_{\xi} \Lambda, \Lambda)$. Сравнивая размерности, получаем:

Предложение П2. Соответствие $\xi \mapsto \frac{1}{2} \sigma(D_{\xi} \Lambda, \Lambda)$ устанавливает естественный изоморфизм пространства $T_{\Lambda}L(\Sigma)$, касательного к $L(\Sigma)$ в «точке» Λ , и пространства $\mathcal{P}(\Lambda)$ квадратичных форм на Λ .

Для нас особенно важно то, что изоморфизм, описанный в предложении П2, определяет отношение частичного упорядочения в пространстве $T_{\Lambda}L(\Sigma)$: касательный вектор $\xi \in T_{\Lambda}L(\Sigma)$ называется неотрицательным, если соответствующая ему квадратичная форма неотрицательна.

Пусть $h_t \in \mathcal{P}(\Sigma)$, $t \in \mathbb{R}$, — семейство квадратичных форм на Σ (нестационарный квадратичный гамильтониан). Гамильтониану h_t , $t \in \mathbb{R}$, отвечает линейная гамильтонова система в Σ , обозначим через $H_t: \Sigma \rightarrow \Sigma$, $t \in \mathbb{R}$, фундаментальную матрицу этой системы, $H_0 = \text{id}$. Ясно, что H_t — линейное симплектическое преобразование. $H_t \in \text{Sp}(\Sigma)$. Поскольку симплектические преобразо-

вания переводят лагранжевы плоскости в лагранжевы, то поток H_t^* в Σ определяет соответствующий поток $\mathcal{H}_t^*$, $t \in \mathbb{R}$ в $L(\Sigma)$,

$$\mathcal{H}_t(\Lambda) \stackrel{\text{def}}{=} H_t \Lambda \quad \forall \Lambda \in L(\Sigma).$$

С другой стороны, семейство квадратичных форм h_t , $t \in \mathbb{R}$, очевидным образом порождает нестационарное векторное поле $\vec{h}_t$ на $L(\Sigma)$: Достаточно сузить квадратичную форму h_t на плоскость $\Lambda \in L(\Sigma)$, чтобы получить касательный вектор в «точке» Λ ,

$$\vec{h}_t|_{\{\Lambda\}} \stackrel{\text{def}}{=} h_t|_{\Lambda} \quad \forall \Lambda \in L(\Sigma),$$

или, используя введенную выше символику,

$$\vec{h}_t|_{\{\Lambda\}} = h_t(\Lambda, \Lambda).$$

Следующее тождество устанавливается прямым вычислением:

$$\mathcal{H}_t^* = \exp \int_0^t \vec{h}_\tau d\tau, \quad t \in \mathbb{R}.$$

III. Вложения и проекции. Пусть $\Gamma \subset \Sigma$ — изотропное подпространство, т. е. $\Gamma \subset \Gamma^\perp$, $\dim \Gamma = k \leq m$. Легко видеть, что косокалярное произведение $\sigma(\cdot, \cdot)$ индуцирует симплектическую структуру в пространстве $\Gamma^\perp/\Gamma$, при этом $\dim(\Gamma^\perp/\Gamma) = 2(m-k)$. Пусть $\mathcal{A} \in L(\Gamma^\perp/\Gamma)$, тогда полный прообраз подпространства $\mathcal{A}$ при факторизации $\Gamma^\perp/\Gamma$ является лагранжевым подпространством в Σ . Описанное соответствие определяет вложение многообразия $L(\Gamma^\perp/\Gamma)$ в многообразие $L(\Sigma)$. При этом вложении многообразие $L(\Gamma^\perp/\Gamma)$ переходит в подмногообразие в $L(\Sigma)$, состоящее из всех лагранжевых плоскостей, содержащих Γ (или, что эквивалентно, содержащихся в $\Gamma^\perp$). Отныне мы будем отождествлять многообразие $L(\Gamma^\perp/\Gamma)$ с соответствующим ему подмногообразием в $L(\Sigma)$.

Обратно, для любого $\Lambda \in L(\Sigma)$ положим $\Lambda^\Gamma = \Lambda \cap \Gamma^\perp + \Gamma$. Легко видеть, что $\Lambda^\Gamma \in L(\Gamma^\perp/\Gamma)$, и отображение $\Lambda \mapsto \Lambda^\Gamma$ определяет проектирование $L(\Sigma)$ на подмногообразие $L(\Gamma^\perp/\Gamma)$. Это проектирование разрывно на $L(\Sigma)$, но гладко и сюръективно на подмногообразиях $\{\Lambda \in L(\Sigma) \mid \dim(\Lambda \cap \Gamma) = \text{const}\}$. Если $\Lambda \in L(\Gamma^\perp/\Gamma) \subset L(\Sigma)$, то касательное пространство $T_\Lambda L(\Gamma^\perp/\Gamma) \subset T_\Lambda L(\Sigma) \approx \approx \mathcal{P}(\Lambda)$ состоит из таких квадратичных форм q на Λ , что $\Gamma \subset \ker q$.

Предложение ПЗ. Вложение $L(\Gamma^\perp/\Gamma) \subset L(\Sigma)$ индуцирует изоморфизм фундаментальных групп.

Доказательство см. в [12, стр. 152—154].

Следствие. $\pi_1(L(\Sigma)) = \mathbb{Z}$. В самом деле, пусть $\dim \Gamma = n-1$, тогда $\dim(\Gamma^\perp/\Gamma) = 2$. В то же время, $L(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}P^1 = S^1$.

В действительности, вложение $L(\Gamma^\perp/\Gamma) \subset L(\Sigma)$ при $\dim \Gamma =$

$=n-1$ не только индуцирует изоморфизм фундаментальных групп многообразий $L(\Sigma)$ и S^1 , но и канонически определяет образующую $\gamma \in \pi_1(L(\Sigma))$. В самом деле, ненулевые касательные векторы к подмногообразию $L(\Gamma \setminus \Gamma) \subset L(\Sigma)$ представляют собой квадратичные формы ранга один. Любая такая форма либо неотрицательна, либо неположительна. Обозначим через γ ту образующую группы $\pi_1(L(\Sigma))$, которая представляется кривой в $L(\Gamma \setminus \Gamma)$ с неотрицательной скоростью.

Можно показать, что это определение корректно, т. е. не зависит от выбора Γ . Действительно, симплектическая группа $\text{Sp}(\Sigma)$ транзитивно действует на множестве изотропных подпространств фиксированной размерности. Поскольку, при этом, группа $\text{Sp}(\Sigma)$ связна, то для любых изотропных $\Gamma_1, \Gamma_2 \subset \Sigma$ одной размерности существует изотропный тождественному диффеоморфизм многообразия $L(\Sigma)$ на себя, переводящий $L(\Gamma_1 \setminus \Gamma_1)$ в $L(\Gamma_2 \setminus \Gamma_2)$.

Определение. Пусть $\Lambda_0, \theta \in S^1$, — непрерывная замкнутая кривая в $L(\Sigma)$. Кривая Λ_0 представляет некоторый элемент d фундаментальной группы многообразия $L(\Sigma)$, $d \in \mathbb{Z}$. Число d называется индексом Маслова кривой Λ_0 и обозначается $d = \text{Ind } \Lambda_0$.

IV. Индекс Маслова.

Определение. Пусть $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3 \in L(\Sigma)$, индексом Маслова $\mu(\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3)$ называется сигнатура квадратичной формы q на векторном пространстве $\Lambda_1 \oplus \Lambda_2 \oplus \Lambda_3$, определенной формулой

$$q(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \sigma(\lambda_1, \lambda_2) + \sigma(\lambda_2, \lambda_3) + \sigma(\lambda_3, \lambda_1), \quad \lambda_i \in \Lambda_i, \quad i=1, 2, 3.$$

Предложение П4 (важнейшие свойства индекса Маслова).

- 1) Индекс $\mu(\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3)$ антисимметричен по всем аргументам.
- 2) Справедливо тождество (цепное правило):

$$\mu(\Lambda_2, \Lambda_3, \Lambda_4) - \mu(\Lambda_1, \Lambda_3, \Lambda_4) + \mu(\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_4) - \mu(\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3) = 0 \\ \forall \Lambda_i \in L(\Sigma), \quad i=1, \dots, 4. *)$$

- 3) Для любых $\Lambda_i \in L(\Sigma)$, $i=1, 2, 3$ и любого подпространства $\Gamma \subset \Lambda_1 \cap \Lambda_2 + \Lambda_2 \cap \Lambda_3 + \Lambda_3 \cap \Lambda_1$ справедливо тождество

$$\mu(\Lambda_1^\Gamma, \Lambda_2^\Gamma, \Lambda_3^\Gamma) = \mu(\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3).$$

Доказательство свойств 2), 3) см. в [13, стр. 32—34] свойство 1) очевидно.

Приведем другое определение индекса Маслова, именно оно используется в основном тексте.

Определение. Пусть $\Lambda_i \in L(\Sigma)$, $i=1, 2, 3$. Произвольный вектор $\lambda \in \Lambda_2 \cap (\Lambda_1 + \Lambda_3)$ можно представить в виде $\lambda = \lambda_1 + \lambda_3$, где $\lambda_1 \in \Lambda_1$, $\lambda_3 \in \Lambda_3$. Положим $q(\lambda) = \sigma(\lambda_1, \lambda_3)$. Нетрудно видеть, что соответствие $\lambda \rightarrow q(\lambda)$ корректно определяет квадратичную форму

*) Свойства 1) означает, что μ является «2-коцепью» на $L(\Sigma)$, а свойство 2) означает, что μ — «коцикл» на $L(\Sigma)$.

на $\Lambda_2 \cap (\Lambda_1 + \Lambda_3)$, т. е. что выражение $\sigma(\lambda_1, \lambda_3)$ зависит лишь от суммы $\lambda_1 + \lambda_3$, коль скоро λ_1 и λ_3 лежат в фиксированных лагранжевых плоскостях. Индексом Маслова $\mu(\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3)$ называется сигнатура квадратичной формы q на $\Lambda_2 \cap (\Lambda_1 + \Lambda_3)$. Заметим, что $\ker q = \Lambda_1 \cap \Lambda_2 + \Lambda_2 \cap \Lambda_3$.

Эквивалентность двух определений индекса Маслова в случае $\Lambda_1 \cap \Lambda_3 = 0$ доказана в [13, стр. 31]; общий случай сводится к этому при помощи утверждения 3) предложения П4. Из второго определения индекса Маслова вытекает оценка

$$|\mu(\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3)| \leq m - \dim(\Lambda_1 \cap \Lambda_2 + \Lambda_2 \cap \Lambda_3) \quad \forall \Lambda_i \in L(\Sigma).$$

Предложение П5. Пусть $\Lambda_1, \Lambda_2 \in L(\Sigma)$. Тогда для любого целого числа k , удовлетворяющего неравенству $|k| \leq m - \dim(\Lambda_1 \cap \Lambda_2)$, существует такая лагранжева плоскость Δ , трансверсальная Λ_1 и Λ_2 , что $\mu(\Lambda_1, \Delta, \Lambda_2) = k$.

Доказательство использует описание множества лагранжевых плоскостей, трансверсальных данной, приведенное в пункте 1), а также антисимметричность индекса Маслова.

Предложение П6. Пусть $\Lambda_t, t \in [t_1, t_2]$ — непрерывная замкнутая кривая в $L(\Sigma)$, $\Lambda_{t_2} = \Lambda_{t_1}$. Пусть, кроме того, заданы такие точки $t_1 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_N < \tau_{N+1} = t_2$ и лагранжевы плоскости $\Delta_0, \Delta_1, \dots, \Delta_N$, что $\Delta_i \cap \Lambda_{\tau_i} = 0$ при $\tau_i \leq \tau \leq \tau_{i+1}$, $i = 0, \dots, N$.

Тогда $\forall \Pi \in L(\Sigma)$ справедливо равенство

$$2 \operatorname{Ind} \Delta = \sum_{i=0}^N \mu(\Pi, \Delta_i, \Lambda_{\tau_{i+1}}) - \mu(\Pi, \Delta_i, \Lambda_{\tau_i}).$$

Доказательство следует из результатов параграфа 1.9 работы [13] (см., в особенности, предложение 1.9.5).

V. Унитарная модель. Рассмотрим пространство C^m с эрмитовым произведением $\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^m v_i \bar{w}_i$. Билинейная форма

$\operatorname{Im} \langle v, w \rangle$ задает симплектическую структуру на C^m , а $\operatorname{Re} \langle v, w \rangle$ — евклидову структуру. Обозначим через Λ_R совокупность всех вещественных векторов в C^m ; ясно, что Λ_R , а также $i\Lambda_R$ — лагранжевы подпространства.

Любое унитарное преобразование, сохраняя эрмитову структуру, сохраняет и симплектическую структуру, следовательно, переводит лагранжевы плоскости в лагранжевы. Таким образом, группа $U(n)$ действует на многообразии лагранжевых плоскостей $L(C^m)$. В действительности, это действие транзитивно. В самом деле, пусть $\Lambda \in L(C^m)$ и $e_1, \dots, e_m$ — базис в Λ , ортонормированный в смысле евклидовой структуры $\operatorname{Re} \langle \cdot, \cdot \rangle$ т. е. $\operatorname{Re} \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$, $i, j = 1, \dots, m$.

Поскольку $\operatorname{Im} \langle e_i, e_j \rangle = 0$, $i, j = 1, \dots, m$ (Λ — изотропная плоскость), то базис $e_1, \dots, e_m$ — ортонормированный также и в

смысле эрмитовой структуры $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$, $i, j = 1, \dots, m$. Поэтому существует унитарное преобразование U , переводящее стандартный базис в базисе $e_1, \dots, e_m$. Ясно, что $U\Lambda_R = \Lambda$. Далее, унитарное преобразование $U: \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^m$ в том и только том случае переводит Λ_R в себя, когда все элементы матрицы U вещественны. Вещественные матрицы в $U(m)$ образуют подгруппу $O(m)$. Таким образом, мы установили изоморфизм $L(\mathbb{C}^m) \approx U(m)/O(m)$.

Пусть $U \in U(m)$ ясно, что величина $\det^2(U)$ зависит лишь от смежного класса U в $U(m)/O(m)$ и, следовательно, корректно определена на $L(\mathbb{C}^m)$. При этом $\det^2(U) \in \{v \in \mathbb{C} : |v| = 1\} = S^1$.

Предложение П7. Пусть $\Lambda_0, \theta \in S^1$ — непрерывная замкнутая кривая в $L(\mathbb{C}^m)$, $\Lambda_\theta = U_\theta \cdot O(m)$. Тогда $\text{Ind } \Lambda$ равен степени отображения $\theta \mapsto \det(U_\theta)$ из S^1 в S^1 .

Пусть $\Lambda \in L(\Sigma)$, $\xi \in T_\Lambda L(\Sigma)$, как и выше, касательный вектор ξ отождествляется с квадратичной формой $\frac{1}{2} \sigma(D_\xi \Lambda, \Lambda)$ на Λ (см. предложение П2). Наличие евклидовой структуры позволяет сопоставить квадратичной форме симметричный оператор $s(\xi): \Lambda \rightarrow \Lambda$, где

$$\text{Re} \langle s(\xi) \lambda_1, \lambda_2 \rangle = \frac{1}{2} \sigma(D_\xi \lambda_1, \lambda_2) \quad \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda.$$

Из предложения П7 можно вывести

Предложение П8. Пусть $\Lambda_0, \theta \in S^1$ — абсолютно непрерывная замкнутая кривая в $L(\mathbb{C}^m)$. Тогда

$$\text{Ind } \Lambda = \frac{2}{\pi} \int_{S^1} \text{tr } s \left(\frac{d\Lambda_\theta}{d\theta} \right) d\theta.$$

Следствие. Пусть $h_\tau, \tau \in [0, t]$ — нестационарный квадратичный гамильтониан на Σ и $H_\tau: \Sigma \rightarrow \Sigma$ — гамильтонов поток. Пусть $\Lambda_0 \in L(\Sigma)$ — таково, что кривая $\Lambda_\tau = H_\tau \Lambda_0, \tau \in [0, t]$ в $L(\Sigma)$ удовлетворяет условию $\Lambda_t = \Lambda_0$. Тогда

$$\text{Ind } \Lambda = \frac{2}{\pi} \int_0^t \text{tr } s(h_\tau | \Lambda_\tau) d\tau.$$

§ 4. ГОМОЛОГИЧЕСКИЕ ИНВАРИАНТЫ ВТОРОЙ ВАРИАЦИИ

В настоящем параграфе описаны некоторые инварианты семейства кривых на лагранжевом грассманиане, и с их помощью исследуется вторая вариация управляемой системы.

1. В этом пункте используются обозначения пункта I §3. Напомним, что G_t'' есть квадратичное отображение пространства

$\ker G_i$ в k -мерное векторное пространство $\operatorname{coker} G_i = (\Pi^\perp)^*$. Положим $\Psi = \{\psi \in \Pi^\perp \mid \operatorname{ind} \psi G_i < +\infty\}$. Множество Ψ является, очевидно, выпуклым, но, вообще говоря, ни открытым, ни замкнутым конусом.

Следующее правило сопоставляет каждому $\tau \in (0, t]$ целое неотрицательное $l_\tau \leq m$: если квадратичное отображение $v \mapsto h_\theta(v, v)$, $v \in \mathbb{R}^r$, не равно тождественно нулю ни на каком интервале $\tau < \theta < \tau$, то положим $l_\tau = 0$; в противном случае пусть l_τ — такое максимальное (среди чисел $1, 2, \dots, m$) число l , что $[h_\theta^{(l)} v_1, h_\theta^{(l)} v_2] = 0$ при $i < 2(l-1)$, $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^r$, на некотором интервале $\tau < \theta < \tau$.

Из предложения 3.1 непосредственно вытекает следующее

Предложение 1. Множество $\Psi \subset \Pi^\perp$ содержится в пересечении подпространства

$$\{[h_\theta^{(l_\tau-1)} v_1, h_\theta^{(l_\tau-1)} v_2] \mid 0 < \tau \leq t, v_1, v_2 \in \mathbb{R}^r\}^\perp \quad (1)$$

и выпуклого замкнутого конуса

$$\{[h_\theta^{(l_\tau-1)} v, h_\theta^{(l_\tau)} v] \mid 0 < \tau \leq t, v \in \mathbb{R}^r\}^\circ. \quad (2)$$

Если, вдобавок, замыкание множества $\{[h_\theta^{(l_\tau)} v, h_\theta^{(l_\tau-1)} v] \mid 0 < \tau < t, |v| = 1\}$ не пересекается с подпространством (1), то внутренность множества Ψ относительно пространства (1) совпадает с внутренностью пересечения (1) и (2) относительно (1).

Замечание. Предложение 3.3 позволяет существенно уточнить описание конуса Ψ , данное в предложении 1, причем можно выделить не только внутренние, но и граничные точки Ψ относительно (1). Мы, однако, на этом останавливаться не будем.

В пункте 1 § 3 каждому $\psi \in \Pi^\perp \setminus 0$ поставлено в соответствие симплектическое пространство $E_{\Pi, \psi}$ и (естественная) точная последовательность

$$0 \rightarrow \Pi^* \rightarrow E_{\Pi, \psi} \rightarrow \Pi \rightarrow 0.$$

Введение локальных координат в окрестности точки μ_0 приводит к изоморфизму $E_{\Pi, \psi}$ и пространства $\Pi \oplus \Pi^*$ со стандартной симплектической структурой $\sigma(x_1 \oplus \xi_1, x_2 \oplus \xi_2) = \langle \xi_2, x_1 \rangle - \langle \xi_1, x_2 \rangle$, $x_i \in \Pi$, $\xi_i \in \Pi^*$, причем диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} & & E_{\Pi, \psi} & & \\ & \nearrow & & \searrow & \\ 0 & \longrightarrow & \Pi^* & & \Pi & \longrightarrow & 0 \\ & & \nwarrow & & \nearrow & & \\ & & \Pi \oplus \Pi^* & & & & \end{array}$$

коммутативна (нижние стрелки обозначают вложение Π^* в $\Pi \oplus \Pi^*$ в качестве второго слагаемого и координатную проекцию $\Pi \oplus \Pi^*$ на первое слагаемое). Этот изоморфизм не является естественным и зависит от выбора локальных координат.

Впрочем, для построения такого изоморфизма нужно много меньше, чем введение локальных координат. Следующее утверждение точно описывает ситуацию. (Напомним, что $\Pi^* = T_{\mu_0}^* M / \Pi^\perp$).

Лемма 1. Пусть $\Phi: \Pi^\perp \rightarrow \text{Der}^* M$ — такое линейное отображение, что для всякого $\psi \in \Pi^\perp$ выполняются соотношения $\mu_0 \circ \Phi \psi = \Psi$, $\mu_0 \circ d(\Phi \psi) \perp \Pi \wedge \Pi$. Тогда для всякого $\psi \in \Pi^\perp \setminus 0$ отображение

$$X \mapsto \mu_0 \circ X \oplus (\mu_0 \circ L_X \Phi \psi + \Pi^\perp), \quad X \in \mathcal{E}_\Pi$$

индуцирует изоморфизм симплектических пространств

$$S_\psi: E_{\Pi, \psi} \rightarrow \Pi \oplus \Pi^*.$$

Доказательство — прямое вычисление.

Зафиксируем теперь раз и навсегда отображение Φ , удовлетворяющее условиям леммы 1.

Пусть $\psi \in \Psi \setminus 0$ таково, что определена отвечающая форме $\psi G_i''$ якобиева кривая $\Lambda_\tau \in L(E_{\Pi, \psi})$, $\tau \in [0, t]$ (наиболее общие условия существования якобевой кривой на всем отрезке $[0, t]$ приведены в предложении 3.3). Положим $\Lambda_\tau(\psi) = S_\psi \Lambda_\tau \subset \Pi \oplus \Pi^*$, $\tau \in [0, t]$. Тогда $\Lambda_\tau(\psi)$ — неубывающая кривая в $L(\Pi \oplus \Pi^*)$, $\Lambda_0(\psi) = \Pi^* \in L(\Pi \oplus \Pi^*)$. Результаты § 3 позволяют вычислить $\text{ind } \psi G_i''$ в терминах кривой $\Lambda_\tau(\psi)$, $0 \leq \tau \leq t$.

2. Проведенное в [1] исследование квадратичных отображений на $\mathbb{R}^{n+1}$ опиралось на объекты, связанные с пространством квадратичных форм, а именно, индекс формы и классы γ_n . Теперь уже видно, что при исследовании интегрального квадратичного отображения G_i'' роль, аналогичную пространству квадратичных форм, играет совокупность всех неубывающих кривых на $L(\Pi \oplus \Pi^*)$, начинающихся в Π^* . В настоящем пункте дается определение индекса для этих кривых и вводятся аналоги классов γ_n . Собственно, определение индекса подсказано результатами § 3.

Определение. Пусть Λ_τ , $0 \leq \tau \leq t$, — неубывающая кусочно гладкая кривая в $\Pi \oplus \Pi^*$, $\Lambda_0 = \Pi^*$, и $\tau_{i+1} = 0 = \tau_0 < \dots < \tau_l = t$ — такое разбиение отрезка $[0, t]$, что кривые $\Lambda_i|_{[\tau_i, \tau_{i+1}]}$, $i = 0, 1, \dots, l-1$, — простые. Положим

$$\text{ind } \Lambda = \sum_{i=0}^l \text{ind}_{\Lambda_0}(\Lambda_{\tau_i}, \Lambda_{\tau_{i+1}}) + \dim \left(\bigcap_{0 \leq \tau \leq t} \Lambda_\tau \right) - m.$$

Величина $\text{ind } \Lambda$ является целым неотрицательным числом и, согласно результатам § 3, не зависит от выбора разбиения отрезка $[0, t]$. Более того, если в каждой точке разрыва τ кривой Λ вставить простую неубывающую кривую, соединяющую Λ_τ с $\Lambda_{\tau+0}$ и, кроме того, соединить простой неубывающей кривой Λ_l с Λ_0 , то для полученной в результате неубывающей непре-

рывной замкнутой кривой $\bar{\Lambda}$, справедливо тождество

$$\text{ind } \Lambda_* = \text{ind } \bar{\Lambda}_* = \text{Ind } \Lambda_* + \dim \left(\bigcap_{0 \leq \tau \leq t} \Lambda_\tau \right) - m. \quad (3)$$

Напомним, что Ind обозначает индекс Маслова замкнутой кривой. Тождество (3) следует из предложения 3.2 (см. также теорему 3.3).

В дальнейшем будем предполагать, что в пространстве $\Pi \oplus \Pi^*$ фиксирована некоторая комплексная структура и эрмитова форма $\langle \cdot, \cdot \rangle$ так, что $\sigma(x_1 \oplus \xi_1, x_2 \oplus \xi_2) = \text{Im} \langle x_1 \oplus \xi_1, x_2 \oplus \xi_2 \rangle$. В приложении к § 3 описано отождествление касательного пространства $T_\Lambda L(\Pi \oplus \Pi^*)$ с пространством $\mathcal{P}(\Lambda)$ квадратичных (=симметричных билинейных) форм на Λ , ниже это отождествление используется без специальных оговорок. Каждой форме $q \in \mathcal{P}(\Lambda) = T_\Lambda L(\Pi \oplus \Pi^*)$ соответствует симметричный линейный оператор $s(q): \Lambda \rightarrow \Lambda$, где $q(\lambda_1, \lambda_2) = \text{Re} \langle s(q)\lambda_1, \lambda_2 \rangle \quad \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$. Зададим риманову структуру на $L(\Pi \oplus \Pi^*)$, определив скалярное произведение пары касательных векторов $q_1, q_2 \in T_\Lambda L(\Pi \oplus \Pi^*)$ формулой $(q_1, q_2) \mapsto \text{tr}(s(q_1)s(q_2))$. Длину произвольной кусочно гладкой кривой $\Lambda_\tau \in L(\Pi \oplus \Pi^*)$, $0 \leq \tau \leq t$, обозначим символом $\rho(\Lambda_*)$,

$$\rho(\Lambda_*) = \int_0^t \sqrt{\text{tr} \left(s \left(\frac{d\Lambda}{d\tau} \right)^2 \right)} d\tau$$

Предложение 2. Пусть Λ_τ , $0 \leq \tau \leq t$, — неубывающая кусочно гладкая кривая в $\Pi \oplus \Pi^*$, $\Lambda_0 = \Pi^*$, имеющая не более N точек разрыва. Положим $v = m - \dim \left(\bigcap_{0 \leq \tau \leq t} \Lambda_\tau \right)$. Тогда

$$\frac{2}{\pi} \rho(\Lambda_*) - v \leq (\text{ind } \Lambda_*) \leq \frac{2}{\pi} \sqrt{v} \rho(\Lambda_*) + vN.$$

Доказательство. Поскольку Λ_τ — неубывающая кривая, то ее скорость $\dot{\Lambda}_\tau \in T_\Lambda L(\Pi \oplus \Pi^*)$ — неотрицательная квадратичная форма, а $s(\dot{\Lambda}_\tau)$ — неотрицательный симметричный оператор, причем $\text{rank } s(\dot{\Lambda}_\tau) \leq v$. Поэтому $\text{tr}(s(\dot{\Lambda}_\tau)^2) \leq (\text{tr } s(\dot{\Lambda}_\tau))^2 \leq \leq v \text{tr}(s(\dot{\Lambda}_\tau)^2)$. Если Λ_* — непрерывная замкнутая кривая, то доказываемые неравенства следуют из предложения П8 приложения к § 3 и равенства (3). В общем случае нужно еще воспользоваться тем фактом, что любая пара лагранжевых плоскостей Δ_1, Δ_2 лежит на некоторой неубывающей непрерывной замкнутой кривой Δ_θ , $\theta \in S^1$, удовлетворяющий условию $\text{Ind } \Delta_\theta = m - \dim(\Delta_1 \cap \Delta_2)$. Устанавливается этот факт совсем просто: то, что хоть какая-то пара лагранжевых плоскостей лежит на такой кривой, очевидно, в то же время симплектическая груп-

па транзитивно действует на парах лагранжевых плоскостей с фиксированной размерностью пересечения.

Обозначим через $\mathfrak{E}[0, t]$ пространство всех кусочно гладких монотонных кривых $\Lambda_t \in L(\Pi \oplus \Pi^*)$, $\Lambda_0 = \Pi^*$; непрерывных на полуинтервале $(0, t]$ с топологией равномерной сходимости на каждом отрезке $[\varepsilon, t]$, где $0 < \varepsilon \leq t$. Разрыв в нулевой момент времени допускается, т. е. возможно $\Pi^* = \Lambda_0 \neq \Lambda_{+0}$.

Через $\mathfrak{E}^s[0, t]$ обозначим подмножество в $\mathfrak{E}[0, t]$, состоящее из всех таких кривых $\Lambda_t \in \mathfrak{E}[0, t]$, для каждой из которых найдется разбиение $0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_{l+1} = t$ отрезка $[0, t]$ со следующими свойствами: а) кривые $\Lambda_t|_{[\tau_i, \tau_{i+1}]}$ — простые для $i = 0, \dots, l+1$; б) $\Lambda_{\tau_i} \cup \Pi^* = 0$, $i = 1, \dots, l$, $\Lambda_0 \cup \Pi^* = 0$ на некотором интервале $\tau < \theta < t$.

З а м е ч а н и е. Подмножество $\mathfrak{E}[0, t] \setminus \mathfrak{E}^s[0, t]$ имеет бесконечную коразмерность в $\mathfrak{E}[0, t]$, т. е. для произвольного конечномерного многообразия U и пространства $C(U, \mathfrak{E}[0, t])$ всех непрерывных отображений из U в $\mathfrak{E}[0, t]$ подпространство $C(U, \mathfrak{E}^s[0, t])$ является всюду плотным подмножеством, $C(U, \mathfrak{E}^s[0, t]) = C(U, \mathfrak{E}[0, t])$.

Разбиения отрезка $[0, t]$, удовлетворяющие условиям а), б), будем называть согласованными с данной кривой Λ .

Пусть $\Lambda_t \in \mathfrak{E}^s[0, t]$ и $0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_{l+1} = t$ — разбиение, согласованное с этой кривой. Обозначим $D_i = [\tau_i, \tau_{i+1}]$, $D = \{\tau_1, \dots, \tau_l\}$, и положим

$$K_{D_i}(\Lambda) = \sum_{\tau_i < \tau < \tau_{i+1}} (\Pi^* \cap \Lambda_\tau) \subset \Pi^*, \quad i = 1, \dots, l,$$

$$K_D(\Lambda) = \bigoplus_{i=1}^l K_{D_i}(\Lambda).$$

Пусть, наконец, $\mathfrak{E}^s(D)$ — подмножество в $\mathfrak{E}^s[0, t]$, состоящее из всех кривых, с которыми согласовано данное разбиение D . Легко видеть, что $\mathfrak{E}^s(D)$ — открытое подмножество в $\mathfrak{E}^s[0, t]$.

Множества уровня целочисленной функции ind определяют некоторое разбиение пространства $\mathfrak{E}^s[0, t]$: положим $\mathfrak{E}_n^s[0, t] = \{\Lambda_t \in \mathfrak{E}^s[0, t] \mid \text{ind } \Lambda_t = n\}$. Соответственно,

$$\mathfrak{E}_n^s(D) \stackrel{\text{def}}{=} \mathfrak{E}_n^s[0, t] \cap \mathfrak{E}^s(D).$$

Л е м м а 2. Пусть $n \geq 0$, $1 \leq i \leq l$. Тогда

- $\dim K_{D_i}(\Lambda) = \text{ind}_{\Pi^*}(\Lambda_{\tau_i}, \Lambda_{\tau_{i+1}}) - \frac{1}{2} \dim(\Lambda_{\tau_i} \cap \Pi^*)$ *),
- подпространства $K_{D_i}(\Lambda)$ непрерывно зависят от $\Lambda \in \mathfrak{E}_n^s(D)$,
- если некоторое подразбиение $\tau_i = \tau_{i_0} < \tau_{i_1} < \dots < \tau_{i(l_i+1)} =$

) Подпространство $\Lambda_{\tau_i} \cap \Pi^$ может быть отличным от нуля только при $i = l$.

$=\tau_{i+1}$ отрезка D_i таково, что $\Pi^* \cap \Lambda_{\tau_{ij}} = 0$ при $j=0, 1, \dots, l_i$.
то $K_{D_i} = \bigoplus_{j=0}^{l_i} K_{D_{ij}}$, где $D_{ij} = [\tau_{ij}, \tau_{i(j+1)}]$.

Доказательство. а) Пусть T — такая лагранжева плоскость, что $T \cup \Pi^* = T \cup \Lambda_{\tau} = 0$ при $\tau_i \leq \tau \leq \tau_{i+1}$. При доказательстве предложения 3.2 было установлено, что

$$2 \operatorname{ind}_{\Pi^*}(\Lambda_{\tau_i}, \Lambda_{\tau_{i+1}}) = \mu(\Lambda_{\tau_{i+1}}, \Pi^*, T) - \mu(\Lambda_{\tau_i}, \Pi^*, T),$$

где $\mu(\cdot, \cdot, \cdot)$ — индекс Маслова тройки лагранжевых плоскостей. Пусть $p_{\tau}: \Pi \oplus \Pi^* \rightarrow \Lambda_{\tau}$ — проектор пространства $\Pi \oplus \Pi^*$ на Λ_{τ} параллельно T (т. е. $\ker p_{\tau} = T$). Тогда $\mu(\Lambda_{\tau}, \Pi^*, T)$ совпадает с сигнатурой квадратичной формы $\xi \mapsto \sigma(p_{\tau}\xi, \xi)$, $\xi \in \Pi^*$. Ядро этой квадратичной формы совпадает с $\Pi^* \cap \Lambda_{\tau}$. В то же время для всякого $\xi \in \Lambda_{\tau} \cap \Pi^*$ имеем $\frac{d}{d\tau} \sigma(p_{\tau}\xi, \xi) \geq 0$, поскольку Λ_{τ} — неубывающая кривая. Следовательно,

$$K_{D_i}(\Lambda) = \operatorname{span} \{ \xi \in \Pi^* \mid \sigma(p_{\tau_i}\xi, \xi) < 0, \sigma(p_{\tau_{i+1}}\xi, \xi) > 0 \}$$

и

$$\dim K_{D_i}(\Lambda) = \frac{1}{2} (\mu(\Lambda_{\tau_{i+1}}, \Pi^*, T) - \mu(\Lambda_{\tau_i}, \Pi^*, T) - \dim(\Lambda_{\tau_{i+1}} \cap \Pi^*))$$

(напомним, что заведомо $\Lambda_{\tau_i} \cap \Pi^* = 0$).

в) Из а) следует, что $\dim K_{D_i}(\Lambda)$ локально постоянно в $\mathcal{Z}_s^n(D)$. Поскольку $K_{D_i}(\Lambda)$, очевидно, полунепрерывно сверху зависит от Λ , то из локального постоянства размерности вытекает непрерывная зависимость.

с) По определению, $K_{D_i}(\Lambda) = \sum_{j=0}^{l_i} K_{D_{ij}}(\Lambda)$, с другой стороны, из предложения 3.2 следует, что

$$\operatorname{ind}_{\Pi^*}(\Lambda_{\tau_i}, \Lambda_{\tau_{i+1}}) = \sum_{j=0}^{l_i} \operatorname{ind}_{\Pi^*}(\Lambda_{\tau_{ij}}, \Lambda_{\tau_{i(j+1)}})$$

и, согласно утверждению а), $\dim K_{D_i}(\Lambda) = \sum_{j=0}^{l_i} \dim K_{D_{ij}}(\Lambda)$. Сле-

довательно, сумма $\sum_{j=0}^{l_i} K_{D_{ij}}$ — прямая. ■

Пусть $\Lambda \in \mathcal{Z}_s^n(D)$, положим $K_D(\Lambda) = \bigoplus_{i=1}^l K_{D_i}(\Lambda)$, согласно утверждению а) леммы 2 $\dim K_D(\Lambda) = \sum_{i=1}^l \operatorname{ind}_{\Pi^*}(\Lambda_{\tau_i}, \Lambda_{\tau_{i+1}})$.

Далее, т. к. $\Lambda_{\tau_i} \cap \Pi^* = 0$, то $\operatorname{ind}_{\Pi^*}(\Pi^*, \Lambda_{\tau_i}) = \frac{1}{2} m$, $\bigcap_{0 < \tau < t} \Lambda_{\tau} = 0$;

$\text{ind}_{\Pi^*}(\Lambda_i, \Pi^*) = \frac{1}{2}(m - \dim(\Lambda_i \cap \Pi^*))$. Следовательно, $\dim K_D(\Lambda) = \text{ind } \Lambda$.

Из утверждения в) леммы 2 вытекает, что семейство линейных пространств $K_D(\Lambda_i)$, $\Lambda_i \in \mathcal{S}_n^s(D)$, образует n -мерное векторное расслоение над $\mathcal{S}_n^s(D)$, которое мы обозначим $\mathcal{K}_n^s(D)$. В то же время, множества $\mathcal{S}_n^s(D)$ при переменном D образуют открытое покрытие пространства $\mathcal{S}_n^s[0, t]$. Для произвольных $D_i = \{\tau_i', \dots, \tau_i'\}$ и $D_i'' = \{\tau_i'', \dots, \tau_i''\}$ имеем

$$\mathcal{S}_n^s(D') \cap \mathcal{S}_n^s(D''), \quad \mathcal{S}_n^s(D' \cup D'').$$

Пусть $D_i' = [\tau_i', \tau_{i+1}']$, $D_i'' = [\tau_i'', \tau_{i+1}'']$, а D_j — j -й отрезок разбиения $D' \cup D''$. В таком случае каждый отрезок D_j содержится в некотором отрезке D_{α_j}' и в некотором отрезке D_{β_j}'' . Из утверждения с) леммы 2 следует, что вложения

$$K_{D_j}(\Lambda_i) \subset K_{D_{\alpha_j}'}(\Lambda_i), \quad K_{D_j}(\Lambda_i) \subset K_{D_{\beta_j}''}(\Lambda_i)$$

определяют канонические изоморфизмы

$$K_D(\Lambda_i) \approx K_{D'}(\Lambda_i), \quad K_D(\Lambda_i) \approx K_{D''}(\Lambda_i), \quad \forall \Lambda_i \in \mathcal{S}_n^s(D') \cap \mathcal{S}_n^s(D'').$$

В результате, расслоения $\mathcal{K}_n^s(D)$ при всевозможных D оказываются склеенными в единое векторное расслоение $\mathcal{K}_n^s$ над $\mathcal{S}_n^s[0, t]$.

Пусть $\kappa_n \in H^1(\mathcal{S}_n^s[0, t])$ — одномерный класс Штифеля — Уитни расслоения $\mathcal{K}_n^s$, т. е. $\kappa_n = w_1(\mathcal{K}_n^s)$.

3. Возвратимся к исследованию квадратичного отображения G_t^s . В пункте 1 был определен конус $\Psi \subset \Pi^L$. Обозначим через Ψ^s подмножество в Ψ , состоящее из всех ψ , для которых определена якобиева кривая $\Lambda_i(\psi) \in \mathcal{S}_n^s[0, t]$. Кроме того, положим

$$\Psi_n = \{\psi \in \Psi \setminus 0 \mid \text{ind } \psi G_t^s = n\}, \quad \Psi_n^s = \{\psi \in \Psi^s \mid \text{ind } \Lambda_i(\psi) = n\}.$$

Из теоремы 3.1 следует, что

$$\text{ind } \psi G_t^s = \text{ind } \Lambda_i(\psi), \quad \forall \psi \in \Psi^s,$$

поэтому $\Psi_n^s \subset \Psi_n$.

Квадратичное отображение G_t^s определено на подпространстве $\ker G_t^s$ банахова пространства $L_\infty^s[0, t]$. В то же время, $L_\infty^s[0, t]$ является всюду плотным линейным подпространством гильбертова пространства $L_2^s[0, t]$. Легко видеть, что G_t^s непрерывно в топологии пространства $L_2^s[0, t]$ — это прямо следует из формулы (3.1). Обозначим через $\ker G_t^s$ замыкание пространства $\ker G_t^s$

в $L'_2[0, t]$,

$$\overline{\ker G'_t} = \left\{ v(\cdot) \in L'_2[0, t] \mid \mu_0 \int_0^t Z_\tau v(\tau) d\tau = 0 \right\},$$

а через g_t — продолжение отображения G'_t на $\overline{\ker G'_t}$ по непрерывности. Отображение g_t , как и G'_t , определяется формулой (3.1):

$$g_t(v(\cdot), v(\cdot)) = \int_0^t \left(h_\tau(v(\tau), v(\tau)) + \left[\int_0^\tau \mathfrak{z}_\theta v(\theta) d\theta, \mathfrak{z}_\tau v(\tau) \right] \right) d\tau, \\ v(\cdot) \in \overline{\ker G'_t}.$$

Ясно, что $\text{ind } \psi g = \text{ind } \psi G'_t \quad \forall \psi \in \Pi^\perp$.

Итак, g_t представляет собой квадратичное отображение бесконечномерного сепарабельного гильбертова пространства $\overline{\ker G'_t}$ в k -мерное пространство $\text{соker } G'_t = T_{\mu_0} M / \Pi$. Таким отображениям посвящен пункт 7 в [1], § 2. Каждому $\psi \in \Psi_n$ отвечает n -мерное векторное пространство $L_\psi \subset \overline{\ker G'_t}$, такое n -мерное инвариантное подпространство самосопряженного оператора, определяемого квадратичной формой ψg , что $\psi G'_t|_{L_\psi} < 0$. Семейство пространств L_ψ , $\psi \in \Psi_n$, образует векторное расслоение $\mathcal{L}_n$ над Ψ_n . Через $\pi_n \in \check{H}^1(\Psi_n)$ обозначается одномерный класс Штифеля—Уитни расслоения $\mathcal{L}_n$, т. е. $\pi_n = w_1(\mathcal{L}_n)$.

Обозначим через $J: \Psi^s \rightarrow \mathfrak{L}^s[0, t]$ отображение $\psi \mapsto \Lambda(\psi)$, $\psi \in \Psi^s$, а через $J_n: \Psi_n^s \rightarrow \mathfrak{L}_n^s[0, t]$ сужение отображения J на Ψ_n^s , т. е. $J_n = J|_{\Psi_n^s}$.

Предложение 3. Отображение J_n непрерывно J на Ψ_n^s для всякого $n \geq 0$.

Доказательство. Пусть $\psi \in \Psi_n^s$, в соответствии с определениями из § 3 якобиева кривая $\Lambda_\tau(\psi)$, $0 \leq \tau \leq t$, является интегральной кривой некоторого нестационарного векторного поля на $L(\Pi \oplus \Pi^*)$. Напомним определение этого поля, при этом для простоты ограничимся случаем задачи с одним управляющим параметром ($r=1$). В пункте 1 § 3 введены кусочно-гладкая функция ψh_τ и кусочно-гладкая кривая $z_\tau(\psi) \in E_{\Pi, \psi}$, $0 \leq \tau \leq t$. Поскольку на протяжении настоящего параграфа фиксирован изоморфизм $S_\psi: E_{\Pi, \psi} \rightarrow \Pi \oplus \Pi^*$, мы будем отождествлять кривую $z_\tau(\psi)$ с образом этой кривой при отображении S_ψ .

Каждому $\tau \in (0, t)$ сопоставляется целое число $k_\tau(\psi) \geq 0$ и вещественное число $\gamma_\tau(\psi)$: если $\psi h_\tau \neq 0$, то $k_\tau(\psi) = 0$, $\gamma_\tau(\psi) = \psi h_\tau$; в противном случае, $k_\tau(\psi)$ — минимальное среди чисел k , удовлетворяющих условию

$$\sigma(z_\tau^{(k)}(\psi), z_\tau^{(k-1)}(\psi)) \neq 0, \quad \gamma_\tau(\psi) = \sigma(z_\tau^{(k_\tau(\psi))}(\psi), z_\tau^{(k_\tau(\psi)-1)}(\psi)).$$

Из условия $\psi \in \Psi^s$ (гарантирующего отсутствие особенностей у уравнения Якоби) следует, что $k_\tau \leq m$ и $k_\tau(\psi)$ локально постоянно в любой точке гладкости функции ψh_τ и кривой $z_\tau(\psi)$, $0 < \tau \leq t$; $\gamma_\tau \geq \varepsilon$ для некоторого $\varepsilon > 0$ и всех $\tau \in (0, t]$. Положим $\Gamma_\tau(\psi) = \text{span}\{z_\tau^{(i)}(\psi) \mid 0 \leq i \leq k(\psi) - 1\}$ — k_τ -мерное изотропное подпространство в $\Pi \oplus \Pi^*$, кусочно гладко зависящее от τ . Пусть $\Lambda \in L(\Pi \oplus \Pi^*)$, как и в § 3 (см., в особенности, приложение к этому параграфу), квадратичная форма $\lambda \mapsto \sigma(z_\tau^{(i)}(\psi), \lambda)^2$, $\lambda \in \Lambda$, а также отвечающий этой форме элемент пространства $T_\Lambda L(\Pi \oplus \Pi^*)$, обозначаются символом $\sigma(z_\tau^{(i)}(\psi), \Lambda)^2$. Якобиева кривая $\Lambda_\tau(\psi)$ является непрерывным на $(0, t]$ решением дифференциального уравнения

$$\frac{d}{d\tau} \Lambda = \frac{1}{2\gamma_\tau(\psi)} \sigma(z_\tau^{(k_\tau(\psi))}(\psi), \Lambda)^2$$

с начальным условием $\Lambda_{t_0}(\psi) = \Pi^* \Gamma_{t_0}(\psi)$.

Легко видеть, что $k_\tau(\psi)$ полунепрерывно сверху зависит от ψ . Если ψ таково, что $k_\tau(\psi') = k_\tau(\psi)$ для всех $\tau \in [0, t]$ и $\psi' \in \Psi^s$, достаточно близких к ψ , то непрерывность отображения J в точке ψ есть следствие стандартной теоремы о непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений от параметров. Если же для некоторой последовательности $\psi_i \in \Psi^s$, $i=1, 2, \dots$, $\psi_i \rightarrow \psi$ ($i \rightarrow \infty$) выполняется неравенство $k_\tau(\psi_i) < k_\tau(\psi)$, то $\gamma_\tau(\psi_i) \rightarrow 0$ ($i \rightarrow \infty$), и вопрос о непрерывной зависимости решений от параметра становится далеко не тривиальным. Более того, отображение J может оказаться разрывным в точке ψ , непрерывны лишь отображения $J_n = J|_{\Psi_n^s}$.

Итак, пусть $\psi \in \Psi_n^s$, $\psi_i \rightarrow \psi$ ($i \rightarrow \infty$) и $k_\tau(\psi_i) < k_\tau(\psi)$ для некоторого $\tau \in (0, t]$. Из определения векторов $z_\tau(\psi)$ вытекает существование такого разбиения $0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_{N+1} = t$ отрезка $[0, t]$, что все целочисленные функции $\tau \mapsto k_\tau(\psi_i)$, $i=1, 2, \dots$, локально постоянны на множестве $(0, t] \setminus \{\tau_1, \dots, \tau_N\}$. Поскольку все рассуждения вполне можно проводить отдельно на каждом отрезке $[\tau_j, \tau_{j+1}]$, $j=0, 1, \dots, N$, то, не ограничивая общности (но упрощая обозначения), можем считать, что $k_\tau(\psi_i)$ и $k_\tau(\psi)$ не зависят от τ , т. е. $k_\tau(\psi_i) = k(\psi_i)$, $0 < \tau \leq t$, $i=1, 2, \dots$, $k_\tau(\psi) = k(\psi)$. Более того, переходя, если надо, к подпоследовательности, можно добиться того, чтобы $K_\tau(\psi_i)$ не зависели также и от i , $k_\tau(\psi_i) = k$ при $i=1, 2, \dots$.

Таким образом, мы приходим к следующей ситуации. Имеется такая последовательность ψ_i , $i=1, 2, \dots$, $\psi_i \rightarrow \psi$ ($i \rightarrow \infty$), что

$$\frac{d}{d\tau} \Lambda_\tau(\psi_i) = \frac{1}{2\gamma_\tau(\psi_i)} \sigma(z_\tau^{(k)}(\psi_i), \Lambda)^2, \quad \Lambda_{t_0}(\psi_i) = \Pi^* \Gamma_{t_0}(\psi_i), \quad (4)$$

$$\tau \in (0, t]; \quad \text{ind } \Lambda_\tau(\psi_i) = n; \quad k < k(\psi).$$

Требуется доказать, что $\Lambda_\tau(\psi_i) \rightarrow \Lambda_\tau(\psi)$ ($i \rightarrow \infty$) равномерно на каждом отрезке $\tau \in [\tau, t]$, $0 < \tau \leq t$. Из предложения 2 вытекает, что длины кривых $\Lambda_\tau(\psi)$, $\tau \in [0, t]$, ограничены равномерно по i . Сделаем замену параметра на кривых $\Lambda_\tau(\psi_i)$ параметризовав эти кривые длиной дуги: пусть функции $\theta \mapsto \tau_i(\theta)$, $\tau_i(0) = 0$, таковы, что скорость кривой $\theta \mapsto \Lambda_{\tau_i(\theta)}(\psi_i)$ имеет для любого θ единичную длину, $i = 1, 2, \dots$.

Для целых α , $k \leq \alpha$, $\tau \in (0, t]$, положим

$$L_\tau^{(\alpha)} = \{ \Lambda \in L(\Pi \oplus \Pi^*) \mid z_\tau^{(j)}(\psi) \in \Lambda, k \leq j < \alpha \}$$

— гладкое подмногообразие в $L(\Pi \oplus \Pi^*)$, диффеоморфное $L(R^{2(m+k-\alpha)})$ при $k \leq \alpha \leq k(\psi)$,

$$\emptyset = L_\tau^{(k(\psi)+1)} \subset L_\tau^{(k(\psi))} \subset \dots \subset L_\tau^{(k)} = L(\Pi \oplus \Pi^*).$$

Рассмотрим нестационарное векторное поле $\sigma(z_\tau^{(k)}(\psi), \Lambda)^2$, $\tau \in (0, t]$, $\Lambda \in L(\Pi \oplus \Pi^*)$. Для $\Lambda \in L_\tau^{(\alpha)} \setminus L^{(\alpha+1)}$ имеем

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^j}{\partial \tau^j} \sigma(z_\tau^{(k)}(\psi), \Lambda)^2 = \\ & = \begin{cases} 0, & \text{при } j < 2(\alpha - k) \\ 2^{\alpha-k} \sigma(z_\tau^{(\alpha)}(\psi), \Lambda)^2 \neq 0 & \text{при } j = 2(\alpha - k), k \leq \alpha. \end{cases} \end{aligned} \quad (5)$$

Поскольку $z_\tau^{(j)}(\psi_i)$ равномерно сходится к $z_\tau^{(j)}(\psi)$ при $i \rightarrow \infty$ для любого $j \geq 0$, а функции $\gamma_\tau(\psi_i)$ ограничены равномерно по τ , i (в действительности, $\gamma_\tau(\psi_i) \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$), то из (4), (5) следует равномерная гёльдеровость функций $\tau_i(\theta)$,

$$|\tau_i(\theta_1) - \tau_i(\theta_2)| \leq c |\theta_1 - \theta_2|^{\frac{1}{(2(k(\psi) - k) + 1)}},$$

где c не зависит ни от i , ни от θ_1, θ_2 .

Таким образом, последовательности кривых $\theta \mapsto \Lambda_{\tau_i(\theta)}(\psi_i)$ и скалярных функций $\theta \mapsto \tau_i(\theta)$ содержат равномерно сходящиеся подпоследовательности. Не ограничивая общности, можно считать, что сами последовательности $\Lambda_{\tau_i(\theta)}(\psi_i)$ и $\tau_i(\psi)$ равномерно сходятся к некоторой кривой Λ_θ и скалярной функции $\tau(\theta)$, $0 < \theta \leq \hat{\theta}$, $\tau(\hat{\theta}) = t$. Поскольку $\Lambda_{\tau_i(\theta)}(\psi_i)$, $\tau_i(\theta)$ — неубывающие кривая и функция, то же верно и для Λ_θ , $\tau(\theta)$; кроме того, $\text{ind } \hat{\Lambda} \leq n$. Мы покажем, что $\Lambda_{\tau(\theta)}(\psi) = \Lambda_\theta$, $0 < \theta \leq \hat{\theta}$, причем существует такое $\theta_0 > 0$, что функция $\tau(\theta)$ непрерывно и взаимно однозначно отображает полуинтервал $[\theta_0, \hat{\theta}]$ на $(0, t]$.

Во-первых, из (4) и (5) можно вывести следующий факт: если на некотором интервале $(\theta_1, \theta_2) \subset (0, \hat{\theta})$ выполняется соотношение $\hat{\Lambda}_\theta \in L_{\tau(\theta)}^{(\alpha)} \setminus L_{\tau(\theta)}^{(\alpha+1)}$, $\theta_1 < \theta < \theta_2$, то $\frac{d\hat{\Lambda}}{d\theta}$ положительно пропорциональ-

но $\sigma(z_{\tau(\theta)}^{(\alpha)}(\psi), \hat{\Lambda}_\theta)^2$, т. е.

$$\frac{d\hat{\Lambda}_\theta}{d\theta} = u(\theta) \sigma(z_{\tau(\theta)}^{(\alpha)}(\psi), \hat{\Lambda}_\theta)^2, \quad u(\theta) > 0, \quad \theta_1 < \theta < \theta_2.$$

Соотношение $\hat{\Lambda}_\theta \in L_{\tau(\theta)}^{(\alpha)}$ эквивалентно равенству

$$\sigma(z_{\tau(\theta)}^{(\alpha-1)}(\psi), \lambda_\theta) = 0, \quad \forall \lambda_\theta \in \hat{\Lambda}_\theta, \quad \theta_1 < \theta < \theta_2;$$

дифференцирование этого равенства по θ (в тех точках, где производная существует) приводит к тождеству

$$\sigma(z_{\tau(\theta)}^{(\alpha)}(\psi), \lambda_\theta) \left(\frac{d\tau}{d\theta} + 2u(\theta) \sigma(z_{\tau(\theta)}^{(\alpha-1)}(\psi), z_{\tau(\theta)}^{(\alpha)}(\psi)) \right) = 0,$$

$$\lambda_\theta \in \hat{\Lambda}_\theta, \quad \theta \in (\theta_1, \theta_2),$$

а разностный аналог этого тождества (справедливый уже во всех точках) устанавливает абсолютную непрерывность функции $\pi(\theta)$ на (θ_1, θ_2) . Таким образом, $\frac{d\tau}{d\theta} = 0$ при $\alpha < k(\psi)$ и $\frac{d\tau}{d\theta} = u(\theta) \gamma_{\tau(\theta)}(\psi) > 0$ при $\alpha = k(\psi)$.

Мы видим, что на любом интервале, удовлетворяющем условию $\hat{\Lambda}_\theta \in L_{\tau(\theta)}^{(k(\psi))}$, $\theta_1 < \theta < \theta_2$, функция $\tau(\theta)$ обратима и кривая $\hat{\Lambda}$ подчиняется уравнению

$$\frac{d\hat{\Lambda}}{d\tau} = \frac{1}{2\gamma_\tau(\psi)} \sigma(z_\tau^{(k(\psi))}, \hat{\Lambda})^2, \quad \tau(\theta_1) < \tau < \tau(\theta_2),$$

— тому же уравнению, что и кривая $\Lambda_\tau(\psi)$.

Поэтому

$$\hat{\Lambda}_\theta \in L_{\tau(\theta)}^{(k(\psi))} (\theta_1 < \theta < \theta_2) \& \Lambda_{\theta_1+0} = \Lambda_{\tau(\theta_1)} \Rightarrow \hat{\Lambda}_\theta = \Lambda_{\tau(\theta)}(\psi) (\theta_1 < \theta \leq \theta_2). \quad (6)$$

В то же время на интервале $\theta \in (\theta_1, \theta_2)$, удовлетворяющем условию $\hat{\Lambda}_\theta \in L_{\tau(\theta)}^{(\alpha)} \setminus L_{\tau(\theta)}^{(\alpha+1)}$ с $\alpha < k(\psi)$, функция $\tau(\theta)$ постоянна, $\tau(\theta) \equiv \tau(\theta_1)$, а кривая $\hat{\Lambda}$ подчиняется «почти автономному» уравнению

$$\frac{d\hat{\Lambda}}{d\theta} = u(\theta) \sigma(z_{\tau(\theta_1)}^{(\alpha)}, \hat{\Lambda})^2, \quad u(\theta) > 0, \quad \theta_1 < \theta < \theta_2. \quad (7)$$

Пусть $\Delta_{\theta_1}^\alpha = \hat{\Lambda}_{\theta_1+0} \cap \{z_{\tau(\theta_1)}^{(\alpha)}\}^\perp$ — $(m-1)$ -мерное изотропное подпространство в $L(\Pi \oplus \Pi^*)$. Уравнение (7) оставляет инвариантным подмногообразие

$$L(\Delta_{\theta_1}^{\alpha \setminus} / \Delta_{\theta_1}^\alpha) \approx L(\mathbb{R}^2) = S^1.$$

Заметим, что

$$L(\Delta_{\theta_1}^{\alpha \setminus} / \Delta_{\theta_1}^\alpha) \cap L_{\tau(\theta_1)}^{(\alpha+1)} = \Delta_{\theta_1}^\alpha + \text{span}\{z_{\tau(\theta_1)}^{(\alpha)}\} = \hat{\Lambda}_{\theta_1+0}^{\text{span}\{z_{\tau(\theta_1)}^{(\alpha)}\}}$$

— единственная неподвижная точка уравнения (7) на $L(\Delta^{\setminus} / \Delta)$.

Доказываемое предложение теперь вытекает из (6) и следующего утверждения.

Лемма 3. Пусть $\alpha(\theta) = \max\{\alpha \mid \hat{\Lambda}_\theta \in L_\tau^{(\alpha)}(\theta)\}$, $0 < \theta \leq \hat{\theta}$. Целочисленная функция $\alpha(\theta)$ не убывает с ростом θ , $0 < \theta < \hat{\theta}$.

Доказательство. Пусть $\theta_1 \in (0, \hat{\theta})$, $\tau(\theta_1) < t$. Предположим, что $\alpha = \lim_{\theta \rightarrow \theta_1 + 0} \alpha(\theta) < \alpha(\theta_1)$. Тогда существует такое $\theta_2 > \theta_1$, удовлетворяющее условиям $\tau(\theta_2) = \tau(\theta_1)$, $\hat{\Lambda}_{\theta_2} = \hat{\Lambda}_{\theta_1}$, что неубывающая кривая $\hat{\Lambda}|_{[\theta_1, \theta_2]}$ содержит всю окружность $L(\Delta_{\theta_1+0}^{\alpha} / \Delta_{\theta_1+0}^{\alpha})$, где $\Delta_{\theta_1+0}^{\alpha} = \lim_{\theta \rightarrow \theta_1+0} \Delta_{\theta}^{\alpha}$. В самом деле, попав на эту окружность с «положительной стороны» от неподвижной точки уравнения $\frac{d\hat{\Lambda}}{d\theta} = u(\theta) \sigma(z_{\tau(\theta_1)}^{(\alpha)}, \hat{\Lambda})^2$, мы не можем вернуться в $L_{\tau}^{(\alpha(\theta_1))}$, не пройдя ее всю (вернуться можно только по этой окружности и только с отрицательной стороны); в то же время, пока мы не вернемся, $\tau(\theta)$ не вырастет.

Из приведенного рассуждения и (6) следует, что кривая $\hat{\Lambda}_\theta$, $\theta \in (0, \hat{\theta})$, содержит всю кривую $\Lambda_\tau(\psi)$, $0 < \tau \leq t$, да еще окружность $L(\Delta_{\theta_1+0}^{\alpha} / \Delta_{\theta_1+0}^{\alpha})$ (ориентации однозначно определяются тем, что все кривые должны быть неубывающими). Остается заметить, что $\text{Ind } L(\Delta_{\theta_1+0}^{\alpha} / \Delta_{\theta_1+0}^{\alpha}) = 1 > 0$, поэтому $n \geq \text{ind } \hat{\Lambda} \geq \text{ind } \Lambda_\tau(\psi) + 1 = n + 1$. Противоречие. Мы не рассмотрели еще случай $\tau(\theta_1) = t$, но этот случай сводится к уже рассмотренному, если с самого начала подходящим образом продолжить $z_\tau(\psi_i)$ и $z_\tau(\psi)$ на некоторый интервал временной оси, содержащий $(0, t]$. ■

Теорема 1. Для любого $n \geq 0$ имеет место изоморфизм векторных расслоений: $\mathcal{Z}_n|_{\Psi_n^s} \approx J_n^* \mathcal{X}_n$. В частности, $\pi_n|_{\Psi_n^s} = J_n^* \mathcal{X}_n$.

Доказательство. Пусть $\psi \in \Psi_n^s$ и $\Lambda_\tau(\psi)$, $0 \leq \tau \leq t$, — соответствующая якобиева кривая. Чтобы не слишком загромождать изложение, мы снова предположим, что $r=1$, обозначения $z_\tau(\psi)$, $k_\tau(\psi)$ и $\gamma_\tau(\psi)$ имеют тот же смысл, что и при доказательстве предложения 3.

Пусть $0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_{l+1} = t$ — разбиение отрезка $[0, t]$ согласованное с кривой $\Lambda_\tau(\psi)$, $D_i = [\tau_i, \tau_{i+1}]$, $D = \{\tau_1, \dots, \tau_l\}$. Слой расслоения $J_n^* \mathcal{X}_n$ в точке ψ по самому определению этого расслоения отождествляется с пространством

$$K_D(\Lambda_\tau(\psi)) = \bigoplus_{i=1}^l K_{D_i}(\Lambda_\tau(\psi)),$$

где

$$K_{D_i}(\Lambda_\tau(\psi)) = \sum_{\tau_i < \tau < \tau_{i+1}} (\Pi^* \cap \Lambda_\tau), \quad i = 1, \dots, l.$$

Пусть $\lambda \in K_{D_i}(\Lambda, (\psi))$, положим $D_i(\lambda) = \{\tau \in D_i \mid \lambda \in \Lambda_\tau\}$. Из утверждения с) леммы 2 следует, что $D_i(\lambda)$ связно, т. е. является подотрезком в D_i . В случае, когда этот отрезок не сводится к одной точке, дифференцирование тождества $0 = \sigma(\lambda, \lambda_\tau(\psi))$, $\tau \in D_i(\lambda)$ по τ приводит к равенству $\sigma(\lambda, z_\tau^{(k_\tau)}(\psi)) = 0$, $\tau \in D_i(\lambda)$.

Предположим, что $\tau_0 \in D_i(\lambda)$, и обозначим через λ_τ , $0 < \tau \leq \tau_0$ решение дифференциального уравнения

$$\frac{d\lambda_\tau}{d\tau} = \frac{\sigma(z_\tau^{(k_\tau)}(\psi), \lambda_\tau)}{\gamma_\tau(\psi)} z_\tau^{(k_\tau)},$$

удовлетворяющее условию $\lambda_{\tau_0} = \lambda$. Положим, наконец,

$$v_\lambda(\tau) = \begin{cases} \frac{\sigma(z_\tau^{(k_\tau)}(\psi), \lambda_\tau)}{\gamma_\tau(\psi)}, & 0 < \tau \leq \tau_0; \\ 0, & \tau \notin (0, \tau_0] \end{cases}$$

— кусочно гладкая функция на $(0, t]$. Из сказанного выше вытекает, что соответствие $\lambda \rightarrow v_\lambda(\cdot)$ корректно определяет линейное инъективное отображение пространства $K_{D_i}(\Lambda, (\psi))$ в пространство кусочно гладких функций на $\mathbb{R}$. Более того, сопоставив

вектору $(\lambda_1 \oplus \dots \oplus \lambda_l) \in K_D(\Lambda, (\psi))$ функцию $\sum_{i=1}^l v_{\lambda_i}(\cdot)$, получим, очевидно, инъективное линейное отображение $K_D(\Lambda, (\psi))$ в пространство кусочно гладких функций.

Теперь мы воспользуемся некоторыми обозначениями, введенными при доказательстве теоремы 3.1. Через $H_{-k, (\psi)}[0, t]$ (см. лемму 3.8) обозначается прямая сумма некоторых соболевских пространств отрицательного веса $H_{-k, (\psi)}[0, t] = \bigoplus_{j=1}^{N+1} H_{-k_{j, (\psi)}}[t_{j-1}, t_j]$, где $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{N+1} = t$, причем $t_1, \dots, t_N$ — все точки нарушения гладкости $z_\tau(\psi)$. В лемме 3.8 установлена непрерывность формы ψG_i^n в норме пространства $H_{-k, (\psi)}[0, t] \supset L_2[0, t]$. Замыкание пространства $\ker G_i$ (области определения формы ψG_i^n) в $H_{-k, (\psi)}[0, t]$ состоит из таких «распределений» $u = \bigoplus_{j=0}^N u_j$, что $\langle z, u, 1 \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=0}^N \langle z, u_j, 1 \rangle \in \Pi^*$; продолжение по непрерывности формы ψG_i^n на это пространство «распределений» обозначается $Q(\psi)$.

Пусть $\lambda \in \Lambda_{\tau_0} \cap \Pi^*$ и λ_τ , $0 < \tau \leq \tau_0$ — решение уравнения

$$\frac{d\lambda_\tau}{d\tau} = v_\lambda(\tau) z_\tau^{(k_\tau)},$$

удовлетворяющее условию $\lambda_{\tau_0} = \lambda$. Тогда $\lambda_{+0} \in \Lambda_{+0}$, следовательно, вектор λ_{+0} однозначно представляется в виде $\lambda_{+0} = v_0(\lambda) + \sum_{i=0}^{k_{+0}-1} a_i(\lambda) z_{+0}$, где $v_0(\lambda) \in \Pi^* \cap \Gamma_{+0}^\perp$, $a_i(\lambda)$ — скаляры. Следующая формула сопоставляет каждому $\lambda \in K_{D_1}(\Lambda, (\psi))$ элемент u_λ пространства $H_{-k, (\psi)}[0, t]$:

$$u_\lambda = \sum_{i=0}^{k_{+0}-1} a_i(\lambda) \partial^i \delta_{+0} + \sum_{j=1}^{N+1} \partial^{k_{\tau_j}} (v_\lambda | 1^{t_{j-1}}, t_j),$$

где $\delta_{+0} \in H_{-1}[0, t]$, — δ -функция сосредоточенная в нуле, а $\partial = -\frac{\partial}{\partial \tau}$ оператор дифференцирования в пространстве распределений.

Сопоставляя каждому $(\lambda_1 \oplus \dots \oplus \lambda_l) \in K_D(\Lambda, (\psi))$ распределение $\sum_{i=1}^l u_{\lambda_i}$, получаем линейное инъективное отображение $u_\psi: K_D(\Lambda, (\psi)) \rightarrow H_{-k, (\psi)}[0, t]$. Заметим, что

$$\langle z, u_\lambda, 1 \rangle = \sum_{i=0}^{k_{+0}-1} a_i(\lambda) z_{+0}^{(i)} + \int_0^t z_\tau^{(k_\tau)} v_\lambda(\tau) d\tau = (\lambda - v_0(\lambda)) \in \Pi^*.$$

Следовательно, n -мерное пространство $u_\psi(K_D(\Lambda, (\psi)))$ лежит в области определения квадратичной формы $Q(\psi)$.

Лемма 4. Сужение формы $Q(\psi)$ на подпространство $u_\psi(K_D(\Lambda, (\psi)))$ равно нулю; при этом $u_\psi(K_D(\Lambda, (\psi))) \cap \ker Q(\psi) = 0$.

Доказательство. В самом деле, для $\lambda' \in \Lambda_{\tau'} \cap \Pi^*$, $\lambda'' \in \Lambda_{\tau''} \cap \Pi^*$, $0 < \tau'' \leq \tau' < t$ имеем (для единообразия формул считаем, что $k_\tau > 0 \forall \tau$)

$$\begin{aligned} Q(u_{\lambda'}, u_{\lambda''}) &= \int_0^t \sigma \left(\int_0^\tau (-1)^{k_\theta} z_\theta v_{\lambda'}^{k_\theta}(\theta) d\theta + \right. \\ &+ \sum_{i=0}^{k_{+0}-1} a_i(\lambda') z_{+0}^{(i)}, (-1)^{k_\tau} z_\tau v_{\lambda''}^{(k_\tau)}(\tau) \Big) d\tau = \int_0^t \left(\gamma_\tau v_{\lambda'}(\tau) + \right. \\ &+ \sigma \left(\int_0^\tau z_\theta^{(k_\theta)} v_{\lambda'}(\theta) d\theta + \sum_{i=0}^{k_{+0}-1} a_i(\lambda') z_{+0}^{(i)}, z_\tau^{(k_\tau)} \right) \Big) v_{\lambda''}(\tau) d\tau = \\ &= -\sigma(v_0(\lambda'), \int_0^t z_\tau^{(k_\tau)} v_{\lambda''}(\tau) d\tau = \\ &= \sigma \left(v_0(\lambda'), v_0(\lambda'') + \sum_{i=0}^{k_{+0}-1} a_i z_{+0}^{(i)} - \lambda'' \right) = 0. \end{aligned}$$

Ядро формы $Q(\psi)$ было описано при доказательстве теоремы 3.1 (см. лемму 3.12). Кривая $\Lambda_0(\psi)$ принадлежит $\mathcal{G}^s[0, t]$, следовательно, $\Lambda_0(\psi) \cap \Pi^* = 0$ на некотором интервале $\bar{\tau} < \theta < t$. В таком случае пространство $\ker Q$ не содержит ненулевых распределений, равных тождественно нулю на интервале $(\bar{\tau}, t)$.

В предложении 3 установлена непрерывная зависимость кривой $\Lambda_0(\psi)$ от $\psi \in \Psi_n^s$. Анализ доказательства этого предложения показывает, что пространства $\{u_\lambda \mid \lambda \in K_{D_i}(\Lambda_0(\psi))\}$ непрерывно зависят от ψ как конечномерные подпространства в соболевском пространстве $H_{-N}[0, t]$ с достаточно большим $N > 0^*$.

Следовательно, n -мерные пространства $u_\psi(K_D(\Lambda_0(\psi)))$ также непрерывно зависят от ψ , если их рассматривать как подпространства в $H_{-N}[0, t]$.

Заметим теперь, что пространство $u_\psi(K_D(\Lambda_0(\psi)))$ не зависит от выбора разбиения D_i и положим $U_\psi = u_\psi(K_D(\Lambda_0(\psi)))$. Семейство подпространств $U_\psi \subset H_{-k_0(\psi)}[0, t] \subset H_{-N}[0, t]$, $\psi \in \Psi_n^s$, определяет n -мерное векторное расслоение $\mathcal{U}_n$ над Ψ_n^s , а отображения $u_\psi: K_D(\Lambda_0(\psi)) \rightarrow U_\psi$ индуцируют изоморфизм расслоений $J_n^* \mathcal{H}_n \approx \mathcal{U}_n$. Осталось построить изоморфизм расслоения $\mathcal{U}_n$ на $\mathcal{L}_n \mid \Psi_n^s$.

Напомним, что слоем расслоения $\mathcal{L}_n$ в точке $\psi \in \Psi_n^s$ является такое n -мерное инвариантное подпространство $L_\psi \subset \ker G_i$ сопряженного оператора в $\ker G_i$, определяемого квадратичной формой ψ_{g_i} , что $\psi_{g_i} \mid L_\psi < 0$. В таком случае $Q(\psi) \mid L_\psi = \psi_{g_i} \mid L_\psi < 0$. Пусть $\text{Dom } Q(\psi)$ — замыкание подпространства $\ker G_i$ в $H_{-k_0(\psi)}[0, t]$, область определения формы $Q(\psi)$.

Согласно лемме 3.10 форма $Q(\psi)$ положительно определена на некотором подпространстве конечной коразмерности в $\text{Dom } Q(\psi)$; подпространство $(L_\psi)^\perp_{Q(\psi)}$ имеет коразмерность n в $\text{Dom } Q(\psi)$ и, согласно лемме 3.11,

$$Q(\psi) \mid (L_\psi)^\perp_{Q(\psi)} \geq 0, \ker(Q(\psi) \mid (L_\psi)^\perp_{Q(\psi)}) = \ker Q(\psi). \quad (8)$$

Из (8) и леммы 4 вытекает, что $U_\psi \cap (L_\psi)^\perp_{Q(\psi)} = 0$.

Пусть $\text{Pr}_\psi: \text{Dom } Q(\psi) \rightarrow L_\psi$ — проектор $\text{Dom } Q(\psi)$ на L_ψ параллельно U_ψ , иными словами,

$$\ker \text{Pr}_\psi = U_\psi, \text{im } \text{Pr}_\psi = L_\psi, \text{Pr}_\psi \circ \text{Pr}_\psi = \text{Pr}_\psi.$$

Положим $I_\psi = \text{Pr}_\psi \mid U_\psi$. Семейство $I_\psi: U_\psi \rightarrow L_\psi$, $\psi \in \Psi_n^s$ изоморфизмов линейных пространств осуществляет изоморфизм расслоений

$$\mathcal{U}_n \approx \mathcal{L}_n \mid \Psi_n^s. \quad \blacksquare$$

^{*}) Допуская некоторую вольность, мы обозначили символом $H_{-N}[0, t]$ пространство $\bigoplus_{j=1}^{N+1} H_{-N}[\tau_{j-1}, \tau_j]$.

Пусть K — выпуклый многогранный конус в $\text{soker } G'_t$, причем квадратичное отображение g невырождено относительно K . В том случае, когда вложения

$$\left(\bigcup_{i=0}^n \Psi_i^s\right) \cap K^\circ \subset \left(\bigcup_{i=0}^n \Psi_i\right) \cap K^\circ, \quad n \geq 0$$

являются гомотопическими эквивалентностями, теорема 1 позволяет эффективно использовать теорему 2 из [1] для весьма точной оценки групп гомологий множества $g_t^{-1}(K) \setminus 0$. В действительности, во многих важных задачах выполняется равенство $\Psi^s = \Psi$ и, следовательно, $\Psi_n^s = \Psi_n$.

Особенно интересен случай $K = 0$: результаты работы [1], § 3, в применении к отображению G_t дают следующие ответы на вопросы I), II), поставленные в начале настоящей статьи, в терминах групп гомологий множеств $g_t^{-1}(0) \setminus 0$.

Теорема 2. Предположим, что g_t невырождено, тогда

i) если $g_t^{-1}(0) \neq 0$, то $\tilde{\mu}_t \in \text{int } F_t(\mathcal{O}_{\tilde{u}(\cdot)})$ для любой окрестности $\mathcal{O}_{\tilde{u}(\cdot)}$ точки $\tilde{u}(\cdot)$ в $L_\infty([0, t]; U)$;

ii) если $g_t^{-1}(0) = 0$ то, каково бы ни было конечномерное подмногообразие $V \subset L_\infty([0, t]; U)$, содержащее точку $\tilde{u}(\cdot)$, найдется такая окрестность $\mathcal{O}_{\tilde{u}(\cdot)}$, что $\tilde{\mu}_t \in \partial F_t(V \cap \mathcal{O}_{\tilde{u}(\cdot)})$;

iii) для всякого $i > 0$ группа $H_{i-1}(g_t^{-1}(0) \setminus 0)$ совпадает с прямым пределом семейства групп

$$H_i(F_t^{-1}(\tilde{\mu}_t) \cap V, F_t^{-1}(\tilde{\mu}_t) \cap V \setminus \tilde{u}(\cdot)),$$

где V пробегает множество всех конечномерных подмногообразий в $L_\infty([0, t]; U)$, частично упорядоченное по включению, а гомоморфизмы

$$\begin{aligned} H_i(F_t^{-1}(\tilde{\mu}_t) \cap V, F_t^{-1}(\tilde{\mu}_t) \cap V \setminus \tilde{u}(\cdot)) &\rightarrow \\ \rightarrow H_i(F_t^{-1}(\tilde{\mu}_t) \cap W, F_t^{-1}(\tilde{\mu}_t) \cap W \setminus \tilde{u}(\cdot)) \end{aligned}$$

для $V \subset W$ индуцированы вложением.

§ 5. ПРИЛОЖЕНИЕ К УПРАВЛЯЕМЫМ СИСТЕМАМ НА ГРУППАХ ЛИ

В настоящем параграфе развитые выше методы используются для решения некоторых специальных задач. В основном рассматривается окрестность постоянного управления для стационарной системы

$$\dot{\mu} = \mu \circ f(u), \quad \mu \in M, u \in U,$$

на полупростой группе Ли, т. е. фазовое многообразие M является полупростой группой Ли, а векторные поля $f(u)$, $u \in U$, левоинвариантны. Сначала исследуется поведение индексов якобиевых кривых при $t \rightarrow +\infty$ (охарактеризованы «эллиптическая» и «гиперболическая» ситуации). Затем описан класс систем на компактных группах, в которых вся информация извлекается прямо из штифелевой диаграммы группы M . Мы не стремимся к максимальной общности, а акцентируем внимание на ситуациях, в которых вычисления удается довести до конца и представить результаты в обозримом виде.

1. Первый результат относится к произвольной управляемой системе, не обязательно на группе Ли. Мы снова воспользуемся обозначениями пункта 1 § 3, при этом момент $t > 0$ предполагается настолько большим, что

$$\sum_{0 < \tau < +\infty} \mu_0 \circ Z_\tau R^\tau = \sum_{0 < \tau < t} \mu_0 \circ Z_\tau R^\tau = \Pi.$$

Вектор $\psi \in \Pi^+ \setminus 0$ на протяжении настоящего пункта фиксирован, $\Sigma = E_{\Pi, \psi}$ — симплектическое пространство с кососкалярным произведением σ . Интегральная квадратичная форма $\psi G_t''$ определяется равенством (3.5), при этом $\text{ind } \psi G_t''$ монотонно не убывает с ростом t .

Напомним определение целого числа $k_t \geq 0$ и квадратичной формы γ_t на R^r , введенных в п. 2 § 3: если квадратичная форма ψh_θ не равна тождественно нулю ни на каком интервале $\pi < \theta < t$, то положим $k_t = 0$, $\gamma_t = \psi h_t$; в противном случае k_t — максимальное среди таких чисел k , $1 \leq k \leq m = \dim \Pi$, что $\sigma(z_\theta^{(i)} v_1, z_\theta v_2) = 0$ при $i < 2(k-1)$, $v_1, v_2 \in R^r$, на некотором интервале $\tau < \theta < t$, $\gamma_t(v) = \sigma(z_t^{(k_t)} v, z_t^{(k_t-1)} v)$, $v \in R^r$.

В дальнейшем предполагается, что $\sigma(z_t^{(k_t-1)} v_1, z_t^{(k_t-1)} v_2) = 0$ $\forall v_1, v_2 \in R^r$, $t > 0$ и $\gamma_t(v) \geq \varepsilon_t |v|^2$ $\forall v \in R^r$, $t > 0$ и некоторого $\varepsilon_t > 0$, т. е. выполнены условия конечности $\text{ind } \psi G_t''$, сформулированные в предложении 3.1.

Предложение 1. Если $\lim_{t \rightarrow +\infty} \text{ind } \psi G_t'' < +\infty$, то существует такая лагранжева плоскость $\Lambda_\infty \subset \Sigma$, что для всякого $v \in R^r$ и любой окрестности $O_{\lambda_0} \subset \Sigma$ произвольной точки $\lambda_0 \in \Lambda_\infty$ выполняется соотношение

$$\int_0^\infty \frac{1}{\gamma_t(v)} \min_{\lambda \in O_{\lambda_0}} \sigma(z_t^{(k_t)} v, \lambda)^2 dt < +\infty.$$

Доказательство. Поскольку γ_t — неособая квадратичная форма на R^r , то определена квадратичная форма γ_t^{-1} на R^* , и соответственно

$$x \mapsto \frac{1}{2} \gamma_t^{-1}(\sigma(z_t^{(k_t)} \cdot, x)), \quad x \in \Sigma,$$

определяет квадратичный гамильтониан на Σ (см. (3.9)). Если $v_1^i, \dots, v_r^i$ — такой базис в $\mathbf{R}^r$, что

$$\gamma_i \left(\sum_{l=1}^r \alpha_l v_l^i \right) = \sum \alpha_l^2 \gamma_i (v_l^i),$$

то

$$\gamma_i^{-1} (\sigma (z_i^{(k_i)} \cdot, x)) = \sum_{l=1}^r \frac{\sigma (z_i^{(k_i)} v_l, x)^2}{\gamma_i (v_l)}. \quad (1)$$

Сужение квадратичной формы (1) на Λ , как и в § 3, обозначим $\gamma_i^{-1} (\sigma (z_i^{(k_i)} \cdot, \Lambda))$. Пусть Λ_t , $t \geq 0$, — якобиева кривая, отвечающая гамильтониану (1). В таком случае, в каждой точке непрерывности $z_i^{(k_i)}$, γ_i выполняется равенство

$$\frac{d\Lambda_t}{dt} = \frac{1}{2} \gamma_i^{-1} (\sigma (z_i^{(k_i)} \cdot, \Lambda_t)). \quad (2)$$

В пункте 2 § 4 дано определение индекса произвольной убывающей кривой в лагранжевом грассманиане $L(\Sigma)$, причем из теоремы 3.1 вытекает равенство

$$\text{ind } \psi G_t'' = \text{ind } (\Lambda \cdot |_{[0, t]}), \quad t > 0.$$

Пусть $\lim_{t \rightarrow +\infty} \text{ind } \psi G_t'' = N < +\infty$, из предложения 5.2 вытекает, что длина кривой Λ_t , $0 < t < +\infty$, не превосходит $\frac{\pi}{2} (N + m)$. Следовательно, существует предел Λ_t при $t \rightarrow +\infty$. Положим $\Lambda_\infty = \lim_{t \rightarrow +\infty} \Lambda_t$. Согласно уравнению (2) длина кривой Λ_t ,

$0 < t \leq \infty$, равна $\frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \|\gamma_i^{-1} (\sigma (z_i^{(k_i)} \cdot, \Lambda_t))\| dt < +\infty$. Следовательно, для любой окрестности $\mathcal{O}_{\Lambda_\infty}$ точки Λ_∞ в $L(\Sigma)$ имеем

$$\int_0^\infty \min_{\Lambda \in \mathcal{O}_{\Lambda_\infty}} \|\gamma_i^{-1} (\sigma (z_i^{(k_i)} \cdot, \Lambda_t))\| dt < +\infty,$$

откуда, с учетом равенства (1), вытекает доказываемое утверждение. ■

Предложение 1 дает довольно сильное необходимое условие конечности индекса якобиевой кривой на полупрямой. Однако, как будет ясно из дальнейшего, это условие далеко не является достаточным.

Пусть теперь M — группа Ли и $\mathfrak{M}$ — алгебра Ли левоинвариантных векторных полей на M ; управляемая система имеет вид

$$\dot{\mu} = \mu \circ f(u), \quad u \in U, \quad \mu(0) = \mu_0, \quad f(u) \in \mathfrak{M} \quad \forall u \in U.$$

Пусть $\bar{u}(t) = u_0$, тогда $\bar{\mu}(t) = \mu_0 e^{t f(u_0)}$, $Z_t = e^{t \text{ad} f(u_0)} \frac{\partial f}{\partial u} \Big|_{u_0}$; в частности, $Zv_i \in \mathfrak{M} \forall v_i$. Не ограничивая общности, можно считать, что μ_0 — единичный элемент группы M , $T_{\mu_0} M \approx \mathfrak{M}$. В этой ситуации индекс инерции интегральной квадратичной формы $\psi G'_t$ может быть вычислен чисто алгебраическими средствами. Мы ограничимся случаем, когда M — полупростая группа Ли, и рассмотрим только так называемые билинейные системы со скалярным управлением:

$$\dot{\mu} = \mu \circ (a + ub), \quad u \in \mathbb{R}, \quad a, b \in \mathfrak{M}, \quad u_0 = 0. \quad (3)$$

Вычисления для систем вида (3) содержат основные особенности и общего нелинейного случая с многомерным управлением, преимущество же состоит в том, что используется минимальное количество исходных данных: все определяется двумя элементами a, b алгебры Ли $\mathfrak{M}$.

Форма Киллинга полупростой алгебры Ли $\mathfrak{M}$ определяет каноническое отождествление $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}^*$, всюду до конца настоящего параграфа угловыми скобками $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначается форма Киллинга; при этом

$$S^\perp \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathfrak{M} \mid \langle x, S \rangle = 0\}$$

для любого подмножества $S \subset \mathfrak{M}$.

Ниже предполагаются выполненными следующие условия общности положения:

1) a — регулярный элемент полупростой алгебры Ли $\mathfrak{M}$, т. е. $\dim \ker(\text{ad } a) = \text{rank } \mathfrak{M}$.

2) элемент b не лежит ни в каком инвариантном подпространстве оператора $\text{ad } a: \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M}$ коразмерности $\geq \text{rank } \mathfrak{M}$.

Условия 1), 2), очевидно, эквивалентны равенству $\text{codim span}\{(\text{ad}^i a)b \mid i \geq 0\} = \text{rank } \mathfrak{M} - 1$.

$$\text{Имеем, } Z_t = e^{t \text{ad} a} b, \quad G_t: u(\cdot) \mapsto \mu_0 \circ \exp \int_0^t e^{\tau \text{ad} a} b u(\tau) d\tau,$$

$$G'_t u(\cdot) = \int_0^t e^{\tau \text{ad} a} b u(\tau) d\tau,$$

$$G'_t(v_1(\cdot), v_2(\cdot)) =$$

$$= \int_0^t \left[\int_0^\tau e^{\theta \text{ad} a} b v(\theta) d\theta, e^{\tau \text{ad} a} b v(\tau) \right] d\tau + \text{im } G'_t, \quad v_i(\cdot) \in \ker G'_t.$$

Обозначение начальной точки μ_0 в выражениях для G'_t и G_t можно опускать в силу отождествления $T_{\mu_0} M \approx \mathfrak{M}$: операция коммутирования, а также операторы $e^{\tau \text{ad} a}$ не выводят из алгебры Ли $\mathfrak{M}$.

Пусть $\mathcal{H} = \ker(\operatorname{ad} a)$ — подалгебра Картана алгебры Ли $\mathfrak{M}$, содержащая a , и $b_0 \in \mathcal{H}$ — ортогональная проекция b на $\mathcal{H}$ (так что $(b - b_0) \perp \mathcal{H}$). Из условий общности положения вытекает, что

$$\Pi = \operatorname{im} G_t = \operatorname{span}\{e^{\tau \operatorname{ad} a} b, 0 \leq \tau \leq t\} = \mathcal{H}^\perp + \mathbb{R}b \quad m = \dim \mathcal{H}^\perp + 1.$$

Таким образом, $\psi \in \Pi^\perp \subset \mathcal{H}$, $[a, \psi] = 0$. Следовательно, величины $\langle \psi, [z_i^{(1)}, z_i^{(j)}] \rangle = \langle \psi, [\operatorname{ad}^i a b, \operatorname{ad}^j a b] \rangle$ не зависят от $t \in \mathbb{R}$, поэтому $k_i = \operatorname{const}$, $\gamma_i = \operatorname{const}$. Из условий общности положения вытекает, что $\langle \psi, [\operatorname{ad}^k a b, b] \rangle = \langle [b, \psi], \operatorname{ad}^k a b \rangle \neq 0$ для некоторого $k \leq m - 2$, стало быть, $k_i \leq \frac{m-1}{2}$.

Пусть для определенности $k_i = 1$ (случай $k_i > 1$ ничуть не сложнее, мы просто стремимся избегать лишних параметров). Положим $\gamma_i = \langle \psi, [\operatorname{ad}^{i+1} a b, \operatorname{ad}^i a b] \rangle$, $i \geq 0$; в таком случае $\gamma_i = \gamma_0$.

Напомним, что через $\mathcal{S}_\Pi$ обозначается пространство всех векторных полей на M , значение которых в точке μ_0 лежит в Π . Симплектическое пространство Σ есть фактор-пространство $\mathcal{S}_\Pi$ по ядру косимметричной формы $(x_1 \wedge x_2) \mapsto \langle \psi, \mu_0^\circ [x_1, x_2] \rangle$, $x_1, x_2 \in \mathcal{S}_\Pi$. отождествляя Π с множеством левоинвариантных полей, лежащих в $\mathcal{S}_\Pi$, можем считать, что $\Pi \subset \mathcal{S}_\Pi$. Образ подпространства Π при канонической факторизации $\mathcal{S}_\Pi \rightarrow \Sigma$ обозначим через $\hat{\Pi}$. Напомним, что через Π_0 обозначается образ при этой же факторизации пространства полей, обращающихся в нуль в точке μ_0 . Ясно, что $\Sigma = \hat{\Pi} \oplus \Pi_0$, однако, в отличие от Π_0 , подпространство $\hat{\Pi}$ не является лагранжевой плоскостью в симплектическом пространстве (Σ, σ) . Имеется очевидный изоморфизм пространства $\Sigma = \hat{\Pi} \oplus \Pi_0$ на $\Pi \oplus \Pi$, при котором $\hat{\Pi}$ переходит в первое слагаемое, Π_0 — во второе, а симплектическая структура σ — в кососимметричную форму

$$\bar{\sigma}: (x_1, \xi_1) \wedge (x_2, \xi_2) \mapsto \langle \psi, [x_1, x_2] \rangle + \langle \xi_2, x_1 \rangle - \langle \xi_1, x_2 \rangle, \\ x_i, \xi_i \in \Pi \subset \mathfrak{M}, \quad i = 1, 2.$$

Симплектическое пространство $(\Pi \oplus \Pi, \bar{\sigma})$ представляет собой удобную модель для пространства (Σ, σ) . Гамильтониан h_τ в этой модели имеет вид:

$$h_\tau = \frac{1}{2\gamma_0} (\langle \psi, [e^{\tau \operatorname{ad} a} [a, b], x] \rangle + \langle e^{\tau \operatorname{ad} a} [a, b], \xi \rangle)^2. \quad (4)$$

Линейная гамильтонова система в $\Pi \oplus \Pi$, отвечающая гамильтониану $h_\tau(x, \xi)$, имеет вид

$$\begin{cases} \dot{\gamma_0 x} = (\langle \psi, [e^{\tau \operatorname{ad} a} [a, b], x] \rangle + \langle e^{\tau \operatorname{ad} a} [a, b], \xi \rangle) e^{\tau \operatorname{ad} a} [a, b], \\ \dot{\xi} = 0. \end{cases}$$

Якобиева кривая есть порожденная этой системой кривая на лагранжевом грассманиане $L(\Pi \oplus \Pi)$, гладкая при $0 < \tau < +\infty$ с начальными условиями, $\Delta_0 = 0 \oplus \Pi$, $\Delta_{+\infty} = Rb \oplus (\Pi \cap \{b\}^\perp)$.

Теперь необходимо сделать небольшое отступление.

Лемма 1. Пусть g_τ — неотрицательный квадратичный гамильтониан на некотором симплектическом пространстве (Σ, σ) , Γ — такое изотропное подпространство в Σ , что $\Gamma \subset \ker h_\tau$, $\forall \tau > 0$, а $\Delta_\tau \in L(\Sigma)$, $\tau \in [0, t]$, — кусочно гладкая кривая, непрерывная при всех $\tau > 0$ (при $\tau = 0$ возможен разрыв). Тогда, если Δ_τ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\Delta}{d\tau} = g_\tau^\Gamma(\Delta), \quad (5)$$

то кривая Δ_τ^Γ также удовлетворяет этому уравнению. Если, вдобавок, $\Gamma \subset \Delta_0$, то $\text{ind } \Delta_\tau = \text{ind } \Delta_\tau^\Gamma$.

Доказательство. Пусть $\xi_1, \dots, \xi_r$ — некоторый базис изотропного пространства Γ . Рассмотрим квадратичный гамильто-

ниан $\frac{1}{2} \sum_{j=1}^r \sigma(\xi_j, x)^2$, $x \in \Sigma$. Этот гамильтониан порождает в Σ

поток $x \mapsto x + s \sum_{j=1}^r \sigma(\xi_j, x) \xi_j$, $s \in \mathbb{R}$. Соответствующий поток на

$L(\Sigma)$ обозначим через $\mathbb{E}_s$, $s \in \mathbb{R}$. С другой стороны, пусть $\mathcal{G}_\tau: L(\Sigma) \rightarrow L(\Sigma)$, $\tau \in [0, t]$, — поток, порождаемый гамильтонианом g_τ . Поскольку $\xi_j \in \ker g_\tau$, $j = 1, \dots, r$, $\tau \in (0, t]$, то потоки $\mathbb{E}_s$ и $\mathcal{G}_\tau$ коммутируют: $\mathbb{E}_s \circ \mathcal{G}_\tau = \mathcal{G}_\tau \circ \mathbb{E}_s$, $s \in \mathbb{R}$, $\tau \in (0, t]$; стало быть, для всякого $s \in \mathbb{R}$ кривая $\pi \mapsto \mathbb{E}_s(\Delta_\tau)$ удовлетворяет уравнению (5). В то же время, легко видеть, что $\mathbb{E}_s(\Delta) \rightarrow \Delta^\Gamma$ ($s \rightarrow +\infty$) $\forall \Delta \in L(\Sigma)$. Следовательно, кривая Δ_τ^Γ , $\tau \in (0, t]$, действительно удовлетворяет уравнению (5).

Заметим, что подпространство $\Delta_\tau \cap \Gamma$ не зависит от τ при $\tau \in (0, t]$. Учитывая это обстоятельство, нетрудно показать, что при условии $\Gamma \subset \Delta_0$ справедливо равенство $\text{ind } \Delta = \text{ind } \Delta^\Gamma$. ■

Имеется тесная связь между индексами непрерывных кривых на лагранжевом грассманиане, порожденных одной и той же гамильтоновой системой, но с разными начальными условиями.

Лемма 2. Пусть g_τ — нестационарный квадратичный гамильтониан на некотором симплектическом пространстве Σ и $\Delta_\tau^1, \Delta_\tau^2$, $0 \leq \tau \leq t$, — две непрерывные неубывающие кривые на $L(\Sigma)$, удовлетворяющие уравнению

$$\frac{d\Delta}{d\tau} = g_\tau(\Delta).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \text{ind } \Delta^1 - \text{ind } \Delta^2 = & \text{ind}_{\Delta_0^1} (\Delta_t^1, \Delta_0^1) - \text{ind}_{\Delta_0^2} (\Delta_t^2, \Delta_0^2) + \\ & + \text{ind}_{\Delta_0^2} (\Delta_t^2, \Delta_t^1) - \text{ind}_{\Delta_0^1} (\Delta_0^2, \Delta_0^1) + \dim \left(\bigcap_{\tau} \Delta_{\tau}^1 \right) - \dim \left(\bigcap_{\tau} \Delta_{\tau}^2 \right). \end{aligned}$$

Доказательство. Пусть $\tau_{i+1} = 0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_l = t$ — такое разбиение отрезка $[0, t]$, что кривые $\Delta_{\tau_i}^j|_{[\tau_i, \tau_{i+1}]}$, $i=0, 1, \dots, l$, $j=1, 2$, — простые. Пусть $\Lambda \in L(\Sigma)$ — произвольная лагранжева плоскость. Согласно предложению 3.2, величины

$$I^j = \sum_{i=0}^l \text{ind}_{\Lambda} (\Delta_{\tau_i}^j, \Delta_{\tau_{i+1}}^j), \quad j=1, 2. \quad (6)$$

не зависят от Λ .

Определим кусочно гладкие кривые $\hat{\Delta}_{\tau}^j$ на $L(\Sigma)$, $j=1, 2$, правилом

$$\hat{\Delta}_{\tau}^1 = \begin{cases} \Delta_0^2, & 0 \leq \tau \leq \frac{t}{2}, \\ \Delta_{2\tau-t}^1, & \frac{t}{2} < \tau \leq t. \end{cases} \quad \hat{\Delta}_{\tau}^2 = \begin{cases} \Delta_{2\tau}^2, & 0 \leq \tau \leq \frac{t}{2}, \\ \Delta_t^1, & \frac{t}{2} < \tau \leq t. \end{cases}$$

Подставляя в (6) вместо Λ сначала Λ_0^1 , а затем Λ_0^2 , получим

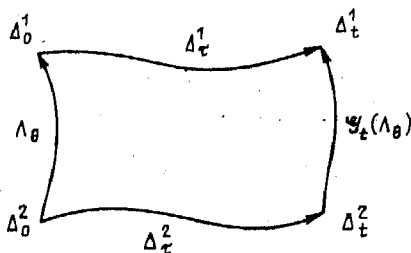
$$\begin{aligned} \text{ind } \Delta^1 + \dim \left(\Delta_0^1 / \bigcap_{0 \leq \tau \leq t} \Delta_{\tau}^1 \right) = I^1 = & \text{ind } \hat{\Delta}^1 + \text{ind}_{\Delta_0^1} (\Delta_t^1, \Delta_0^1) - \\ & - \text{ind}_{\Delta_0^1} (\Delta_0^2, \Delta_0^1) - \text{ind}_{\Delta_0^1} (\Delta_t^1, \Delta_0^2) + \dim \left(\Delta_0^1 / \Delta_0^2 \bigcap_{0 \leq \tau \leq t} \Delta_{\tau}^1 \right). \end{aligned}$$

В то же время

$$\begin{aligned} \text{ind } \Delta^2 + \dim \left(\Delta_0^2 / \bigcap_{0 \leq \tau \leq t} \Delta_{\tau}^2 \right) = I^2 = & \text{ind } \hat{\Delta}^2 + \text{ind}_{\Delta_0^2} (\Delta_t^2, \Delta_0^2) - \\ & - \text{ind}_{\Delta_0^2} (\Delta_t^2, \Delta_t^1) - \text{ind}_{\Delta_0^2} (\Delta_t^1, \Delta_0^2) + \dim \left(\Delta_0^2 / \Delta_t^1 \bigcap_{0 \leq \tau \leq t} \Delta_{\tau}^2 \right). \end{aligned}$$

Пусть $\mathcal{G}_{\tau}: L(\Sigma) \rightarrow L(\Sigma)$ — поток на $L(\Sigma)$, определяемый гамильтонианом g_{τ} , Λ_0 — простая неубывающая непрерывная кривая, соединяющая Δ_0^2 с Δ_0^1 , т. е. $\Lambda_0 = \Delta_0^2$, $\Lambda_t = \Delta_0^1$. В таком случае $\forall \tau \in [0, t]$ простая неубывающая кривая $\theta \mapsto \mathcal{G}_{\tau}(\Lambda_{\theta})$ соединяет Δ_{τ}^2 с Δ_{τ}^1 .

Следовательно, непрерывные неубывающие кривые $\Delta^1 \circ \Lambda$ и $\mathcal{G}_t(\Lambda) \circ \Delta^2$, имеющие общие концы, гомотопны



Тождество (5.3) связывает индекс неубывающей кривой с индексом Маслова подходящей замкнутой кривой. Поскольку индекс Маслова — гомотопический инвариант, а

$$\text{ind}(\Delta^1 \circ \Delta) = \text{ind} \hat{\Delta}^1, \quad \text{ind}(\mathcal{G}_t(\Delta) \circ \Delta^2) = \text{ind} \hat{\Delta}^2,$$

получаем

$$\text{ind} \hat{\Delta}^1 + \dim \left(\Delta_0^1 / \Delta_0^2 \cap_{0 \leq \tau \leq t} \Delta_\tau^1 \right) = \text{ind} \hat{\Delta}^2 + \dim \left(\Delta_0^2 / \Delta_0^1 \cap_{0 \leq \tau \leq t} \Delta_\tau^2 \right).$$

Сопоставляя уже полученные равенства, получаем выражение для $\text{ind} \Delta^1 - \text{ind} \Delta^2$. ■

Следствие. Пусть непрерывная кривая Δ_τ , $\tau \in [0, t]$, на $L(\Sigma)$ удовлетворяет уравнению (5) и $\bigcap_{0 \leq \tau \leq t} \ker g_\tau \supset \Gamma$ — изотропное подпространство. Тогда

$$\begin{aligned} \text{ind} \Delta_\tau^\Gamma - \text{ind} \Delta_\tau = & \text{ind}_{\Delta_0}(\Delta_\tau^\Gamma, \Delta_0^\Gamma) - \text{ind}_{\Delta_0}(\Delta_\tau, \Delta_0) + \\ & + \text{ind}_{\Delta_0}(\Delta_\tau, \Delta_\tau^\Gamma) - \text{ind}_{\Delta_0}(\Delta_0, \Delta_0^\Gamma) + \dim \left(\bigcap_{0 \leq \tau \leq t} \Delta_\tau^\Gamma / \bigcap_{0 \leq \tau \leq t} \Delta_\tau \right). \end{aligned}$$

В частности,

$$|\text{ind} \Delta_\tau^\Gamma - \text{ind} \Delta_\tau - \dim \left(\bigcap_{\tau} \Delta_\tau^\Gamma / \bigcap_{\tau} \Delta_\tau \right)| \leq \frac{1}{2} \dim \Sigma.$$

Вернемся к исследуемой гамильтоновой системе. Для нестационарного гамильтониана (4), заданного на $\Pi \oplus \Pi$, получаем

$$\bigcap_{\tau \geq 0} \ker h_\tau \supset (\ker \text{ad } \psi) \cap \Pi \oplus \mathbb{R}b.$$

Из леммы 1 следует равенство

$$\text{ind} \Lambda|_{[0, t]} = \text{ind} \Lambda^{0 \oplus \mathbb{R}b}|_{[0, t]} \quad \forall t > 0.$$

Заметим, что кривая $\Lambda_\tau^{0 \oplus \mathbb{R}b}$ непрерывна на $(0, +\infty)$ (в то время как Λ_τ имеет разрыв при $\tau=0$).

Положим $\Gamma_h = (\ker(\text{ad } \psi) \cap \Pi \oplus 0)$ — изотропное подпространство в $(\Pi \oplus \Pi, \bar{\sigma})$. Нетрудно видеть, что $\Gamma_h^\perp / \Gamma_h \approx \text{im}(\text{ad } \psi) \oplus \text{im}(\text{ad } \psi) \subset \Pi \oplus \Pi$, причем $\text{im}(\text{ad } \psi) = \ker(\text{ad } \psi)^\perp$. Обозначим через $\hat{b}$ ортогональную проекцию вектора b на $\text{im}(\text{ad } \psi)$, и пусть $c = [a, \hat{b}]$ (подпространство $\text{im}(\text{ad } \psi)$ очевидно инвариантно как относительно $\text{ad } a$, так и относительно $\text{ad } \psi$).

Пусть Δ_τ , $\tau \geq 0$, — кривая на лагранжевом грассманиане $L(\text{im}(\text{ad } \psi) \oplus \text{im}(\text{ad } \psi))$, порожденная гамильтоновой системой

$$\begin{cases} \dot{\gamma}_0 \dot{x} = \langle \xi - [\psi, x], e^{\tau \text{ad } a} c \rangle e^{\tau \text{ad } a} c \\ \dot{\xi} = 0, \end{cases} \quad x, \xi \in \text{im}(\text{ad } \psi) \quad (7)$$

с начальным условием $\Delta_0 = \Delta_{+0} = 0 \oplus \text{im}(\text{ad } \psi)$.

Из леммы 1 вытекает, что Δ_τ переходит в $\Lambda_\tau^\Gamma / \Gamma_h =$

$= (\Lambda_{\tau}^{0 \oplus R_b})^{\Gamma_h} / \Gamma_h$ при изоморфизме симплектических пространств $\text{im}(\text{ad } \psi) \oplus \text{im}(\text{ad } \psi) \approx \Gamma_h^{\perp} / \Gamma_h$.

Формула, приведенная в следствии леммы 2, позволяет вычислить $\text{ind } \Delta|_{[0,1]}$ через $\text{ind } \Delta|_{[0,1]}$; во всяком случае

$$|\text{ind } \Delta|_{[0,1]} - \text{ind } \Delta|_{[0,1]} - \dim(\ker \text{ad } \psi \cap \mathcal{H}^{\perp})| \leq \dim \mathcal{H}^{\perp}.$$

Если же ψ — регулярный элемент алгебры Ли $\mathfrak{M}$, т. е. $\ker \psi = \mathcal{H}$, то $\text{ind } \Delta|_{[0,1]} = \text{ind } \Delta|_{[0,1]}$.

Предложение 2. Если подалгебра Картана $\mathcal{H}$ обладает таким корнем $\rho \in \mathbb{C} \otimes \mathcal{H}^*$, что $\rho(\psi) \neq 0$, а $\rho(a)$ — чисто мнимое число, то $\lim_{t \rightarrow +\infty} \psi G_t = +\infty$.

Прежде чем доказывать это предложение, введем некоторые обозначения, связанные с разложением Картана алгебры Ли $\mathfrak{M}$. Обозначим через $\hat{R} \subset \mathbb{C} \otimes \mathcal{H}^*$ множество всех корней, не обращающихся в нуль на векторе ψ .

Множество $\hat{R}$ содержит, вообще говоря, вещественные корни, а также пары невещественных комплексно сопряженных корней. Составим подмножество $R \subset \hat{R}$, включив в него все вещественные корни, а также по одному из каждой пары $\{\rho, \bar{\rho}\}$ невещественных комплексно сопряженных корней так, чтобы для всякого $\rho \in R$ выполнялось условие $\text{Re } \rho(a) \text{Im } \rho(a) \geq 0$ (из пары комплексно сопряженных чисто мнимых корней выбирается произвольный).

Пусть $R_+ = \{\rho \in R | \text{Re } \rho(a) > 0\}$, $R_- = \{\rho \in R | \text{Re } \rho(a) < 0\}$ и $R_0 = \{\rho \in R | \text{Re } \rho(a) = 0\}$, так что $R = R_+ \cup R_- \cup R_0$.

Каждому корню $\rho \in \hat{R}$ отвечает собственный вектор $e_{\rho} \in \mathbb{C} \otimes \text{im ad } \psi$, т. ч. $\text{ad } \omega e_{\rho} = \rho(\omega) e_{\rho}$, $\forall \omega \in \mathcal{H}$. Мы считаем векторы e_{ρ} , $\rho \in \hat{R}$, нормированными таким образом, что

$$\langle e_{\rho}, e_{-\rho} \rangle = \begin{cases} 2, & \rho \neq \bar{\rho} \\ 1, & \rho = \bar{\rho} \end{cases}$$

(напомним, что $\langle e_{\rho_1}, e_{\rho_2} \rangle = 0$ при $\rho_1 + \rho_2 \neq 0$).

Для любых $x \in \text{im ad } \psi$, $\rho \in \hat{R}$ положим

$$x_{\rho} = \frac{1}{2} \langle x, e_{-\rho} \rangle.$$

Если ρ — вещественный корень, то x_{ρ} — вещественное число, а если ρ — невещественный корень, то x_{ρ} — комплексное число. Отображение $x \mapsto \{x_{\rho}\}_{\rho \in R}$ определяет специальные координаты в пространстве $\text{im ad } \psi$ (часть координат вещественные, а часть комплексные). Заметим, что $x_{\bar{\rho}} = \bar{x}_{\rho}$. Для любых $x, y \in \text{im ad } \psi$ выполняются соотношения

$$[\omega, x]_{\rho} = \rho(\omega) x_{\rho}, \quad \rho \in \hat{R}; \quad (8)$$

$$\langle x, y \rangle = \operatorname{Re} \left(\sum_{\rho \in R} x_{\rho} y_{-\rho} \right); \quad (9)$$

$$\langle \omega, [x, y] \rangle = \operatorname{Re} \left(\sum_{\rho \in R} \rho(\omega) x_{\rho} y_{-\rho} \right). \quad (10)$$

Положим, наконец,

$$E_+ = \{x \in \operatorname{im} \operatorname{ad} \psi \mid x_{\rho} = 0 \forall \rho \in R_-\}, \quad E_- = \{x \in \operatorname{im} \operatorname{ad} \psi \mid x_{\rho} = 0$$

$$\forall \rho \in R_+\}, \quad E_0 = E_+ \cap E_-$$

—инвариантные подпространства, отвечающие соответственно множествам корней $R_+ \cup R_0$, $R_- \cup R_0$ и R_0 .

Доказательство предложения 2. Предположим, что $\lim_{t \rightarrow +\infty} \operatorname{ind} \psi G_t' < +\infty$. Требуется доказать, что $E_0 = 0$. Мы воспользуемся предложением 1. В силу этого предложения найдется такая лагранжева плоскость $\Lambda \in L(\operatorname{im} \operatorname{ad} \psi \oplus \operatorname{im} \operatorname{ad} \psi)$, что для любой окрестности O_{λ_0} произвольной точки $\lambda_0 \in \Lambda$ выполняется соотношение

$$\int_0^{\infty} \min_{\lambda \in O_{\lambda_0}} \bar{\sigma}(\lambda, (e^{\tau \operatorname{ad} a} c, 0))^2 d\tau < +\infty.$$

Из равенства (8) следует, что $(e^{\tau \operatorname{ad} a} c)_{\rho} = e^{\tau \rho(a)} c_{\rho}$. Согласно условиям общности положения $c_{\rho} = \rho(a) b_{\rho} \neq 0$, $\rho(a) \neq \rho'(a)$, $\forall \rho, \rho' \in R$. Поэтому все интегралы сходятся лишь при условии $\Lambda \not\subset (E_+ \oplus 0)$. Поскольку Λ — лагранжева плоскость, то последнее соотношение эквивалентно включению $(E_+ \oplus 0) \subset \Lambda$. Таким образом, пространство $E_+ \oplus 0$, а значит, и его подпространство $E_0 \oplus 0$ изотропны. В то же время $\sigma((x, 0), (x', 0)) = \langle \psi, [x, x'] \rangle$, и из (10) вытекает, что пространство $E_0 \oplus 0$ изотропно лишь в том случае, когда оно нулевое.

Следствие 1. Если $\mathfrak{M}$ — компактная алгебра Ли, то $\lim_{t \rightarrow +\infty} \psi G_t'' = +\infty$.

Следствие 2. Если $\mathfrak{M} = \operatorname{sl}_R(n)$ и матрица $a \in \operatorname{sl}_R(n)$ имеет не более одного вещественного собственного значения, то $\lim_{t \rightarrow +\infty} \psi G_t'' = +\infty$.

Дальнейшее исследование проведем в предположениях, что выполнено необходимое условие конечности $\lim_{t \rightarrow +\infty} \operatorname{ind} \psi G_t''$; иными словами, до конца настоящего пункта предполагается, что $R_0 = \emptyset$. В этом случае $\operatorname{im} \operatorname{ad} \psi = E_+ \oplus E_-$,

$$\langle \omega, [x, x'] \rangle = \operatorname{Re} \left(\sum_{\rho \in R^+} \rho(\omega) (x_{\rho} x'_{-\rho} - x_{-\rho} x'_{\rho}) \right),$$

$$\forall \omega \in \mathfrak{H}, \quad x, x' \in \operatorname{im} \operatorname{ad} \psi$$

Для всякого $x \in \operatorname{im} \operatorname{ad} \psi$ обозначим через x^+ ортогональную проекцию x на E_+ , а через x^- — ортогональную проекцию x на

Е.. Тогда

$$\langle x^+, x^+ \rangle = \langle x^-, x^- \rangle = 0, \quad \langle x^+, x^- \rangle = \operatorname{Re} \left(\sum_{p \in R^+} x_p x_{-p} \right).$$

Сделаем замену переменных в уравнении Якоби (7), положив $\xi = [\eta, \psi]$, $x = y - \eta$. В переменных (y, η) система (7) принимает вид:

$$\begin{aligned} \gamma_0 \dot{y} &= \langle [y, \eta], e^{\tau \operatorname{ad} a} c \rangle e^{\tau \operatorname{ad} a} c \\ \dot{\eta} &= 0, \quad y, \eta \in \operatorname{im} \operatorname{ad} \psi. \end{aligned} \quad (11)$$

Симплектическая структура $\bar{\sigma}$ на $\operatorname{im} \operatorname{ad} \psi \oplus \operatorname{im} \operatorname{ad} \psi$ в этих переменных выглядит так:

$$\bar{\sigma}((y, \eta), (y', \eta')) = \langle \psi, [y, y'] - [\eta, \eta'] \rangle.$$

Гамильтониан $h_\tau(y, \eta) = \frac{1}{2\gamma_0} \langle y, [\psi, e^{\tau \operatorname{ad} a} c] \rangle^2$. Кривая Δ_τ , $\tau \geq 0$, на лагранжевом грассманиане $L(\operatorname{im} \operatorname{ad} \psi \oplus \operatorname{im} \operatorname{ad} \psi)$ порождается системой (10) с начальным условием $\Delta_0 = \{(y, y) \mid y \in \operatorname{im} \operatorname{ad} \psi\}$.

Заметим, что изотропное подпространство $0 \in E_+$ лежит в $\ker h_\tau \forall \tau \in \mathbb{R}$. При этом $(0 \oplus E_+)^\perp = \operatorname{im} \operatorname{ad} \psi \oplus E_+$, а симплектическое пространство $(0 \oplus E_+)^\perp / (0 \oplus E_+)$ естественно изоморфно пространству $\operatorname{im} \operatorname{ad} \psi$ с симплектической структурой $\bar{\sigma}(y, y') = \langle \psi, [y, y'] \rangle$, $y, y' \in \operatorname{im} \operatorname{ad} \psi$.

Гамильтонию $\tilde{h}_\tau(y) = \frac{1}{2\gamma_0} \langle y, [\psi, e^{\tau \operatorname{ad} a} c] \rangle^2$ на $\operatorname{im} \operatorname{ad} \psi$ отвечает гамильтонова система

$$\gamma_0 \dot{y} = \langle [y, \psi], e^{\tau \operatorname{ad} a} c \rangle e^{\tau \operatorname{ad} a} c \quad (12)$$

Пусть $\tilde{\Delta}_\tau$ — кривая на лагранжевом грассманиане $L(\operatorname{im} \operatorname{ad} \psi)$, порожденная системой (12) с начальным условием $\tilde{\Delta}_0 = E_+$. Следствие леммы 2 позволяет выразить $\operatorname{ind} \Delta|_{[0, t]}$ через $\operatorname{ind} \tilde{\Delta}|_{[0, t]}$. Анализ этого выражения позволяет несколько уточнить общую оценку, данную в том же следствии. Имеем

$$-\frac{1}{4} \operatorname{rank} \operatorname{ad} \psi \leq \operatorname{ind} \tilde{\Delta}|_{[0, t]} - \operatorname{ind} \Delta|_{[0, t]} \leq \operatorname{rank} \operatorname{ad} \psi \quad \forall t > 0.$$

Напомним, что точка $t > 0$ называется сопряженной нулю для кривой $\tilde{\Delta}_\tau$, если $\tilde{\Delta}_0 \cap \tilde{\Delta}_t \neq \emptyset$. Согласно следствию теоремы 3.2

$$\operatorname{ind} \tilde{\Delta}|_{[0, t]} = \sum_{0 < \tau < t} \dim(\tilde{\Delta}_\tau \cap \tilde{\Delta}_0) \quad \forall t > 0;$$

в частности, на каждом отрезке $[0, t]$ содержится лишь конечное число сопряженных нулю точек.

Пусть x_τ — произвольное решение системы (12), положив $x_\tau = e^{\tau \operatorname{ad} a} u$, получим

$$\gamma_0 \dot{u} = -(\gamma_0 \operatorname{ad} a + \langle \psi, [c, u] \rangle) c. \quad (13)$$

Линейное преобразование $u \mapsto \frac{1}{\gamma_0} \langle \psi, [c, u] \rangle c = \frac{1}{\gamma_0} \langle [\psi, c], u \rangle c$ пространства $\text{im ad } \psi$ обозначим символом $[\psi, c/\gamma_0] \otimes c$. Тогда

$$\tilde{\Delta}_t = e^{t \text{ad } a} e^{t([\psi, c/\gamma_0] \otimes c - \text{ad } a)} E_+ \quad \forall t \geq 0.$$

Поскольку $e^{t \text{ad } a} E_+ = E_+$, то

$$\dim(\tilde{\Delta}_t \cap \tilde{\Delta}_0) = \dim(\tilde{\Delta}_t \cap E_+) = \dim(E_+ \cap e^{t([\psi, c/\gamma_0] \otimes c - \text{ad } a)} E_+).$$

Следовательно,

$$\text{ind } \tilde{\Delta}|_{[0, t]} = \sum_{0 < \tau < t} \dim(E_+ \cap e^{\tau([\psi, c/\gamma_0] \otimes c - \text{ad } a)} E_+). \quad (14)$$

Лемма 3. Пусть h — квадратичный стационарный гамильтониан на некотором симплектическом пространстве Σ ,

$$\dot{x} = Hx, \quad x \in \Sigma,$$

— соответствующая гамильтонова система.

Тогда существует такая лагранжева плоскость $\Lambda_0 \in L(\Sigma)$, что

- 1) Подпространство $\Lambda_0 \cap H\Lambda_0$ инвариантно относительно H .
- 2) Для любого $t > 0$

$$\sum_{0 < \tau < t} \dim(\Lambda_0 \cap e^{\tau H} \Lambda_0 / \Lambda_0 \cap H\Lambda_0) = \sum_{j=1}^l [t\nu_j],$$

где $\pm i\nu_1, \dots, \pm i\nu_l$ — все чисто мнимые собственные значения матрицы H , причем каждое взято столько раз, какова его кратность; квадратные скобки $[\]$ означают целую часть стоящего в них числа.

3) Если для некоторого $\Lambda \in L(\Sigma)$ квадратичная форма $h|_{\Lambda}$ неотрицательна, $h|_{\Lambda} \geq 0$, то и $h|_{\Lambda_0} \geq 0$.

Мы опустим доказательство этой леммы, плоскость Λ_0 явно вычисляется через канонические формы Вильямсона линейных гамильтоновых систем (описание этих форм имеется, например, в [9]).

Автономная гамильтонова система (13) отвечает гамильтониану

$$h = \frac{1}{2\gamma_0} \langle [\psi, c], u \rangle^2 + \frac{1}{2} \langle [\psi, u], [a, u] \rangle, \quad u \in \text{im ad } \psi.$$

Поскольку $[\omega, E_+] \subset E_+ \quad \forall \omega \in \mathcal{H}$ и $\langle E_+, E_+ \rangle = 0$, то $h|_{E_+} \geq 0$.

Пусть $H = [\psi, c/\gamma_0] \otimes c - \text{ad } a$ и $L(\text{im ad } \psi) \ni \Lambda_0$ — лагранжева плоскость, существование которой гарантируется леммой 3. Так как $h|_{E_+} \geq 0$, $h|_{\Lambda_0} \geq 0$, и гамильтониан h является первым интегралом собственной гамильтоновой системы, то $e^{\tau H} \Lambda_0$, $e^{\tau H} E_+$, $\tau \geq 0$, — неубывающие кривые на $L(\text{im ad } \psi)$. Лемма 2 позволяет выразить $\text{ind}(e^{\tau H} E_+|_{[0, t]})$ через $\text{ind}(e^{\tau H} \Lambda_0|_{[0, t]})$.

Во всяком случае,

$$|\text{ind}(e^{\tau H} E_+|_{[0, t]}) - \text{ind}(e^{\tau H} \Lambda_0|_{[0, t]}) + \dim(\Lambda_0 \cap H\Lambda_0)| \leq \frac{1}{2} \text{rank ad } \psi,$$

$$\forall t > 0.$$

С другой стороны, из теорем 3.1, 3.2 следует, что

$$\text{ind}(e^{\tau H} E_+ |_{[0, t]}) = \sum_{0 < \tau < t} \dim(E_+ \cap e^{\tau H} E_+),$$

$$\text{ind}(e^{\tau H} \Lambda_0 |_{[0, t]}) = \sum_{0 < \tau < t} \dim(\Lambda_0 \cap e^{\tau H} \Lambda_0 \Lambda_0 \cap H \Lambda_0).$$

Из формулы (14) выводим тождество

$$\text{ind} \tilde{\Delta} |_{[0, t]} = \text{ind}(e^{\tau H} E_+ |_{[0, t]}) \quad \forall t > 0.$$

Утверждение 2) леммы 3 сводит теперь вычисление $\text{ind} \tilde{\Delta} |_{[0, t]}$ к вычислению чисто мнимых собственных чисел матрицы $H = [\psi, c/\gamma_0] \otimes c - \text{ad } a$. Во всяком случае, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \text{ind} \tilde{\Delta} |_{[0, t]} < +\infty$ тогда и только тогда, когда матрица H не имеет ненулевых чисто мнимых собственных значений. Собирая вместе установленные выше неравенства, получаем

Предложение 3. Если $\lim_{t \rightarrow +\infty} \text{ind} \psi G'_t < +\infty$, то

$$\text{ind} \psi G'_t \leq \frac{1}{4} \min \{5 \text{rank ad } \psi, \text{codim } \mathcal{H}\} \quad \forall t > 0.$$

Замечание. Неравенство $\text{ind} \psi G'_t \leq \frac{1}{4} \text{codim } \mathcal{H} = \frac{1}{4} (\dim \mathfrak{M} - \text{rank } \mathfrak{M})$ непосредственно вытекает из приведенных выше оценок лишь для регулярных $\psi \in \mathcal{H} \cap b^\perp$, на нерегулярные ψ оно распространяется по непрерывности.

Ситуацию, когда $\text{ind} \psi G'_t \rightarrow +\infty$ ($t \rightarrow \infty$) естественно называть эллиптической (якобиева кривая «колеблется»), а когда $\text{ind} \psi G'_t$ ограничен на полупрямой $(0, +\infty)$ — гиперболической (якобиева кривая «не колеблется»). Для того, чтобы отделять одну ситуацию от другой, нужно уметь выяснять, имеет ли матрица $[\psi, c/\gamma_0] \otimes c - \text{ad } a$ чисто мнимые собственные значения. Знание же самих чисто мнимых собственных значений сразу дает (см. утверждение 2 леммы 3) значение $\text{ind} \psi G'_t$ с точностью до величины «порядка $\text{rank ad } \psi$ ».

Скоро мы выразим характеристический полином матрицы $([\psi, c/\gamma_0] \otimes c - \text{ad } a)$ через числа γ_i , $i=0, 1, \dots$ (см. стр. 186) и коэффициенты характеристического полинома матрицы $\text{ad } a$.

Согласно равенствам (8), (10), координатная запись системы (13) имеет вид

$$\gamma_0 \dot{u}_p = -\gamma_0 \rho(a) u_p + \text{Re} \left(\sum_{\rho \in R} \rho(\psi) c_\rho u_{-\rho} \right) c_\rho, \quad \rho \in R.$$

Для любого $\rho \in R_+$ положим

$$v_\rho = \frac{\rho(\psi)}{2} (c_\rho u_{-\rho} - c_{-\rho} u_\rho)$$

$$v'_\rho = \frac{\rho(\psi)}{2} (c_\rho u_{-\rho} + c_{-\rho} u_\rho).$$

Тогда

$$\dot{v}_\rho = \rho(a) v'_\rho$$

$$\gamma_0 \dot{v}_\rho = \gamma_0 \rho(a) v_\rho + \operatorname{Re} \left(\sum_{\rho \in R_+} v_\rho \right) \rho(\psi) c_\rho c_{-\rho}, \quad \rho \in R_+.$$

Следовательно,

$$\gamma_0 \ddot{v}_\rho = \gamma_0 \rho(a)^2 v_\rho + \rho(a) \rho(\psi) c_\rho c_{-\rho} \operatorname{Re} \left(\sum_{\rho \in R_+} v_\rho \right), \quad \rho \in R_+. \quad (15)$$

Пусть $N = \dim E_+$, напомним, что

$$\gamma_k = \langle \psi, [\operatorname{ad}^{k+1} ab, \operatorname{ad}^k ab] \rangle = (-1)^{k-1} 2 \operatorname{Re} \left(\sum_{\rho \in R_+} \rho(\psi) \rho(a)^{2k-1} c_\rho c_{-\rho} \right)$$

Сделаем линейную замену переменных в системе (15), положив

$$w_k = \operatorname{Re} \sum_{\rho \in R_+} \rho(a)^{2k} v_\rho, \quad k = 0, 1, \dots, N.$$

Имеем

$$\gamma_0 \ddot{w}_k = \gamma_0 w_{k+1} + (-1)^k \gamma_{k+1} w_0, \quad k = 0, 1, \dots, N-1.$$

Еще одно недостающее уравнение получается из условия, что числа $\pm \rho(a)$, $\rho \in R_+$, являются корнями характеристического полинома оператора $\operatorname{ad} a$. Пусть

$$\det(\operatorname{ad} a - sI) = s^{\operatorname{rank} \mathcal{M}} \sum_{j=1}^N (-1)^j \alpha_j s^{2j},$$

тогда

$$\sum_{j=0}^N (-1)^j \alpha_j w_j = 0 \quad \text{и} \quad \sum_{j=0}^N \alpha_j \gamma_j = 0.$$

Следовательно,

$$\sum_{k=0}^N \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^{k+j} \alpha_k \gamma_j w_0^{(2k-2j)} = 0.$$

Пусть $\Phi(s)$ — характеристический полином последнего уравнения, $\Phi(s) = \sum_{k=0}^N \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^{k+j} \alpha_k \gamma_j s^{2(k-j)}$. Корни этого полинома есть характеристические корни системы (13). После элементарных пре-

образований получаем

$$\frac{1}{s} \varphi(\sqrt{V-s}) = \sum_{j=1}^N s^{j-1} \sum_{k=j}^N \alpha_k \gamma_{k-j}.$$

Теперь подытожим основные результаты, полученные в настоящем пункте. Все формулируется в терминах набора чисел α_k , γ_k , $k=0, \dots, N-1$, где $N = \frac{1}{2}(\dim \mathfrak{M} - \text{rank } \mathfrak{M})$. Напомним, что числа α_k зависят лишь от $a \in \mathfrak{M}$, а числа γ_k зависят также от $b \in \mathfrak{M}$ и (линейно) от $\psi \in \mathcal{H} \cap b^\perp$, где $\mathcal{H}$ — подалгебра Картана, содержащая a . Предполагается выполненным условие общности положения:

$$\text{codim span } \{\text{ad}^j ab \mid 0 \leq j \leq 2N\} = \text{rank } \mathfrak{M} - 1.$$

В процессе вычислений мы предполагали также, что $\gamma_0 > 0$, однако от этого условия легко избавиться.

Теорема 1. I) Пусть $t > 0$. Тогда $\text{ind } \psi G_t'' < +\infty \iff$ первое отличное от нуля число в последовательности $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{N-1}$ положительно.

II) Пусть $\text{ind } \psi G_t'' < +\infty$ для некоторого (а значит, любого) $t > 0$. Тогда $\lim_{t \rightarrow +\infty} \text{ind } \psi G_t'' < +\infty \iff$ многочлены $\sum_{j=0}^N \alpha_j s^j$ и $\sum_{j=1}^N s^{j-1} \sum_{k=j}^N \alpha_k \gamma_{k-j}$ от переменной $s \in \mathbb{R}$ не имеют положительных вещественных корней.

III) Если $\lim_{t \rightarrow +\infty} \text{ind } \psi G_t'' < +\infty$, то $\text{ind } \psi G_t'' \leq \frac{N}{2} \forall t > 0$.

В заключение применим теорему 1 к некоторым алгебрам Ли ранга 2. В этом случае $\dim(\mathcal{H} \cap b^\perp) = 1$, а вектор ψ определен однозначно с точностью до скалярного множителя. Условие общности положения обеспечивает отличие от нуля хотя бы одного из чисел γ_k , $k=0, 1, \dots, N-1$.

1) $\mathfrak{M} = \text{so}(1, 3)$ — алгебра Ли группы Лоренца. Здесь $N=2$, $\alpha_1^2 \leq 4\alpha_0$. Если $2\sqrt{\alpha_0 + \alpha_1} \neq 0$, $\gamma_0 \geq 0$, $\alpha_1 \gamma_0 + \gamma_1 \geq 0$, то $\text{ind } \psi G_t'' \leq 1 \forall t > 0$.

В противном случае $\text{ind } \psi G_t'' \rightarrow +\infty (t \rightarrow +\infty)$.

2) $\mathfrak{M} = \text{so}(2, 2)$. Снова $N=2$, однако $4\alpha_0 \leq \alpha_1^2$. Если $\alpha_0 > 0$, $\alpha_1 > 0$, $\gamma_0 \geq 0$, $\alpha_1 \gamma_0 + \gamma_1 \geq 0$, то $\text{ind } \psi G_t'' \leq 1 \forall t > 0$.

В противном случае $\text{ind } \psi G_t'' \rightarrow +\infty (t \rightarrow +\infty)$.

3) $\mathfrak{M} = \text{so}(4)$. Это компактная алгебра Ли, поэтому всегда $\text{ind } \psi G_t'' \rightarrow +\infty (t \rightarrow +\infty)$.

4) $\mathfrak{M} = \text{sl}_{\mathbb{R}}(3)$. Здесь $N=3$. Если $\alpha_j > 0$, $j=0, 1, 2$, $\gamma_0 \geq 0$ и,

либо $(\alpha_2 \gamma_0 + \gamma_1)^2 < 4\gamma_0(\alpha_1 \gamma_0 + \alpha_2 \gamma_1 + \gamma_2)$, либо $(\alpha_2 \gamma_0 + \gamma_1 \geq 0) \& \alpha_1 \gamma_0 + \alpha_2 \gamma_1 + \gamma_2 \geq 0$, то $\text{ind } \psi G_t'' \leq 1 \quad \forall t > 0$.

В противном случае $\text{ind } \psi G_t'' \rightarrow +\infty \quad (t \rightarrow +\infty)$.

2. Если в предыдущем пункте мы рассматривали системы с одним управляющим параметром, то здесь, напротив, займемся одним классом систем, в которых управляющих параметров достаточно много. Для этих систем $\text{ind } \psi G_t''$ для фиксированного $\psi \perp \text{im } G_t'$ вычисляется совсем просто, поэтому появляется возможность явно описать разбиение $(\text{im } G_t')^\perp$ на области, отвечающие различным значениям индекса, и найти группы гомологий множества $g_t^{-1}(0) \setminus 0$.

Пусть M — компактная полупростая группа Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{M}$. Угловые скобки $\langle \cdot, \cdot \rangle$, как и выше, обозначают форму Киллинга на $\mathfrak{M}$, эта форма отрицательно определена. Пусть a — регулярный элемент алгебры Ли $\mathfrak{M}$, $\langle a, a \rangle = -1$, и $\mathcal{H}$ — подалгебра Картана в $\mathfrak{M}$, содержащая элемент a . Обозначим через U пересечение сферы $\{x \in \mathfrak{M} \mid \langle x, x \rangle = -1\}$ с подпространством $Ra + \mathcal{H}^\perp$,

$$U = \{\alpha a + v \mid \alpha \in \mathbb{R}, v \perp \mathcal{H}, \langle v, v \rangle = \alpha^2 - 1\},$$

и рассмотрим управляемую систему

$$\dot{\mu} = \mu \circ u, \quad u \in U, \quad \mu(0) = \mu_0$$

на M в окрестности управления $\tilde{u}(\tau) \equiv a$.

$$\text{Имеем } G_t: u(\cdot) \mapsto \mu_0 \circ \exp \int_0^t (e^{\tau \text{ad } a} u(\tau) - a) d\tau,$$

$$G_t' v(\cdot) = \int_0^t e^{\tau \text{ad } a} v(\tau) d\tau, \quad v(\tau) \in \mathcal{H}^\perp, \quad \text{im } G_t' = \mathcal{H}^\perp.$$

$$\begin{aligned} g_t(v_1(\cdot), v_2(\cdot)) &= \int_0^t (\langle v_1(\tau), v_2(\tau) \rangle a + \\ &+ \left[\int_0^\tau e^{\theta \text{ad } a} v_1(\theta) d\theta, e^{\tau \text{ad } a} v_2(\tau) \right] d\tau + \mathcal{H}^\perp, \end{aligned} \quad (16)$$

$$G_t'' = g_t|_{\ker G_t' \times \ker G_t''}.$$

Обозначение начальной точки μ_0 в выражениях для G_t' и G_t'' можно опускать, пользуясь отождествлением $T_{\mu_0} M \approx \mathfrak{M}$. Также без особых оговорок ниже используется отождествление $\mathfrak{M}^* \approx \mathfrak{M}$, определяемое формой Киллинга.

Предложение 4. Пусть $\psi \in \mathcal{H} \setminus 0$, $t > 0$. Тогда

$$\text{ind } \psi G_t'' < +\infty \Leftrightarrow \langle \psi, a \rangle < 0.$$

Доказательство. Поскольку $\langle v, v \rangle < 0 \quad \forall v \neq 0$, то из (16) и предложения 3.1 следует, что неравенство $\langle \psi, a \rangle \leq 0$ является необходимым, а неравенство $\langle \psi, a \rangle < 0$ достаточным условиями конечности $\text{ind } \psi G_t''$. Остается еще случай $\langle \psi, a \rangle = 0$. В этом случае, согласно предложению 3.1, для конечности $\text{ind } \psi G_t''$ необходимо выполнение тождества

$$\langle \psi, [e^{\tau \text{ada}} v_1, e^{\tau \text{ada}} v_2] \rangle = 0 \quad \forall v_1, v_2 \perp \mathcal{H}, \quad \forall \tau \in [0, t].$$

Это тождество однако не выполняется, т. к.

$$\langle \psi, [e^{\tau \text{ada}} v_1, e^{\tau \text{ada}} v_2] \rangle = \langle \psi, e^{\tau \text{ada}} [v_1, v_2] \rangle = \langle \psi, [v_1, v_2] \rangle$$

и

$$[\mathcal{H}^\perp, \mathcal{H}^\perp] \supset \mathcal{H}. \quad \blacksquare$$

Итак, при вычислении $\text{ind } \psi G_t''$ нужно рассмотреть лишь случай $\langle \psi, a \rangle < 0$. Ниже предполагается выполненным условие нормировки $\langle \psi, a \rangle = -1$.

Перейдем к описанию уравнения Якоби. В пункте 1 § 3 произвольному подпространству $\Pi \subset T_{\mu_0} M$ и ковектору $\psi \perp \Pi$ сопоставлено симплектическое пространство $E_{\Pi, \psi}$, а в пункте 1 настоящего параграфа (см. стр. 186) описана естественная модель этого пространства в случае, когда M — полупростая группа Ли. В нашей ситуации $\Pi = \mathcal{H}^\perp$, а $E_{\Pi, \psi}$ естественно изоморфно пространству $\mathcal{H}^\perp \oplus \mathcal{H}^\perp$ с кососкалярным произведением

$$\bar{\sigma}: (x_1, \xi_1) \wedge (x_2, \xi_2) \mapsto \langle \psi, [x_1, x_2] \rangle + \langle \xi_2, x_1 \rangle - \langle \xi_1, x_2 \rangle, \\ x_i, \xi_i \in \mathcal{H}^\perp, \quad i = 1, 2.$$

Уравнению Якоби соответствует гамильтонова система на этом пространстве, определяемая гамильтонианом

$$h(x, \xi) = -\frac{1}{2} \langle [x, \psi] + \xi, [x, \psi] + \xi \rangle \quad x, \xi \in \mathcal{H}^\perp.$$

Как видим, гамильтониан оказался автономным. Гамильтонова система имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{x} = [\psi, x] - \xi \\ \dot{\xi} = 0. \end{cases} \quad (17)$$

Якобиева кривая Λ_τ , $\tau \geq 0$, есть гладкая кривая на лагранжевом грассманиане $L(\mathcal{H}^\perp \oplus \mathcal{H}^\perp)$, определяемая системой (17) с начальным условием

$$\Lambda_0 = 0 \oplus \mathcal{H}^\perp = \{(x, \xi) \mid x = 0, \xi \in \mathcal{H}^\perp\}.$$

Стало быть,

$$\Lambda_t = \left\{ \left(\int_0^t e^{(t-\tau) \text{ad } \psi} d\tau \xi, \xi \right) \mid \xi \in \mathcal{H}^\perp \right\}.$$

Согласно следствию из теоремы 3.2

$$\text{ind } \psi G_t^* = \text{ind } \Lambda|_{[0,t]} = \sum_{0 < \tau < t} \dim(\Lambda_0 \cap \Lambda_\tau).$$

Поскольку $\mathfrak{M}$ — компактная алгебра Ли, то все ее корни чисто мнимые. Пусть $\dim \mathcal{H}^* = 2N$, и $\rho_1, \dots, \rho_N \in \mathcal{H}$ таковы, что линейные формы на $\mathcal{H}$ вида $\omega \mapsto \pm 2\pi i \langle \rho_j, \omega \rangle$, $j=1, \dots, N$, составляют полный набор корней подалгебры Картана $\mathcal{H}$. Получаем

Предложение 5. Если $t > 0$ таково, что числа $t \langle \rho_j, \psi \rangle$, $j=1, \dots, N$, не являются целыми, то

$$\text{ind } \psi G_t^* = 2 \sum_{j=1}^N [t \langle \rho_j, \psi \rangle],$$

где $[]$ — «целая часть».

Напомним, что ψ имеет нормировку: $\langle \psi, a \rangle = -1$. Положим $\Omega(t) = \{\omega \in \mathcal{H} \mid \langle \omega, a \rangle = -t\}$,

$$\Omega_k(t) = \{\omega \in \Omega(t) \mid \text{ind } \omega G_t^* \leq k\}, \quad k=0, 1, \dots$$

Из предложения 5 следует, что

$$\Omega_{2k}(t) = \left\{ \omega \in \Omega(t) \mid \sum_{j=1}^N [\langle \rho_j, \omega \rangle] \leq k \right\}, \quad \Omega_{2k+1}(t) = \Omega_{2k}(t), \\ k=0, 1, \dots$$

Не ограничивая общности, можем (и будем) считать, что все формы ρ_j отрицательны на векторе a , т. е. $\langle \rho_j, a \rangle < 0$, $j=1, \dots, N$.

Пусть

$$\Omega^-(t) = \{\omega \in \Omega(t) \mid \langle \rho_j, \omega \rangle \leq 0, j=1, \dots, N\}$$

и

$$\Omega_k^-(t) = \Omega_k(t) \cap \Omega^-(t), \quad k=0, 1, \dots$$

Множество $\Omega^-(t)$ — пересечение гиперплоскости $\Omega(t)$ с замыканием камеры Вейля, содержащей вектор a , — представляет собой симплекс размерности $\dim \mathcal{H} - 1$. Оказывается, фильтрации $\Omega_0(t) \subset \Omega_2(t) \subset \dots \subset \Omega(t)$ и $\Omega_0^-(t) \subset \Omega_2^-(t) \subset \dots \subset \Omega^-(t)$ гомотопически эквивалентны. Именно, справедлива

Лемма 3. Имеется гомотопическая ретракция $\Omega(t)$ на $\Omega^-(t)$, сохраняющая фильтрацию $\Omega_k(t)$, $k=0, 1, 2, \dots$.

Доказательство. Пусть $\dim \mathcal{H} = r$. Среди корней $2\pi i \rho_1, \dots, 2\pi i \rho_N$ имеется ровно r простых, не ограничивая общности, можно считать, что это $2\pi i \rho_1, \dots, 2\pi i \rho_r$. Векторы $\rho_1, \dots, \rho_r$ образуют базис линейного пространства $\mathcal{H}$. Любой вектор ρ_j , $j=1, \dots, N$, является линейной комбинацией векторов $\rho_1, \dots, \rho_r$ с целыми неотрицательными коэффициентами. Для всякого $\omega \in \mathcal{H}$ обозначим через ω_- элемент пространства $\mathcal{H}$, однозначно определяемый условиями

$$\rho_j(\omega_-) = \begin{cases} \langle \rho_j, \omega \rangle, & \text{если } \langle \rho_j, \omega \rangle \leq 0, \\ 0, & \text{если } \langle \rho_j, \omega \rangle > 0, \end{cases} \quad j=1, \dots, r.$$

Искомая гомотопическая ретракция гиперплоскости $\Omega(t)$ на $\Omega^-(t)$ имеет вид:

$$\varphi_s: \omega \mapsto (1-s)\omega - \frac{st}{\langle a, \omega_- \rangle} \omega_-, \quad \omega \in \Omega(t), \quad s \in [0, 1]. \blacksquare$$

Пусть Z — кольцо целых чисел, множество $\mathcal{R} = \bigcup_{j=1}^N \{\omega \mid \langle \rho_j, \omega \rangle \in Z\}$ обычно называют диаграммой Штифеля.

Целочисленная функция $I(\omega) = \sum_{j=1}^N \|\langle \rho_j, \omega \rangle\|$ локально посто-

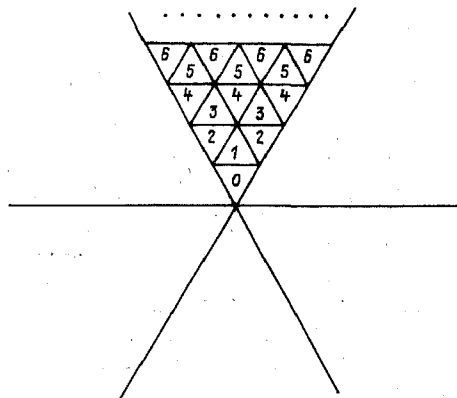
янна на $\mathcal{H} \setminus \mathcal{R}$. Замыкание каждой компоненты множества $\mathcal{H} \setminus \mathcal{R}$ является выпуклым многогранником, значения функции $I(\omega)$ на паре соседних компонент, смежных по $(r-1)$ -мерной грани, и лежащих в одной камере Вейля, отличаются на единицу. Нас интересует лишь сужение этой функции на замыкание камеры Вейля $\{\omega \in \mathcal{H} \mid \langle \rho_j, \omega \rangle < 0, j=1, \dots, N\}$, на которой наша целочисленная функция принимает вид:

$$I(\omega) = \sum_{j=1}^N [-\langle \rho_j, \omega \rangle].$$

Например, для алгебры Ли $\mathfrak{su}(r+1)$ число корней $2N = r(r+1)$, на выделенной камере Вейля функция $I(\omega)$ имеет вид:

$$I(\omega) = \sum_{1 \leq \alpha < \beta \leq r} \left[-\sum_{j=\alpha}^{\beta} \langle \rho_j, \omega \rangle \right].$$

Случай $r=2$ можно изобразить на рисунке



Из предложения 5 вытекает равенство $\text{ind } \omega G_t = 2I(\omega)$, $\forall \omega \in \Omega(t) \setminus \mathcal{R}$.

Мы уже отмечали, что замыкание любой компоненты связности множества $\mathcal{H} \setminus \mathcal{R}$ является выпуклым многогранником, вершины этих многогранников назовем узлами диаграммы $\mathcal{R}$. Это такие точки $\omega \in \mathcal{R}$, что $\langle \rho_j, \omega \rangle \in \mathbb{Z}, \dots, \langle \rho_r, \omega \rangle \in \mathbb{Z}$ для некоторых линейно независимых векторов $\rho_1, \dots, \rho_r$ из множества $\{\rho_1, \dots, \rho_N\}$.

Предложение 6. Предположим, что a не лежит в линейной оболочке никаких $r-1$ векторов из множества $\{\rho_1, \dots, \rho_N\}$. Если для данного $t > 0$ квадратичное отображение g_t вырождено, то гиперплоскость $\Omega(t)$ содержит узел диаграммы $\mathcal{R}$.

Доказательство. Сделав в формуле (16) замену переменных $\omega(\tau) = e^{\tau \text{ada}} v(\tau)$, получим квадратичное отображение

$$Q_t(\omega(\cdot), \omega(\cdot)) \stackrel{\text{def}}{=} g_t(v(\cdot), v(\cdot)) = \\ = \int_0^t \left(\langle \omega(\tau), \omega(\tau) \rangle a + \left[\int_0^\tau \omega(\theta) d\theta, \omega(\tau) \right] \right) d\tau + \mathcal{H}^\perp, \quad (18)$$

$$\omega(\tau) \in \mathcal{H}^\perp \text{ при } 0 \leq \tau \leq t, \quad \int_0^t \omega(\tau) d\tau = 0.$$

Вектор-функция $\omega(\cdot)$ в том и только том случае является критической точкой отображения Q_t , когда для некоторых $\omega \in \mathcal{H}^\perp \setminus 0$, $b \in \mathcal{H}^\perp$ выполняется тождество

$$\langle \omega, a \rangle \omega(\tau) + \left[\omega, \int_0^\tau \omega(\theta) d\theta \right] \equiv b, \quad 0 \leq \tau \leq t. \quad (19)$$

Вырожденность квадратичного отображения Q_t эквивалентна тому, что $Q_t(\omega(\cdot), \omega(\cdot)) = 0$ для некоторой ненулевой критической точки $\omega(\cdot)$. Рассмотрим отдельно два случая

1) $\langle \omega, a \rangle = 0$. Дифференцируя тождество $\left[\omega, \int_0^\tau \omega(\theta) d\theta \right] = b$ по τ , получим $[\omega, \omega(\tau)] \equiv 0$.

Из тождества $[\omega, \omega(\tau)] \equiv 0$ следует, что

$$[\omega(\tau_1), \omega(\tau_2)] \in \text{span}\{\rho_j \mid \langle \rho_j, \omega \rangle = 0\} + \mathcal{H}^\perp \quad \forall \tau_1, \tau_2 \in [0, t].$$

Среди векторов ρ_j , ортогональных ω , имеется не более $r-1$ линейно независимых, и ортогональная проекция вектора

$\int_0^t \left[\int_0^\tau \omega(\theta) d\theta, \omega(\tau) \right] d\tau$ на $\mathcal{H}$ содержится в их линейной обо-

лочке. В то же время согласно условию, вектор a не содержится в этой линейной оболочке.

2) $\langle \omega, a \rangle \neq 0$. Не ограничивая общности, можем считать, что $\langle \omega, a \rangle = -t$, т. е. $\omega \in \Omega(t)$.

Дифференцируя уравнения (19) по τ , получим $t\dot{w} = [\omega, w]$. Следовательно, $w(\tau) = e^{\frac{\tau}{t} \text{ad} \omega} b$.

Равенство $\int_0^t w(\tau) d\tau = 0$ эквивалентно соотношению $e^{\text{ad} \omega} b = b$.

Пусть b_j — ортогональная проекция вектора b на двумерное инвариантное подпространство оператора $\text{ad} \omega$, отвечающее собственным значениям $\pm 2\pi i \langle \rho_j, \omega \rangle$, $j=1, \dots, N$.

Мы видим, что b_j может быть отлично от нуля лишь для тех j , для которых $\langle \rho_j, \omega \rangle \in \mathbb{Z}$. Следовательно,

$$[w(\tau_1), w(\tau_2)] \in \text{span} \{ \rho_j \mid \langle \rho_j, \omega \rangle \in \mathbb{Z} \} + \mathcal{H}^\perp, \quad \forall \tau_1, \tau_2 \in [0, t].$$

Если среди векторов ρ_j , удовлетворяющих условию $\langle \rho_j, \omega \rangle \in \mathbb{Z}$, имеется r линейно независимых, то ω — узел диаграммы $\mathcal{H}$. В противном случае

$$a \notin \text{span} \{ [w(\tau_1), w(\tau_2)], \tau_1, \tau_2 \in [0, t] \} + \mathcal{H}^\perp. \blacksquare$$

Следствие. Если a не лежит в линейной оболочке никаких $r-1$ векторов из множества $\{\rho_1, \dots, \rho_N\}$, то на полупрямой $[0, +\infty)$ имеется не более чем счетное число таких точек t , что квадратичное отображение g_t вырождено.

В случае, когда g_t невырождено, теорема 2 из [1] позволяет весьма точно оценить группы гомологий множества $g_t^{-1}(0) \setminus 0$ в терминах фильтрации $\Omega_k^-(t)$, $k=0, 1, 2, \dots$. В частности,

$$\text{rank } \tilde{H}_n(g_t^{-1}(0) \setminus 0) \leq \sum_{j=0}^{r-1} \text{rank } H^j(\Omega_{n+j+1}^-(t), \Omega_{n+j}^-(t)), \quad n=0, 1, 2, \dots;$$

при этом, если $r \leq 3$ (а также во многих других случаях), неравенство обращается в равенство*). В свою очередь, теорема 4.2 связывает группы гомологий $\tilde{H}_n(g_t^{-1}(0) \setminus 0) \approx H_{n+1}(g_t^{-1}(0), g_t^{-1}(0) \setminus 0)$ с локальной структурой множества уровня $G_t^{-1}(\mu_0)$.

В заключение настоящего параграфа разберем до конца случай $\mathfrak{M} = \mathfrak{su}(3)$.

Подалгебра Картана $\mathcal{H}$ двумерна, $N=3$. Введем в $\mathcal{H}$ координаты $\omega = (\omega_1, \omega_2)$, положив $\omega_1 = \langle \rho_1, \omega \rangle$, $\omega_2 = \langle \rho_2, \omega \rangle$, тогда $\langle \rho_3, \omega \rangle = \omega_1 + \omega_2$.

*) Напомним, что $\tilde{H}_n(\cdot)$ означает n -мерную приведенную группу сингулярных гомологий.

Форма Киллинга имеет вид:

$$\langle \omega, \omega \rangle = -2(\omega_1^2 + \omega_2^2 + (\omega_1 + \omega_2)^2);$$

$$\rho_1 = \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right), \quad \rho_2 = \left(\frac{1}{6}, -\frac{1}{3}\right), \quad \rho_3 = \left(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}\right).$$

Пусть $a_1 = \langle \rho_1, a \rangle$, $a_2 = \langle \rho_2, a \rangle$, по условию $a_1 < 0$, $a_2 < 0$. Мы предполагаем выполненными условия общности положения, сформулированные в предложении 6, в данном случае они сводятся к соотношению $a_1 \neq a_2$.

Прямая $\Omega(t)$ определяется уравнением

$$(2a_1 + a_2)\omega_1 + (a_1 + 2a_2)\omega_2 = \frac{t}{2}.$$

Положим

$$\alpha = \frac{2a_1 + a_2}{a_1 + 2a_2}, \quad \tau = \frac{-t}{2(a_1 + 2a_2)}.$$

По условию $\alpha > 0$, $\tau > 0$, $\alpha \neq 1$. При перемене местами корней ρ_1 и ρ_2 число α меняется на $\frac{1}{\alpha}$, поэтому без ограничения общности можно считать, что $0 < \alpha < 1$.

Пусть $v = -\omega_1$, отрезок $\Omega^-(t)$ имеет вид

$$\Omega^-(t) = \{(-v, \alpha v - \tau) \mid 0 \leq v \leq \frac{\tau}{\alpha}\}.$$

Отождествим $\Omega^-(t)$ с отрезком $0 \leq v \leq \frac{\tau}{\alpha}$.

Имеем

$$I(v) = [v] + [\tau - \alpha v] + [\tau + (1 - \alpha)v],$$

$$\Omega_{2k}^-(t) = \text{cl} \left\{ v \in \left[0, \frac{\tau}{\alpha}\right] \mid [v] + [\tau - \alpha v] + [\tau + (1 - \alpha)v] \leq k \right\},$$

$$\Omega_{2k+1}^-(t) = \Omega_{2k}^-(t), \quad k = 0, 1, \dots$$

Предположим, что ни одно из чисел вида $\tau - \alpha j$, $j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ не является целым. Тогда, согласно предложению 6, квадратичное отображение g_t невырождено.

Далее $g_t^{-1}(0) = 0$ в том и только том случае, когда $\Omega_0^-(t) = \emptyset$. Следовательно,

$$g_t^{-1}(0) = 0 \Leftrightarrow \tau < \alpha.$$

Ниже предполагается, что $\tau > \alpha$.

Напомним, что

$$\tilde{H}_n(g_t^{-1}(0) \setminus 0) \approx H^0(\Omega_{n+1}^-(t), \Omega_n^-(t)) \oplus H^1(\Omega_{n+2}^-(t), \Omega_{n+1}^-(t)),$$

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

(здесь действительно имеется изоморфизм, а не только равен-

ство рангов, поскольку группы, стоящие в правой части, не имеют кручения).

Там, где это удобно, вместо групп гомологий $\tilde{H}_n(\cdot)$ отдельно для каждой размерности n , мы будем рассматривать градуированные группы $\tilde{H}(\cdot) = \bigoplus_{n=0}^{+\infty} \tilde{H}^n(\cdot)$.

Введем обозначения: $\varepsilon = [\tau - [\tau] - \alpha]$; $\iota(n) = 4n + 4 \left[\frac{\tau - n}{\alpha} \right] - 2$ для $n = 0, 1, \dots, [\tau]$.

Тогда

$$\tilde{H}(g_t^{-1}(0) \setminus 0) \approx \tilde{H}(S^{4[\tau] - 2 + \varepsilon}) \bigoplus_{n=1}^{[\tau] + \varepsilon} (\tilde{H}(S^{\iota(n)-1} \vee S^{\iota(n)} \setminus 0)).$$

В частности,

$$\text{rank } \tilde{H}(g_t^{-1}(0)) = 2([\tau] + \varepsilon) = 1.$$

Следовательно, ранг группы $\tilde{H}(g_t^{-1}(0) \setminus 0)$ стремится к бесконечности при $t \rightarrow +\infty$ (в то время как для скалярной квадратичной формы этот ранг не превосходит единицы!). Интересно рассмотреть асимптотические свойства этой градуированной группы при $t \rightarrow +\infty$ (при фиксированном α). Напомним, что τ является линейной функцией от t . Положив $d(t) = \min \{n \mid \tilde{H}_n(g_t^{-1}(0) \setminus 0) \neq 0\}$, $D(t) = \max \{n \mid \tilde{H}_n(g_t^{-1}(0) \setminus 0) \neq 0\}$, получим

$$\text{rank } \tilde{H}(g_t^{-1}(0) \setminus 0) \approx 2\tau \quad (t \rightarrow +\infty)$$

$$d(t) \approx 4\tau \quad (t \rightarrow +\infty)$$

$$D(t) \approx \frac{4\tau}{\alpha} \quad (t \rightarrow +\infty).$$

Таким образом,

$$\frac{d(t)}{D(t)} \rightarrow \alpha \quad (t \rightarrow +\infty).$$

Интересно, что при больших t группы гомологий ведут себя как непрерывные объекты: параметр α , определяемый положением вектора a в подалгебре Картана, можно восстановить по этим группам. Семейства квадратичных отображений g_t , $t > 0$, оказываются топологически совершенно различными при различных значениях α .

ЛИТЕРАТУРА

1. Аграчев А. А., Топология квадратичных отображений и гессианы гладких отображений. Итоги науки и техн. ВИНТИ. Алгебра. Топология. Геометрия, 1988, 26, 85—124.
2. —, Вахрамеев С. А., Гамкредидзе Р. В., Дифференциально-геометрические и теоретико-групповые методы в теории оптимального управления. Ито-

- ги науки и техн. ВИНТИ. Пробл. геометрии, 1983, 14, 3—56 (РЖМат, 1983, 5Б609)
 3. —, Гамкредидзе Р. В., Принцип оптимальности второго порядка для задачи быстрогодействия. Мат. сб., 1976, 100(142), 610—643 (РЖМат, 1977, 10Б540)
 4. —, Экспоненциальное представление потоков и хронологическое исчисление. Мат. сб., 1978, 107(149), 467—532 (РЖМат, 1979, 4Б583)
 5. —, —, Хронологические алгебры и нестационарные векторные поля. Итоги науки и техн. ВИНТИ. Пробл. геометрии, 1980, 11, 135—176 (РЖМат, 1980, 4Б541)
 6. —, —, Индекс экстремальности и квазиэкстремальные управления. Докл. АН СССР, 1985, 284, № 4, 777—781 (РЖМат, 1986, 2Б958)
 7. —, —, Индексы Морса и Маслова для гладких управляемых систем. Докл. АН СССР, 1986, 287, № 3, 521—524 (РЖМат, 1986, 8Б696)
 8. —, —, Сарычев А. В., Локальные инварианты гладких управляемых систем. ВИНТИ, 1986, 32 с. (Рукопись деп. в ВИНТИ 4.10.86 г. № 7020-В) (РЖМат, 1987, 1Б641)
 9. Арнольд В. И., Математические методы классической механики. М.: Наука, 1974, 431 с. (РЖМат, 1975, 6Б433К)
 10. Габасов Р., Кириллова Ф. М., Особые оптимальные управления. М.: Наука, 1973
 11. Гамкредидзе Р. В., Необходимые условия первого порядка и аксиоматика экстремальных задач. Тр. Матем. ин-та им. Стеклова, 1971, 112, ч. I, 152—180 (РЖМат, 1971, 12Б677)
 12. Гийемин В., Стернберг С., Геометрические асимптотики. М.: Мир, 1981, 500 с. (РЖМат, 1982, 3Б706К)
 13. Лион Ж., Вернь М., Представления Вейля, индекс Маслова и тэта-ряды. М.: Мир, 1983, 217 с. (РЖМат, 1984, 2Б1085К)
 14. Понтрягин Л. С., Болтянский Б. Г., Гамкредидзе Р. В., Мищенко Е. Ф., Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматгиз, 1961, 391 с. (РЖМат, 1963, 8В280К)
 15. Сарычев А. В., Индекс второй вариации управляемой системы. Мат. сб., 1980, 113(155), 464—486 (РЖМат, 1981, 2Б553)
 16. Gamkrelidze R. V., Exponential representations of solutions of ordinary differential equations. «Proc. Equadif. IV. Lect. Notes Math., Springer, 1979, 703, 118—129 (РЖМат, 1979, 9Б123)
 17. Hestenes M. R., Applications of the theory of quadratic forms in Hilbert space to the calculus of variations. «Pacif. J. Math., 1951, 1, № 4, 525—582
 18. Krener A. J., The high order maximal principle and its applications to singular extremals. SIAM J. Control. Optim., 1977, 15, № 2, 256—293 (РЖМат, 1977, 8Б537)
 19. Morse M., The calculus of variations in the large. Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1934
-