A. A. Agrachev, S. A. Vakhrameev, Linearly controlled systems of constant rank and relay conditions for extreme control, *Uspekhi Mat. Nauk*, 1986, Volume 41, Issue 6(252), 163–164

ЛИНЕЙНЫЕ ПО УПРАВЛЕНИЮ СИСТЕМЫ ПОСТОЯННОГО РАНГА И УСЛОВИЯ РЕЛЕЙНОСТИ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ УПРАВЛЕНИЙ

А. А. Аграчёв, С. А. Вахрамеев

В заметке используются обозначения и понятия хронологического исчисления, с которыми можно познакомиться в любой из работ [1], [2].

Пусть M — гладкое n-мерное многообразие, регулярно вложенное в евклидово пространство R^d, $\mathbf{A}, \mathbf{B}_1, \ldots, \mathbf{B}_m$ — гладкие локально ограниченные векторные поля на M. Рассмотрим управляемую систему

$$(1)\qquad \dot{x}=A(x)+\sum_{i=1}^{m} u_iB_i(x)=\left(\mathbf{A}+\sum_{i=1}^{m} u_i\mathbf{B}_i\right)E(x),\quad x\in M,\quad u=(u_1,\ \ldots,\ u_m)\in R^m,$$

предполагая, что для любого компакта $K\subset M$ существует целое $s\geqslant 0$ и гладкие функции $a^{is}_{\alpha\beta}\in C^\infty(K)$ такие, что $\forall x\in K\quad \mathrm{ad}^{s+1}\,\mathbf{AB}_iE(x)=\sum_{\alpha=1}^{m}\sum_{\beta=0}^{s} a^{is}_{\alpha\beta}(x)\,\mathrm{ad}^{\beta}\,\mathbf{AB}_\alpha E(x)$. Система (1) называется системой постоянного ранга, если для любых $x_0\in M$, $T>0$ ранг отображения $u(\cdot)\mapsto \overrightarrow{\exp}\int_0^T\left(\mathbf{A}+\sum_{i=1}^{m} u_i(\tau)\mathbf{B}_i\right)d\tau\,E(x_0)$: $L^\infty_m[0,\ T]\to M$ не зависит от управления $u(\cdot)\in L^\infty_m[0,\ T]$. Пусть $u(\cdot)=(u_1(\cdot),\ \ldots,\ u_m(\cdot))\in L^\infty_m[0,\ T]$, $\mathscr{F}^*_{u,\,t}=\overrightarrow{\exp}\int_0^t \mathrm{ad}\left(\mathbf{A}+\sum_{i=1}^{m} u_i(\tau)\mathbf{B}_i\right)d\tau$, $\Pi_{x_0,\,T}(u(\cdot))=\mathrm{span}\{\mathscr{F}^*_{u,\,t}\mathbf{B}_iE(x_0);\ i=1,\ \ldots,\ m,\ 0\leqslant t\leqslant T\}$, $\vec{\mathscr{P}}_{T,\,V}(u(\cdot))$ — $C^\infty(V)$-модуль, порожденный семейством векторных полей $\{\mathscr{F}^*_{u,\,t}\mathbf{B}_i;\ i=1,\ \ldots,\ m,\ 0\leqslant t\leqslant T\}$, суженных на открытое подмножество $V\subset M$.

Теорема 1. *Если система* (1) *является системой постоянного ранга, то для любых* $T>0$, $x\in M$, $u(\cdot)\in L^\infty_m[0,\ T]$, $t,\ s\in[0,\ T]$

$$[\mathscr{F}^*_{u,\,t}\mathbf{B}_i,\ \mathscr{F}^*_{u,\,s}\mathbf{B}_j]\,E(x)\in\Pi_{x_0,\,T}(u(\cdot)),\qquad i,\ j=1,\ \ldots,\ m.$$

Обратно, если для любой точки $x_0\in M$ *существует окрестность* $V\subset M$ *такая, что для любых* $t,\ s\in[0,\ T]$, $u(\cdot)\in L^\infty_m[0,\ T]$, $T>0$,

$$[\mathscr{F}^*_{u,\,t}\mathbf{B}_i,\ \mathscr{F}^*_{u,\,s}\mathbf{B}_j]\,|_V\in\vec{\mathscr{P}}_{T,\,V}(u(\cdot)),\quad i,\ j=1,\ \ldots,\ m,$$

то система (1) *является системой постоянного ранга. При этом для любых* $x_0\in M$, $T>0$, $u(\cdot)\in L^\infty_m[0,\ T]$, $\Pi_{x_0,\,T}(u(\cdot))=\Pi_{x_0}$, *распределение* Π_x, $x\in M$, *инволютивно и его размерность постоянна на любой орбите управляемой системы* (1).

Замечание 1. Пусть для любой точки $x_0\in M$ существует окрестность $V\subset M$ этой точки и гладкие функции $a^{ijk}_{\alpha\beta}\in C^\infty(V)$ такие, что при всех $x\in V$, $i,\ k=1,\ \ldots,\ m$, $j=0,\ 1,\ \ldots$

$$(2)\qquad [\mathbf{B}_i,\ \mathrm{ad}^j\,\mathbf{AB}_k]\,E(x)=\sum_{\alpha=1}^{m}\sum_{\beta=0}^{i} a^{ijk}_{\alpha\beta}(x)\,\mathrm{ad}^{\beta}\,\mathbf{AB}_\alpha E(x).$$

Тогда, система (1) является системой постоянного ранга. Условия типа (2) достаточны для того, чтобы система (1) могла быть линеаризована с помощью обратной связи (см. [2]).

Пусть $I^m=\{u\in R^m\mid |u_i|\leqslant 1,\ i=1,\ \ldots,\ m\}$ — замкнутый m-мерный куб. Обозначим через $\mathfrak{A}_{x_0}(T;\ I^m)$ множество достижимости системы

$$(3)\qquad \dot{x}=A(x)+\sum_{i=1}^{m} u_iB_i(x)=\left(\mathbf{A}+\sum_{i=1}^{m} u_i\mathbf{B}_i\right)E(x),\quad x\in M,\quad u\in I^m,\quad x(0)=x_0,$$

за время $T>0$ из начального состояния x_0:

$$\mathfrak{A}_{x_0}(T;\ I^m)=\left\{\overrightarrow{\exp}\int_0^T\left(\mathbf{A}+\sum_{i=1}^{m} u_i(\tau)\mathbf{B}_i\right)d\tau\,E(x_0);\right.$$
$$\left. u(\cdot)=(u_1(\cdot),\ \ldots,\ u_m(\cdot))\in L^\infty_m[0,\ T],\quad u(t)\in I^m,\quad 0\leqslant t\leqslant T\right\}.$$

Управление $u(\cdot) \in L_m^\infty[0, T]$, $u(t) \in I^m$, называется экстремальным управлением уровня k, если соответствующая этому управлению траектория $x(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, системы (3) такова, что

$$x(T) = \overrightarrow{\exp} \int_0^T \left(\mathbf{A} + \sum_{i=1}^m u_i(\tau) \mathbf{B}_i\right) d\tau\, E(x_0) \in \partial_{\mathrm{rel}\, N} (\mathfrak{A}_{x_0}(T;\ I^m) \cap N)$$

для любого k-мерного подмногообразия $N \subset M$, $N \cap \mathfrak{A}_{x_0}(T;\ I^m) \neq \varnothing$.

Теорема 2. *Пусть векторные поля* $\mathbf{A}, \mathbf{B}_1, \ldots, \mathbf{B}_m$ *таковы, что*:

1) *векторы* $\mathbf{B}_1 E(x), \ldots, \mathbf{B}_m E(x)$ *линейно независимы при всех* $x \in M$;

2) *для любого* $x_0 \in M$ *существует окрестность* $V \subset M$, *содержащая* x_0, *и гладкие функции* $a_\alpha^{ijk} \in C^\infty(V)$, $i, j, k = 1, \ldots, m$, *такие, что при любых* $x \in V$, $k, j = 1, \ldots, m$, $i = 0, 1, \ldots, [\mathbf{B}_j, \operatorname{ad}^i \mathbf{A}\mathbf{B}_k]\, E(x) = \sum_{\alpha=0}^{i} a_\alpha^{ijk}(x) \operatorname{ad}^\alpha \mathbf{A}\mathbf{B}_k E(x)$. *Тогда всякое экстремальное управление уровня* k *в системе* (3) *необходимо является* k*-граничным управлением, т. е. на множестве полной меры в* $[0, T]$ *точка* $u(t)$ *принадлежит лишь границам* k*-мерных граней куба* I^m (*т. е.* k*-мерному остову куба* I^m).

Пусть $e_i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ — i-я вершина куба I^m, $\mathfrak{A}_{x_0}(T;\ \{e_i\})$ — множество достижимости системы (3) из начального состояния x_0 за время $T > 0$ с помощью релейных управлений:

$$\mathfrak{A}_{x_0}, (T;\ \{e_i\}) = \left\{\overrightarrow{\exp} \int_0^T \left(\mathbf{A} + \sum_{i=1}^m u_i(\tau) \mathbf{B}_i\right) d\tau\ E(x_0);\right.$$
$$\left. u(\cdot) = (u_1(\cdot), \ldots, u_m(\cdot)) \in L_m^\infty[0, T];\ u(t) \in \{e_i\}, \quad 0 \leqslant t \leqslant T\right\}.$$

Теорема 3. *Предположим, что выполнены условия*:

1) *при любых* $t, s \in [0, T]$, $i, j = 1, \ldots, m$, $i \neq j$, $[e^{t \operatorname{ad} \mathbf{A}} \mathbf{B}_i,\ e^{s \operatorname{ad} \mathbf{A}}\ \mathbf{B}_j] = 0$ *или, эквивалентно*, $[\mathbf{B}_i, \operatorname{ad}^k \mathbf{A}\mathbf{B}_j] = 0$ *при всех* $i, j = 1, \ldots, m$, $i \neq j$, $k = 0, 1, \ldots$;

2) *для любой точки* $x_0 \in M$ *существует окрестность* $V \subset M$ *этой точки и гладкие функции* $a_{ijk} \in C^\infty(V)$, $b_{ij} \in C^\infty(V)$, $|b_{ij}(x)| < 1$ $\forall x \in V$, *такие, что* $\forall k = 0, 1, \ldots$, $i = 1, \ldots, m$, $[\mathbf{B}_i, \operatorname{ad}^k \mathbf{A}\mathbf{B}_i]\, E(x) = \sum_{j=0}^{k} a_{ijk}(x) \operatorname{ad}^j \mathbf{A}\mathbf{B}_i E(x) + b_{ik}(x) \operatorname{ad}^{k+1} \mathbf{A}\mathbf{B}_i E(x)$. *Тогда* $\forall x_0 \in M$, $T > 0$, $\mathfrak{A}_{x_0}(T;\ I^m) = \mathfrak{A}_{x_0}(T;\ \{e_i\})$.

Замечание 2. Последний результат обобщает результаты Кренера и Суссмана (см. [4]—[6]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Аграчёв А. А., Гамкрелидзе Р. В. Экспоненциальное представление потоков и хронологическое исчисление//Мат. сб.—1978.— Т. 107, № 4.— С. 467—532.

[2] Аграчёв А. А., Вахрамеев С. А., Гамкрелидзе Р. В. Дифференциально-геометрические и теоретико-групповые методы в теории оптимального управления.— В кн.: Проблемы геометрии.— Т. 14 (Итоги науки и техники ВИНИТИ АН СССР).— М.: ВНИИТИ, 1983.— С. 3—56.

[3] Jakubczyk B., Respondek W. On linearization of control systems//Bull. Acad. Pol. Sci.—1980.— V. 28, № 9—10.— P. 517—522.

[4] Krener A. J. A generalization of Chow's theorem and bang-bang theorem to nonlinear control problems//SIAM J. Contr.—1974.— V. 12, № 1.— P. 43—52.

[5] Sussmann H. J. The bang-bang theorem for certain control systems in Gl $(n;\ R)$// SIAM J. Contr. 1972.— V. 10, № 3.— P. 470—476.

[6] Sussmann H. J. A bang-bang theorem with bounds on the number of switchings// SIAM J. Contr. and Optim.—1979.— V. 17, № 5.— P. 629—651.

ВИНИТИ АН СССР

Поступило в Правление общества
16 апреля 1984 г.