А. А. Аграчев, А. В. Сарычев, О редукции гладкой линейной по управлению системы, *Матем. сб.*, 1986, том 130(172), номер 1(5), 18–34

УДК 517.977.1+514.7

О редукции гладкой линейной по управлению системы

Аграчев А. А., Сарычев А. В.

1. Введение. В настоящей работе предлагается метод исследования управляемой системы вида

$$\dot{x}=f(x)+g(x)u \tag{1.1}$$

на гладком n-мерном многообразии M. Здесь $x\in M$, $u\in R$; $f(x)$, $g(x)$ — полные гладкие векторные поля на M; допустимые управления $u(t)$ — ограниченные измеримые функции от t.

Показано, что система (1.1) может быть редуцирована к нелинейной по управлению системе с $(n-1)$-мерным фазовым пространством. Указанная редукция использована в работе для получения достаточных условий локальной управляемости высокого порядка системы (1.1), а также в задаче оптимального по быстродействию управления вращением асимметричного твердого тела с помощью момента, приложенного вдоль фиксированной в теле оси.

2. Подготовительный материал. Введем некоторые обозначения, следующие, в основном, [1]. Обозначим через $C^\infty(M)$ алгебру бесконечно дифференцируемых функций на M. Далее нам придется иметь дело с операторами B и семействами операторов $B_t (t\in R)$, отображающих $C^\infty(M)$ в себя. Определим, следуя [1], свойства непрерывности, дифференцируемости, интегрируемости и т. д. семейства операторов B_t относительно t в слабом смысле: B_t обладает свойством (*) относительно t, если $\forall\varphi\in C^\infty(M)$ функция $B_t\varphi$ обладает свойством (*) относительно переменной t.

Векторным полем на M называется произвольное дифференцирование алгебры $C^\infty(M)$, т. е. линейное отображение X $C^\infty(M)$ в себя такое, что $X(\varphi_1\varphi_2)=(X\varphi_1)\varphi_2+\varphi_1(X\varphi_2)$. Если ввести на M локальные координаты, поле X записывается в виде $X=\sum\limits_{i=1}^{n} X_i\partial/\partial x_i$, где $X_i\in C^\infty(M)$. Значение векторного поля X в точке $x\in M$ есть вектор касательного пространства T_xM, обозначаемый $x\circ X$.

Определим скобку Ли (коммутатор) $[X, Y]$ векторных полей X и Y формулой: $[X, Y]\varphi=X(Y\varphi)-Y(X\varphi)$. В локальных координатах $[X, Y]=\partial Y/\partial x X-\partial X/\partial x Y$. Как известно, коммутатор $[X, Y]$ также является векторным полем; скобка Ли вводит в пространстве векторных полей структуру алгебры Ли. Для векторного поля X определим линейный оператор $\operatorname{ad} X$ в пространстве векторных полей формулой: $(\operatorname{ad} X)Y=[X, Y]$. Наконец, назовем неавтономным векторным полем $X_t (t\in R)$ интегрируемое по t семейство векторных полей.

Рассмотрим диффеоморфизм P многообразия M на себя. Он определяет автоморфизм алгебры $C^\infty(M)$ посредством формулы: $\forall \varphi \in C^\infty(M)$ $(P\varphi)(x)=\varphi(P(x))$. Этот автоморфизм алгебры $C^\infty(M)$ будем также называть диффеоморфизмом и обозначать тем же символом P. Для того чтобы это не приводило к недоразумениям, условимся в дальнейшем обозначать образ точки x при диффеоморфизме P символом $x \circ P$, а значение функции φ в точке x — символом $x \circ \varphi$.

Следуя [1], назовем потоком P_t абсолютно непрерывное семейство диффеоморфизмов. Легко показать, что композиция $P_t^{-1} \circ \frac{d}{dt} P_t$ есть интегрируемое по t семейство дифференцирований алгебры $C^\infty(M)$, т. е. неавтономное векторное поле X_t. Из равенства $P_t^{-1} \circ \frac{d}{dt} P_t = X_t$ вытекает, что

$$\frac{d}{dt} P_t = P_t \circ X_t. \tag{2.1}$$

Таким образом, любой поток P_t порождается некоторым неавтономным векторным полем X_t в силу дифференциального уравнения (2.1). В дальнейшем решение уравнения (2.1) будет обозначаться $\overrightarrow{\exp} \int\limits_0^t X_\tau d\tau$ и называться ([1]) хронологической экспонентой. Если векторное поле X_t автономно, т. е. $X_t = X$, то порожденный этим полем поток обозначается e^{tX}.

Согласно [1] хронологическая экспонента разлагается в ряд

$$\overrightarrow{\exp} \int\limits_0^t X_\tau d\tau = I + \int\limits_0^t X_\tau d\tau + \int\limits_0^t \int\limits_0^\tau X_{\tau_1} \circ X_\tau d\tau_1 d\tau + \dots . \tag{2.2}$$

Приведем также формулу вариации хронологической экспоненты ([1]):

$$\overrightarrow{\exp} \int\limits_0^t (X_\tau + Y_\tau)\, d\tau = \overrightarrow{\exp} \int\limits_0^t \overrightarrow{\exp} \int\limits_0^\tau \operatorname{ad} X_s ds Y_\tau d\tau \circ \overrightarrow{\exp} \int\limits_0^t X_\tau d\tau. \tag{2.3}$$

В (2.3) операторная экспонента $Q_\tau = \overrightarrow{\exp} \int\limits_0^\tau \operatorname{ad} X_s ds$ есть абсолютно непрерывное семейство операторов над пространством векторных полей, удовлетворяющее уравнению $\frac{d}{d\tau} Q_\tau Z = Q_\tau \circ (\operatorname{ad} X_\tau) Z$ для любого векторного поля Z. Поток $\overrightarrow{\exp} \int\limits_0^t \overrightarrow{\exp} \int\limits_0^\tau \operatorname{ad} X_s ds Y_\tau d\tau$ (см. (2.3)) назван в [1] возмущающим потоком.

Рассмотрим управляемую систему на многообразии M вида

$$\dot{x} = X(x, u), \quad u \in U. \tag{2.4}$$

Правую часть (2.4) можно рассматривать как семейство $\mathscr{X} = \{X(x, u) : u \in U\}$ векторных полей, зависящих от параметра $u \in U$. Будем считать, что при любом u векторное поле $X(x, u)$ — полное.

Назовем орбитой $\mathcal{O}_x$ системы (2.4) в точке $x \in M$ множество точек вида

$$\mathcal{O}_x = \{x \circ (e^{t_1 X_1} \circ e^{t_2 X_2} \circ \dots \circ e^{t_k X_k}) : t_i \in R,\ X_i \in \mathscr{X}\}.$$

Очевидно, что если $x' \in \mathcal{O}_x$, то $\mathcal{O}_{x'} = \mathcal{O}_x$. Имеет место

Теорема 2.1 (Суссман [2]). *Для любой точки $x \in M$ орбита $\mathcal{O}_x$ является гладким подмногообразием M, инвариантным для системы* (2.4).

Назовем ([2]) положительной орбитой $\mathcal{O}_x^+$ системы (2.4) в точке $x \in M$ множество точек вида

$$\mathcal{O}_x^+ = \{x \circ (e^{t_1 X_1} \circ \ldots \circ e^{t_k X_k}) \colon t_i \in R, \ t_i \geqslant 0, \ X_i \in \mathscr{X}\}.$$

Очевидно, $\mathcal{O}_x^+ \subseteq \mathcal{O}_x$.

Обозначим через $\mathscr{L}[\mathscr{X}]$ минимальную алгебру Ли векторных полей такую, что $\mathscr{L}[\mathscr{X}] \supseteq \mathscr{X}$. Рангом управляемой системы (2.4) в точке $x \in M$ называется $\dim \operatorname{span}\{x \circ X : X \in \mathscr{L}[\mathscr{X}]\}$. Имеет место

Теорема 2.2 ([2]). *Значение любого векторного поля $X \in \mathscr{L}[\mathscr{X}]$ в точке $x' \in \mathcal{O}_x$ есть касательный вектор к $\mathcal{O}_x$. В частности, ранг системы* (2.4) *в точке $x' \in \mathcal{O}_x$ не превосходит $\dim \mathcal{O}_x$.*

В дальнейшем будет предполагаться выполненным следующее условие (справедливое, в частности, для всех вещественно-аналитических систем): ранг системы (2.4) в любой точке $x' \in \mathcal{O}_x$ совпадает с размерностью $\dim \mathcal{O}_x$. Более того, для наших целей достаточно рассматривать сужение системы (2.4) на ее орбиту $\mathcal{O}_x$, что позволяет нам считать, без потери общности, что орбита $\mathcal{O}_x$ системы (2.4) совпадает с многообразием M, и ранг системы (2.4) в каждой точке равен $\dim M$. В этом случае имеют место

Теорема 2.3 (Кренер ([2])). *Если ранг системы* (2.4) *в каждой точке $x \in M$ равен $\dim M$ и $\mathcal{O}_x = M$, то множество внутренних точек положительной орбиты $\mathcal{O}_x^+$ плотно в $\mathcal{O}_x^+$.*

Теорема 2.4 (Суссман, Джарджевич ([2])). *Если ранг системы* (2.4) *в точке x равен $\dim M$, то при любом $T > 0$ множество достижимости $A_{\leqslant T, x}$ системы* (2.4) *из точки x за время $\leqslant T$ имеет непустую внутренность, причем $\operatorname{int} A_{\leqslant T, x}$ всюду плотна в $A_{\leqslant T, x}$.*

Рассмотрим наряду с алгеброй Ли $\mathscr{L}[\mathscr{X}]$ ее подалгебру $\mathscr{L}^0[\mathscr{X}]$ — минимальную алгебру Ли, содержащую все поля вида $X^1 - X^2$ ($X^1, X^2 \in \mathscr{X}$) и $[Y^1, Y^2]$ ($Y^1, Y^2 \in \mathscr{L}[\mathscr{X}]$). Назовем $\dim \operatorname{span}\{x \circ X : X \in \mathscr{L}^0[\mathscr{X}]\}$ точным рангом системы. Очевидно, точный ранг системы не превосходит ее ранга. Имеет место

Теорема 2.5 ([2]). *Если точный ранг системы* (2.4) *в точке x равен $\dim M$, то при любом $T > 0$ множество достижимости $A_{T, x}$ системы* (2.4) *из точки x за время T имеет непустую внутренность, и $\operatorname{int} A_{T, x}$ всюду плотна в $A_{T, x}$.*

3. Редукция управляемой системы (1.1). Рассмотрим управляемую систему (1.1) и допустимое управление $u(t)$. Поток P_t, порожденный дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = f(x) + g(x) u(t), \tag{3.1}$$

представим в виде хронологической экспоненты $P_t = \overrightarrow{\exp} \int\limits_0^t (f(x) + g(x) u(\tau)) d\tau$. Согласно формуле вариации (2.3)

$$\overrightarrow{\exp} \int\limits_0^t (f + gu(\tau)) d\tau = \overrightarrow{\exp} \int\limits_0^t e^{\left(\int\limits_0^\tau u(s) ds\right) \operatorname{ad} g} f d\tau \circ e^{\left(\int\limits_0^t u(\tau) d\tau\right) g}, \tag{3.2}$$

или, если обозначить $v(\tau)=\int\limits_0^\tau u(s)\,ds$, то

$$\overrightarrow{\exp}\int\limits_0^t (f+gu(\tau))\,d\tau=\overrightarrow{\exp}\int\limits_0^t e^{v(\tau)\operatorname{ad} g} f d\tau\circ e^{v(t)g}. \tag{3.3}$$

В правой части (3.3) стоит композиция потоков, порожденных соответственно неавтономными векторными полями $e^{v(t)\operatorname{ad} g}f$ и $v(t)g$.

Рассмотрим окрестность V точки $\tilde{x}\in M$ такую, что $g|_V\neq 0$. Определим на множестве V отношение эквивалентности, отнеся к одному классу все точки, лежащие на одной траектории векторного поля $g|_V$, и обозначим через V^g фактор-множество по этому отношению эквивалентности. Можно рассматривать V^g как множество отрезков траекторий векторного поля g. Очевидно, V^g может быть параметризовано точками множества $N\cap V$, где $M\supset N$ — подмногообразие размерности $(n-1)$ многообразия M, трансверсальное в окрестности $\tilde{x}$ траекториям поля g.

Пусть поле $g\neq 0$ на всем многообразии M и, кроме того, удовлетворяет условиям «невозвращения»: у каждой точки $x\in M$ существует окрестность $V_x\ni x$ и трансверсальное полю g $(n-1)$-мерное многообразие $N_x\subset M$ $(x\in N_x)$ такие, что любая траектория поля g пересекает множество $V_x\cap N_x$ в единственной точке. В частности, условие «невозвращения» выполнено для случая: $M=R^n$, g — постоянное векторное поле. При выполнении этих условий отношение эквивалентности может быть определено глобально на многообразии M. Соответствующее фактор-многообразие (многообразие траекторий поля g) обозначается M^g.

Рассмотрим семейство векторных полей $F_v=e^{v\operatorname{ad} g}f$ $(v\in R)$ и докажем, что оно корректно определено на M^g, т. е. под действием диффеоморфизма $(e^{tg})_*$ векторное поле из семейства F_v переходит в векторное поле из того же семейства. В самом деле, под действием диффеоморфизма $(e^{tg})_*$ поле $F_v=e^{v\operatorname{ad} g}f$ переходит ([1]) в поле $e^{t\operatorname{ad} g}F_v=e^{t\operatorname{ad} g}e^{v\operatorname{ad} g}f=e^{(t+v)\operatorname{ad} g}f=F_{t+v}$, т. е. группа диффеоморфизмов $(e^{tg})_*$ переводит семейство F_v в себя. Докажем

Предложение 1. *Пусть M^g — описанное выше фактор-многообразие, π — каноническая проекция M на M^g, $D_{T,\tilde{y}}(D_{\leqslant T,\tilde{y}})$ — множество достижимости за время T $(\leqslant T)$ из точки $\tilde{y}$ управляемой системы*

$$\dot{y}=y\circ F_v=y\circ(e^{v\operatorname{ad} g}f) \tag{3.4}$$

на многообразии M^g, где в качестве управлений берутся скалярные измеримые существенно ограниченные функции $v(t)$. Множество достижимости $A_{T,\tilde{x}}$ $(A_{\leqslant T,\tilde{x}})$ системы (1.1) за время $T(\leqslant T)$ из точки $\tilde{x}$ содержится в прообразе $\pi^{-1}(D_{T,\pi(\tilde{x})})\,(\pi^{-1}(D_{\leqslant T,\pi(\tilde{x})}))$, причем если точный ранг (ранг) системы (1.1) в точке $\tilde{x}$ равен $\dim M$, то внутренность $A_{T,\tilde{x}}$ $(A_{\leqslant T,\tilde{x}})$ всюду плотна в $\pi^{-1}(D_{T,\pi(\tilde{x})})\,(\pi^{-1}(D_{\leqslant T,\pi(\tilde{x})}))$.

Замечание. Иными словами, предложение 1 означает, что множества $A_{T,\tilde{x}}$ $(A_{\leqslant T,\tilde{x}})$ и $\operatorname{int} A_{T,\tilde{x}}$ $(\operatorname{int} A_{\leqslant T,\tilde{x}})$ содержатся и всюду плотны в «цилиндре», «заметаемом» при движении множества $D_{T,\pi(\tilde{x})}$ $(D_{\leqslant T,\pi(\tilde{x})})$ вдоль траекторий поля g.

Доказательство предложения 1. Пусть $\hat{u}(t)$ — фиксированное допустимое управление системы (1.1), T — фиксированный момент времени. Положив $\hat{v}(t)=\int\limits_0^t \hat{u}(\tau)d\tau$, получим в силу (3.3)

$$\overrightarrow{\exp}\int\limits_0^T (f+g\hat{u}(\tau))\,d\tau=\overrightarrow{\exp}\int\limits_0^T F_{\hat{v},t}dt\circ e^{\hat{v}(T)g}. \tag{3.5}$$

Очевидно, точка $\tilde{x}\circ\left(\overrightarrow{\exp}\int\limits_0^T F_{\hat{v},t}dt\circ e^{\hat{v}(T)g}\right)$ содержится в $\pi^{-1}(D_{T,\pi(\tilde{x})})$, так как $\tilde{x}\circ\overrightarrow{\exp}\int\limits_0^T F_{\hat{v}(t)}dt\in D_{T,\pi(\tilde{x})}$, что доказывает включение $A_{T,\tilde{x}}\subseteq\pi^{-1}(D_{T,\pi(\tilde{x})})$.

При доказательстве второй части утверждения предложения 1 используется вспомогательная

Лемма 2([1]). *Точка* $\tilde{y}\circ\left(\overrightarrow{\exp}\int\limits_0^T F_{v(t)}\,dt\right)=\tilde{y}\circ\left(\overrightarrow{\exp}\int\limits_0^T e^{v(t)\operatorname{ad}g}f dt\right)$ *непрерывно зависит от* $v(\cdot)$ *в метрике* $L_1[0,T]$.

Пусть $\hat{x}\in\pi^{-1}(D_{T,\pi(\tilde{x})})$, $\hat{v}(\cdot)$ — соответствующее управление, приводящее систему (3.4) за время T из точки $\pi(\tilde{x})$ в точку $\pi(\hat{x})$. Рассмотрим на многообразии M дифференциальное уравнение $\dot{x}=x\circ(e^{\hat{v}(t)\operatorname{ad}g}f)$ и его траекторию $\hat{x}(t)$, удовлетворяющую условию $\hat{x}(0)=\tilde{x}$. Положим $\hat{x}(T)=\hat{z}$. Так как $\hat{v}(\cdot)$ переводит за время T систему (3.4) из $\pi(\tilde{x})$ в $\pi(\hat{x})$, точки $\hat{x}$ и $\hat{z}$ лежат в силу (3.5) на одной траектории поля g, т. е. $\hat{x}=\hat{z}\circ e^{sg}$. Выберем абсолютно непрерывную функцию $v^\delta(\cdot)$ в δ-окрестности $v(\cdot)$ в метрике $L_1[0,T]$, удовлетворяющую условию $v^\delta(0)=0$, $v^\delta(T)=s$. Положим $u^\delta(t)=\dot{v}^\delta(t)$ и рассмотрим задачу Коши $\dot{x}=f(x)+g(x)u^\delta(t)$, $x(0)=\tilde{x}$. Согласно (3.3) решение $x^\delta(t)$ этой задачи Коши определяется выражением

$$x^\delta(t)=\tilde{x}\circ\left(\overrightarrow{\exp}\int\limits_0^t e^{v^\delta(\tau)\operatorname{ad}g}f d\tau\circ e^{sg}\right).$$

Выбирая δ достаточно малым, можно сделать в силу леммы 2 точку $\tilde{x}\circ\left(\overrightarrow{\exp}\int\limits_0^T e^{v^\delta(t)\operatorname{ad}g}f dt\right)$ сколь угодно близкой к $\hat{z}=\tilde{x}\circ\overrightarrow{\exp}\int\limits_0^T e^{v(t)\operatorname{ad}g}f dt$ и, тем самым, $x^\delta(T)$ сколь угодно близкой к $\hat{x}=\hat{z}\circ e^{sg}$.

Таким образом, доказано, что множество достижимости $A_{T,\tilde{x}}$ всюду плотно в $\pi^{-1}(D_{T,\pi(\tilde{x})})$. Согласно теореме 2.5 $\operatorname{int}A_{T,\tilde{x}}$ всюду плотна в $A_{T,\tilde{x}}$. Следовательно, $\operatorname{int}A_{T,\tilde{x}}$ всюду плотна в $\pi^{-1}(D_{T,\pi(\tilde{x})})$. Аналогичные рассуждения проводятся и для множества $A_{\leqslant T,\tilde{x}}$. Предложение 1 доказано.

Из предложения 1 вытекает, что исследование множества достижимости управляемой системы (1.1) n-го порядка можно редуцировать к исследованию системы (3.4) $(n-1)$-го порядка, являющейся в отличие от (1.1) нелинейной (и часто невырожденной) по управлению.

Предложение 1 допускает естественное обобщение на случай линейной по управлению системы с векторным управлением $u=(u_1,\ldots,u_l)$ вида

$$\dot{x}=f(x)+\sum_{i=1}^{l} g_i(x)\,u_i. \tag{3.6}$$

Пусть поля $\{g_i(x), i=1, \ldots, l\}$ линейно независимы в каждой точке $x \in M$ и порождают инволютивное l-мерное распределение G на M. По теореме Фробениуса существуют функции $b_{ij}(x)$, $i, j=1, \ldots, l$, такие, что векторные поля $\hat{g}_i(x) = \sum_{j=1}^{l} b_{ij}(x) g_j(x)$ образуют базис распределения G и для любых i, j коммутатор $[\hat{g}_i, \hat{g}_j]=0$. Очевидно, определитель матрицы $B=\|b_{ij}(x)\|$ отличен от нуля на M. Пусть $B^{-1}(x)=C(x)=\|c_{ij}(x)\|$;

$$g_i(x) = \sum_{j=1}^{l} c_{ij}(x) \hat{g}_j(x), \quad i = 1, \ldots, l. \tag{3.7}$$

Подставив (3.7) в (3.6) и введя новые управления $v_j = \sum_{i=1}^{l} c_{ij}(x) u_i$, $j=1, \ldots, l$, получаем, что система (3.6) может быть сведена к системе

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^{l} \hat{g}_i(x) v_i \tag{3.8}$$

с попарно коммутирующими полями $\hat{g}_i(x)$, $i=1, \ldots, l$, порождающими то же распределение G на M.

Согласно теореме Фробениуса многообразие M расслаивается на интегральные многообразия распределения G. Дословное повторение приведенных выше рассуждений с заменой интегральных кривых поля g на интегральные многообразия распределения G позволяют определить по G отношение эквивалентности на M и $(n-l)$-мерное фактор-многообразие M^G по этому отношению эквивалентности.

Предложение 1'. *Пусть M^G — указанное фактор-многообразие, π — каноническая проекция M на M^G, $D_{T,\tilde{y}}(D_{\leqslant T,\tilde{y}})$ — множество достижимости за время $T(\leqslant T)$ из точки $\tilde{y} \in M^G$ управляемой системы*

$$\dot{y} = y \circ \left(e^{\sum_{i=1}^{l} w_i \operatorname{ad} \hat{g}_i} f \right) \tag{3.9}$$

на фактор-многообразии M^G, где в качестве управлений берутся скалярные существенно ограниченные функции $w_i(t)$. Множество достижимости $A_{T,\tilde{x}}(A_{\leqslant T,\tilde{x}})$ системы (3.6) (*или* (3.8)) *за время T ($\leqslant T$) из точки $\tilde{x} \in M$ содержится в прообразе $\pi^{-1}(D_{T,\pi(\tilde{x})})(\pi^{-1}(D_{\leqslant T,\pi(\tilde{x})}))$, причем, если точный ранг (ранг) системы* (3.6) *в точке $\tilde{x}$ равен* $\dim M$, *то внутренность $A_{T,\tilde{x}}(A_{\leqslant T,\tilde{x}})$ всюду плотна в $\pi^{-1}(D_{T,\pi(\tilde{x})})(\pi^{-1}(D_{\leqslant T,\pi(\tilde{x})}))$.*

Таким образом, в силу предложения 1' исследование системы (3.6) n-го порядка с l-мерным управлением сводится к исследованию системы (3.9) $(n-l)$-го порядка.

4. Достаточные условия локальной управляемости. Рассмотрим управляемую систему (1.1) и траекторию $\tilde{x}(t)$ этой системы с начальным условием $\tilde{x}(0)=\tilde{x}$, порожденную допустимым управлением $\tilde{u}(t)$. Введем в пространстве управлений $u(\cdot)$ специальную норму, а именно, положим

$$\|u(\cdot)\|_{[0,T]} = \sup_{t_1, t_2 \in [0,T]} \left| \int_{t_1}^{t_2} u(\tau) d\tau \right|.$$

Такого рода норма используется при исследовании скользящих режимов ([3]), поэтому порожденную ей метрику будем называть метрикой скользящих режимов.

Для дальнейшего удобно ввести обозначение $A^{\varepsilon}_{T,\tilde{x}}$ — множество достижимости системы (1.1) за время T из точки $\tilde{x}$ с помощью управлений $u(\cdot)$ таких, что $\|u(\cdot)\|_{[0,T]}<\varepsilon$.

Определение. Пусть $\tilde{x}(\cdot)$ — траектория (1.1), порожденная нулевым управлением, $\tilde{x}(0)=\tilde{x}$. Система (1.1) слабо локально управляема из точки $\tilde{x}$ за время T, если $\forall\varepsilon>0$ $\tilde{x}(T)\in\operatorname{int} A^{\varepsilon}_{T,\tilde{x}}$.

Предложение 3. *Рассмотрим на многообразии M двухпараметрическое семейство векторных полей $Z_{t,v}=e^{t\,\mathrm{ad}\,f}e^{v\,\mathrm{ad}\,g}f-f$ и положим*

$$\Theta_{T,\varepsilon}(\tilde{x})=\operatorname{con}\{\tilde{x}\circ Z_{t,v}: 0\leqslant t\leqslant T,\ |v|\leqslant\varepsilon\},\tag{4.1}$$

$$\Xi_{T,\varepsilon}(\tilde{x})=\operatorname{con}\{\Theta_{T,\varepsilon}(\tilde{x})\cup\{\tilde{x}\circ g,\ \tilde{x}\circ(-g)\}\}\tag{4.2}$$

(здесь $\operatorname{con} B$ обозначает выпуклый конус, порожденный множеством B; тем самым, $\Theta_{T,\varepsilon}(\tilde{x})$, $\Xi_{T,\varepsilon}(\tilde{x})$ — выпуклые конусы, лежащие в касательной плоскости $T_{\tilde{x}}M$).

Пусть $\tilde{x}(t)$ — траектория системы (1.1), порожденная нулевым управлением, $\tilde{x}(0)=\tilde{x}$, $\gamma(s)$ $(s\geqslant 0)$ — кривая на многообразии M, $\gamma(0)=\tilde{x}$. Если $\forall\varepsilon>0$ $\gamma'(0)\in\operatorname{int}\Xi_{T,\varepsilon}(\tilde{x})$, то для любого $\varepsilon>0$ точка $\gamma(s)\circ e^{Tf}$ лежит при всех достаточно малых $s\geqslant 0$ в множестве $\operatorname{int} A^{\varepsilon}_{T,\tilde{x}}$.

Доказательство предложения 3. Для произвольного управления $u(\cdot)$ представим порожденную им траекторию системы (1.1) в виде хронологической экспоненты $\overrightarrow{\exp}\int_0^t (f+gu(\tau))\,d\tau$. Согласно (3.5)

$$\overrightarrow{\exp}\int_0^T (f+gu(\tau))\,d\tau=\overrightarrow{\exp}\int_0^T e^{v(\tau)\mathrm{ad}g}f\,d\tau\circ e^{v(T)g},\tag{4.3}$$

где $v(t)=\int_0^t u(\tau)\,d\tau$. Представим векторное поле $e^{v(t)\,\mathrm{ad}\,g}f$ в виде $e^{v(t)\,\mathrm{ad}\,g}f=f+(e^{v(t)\,\mathrm{ad}\,g}f-f)$. Согласно формуле вариации (2.3)

$$\overrightarrow{\exp}\int_0^T e^{v(t)\mathrm{ad}g}f\,dt=\overrightarrow{\exp}\int_0^T e^{t\mathrm{ad}f}(e^{v(t)\mathrm{ad}g}f-f)\,dt\circ e^{Tf}=$$

$$=\overrightarrow{\exp}\int_0^T (e^{t\mathrm{ad}f}e^{v(t)\mathrm{ad}g}f-f)\,dt\circ e^{Tf}.\tag{4.4}$$

Объединение (4.3) и (4.4) дает

$$\overrightarrow{\exp}\int_0^T (f+gu(\tau))\,d\tau=\overrightarrow{\exp}\int_0^T (e^{t\mathrm{ad}f}e^{v(t)\mathrm{ad}g}f-f)\,dt\circ e^{Tf}\circ e^{v(T)g},$$

или ([1])

$$\overrightarrow{\exp}\int_0^T (f+gu(\tau))\,d\tau=\overrightarrow{\exp}\int_0^T (e^{t\mathrm{ad}f}e^{v(t)\mathrm{ad}g}f-f)\,dt\circ e^{v(T)e^{T\mathrm{ad}f}g}\circ e^{Tf}=$$

$$=\overrightarrow{\exp}\int_0^T Z_{t,v(t)}\,dt\circ e^{v(T)e^{T\mathrm{ad}f}g}\circ e^{Tf}.\tag{4.5}$$

Докажем, что

$$\operatorname{con}(\Theta_{T,\varepsilon}(\tilde{x})\cup\{\tilde{x}\circ(\pm e^{T\mathrm{ad}f}g)\})=\Xi_{T,\varepsilon}(\tilde{x})\tag{4.6}$$

(ср. (4.2)). Для этого покажем вначале, что $(\tilde{x}\circ(\pm e^{t\,\mathrm{ad}\,f}(\mathrm{ad}\,f)g))\in\Theta_{T,\varepsilon}(\tilde{x})$. Так как при $t\in[0,T]$ и $|v|\leqslant\varepsilon$ верно $(\tilde{x}\circ Z_{t,\pm v})\in\Theta_{T,\varepsilon}(\tilde{x})$ и $\Theta_{T,\varepsilon}(\tilde{x})$ — выпуклый конус, то $\left.\frac{\partial}{\partial v}\right|_{v=0}(\tilde{x}\circ Z_{t,\pm v})\in\Theta_{T,\varepsilon}(\tilde{x})$. Непосредственное вычисление дает

$$\left.\frac{\partial}{\partial v}\right|_{v=0}(\tilde{x}\circ Z_{t,\pm v})=\tilde{x}\circ(\pm e^{t\mathrm{ad}f}(\mathrm{ad}\,g)f)=\tilde{x}\circ(\mp e^{t\mathrm{ad}f}(\mathrm{ad}\,f)\,g)\in\Theta_{T,\varepsilon}(\tilde{x}).$$

Докажем теперь, что

$$(\tilde{x}\circ(\pm e^{t\,\mathrm{ad}\,f}g))\in\Xi_{T,\varepsilon}(\tilde{x}). \tag{4.7}$$

Очевидно, $\frac{d}{dt}(\tilde{x}\circ(\pm e^{t\,\mathrm{ad}\,f}g))=\tilde{x}\circ(\pm e^{t\,\mathrm{ad}\,f}(\mathrm{ad}\,f)g)\in\Theta_{T,\varepsilon}(\tilde{x})\subseteq\Xi_{T,\varepsilon}(\tilde{x})$. С другой стороны, при $t=0$ имеем $(\tilde{x}\circ(\pm e^{t\,\mathrm{ad}\,f}g))=(\tilde{x}\circ(\pm g))\in\Xi_{T,\varepsilon}(\tilde{x})$. В силу того, что $\Xi_{T,\varepsilon}(\tilde{x})$ — выпуклый конус, получаем включение (4.7) и, в частности, $(\tilde{x}\circ(\pm e^{T\,\mathrm{ad}\,f}g))\in\Xi_{T,\varepsilon}(\tilde{x})$, откуда вытекает

$$\mathrm{con}\,(\Theta_{T,\varepsilon}(\tilde{x})\cup\{\tilde{x}\circ(\pm e^{T\,\mathrm{ad}\,f}g)\})\subset\Xi_{T,\varepsilon}(\tilde{x}).$$

Чтобы доказать обратное включение, покажем, что $(\tilde{x}\circ(\pm(g-e^{T\,\mathrm{ad}\,f}g)))$ лежит в $\Theta_{T,\varepsilon}(\tilde{x})$. Действительно,

$$\frac{d}{dt}(\tilde{x}\circ(\pm(g-e^{t\mathrm{ad}f}g)))=(\tilde{x}\circ(\mp e^{t\mathrm{ad}f}(\mathrm{ad}\,f)\,g))\in\Theta_{T,\varepsilon}(\tilde{x}).$$

Так как при $t=0$ $g-e^{t\,\mathrm{ad}\,f}g=0$, получаем $\forall t\in[0,T]$ $g-e^{t\,\mathrm{ad}\,f}g\in\Theta_{T,\varepsilon}(\tilde{x})$. Равенство (4.6) доказано.

Рассмотрим множество

$$C^{\varepsilon}_{T,\tilde{x}}=\left\{\tilde{x}\circ\left(\overrightarrow{\exp}\int_0^T Z_{t,v(t)}dt\circ e^{v(T)e^{T\mathrm{ad}f}g}\right)\right\},$$

где $v(\cdot)$ — абсолютно непрерывные функции; $|v|\leqslant\varepsilon$. В силу (4.5) достаточно показать, что при малых $s\geqslant0$ точки кривой $\gamma(s)$ с $\gamma'(0)\in\mathrm{int}\,\Xi_{T,\varepsilon}(\tilde{x})$ лежат в $C^{\varepsilon}_{T,\tilde{x}}$. Обозначим $Y_{t,v(\cdot)}=v(t)e^{t\,\mathrm{ad}\,f}g$. Тогда

$$C^{\varepsilon}_{T,\tilde{x}}=\left\{\tilde{x}\circ\left(\overrightarrow{\exp}\int_0^T Z_{t,v(t)}\,dt\circ e^{Y_{T,v(\cdot)}}\right)\right\}. \tag{4.8}$$

Заметим, что при $v(\cdot)\equiv0$ $Z_{t,v(\cdot)}=Y_{t,v(\cdot)}\equiv0$. Воспользовавшись формулой (2.2) для экспонент, стоящих в правой части (4.8), получим

$$\overrightarrow{\exp}\int_0^T Z_{t,v(t)}\,dt\circ e^{Y_{T,v(\cdot)}}=I+\int_0^T Z_{t,v(t)}\,dt+Y_{T,v(\cdot)}+\ldots, \tag{4.9}$$

где многоточием обозначены члены выше первого порядка малости по Z и Y. Обозначим $W(v(\cdot))=\int_0^T Z_{t,v(t)}dt+Y_{T,v(\cdot)}$. Образ отображения W, когда $v(\cdot)$ меняется на множестве абсолютно непрерывных функций, удовлетворяющих условию $|v|\leqslant\varepsilon$, есть выпуклое подмножество $T_{\tilde{x}}M$. Внутренность натянутого на него конуса совпадает с $\mathrm{int}\,\Xi_{T,\varepsilon}(\tilde{x})$ по определению $\Xi_{T,\varepsilon}(\tilde{x})$. В силу этого точки любой кривой $\gamma(s)$ $(s\geqslant0)$, лежащей при малых $s>0$ в $\mathrm{int}\,\Xi_{T,\varepsilon}(\tilde{x})$, лежат, если δ мало, при $|s|<\delta$ и во внутренности образа отображения W.

Из рассуждений, аналогичных используемым при доказательстве принципа максимума (см., например, [3, теорема VII.1]), вытекает существование $\delta' : 0 < \delta' < \delta$ такого, что при $|s| < \delta'$ точки кривой $\gamma(s)$ лежат в $C^{\varepsilon}_{T,\tilde{x}}$, что и доказывает предложение 3.

Из доказательства предложения 3 непосредственно следует

Предложение 4. *Если*

$$0 \in \operatorname{int} \Xi_{T,\varepsilon}(\tilde{x}) = \operatorname{int} \operatorname{con} (\{\tilde{x} \circ (e^{t \operatorname{ad} f} e^{v \operatorname{ad} g} f - f): 0 \leqslant t \leqslant T, |v| \leqslant \varepsilon\} \cup \{\tilde{x} \circ (\pm g)\}), \tag{4.10}$$

то система (1.1) *слабо локально управляема из точки* $\tilde{x}$ *за время* T.

5. Алгебраические условия слабой локальной управляемости. Всюду в этом пункте мы рассматриваем управляемую систему (1.1) при дополнительном условии $\tilde{x} \circ f = 0$. Обозначим через Φ матрицу Якоби $\Phi = \tilde{x} \circ \dfrac{\partial f}{\partial x}$. Тогда для любого векторного поля X на многообразии M верно: $\tilde{x} \circ (e^{t \operatorname{ad} f} X) = \tilde{x} \circ (e^{t\Phi} X)$. В этом случае условие (4.10) для системы (1.1) принимает вид

$$0 \in \operatorname{int} \Xi_{T,\varepsilon}(\tilde{x}) = \operatorname{int} \operatorname{con} (\{e^{t\Phi} (\tilde{x} \circ (e^{v \operatorname{ad} g} f)): 0 \leqslant t \leqslant T, |v| \leqslant \varepsilon\} \cup \{\tilde{x} \circ (\pm g)\}). \tag{5.1}$$

Так как матрица $e^{t\Phi}$ определяет линейное преобразование касательного пространства $T_{\tilde{x}}M$, то в силу (4.6)

$$\Xi_{T,\varepsilon}(\tilde{x}) = \{e^{t\Phi} (\operatorname{con} (\{\tilde{x} \circ (e^{v \operatorname{ad} g} f): |v| \leqslant \varepsilon\} \cup \{\tilde{x} \circ (\pm g)\})): 0 \leqslant t \leqslant T\}.$$

Исследуем множество $\operatorname{con}(\{\tilde{x} \circ (e^{v \operatorname{ad} g} f) : |v| \leqslant \varepsilon\} \cup \{\tilde{x} \circ (\pm g)\})$. Для этого рассмотрим наименьшее четное $j \geqslant 0$ такое, что

$$(\tilde{x} \circ ((\operatorname{ad} g)^j f)) \notin \operatorname{span} (\{\tilde{x} \circ ((\operatorname{ad} g)^i f): 1 \leqslant i < j\} \cup \{\tilde{x} \circ g\}). \tag{5.2}$$

Если условие (5.2) не выполнено ни для какого четного j, положим $j = +\infty$. Обозначим

$$\hat{\mathscr{L}}_{\tilde{x}} = \begin{cases} \operatorname{span} (\{\tilde{x} \circ ((\operatorname{ad} g)^i f): 1 \leqslant i < j\} \cup \{\tilde{x} \circ g\}), & \text{если } j < +\infty, \\ \operatorname{span} (\{\tilde{x} \circ ((\operatorname{ad} g)^i f): 1 \leqslant i < +\infty\} \cup \{\tilde{x} \circ g\}), & \text{если } j = +\infty. \end{cases}$$

Имеет место

Предложение 5. *Линейное пространство* $\hat{\mathscr{L}}_{\tilde{x}}$ *и вектор* $\tilde{x} \circ ((\operatorname{ad} g)^j f)$ *(если* $j < +\infty$*) содержатся в конусе*

$$\mathscr{F}_{\varepsilon} = \operatorname{con} (\{\tilde{x} \circ (e^{v \operatorname{ad} g} f): |v| \leqslant \varepsilon\} \cup \{\tilde{x} \circ (\pm g)\}) \subseteq T_{\tilde{x}}M.$$

Доказательство проводится от противного. Если указанное утверждение неверно, то в силу выпуклости $\mathscr{F}_{\varepsilon}$ существует вектор $q \in \hat{\mathscr{L}}_{\tilde{x}}$ и ковектор $\psi \in T^*_{\tilde{x}}M$ $(\psi \neq 0)$ такие, что, положив $\varphi(v) = \langle \psi, (\tilde{x} \circ (e^{v \operatorname{ad} g} f))\rangle$, получим

$$((\langle \psi, (\tilde{x} \circ ((\operatorname{ad} g)^j f))\rangle > 0) \vee (\langle \psi, q \rangle > 0)) \wedge (\forall v: |v| \leqslant \varepsilon, \varphi(v) \leqslant \leqslant 0) \wedge (\langle \psi, \tilde{x} \circ g \rangle = 0). \tag{5.3}$$

Очевидно, $\varphi(0) = 0$. Из (5.3) следует, что первая отличная от нуля производная $\varphi^{(k)}(0)$ должна быть четной, причем $\varphi^{(k)}(0) < 0$. Докажем, что $k \geqslant j$. В самом деле, если четное $k < j$ и $\varphi^{(l)}(0) = \langle \psi, (\tilde{x} \circ ((\operatorname{ad} g)^l f))\rangle = 0$ при всех $l < k$, то по определению j

$$(\tilde{x} \circ ((\operatorname{ad} g)^k f)) \in \operatorname{span} (\{\tilde{x} \circ ((\operatorname{ad} g)^l f): l < k\} \cup \{\tilde{x} \circ g\}),$$

и, следовательно, $\varphi^{(k)}(0) = \langle \psi, (\tilde{x} \circ ((\operatorname{ad} g)^k f))\rangle = 0$. Таким образом, $k \geqslant j$

и, значит, $\varphi^{(j)}(0)=\langle\psi, (\tilde{x}\circ((\mathrm{ad}\,g)^j f))\rangle\leqslant 0$, что противоречит (5.3). Предложение 5 доказано.

Из предложений 4 и 5 вытекает

Предложение 6. *Пусть* $\mathscr{K}$ — *конус, порожденный пространством* $\hat{\mathscr{L}}_{\tilde{x}}$ *и вектором* $(\tilde{x}\circ((\mathrm{ad}\,g)^j f))$ *(если* $j<+\infty$*). Если* $\Phi=\tilde{x}\circ\partial f/\partial x$ *и* $\mathrm{con}\{e^{t\Phi}\mathscr{K}: 0\leqslant t\leqslant T\}=\mathrm{T}_{\tilde{x}}M$, *то система* (1.1) *слабо локально управляема из* $\tilde{x}$ *за время* T.

Доказательство. В силу предложения 5 $\mathscr{F}_\varepsilon\supseteq\mathscr{K}$ и, следовательно,

$$0\in\mathrm{int}\,\mathrm{T}_{\tilde{x}}M=\mathrm{int}\,\mathrm{con}\{e^{t\Phi}\mathscr{K}: 0\leqslant t\leqslant T\}\subseteq$$
$$\subseteq\mathrm{int}\,\mathrm{con}\{e^{t\Phi}\mathscr{F}_\varepsilon: 0\leqslant t\leqslant T\}=\mathrm{int}\,\Xi_{T,\varepsilon}(\tilde{x}),$$

т. е. выполнено условие (4.10) предложения 4. Предложение 6 доказано.

Выведем из предложения 6 условие слабой локальной управляемости системы (1.1) из точки $\tilde{x}$ за некоторое достаточно большое время T.

Пусть $\hat{\mathscr{L}}_{\tilde{x}}$ — подпространство $\mathrm{T}_{\tilde{x}}M$, определенное выше, $\mathscr{L}^0_{\tilde{x}}$ — минимальное инвариантное относительно преобразования Φ подпространство касательного пространства $\mathrm{T}_{\tilde{x}}M$, содержащее $\hat{\mathscr{L}}_{\tilde{x}}$. В этом случае Φ корректно определено на фактор-пространстве $\mathrm{T}_{\tilde{x}}M/\mathscr{L}^0_{\tilde{x}}$. Если $\mathscr{L}^0_{\tilde{x}}$ совпадает с $\mathrm{T}_{\tilde{x}}M$, то в силу предложения 6 система слабо локально управляема из точки $\tilde{x}$ за любое время $T>0$. В противном случае имеет место

Предложение 7. *Если вектор* $(\tilde{x}\circ((\mathrm{ad}\,g)^j f))$ *не принадлежит никакому нетривиальному инвариантному относительно* Φ *подпространству пространства* $\mathrm{T}_{\tilde{x}}M/\mathscr{L}^0_{\tilde{x}}$ *и все собственные значения преобразования* Φ, *определенного на* $\mathrm{T}_{\tilde{x}}M/\mathscr{L}^0_{\tilde{x}}$, *не вещественные, то система* (1.1) *слабо локально управляема из* $\tilde{x}$ *за достаточно большое время* $T>0$.

Доказательство. Рассмотрим произвольный ковектор $\psi\in(\mathrm{T}_{\tilde{x}}M/\mathscr{L}^0_{\tilde{x}})^*$, $\psi\neq 0$. Если $\langle\psi, (\tilde{x}\circ(e^{t\Phi}((\mathrm{ad}\,g)^j f)))\rangle\equiv 0$, то это означает, что инвариантное относительно Φ подпространство $\mathrm{span}\{\tilde{x}\circ(e^{t\Phi}\times\times((\mathrm{ad}\,g)^j f)), t\in R\}$ содержит вектор $(\tilde{x}\circ((\mathrm{ad}\,g)^j f))$ и ортогонально ψ, т. е. не совпадает с $\mathrm{T}_{\tilde{x}}M/\mathscr{L}^0_{\tilde{x}}$, что противоречит условию.

Пусть $\omega(t)=\langle\psi,(\tilde{x}\circ(e^{t\Phi}((\mathrm{ad}\,g)^j f)))\rangle\not\equiv 0$. Докажем, что $\omega(t)$ меняет знак на некотором интервале $[0, T]$. В самом деле, пусть $R(\lambda)$ — характеристический полином преобразования Φ, определенного на $\mathrm{T}_{\tilde{x}}M/\mathscr{L}^0_{\tilde{x}}$, $R(\Phi)=0$. Рассмотрим дифференциальный оператор $R\left(\frac{d}{dt}\right)$. Очевидно, $R\left(\frac{d}{dt}\right)\omega=0$, т. е. $\omega(t)$ — ненулевое решение линейного однородного уравнения с постоянными коэффициентами. Так как все собственные значения преобразования Φ невещественные, $\omega(t)$ имеет вид

$$\omega(t)=\sum_{k=1}^{m}e^{\alpha_k t}(P_{r_k}(t)\cos\beta_k t+Q_{r_k}(t)\sin\beta_k t)=\sum_{s=1}^{N}a_s e^{\alpha_s t}t^{r_s}\begin{pmatrix}\cos\beta_s t\\ \sin\beta_s t\end{pmatrix}. \quad (5.4)$$

Выделим в правой части (5.4) все мономы, отвечающие наибольшему из α_s, а из них те, для которых максимальна степень r_s вхождения t. Очевидно, при больших t знак $\omega(t)$ определяется суммой этих мономов, т. е. выражением вида

$$e^{\alpha t}t^r\left(\sum_{l=1}^{m}(a_l\cos\beta_l t + b_l\sin\beta_l t)\right),\ \beta_l\neq 0.$$

Как известно, любой тригонометрический полином вида $P(t)=\sum_{l=1}^{m}(a_l\cos\beta_l t+b_l\sin\beta_l t)$, отличный от нуля, есть знакопеременная функция на любом интервале вида $(\hat{t},+\infty)$, что и доказывает знакопеременность $\omega(t)$.

В силу произвольности выбора ψ из доказанного выше следует, что конус $\mathscr{H}_T=\operatorname{con}\{e^{t\Phi}(\tilde{x}\circ((\operatorname{ad}g)^j f)):0\leqslant t\leqslant T\}$ при всех достаточно больших T дополнителен к $\mathscr{L}^0_{\tilde{x}}$, т. е. $\mathscr{H}_T+\mathscr{L}^0_{\tilde{x}}=T_{\tilde{x}}M$ и, следовательно, в силу включения $\mathscr{H}_T+\mathscr{L}^0_{\tilde{x}}\subseteq\operatorname{con}\{e^{t\Phi}\mathscr{K}:0\leqslant t\leqslant T\}$, мы находимся в условиях применимости предложения 6, т. е. система (1.1) слабо локально управляема из $\tilde{x}$ за достаточно большое время T. Предложение 7 доказано.

Исследуем теперь слабую локальную управляемость системы (1.1) за произвольно малое время $T>0$. Очевидно, что если найдется число m такое, что $\operatorname{span}\{\Phi^k\hat{\mathscr{L}}_{\tilde{x}}:\ 0\leqslant k\leqslant m\}=T_{\tilde{x}}M$, то при любом сколь угодно малом $T>0$ для системы (1.1) выполнены условия предложения 6 и, стало быть, имеет место

Предложение 8. *Пусть j — индекс, определенный при формулировке предложения* 5. *Если существует число m такое, что*

$$\operatorname{span}(\{\tilde{x}\circ((\operatorname{ad}f)^k(\operatorname{ad}g)^i f):\ 0\leqslant k\leqslant m,\ 1\leqslant i<j\}\cup\{\tilde{x}\circ g\})=T_{\tilde{x}}M,\quad(5.5)$$

то система (1.1) *слабо локально управляема из $\tilde{x}$ за любое* (*сколь угодно малое*) *время $T>0$.*

Замечание. В [4] приведено следующее условие локальной управляемости системы (1.1) за сколь угодно малое время $T>0$.

Теорема ([4]). *Пусть $S^k(f,g)$ — линейная оболочка значений в точке $\tilde{x}$ всевозможных коммутаторов векторных полей f и g, в которые g входит не более k раз. Если $\tilde{x}\circ f=0$ и*

1) *для некоторого k $S^k(f,g)$ совпадает с* $T_{\tilde{x}}M$;

2) *для любого нечетного i $S_{i+1}(f,g)=S_i(f,g)$,*

то система (1.1) *локально управляема из $\tilde{x}$ за сколь угодно малое время $T>0$.*

Сравнение условия (5.5) предложения 8 с условиями 1) и 2) сформулированной теоремы показывает, что два этих утверждения не сводимы друг к другу.

6. Оптимальное быстродействие в задаче управления кинетическим моментом вращающегося твердого тела. Свободное вращение твердого тела описывается уравнением Эйлера (см. [5]): $\dot{K}=K\times BK$, где $K\in R^3$ — вектор кинетического момента в системе координат, связанной с телом, B — симметричная (3×3)-матрица, обратная к тензору инерции тела A, знак «$\times$» обозначает векторное произведение в R^3. Обозначим через $I_1<I_2<I_3$ главные центральные моменты инерции тела (тело динамически асимметрично), $J_1>J_2>J_3$ — величины, обратные к ним (J_1, J_2, J_3 — собственные значения матрицы B).

Если к телу приложен управляющий момент, вдоль оси $\bar{L}$, проходящей через центр масс, то управляемое движение вектора кинетического момента K описывается уравнением

$$\dot{K}=K\times BK+Lu, \tag{6.1}$$

где L — вектор единичной длины, лежащий на оси $\bar{L}$.

Будем предполагать, что ось $\bar{L}$ находится в общем положении: $\bar{L}$ не совпадает ни с одной из главных осей инерции тела и не лежит ни в одной из плоскостей сепаратрис Π_1, Π_2, задаваемых в главных осях уравнениями $\sqrt{J_1-J_2}K_1\pm\sqrt{J_2-J_3}K_3=0$.

Из результатов [6] следует, что при общем положении $\bar{L}$ точный ранг (а значит и ранг) системы (6.1) равен 3. То же, очевидно, верно для системы (6.1) с обращенным временем, обозначаемой (6.1$^-$). Тем самым, для систем (6.1) и (6.1$^-$) выполнены условия теорем 2.4, 2.5 (см. п. 2) и предложение 1 п. 3.

Рассмотрим для управляемой системы (6.1) задачу быстродействия

$$T\to\min \tag{6.2}$$

с граничными условиями

$$K(0)=\tilde{K}, \quad K(T)=\hat{K}. \tag{6.3}$$

Для исследования задачи (6.1)—(6.3) применим к системе (6.1) редукцию, описанную в п. 3, положив $f=K\times BK$, $g=L$. В результате получим плоскую систему

$$\dot{K}=K\circ(e^{v\,\mathrm{ad}\,g}f)=K\circ(e^{vg}\circ f\circ e^{-vg}),$$

эквивалентную, в силу того, что $g=L$ — постоянное поле, системе $\dot{K}=K\circ(e^{vg}f)$ или

$$\dot{K}=(K+vL)\times B(K+vL). \tag{6.4}$$

Заметим, что в случае постоянного поля $g=L$ фактор-многообразие $(R^3)^g$ отождествимо с плоскостью P, проходящей через начало координат O и перпендикулярной оси $\bar{L}$. При этом отождествлении система (6.4), определенная на $(R^3)^g$, переходит в систему

$$\begin{aligned}\dot{K}&=(K+vL)\times B(K+vL)-\langle(K+vL)\times B(K+vL),L\rangle L=\\&=(K+vL)\times B(K+vL)-\langle K\times B(K+vL),L\rangle L,\end{aligned} \tag{6.5}$$

правая часть которой есть проекция на P правой части (6.4). Любая траектория системы (6.5), порожденная абсолютно непрерывным управлением $v(t)$, есть проекция на P некоторой (неединственной!) траектории системы (6.4).

Введем на плоскости P декартову систему координат Oy_1y_2, направив ось Oy_1 вдоль вектора $L\times BL$ и ось Oy_2 — вдоль вектора $L\times(L\times BL)$. В этой системе координат (6.5) принимает вид

$$\begin{aligned}\dot{y}_1&=b_{13}y_2^2+(-b_{23}y_1+(b_{11}-b_{33})y_2)v+v^2,\\ \dot{y}_2&=-b_{13}y_1y_2+((b_{22}-b_{11})y_1+b_{23}y_2)v,\end{aligned} \tag{6.6}$$

где b_{ij} — компоненты тензора B в базисе L, $L\times BL$, $L\times(L\times BL)$. Очевидно, $b_{ij}=b_{ji}$, а непосредственное вычисление дает также $b_{13}<0$, $b_{22}-b_{11}\neq 0$.

Рассмотрим для управляемой системы (6.6) задачу быстродействия, задав условия

$$y(0)=\tilde{y},\ y(T)=\hat{y},\ T\to\min\,(y=(y_1,y_2)). \tag{6.7}$$

Установим связь между оптимальными траекториями задачи (6.1)—(6.3) и задачи (6.6)—(6.7).

Определение. Назовем управление $\bar{u}(t)$ и порожденную им траекторию $\bar{K}(t)$ системы (6.1) сильно локально оптимальными, если для любых точек $K^1=\bar{K}(t_1)$, $K^2=\bar{K}(t_2)$ существует δ-окрестность управления $\bar{u}(t)$ в метрике скользящих режимов (δ — одинаково для всех пар точек K^1, K^2 траектории $\bar{K}(t)$) такая, что для любого управления $u(\cdot)$ из этой δ-окрестности, переводящего систему (6.1) из K^1 в K^2 за время T, верно $T\geqslant t_2-t_1$.

Определение. Управление $\bar{v}(t)$ и порожденная им траектория $\bar{y}(t)$ системы (6.6) локально оптимальны, если существует δ-окрестность управления $\bar{v}(t)$ в метрике $L_\infty[0, T]$ такая, что для любых точек $y^1=\bar{y}(t_1)$, $y^2=\bar{y}(t_2)$ траектории $\bar{y}(t)$ и любого управления $v(\cdot)$ из этой δ-окрестности, переводящего систему (6.6) из y^1 в y^2 за время T, верно $T\geqslant t_2-t_1$.

Пусть $\bar{v}(t)$, $\bar{y}(t)$ локально оптимальны для системы (6.6), $\bar{v}(\cdot)$ — абсолютно непрерывна; $\bar{u}(t)$, $\bar{K}(t)$ — управление и соответствующая траектория системы (6.1), переходящие при редукции системы (6.1) к (6.6) соответственно в $\bar{v}(t)$, $\bar{y}(t)$. По определению редукции (см. п. 3), δ-окрестность $\bar{u}(\cdot)$ в метрике скользящих режимов отображается при редукции внутрь δ-окрестности $\bar{v}(\cdot)$ в метрике $L_\infty[0, T]$. Отсюда немедленно следует, что локальная оптимальность $\bar{v}(t)$, $\bar{y}(t)$ для системы (6.6) влечет за собой сильную локальную оптимальность соответствующей пары $\bar{u}(t)$, $\bar{K}(t)$ для системы (6.1).

Оказывается, что рассматриваемая задача быстродействия (6.1)—(6.3) имеет много сильно локально оптимальных траекторий, но не имеет ни одной глобально оптимальной, а именно справедливы следующие утверждения:

Предложение 9. *Для любой точки $\tilde{K}\in R^3$ существует однопараметрическое семейство выходящих из $\tilde{K}$ сильно локально оптимальных по быстродействию траекторий $K^\alpha(t)$ системы* (6.1), *порожденных соответствующими управлениями $u^\alpha(t)$.*

Доказательство. Составим для редуцированной управляемой системы (6.6) гамильтониан

$$\begin{aligned} H = \psi_1 (b_{13}y_2^2 + (-b_{23}y_1 + (b_{11}-b_{33})\, y_2)\, v + v^2) + \\ + \psi_2 (-b_{13}y_1y_2 + ((b_{22}-b_{11})\, y_1 + b_{23}y_2)\, v), \end{aligned} \tag{6.8}$$

и выпишем сопряженную систему

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_1 &= -\frac{\partial H}{\partial y_1} = b_{23}v\psi_1 + (b_{13}y_2 - (b_{22}-b_{11})\, v)\, \psi_2, \\ \dot{\psi}_2 &= -\frac{\partial H}{\partial y_2} = -(2b_{13}y_2 + (b_{11}-b_{33})\, v)\, \psi_1 + (b_{13}y_1 - b_{23}v)\, \psi_2. \end{aligned} \tag{6.9}$$

Очевидно, что, если $\psi_1<0$, то квадратичный по v гамильтониан H достигает при

$$v = -\frac{1}{2}(-b_{23}y_1 + (b_{11}-b_{33})\, y_2) - \frac{\psi_2}{2\psi_1}((b_{22}-b_{11})\, y_1 + b_{23}y_2) \tag{6.10}$$

максимума, равного

$$H_{\max} = b_{13}(\psi_1 y_2^2 - \psi_2 y_1 y_2) - \frac{\beta^2}{4\psi_1},$$

где β для краткости обозначает коэффициент при v в выражении (6.8). Очевидно, при $\psi_1<0$ выполнено усиленное условие Лежандра $\frac{\partial^2 H}{\partial v^2}=\psi_1<0$, а при дополнительном условии $\operatorname{sgn}\psi_2=\operatorname{sgn} y_1y_2$ (с учетом неравенства $b_{13}<0$) верно $H_{\max}>0$, т. е. выполнено соответствующее условие трансверсальности в задаче (6.6)—(6.7).

Подставив (6.10) в (6.6) и (6.9), получим систему дифференциальных уравнений четвертого порядка. Задав начальные условия: $y_1(0)=\tilde{y}_1$, $y_2(0)=\tilde{y}_2$, $\psi_1(0)=-1$, $\psi_2(0)=\alpha$ (α — параметр, $\operatorname{sgn}\alpha=\operatorname{sgn} y_1y_2$), получим семейство траекторий $y^\alpha(\cdot)$, $\psi^\alpha(\cdot)$ этой системы, а из (6.10) — соответствующее семейство управлений $v^\alpha(\cdot)$. Принцип максимума в сочетании с усиленным условием Лежандра и условием трансверсальности гарантирует локальную оптимальность по быстродействию некоторого участка любой из траекторий $y^\alpha(\cdot)$.

В силу сказанного выше любая пара $u^\alpha(\cdot)$, $K^\alpha(\cdot)$, переходящая при редукции в пару $v^\alpha(\cdot)$, $y^\alpha(\cdot)$, является сильно локально оптимальной по быстродействию для системы (6.1). Предложение 9 доказано.

Предложение 10. *В задаче* (6.1)—(6.3) *существует минимизирующая последовательность управлений* $\{u_n(\cdot)\}$, *приводящих систему* (6.1) *из* $\tilde{K}$ *в* $\hat{K}$ *за время* T_n, *причем* $\lim\limits_{n\to\infty} T_n=0$. *Иными словами, система* (6.1) *приводима из* $\tilde{K}$ *в* $\hat{K}$ *за сколь угодно малое время* $T>0$.

Замечание. Вообще говоря, имеет место утверждение более сильное, чем предложения 9 и 10. Можно показать, что для любого фиксированного компакта $C\subset R^3$ (например, компактного шара), содержащего точки $\tilde{K}$ и $\hat{K}$, и для множества траекторий γ системы (6.1), каждая из которых приходит из $\tilde{K}$ в $\hat{K}$ за время T_γ, оставаясь при этом в компакте C, имеет место: $\inf\limits_{\gamma} T_\gamma=T_{C,\tilde{K},\hat{K}}>0$. Если C_n — набор компактных шаров, $C_1\subset C_2\subset\ldots\subset C_n\subset\ldots$, $\bigcup\limits_i C_i=R^3$, то $\lim\limits_{n\to\infty} T_{C_n,\tilde{K},\hat{K}}=0$.

Доказательство предложения 10. Сформулируем и докажем вначале вспомогательную лемму:

Лемма 11. *Утверждение предложения* 10 *верно для редуцированной системы* (6.6).

Доказательство леммы 11. В полярных координатах (r, φ) ($y_1=r\cos\varphi$, $y_2=r\sin\varphi$) система (6.6) принимает вид

$$\dot{r}=r\cdot F(\cos\varphi,\ \sin\varphi)\,v+\cos\varphi v^2, \tag{6.11}$$

$$\dot{\varphi}=-b_{13}r\sin\varphi-\frac{1}{r}\sin\varphi v^2+G(\cos\varphi, \sin\varphi)\,v, \tag{6.12}$$

где F, G — однородные полиномы степени 2, причем $G(\pm1, 0)=b_{22}-b_{11}\neq 0$.

Докажем, что система (6.6) обладает траекторией γ, начинающейся и заканчивающейся на положительной полуоси Oy_1 и охватывающей начало координат O. Заметим, что первое и второе слагаемые в правой части (6.12) имеют (так как $b_{13}<0$) разные знаки. Полагая

$$\hat{v}_\varepsilon(r,\varphi)=\hat{v}_\varepsilon(\varphi)=\begin{cases}0, \sin\varphi>\varepsilon,\\ \pm k, \sin\varphi<-\varepsilon)\\ (b_{22}-b_{11}), |\sin\varphi|\leqslant\varepsilon,\end{cases} \tag{6.13}$$

получаем, что $\forall\rho_0>0$ существуют достаточно большое k и достаточно малое $\varepsilon>0$ такие, что при $|r|\geqslant\rho_0$ верно (в силу (6.12), (6.13)) неравенство

$$\dot\varphi\geqslant a>0, \tag{6.14}$$

т. е. φ монотонно возрастает вдоль любой траектории γ системы (6.11), (6.12), порожденной управлением (6.13) и содержащейся в области $r\geqslant\rho_0$.

Докажем существование такой траектории. В силу произвольности $\rho_0>0$ достаточно доказать существование траектории системы (6.11), порожденной управлением (6.13), не проходящей через O. Из (6.6), (6.12), (6.13) вытекает, что любая траектория (6.6), проходящая в момент времени $\hat t$ через O, касается оси Oy_1 и $\lim\limits_{t\to\hat t-0}\varphi(t)=\pi-0$.

Зафиксируем ρ_0 и возьмем начальную точку $\bar y$ на оси Oy_1 с полярными координатами $r=\rho_1$, $\varphi=0$ $(\rho_1>\rho_0)$. Так как $\hat v_\varepsilon(\varphi)$ — ограниченная функция, правая часть (6.11) допускает оценку

$$|\dot r|\leqslant\mu r+\nu. \tag{6.15}$$

Из дифференциального неравенства (6.15) вытекает ([7]), что при изменении φ вдоль траектории от $\varphi(0)=0$ до $\varphi(t_\varepsilon)=\arcsin\varepsilon$ верно $r(t)\geqslant$ $\geqslant\rho_1e^{-\mu t_\varepsilon}-\nu t_\varepsilon$ или в силу (6.14) $r(t)\geqslant\rho_1e^{-\mu\frac{\arcsin\varepsilon}{a}}-\nu\dfrac{\arcsin\varepsilon}{a}$. При изменении φ вдоль траектории от $\arcsin\varepsilon$ до $\pi-\arcsin\varepsilon$ управление $\hat v_\varepsilon(\varphi)$ в силу (6.13) равно 0, и из (6.11) следует, что $r(t)=\mathrm{const}$. При изменении φ вдоль траектории от $\pi-\arcsin\varepsilon$ до π получаем из (6.14), (6.15)

$$r(t)\geqslant r(t_\varepsilon)\,e^{-\mu\frac{\arcsin\varepsilon}{a}}-\nu\frac{\arcsin\varepsilon}{a}.$$

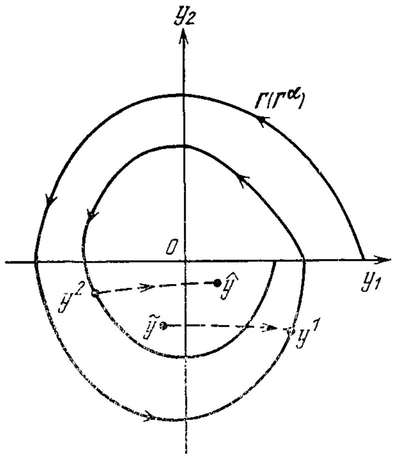
или $r(t)\geqslant\rho_1\cdot e^{-2\mu\frac{\arcsin\varepsilon}{a}}-2\nu\dfrac{\arcsin\varepsilon}{a}$. Очевидно, выбирая ε достаточно малым, получим $r(t)\geqslant\rho_0$, что и требовалось.

Таким образом, траектория γ системы (6.6), порожденная управлением (6.13) и начинающаяся на положительной полуоси Oy_1, не проходит через начало координат и в силу монотонного изменения φ вдоль γ возвращается через конечное время t_0 на положительную полуось Oy_1. Аналогично можно построить траекторию Γ системы (6.6), совершающую два оборота вокруг точки O за конечное время T_Γ (см. рис.), порожденную управлением $\hat v(\cdot)$.

Отметим, что система (6.6) (как и система (6.1)) обладает очевидной автомодельностью — она инвариантна относительно замены переменных: $y_1\to\alpha y_1$, $y_2\to\alpha y_2$, $v\to\alpha v$, $t\to\alpha^{-1}t$ $(\alpha>0)$. Следовательно, кривая $\Gamma^\alpha=\alpha\Gamma$ также является допустимой траекторией системы (6.6), порожденной управлением $\hat v^\alpha(\varphi)=\alpha\hat v(\varphi)$, причем время ее обхода $T_{\Gamma\alpha}=\alpha^{-1}T_\Gamma$.

Докажем, что если $\tilde y$ и $\hat y$ — произвольные точки плоскости P и $\varepsilon>0$, то $\hat y$ достижима из $\tilde y$ в силу системы (6.6) с помощью некоторого управления $w(\cdot)$ за время $T\leqslant\varepsilon$.

Выберем $\alpha>0$ такое, чтобы: 1) точки $\tilde y$ и $\hat y$ охватывались траекторией Γ^α; 2) $\alpha^{-1}T_\Gamma\leqslant\dfrac{\varepsilon}{3}$. Из вида правой части (6.6) следует, что выбором большого по абсолютной величине v можно обеспечить сколь угодно быстрое движение системы (6.6) в положительном направлении оси Oy_1 по траектории, близкой к горизонтали. Аналогично, для системы (6.6) с обращенным временем большое по абсолютной величине управление v обеспечивает сколь угодно быстрое перемещение в отрицательном направлении оси Oy_1. Следовательно существует управление $v^1(t)$, приводящее систему (6.6) из точки $\tilde{y}$ в точку y^1 на траектории Γ^α за время $\tau_1 \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$, и управление $v^2(t)$, приводящее систему (6.6) с обращенным временем из точки $\hat{y}$ в точку $y^2 \in \Gamma^\alpha$ за время $\tau_2 \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$. Последнее означает, что система (6.6) приходит из y^2 в $\hat{y}$ с помощью управления $v^2(t)$ за то



же время $\tau_2 \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$. Переход системы (6.6) из y^1 в y^2 с помощью управления $\hat{v}^\alpha(t) = \alpha\hat{v}(\alpha^{-1}t)$ вдоль траектории Γ^α происходит за время $\tau_0 \leqslant \leqslant T_{\Gamma^\alpha} \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$ (см. рис.).

Искомое управление $w(\cdot)$ определяется формулой

$$w(t) = \begin{cases} v^1(t), 0 \leqslant t \leqslant \tau_1, \\ \hat{v}^\alpha(t), \tau_1 < t \leqslant \tau_1 + \tau_0, \\ v^2(t), \tau_1 + \tau_0 \leqslant t \leqslant \tau_1 + \tau_0 + \tau_2. \end{cases}$$

Очевидно, $w(t)$ переводит систему (6.6) из точки $\tilde{y}$ в точку $\hat{y}$ за время $\tau_1 + \tau_0 + \tau_2 \leqslant \varepsilon$. Лемма 11 доказана.

Рассмотрим вновь задачу оптимального быстродействия (6.1)—(6.3). Спроецируем точки $\tilde{K}$ и $\hat{K}$ на плоскость P в точки $\tilde{y} = \pi(\tilde{K})$, $\hat{y} = \pi(\hat{K})$ соответственно. Рассмотрим δ-окрестность $U_\delta(\hat{y})$ точки $\hat{y}$. В силу леммы 11 для любого $\varepsilon > 0$ и любого $y \in U_\delta(\hat{y})$ существует управление $w(t)$, приводящее систему (6.6) из $\tilde{y}$ в y за время $\leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Обозначим через $D_{\leqslant \frac{\varepsilon}{2}, \tilde{y}}$ множество достижимости системы (6.6) из точки $\tilde{y}$ за время $\leqslant \frac{\varepsilon}{2}$; тогда $U_\delta(\hat{y}) \subseteq D_{\leqslant \frac{\varepsilon}{2}, \tilde{y}}$. В силу предложения 1 внутренность множества достижимости $A_{\leqslant \frac{\varepsilon}{2}, \tilde{K}}$ системы (6.1) из точки $\tilde{K}$ за время $\leqslant \frac{\varepsilon}{2}$

всюду плотна в множестве $\pi^{-1}(U_\delta(\hat{y}))\subseteq\pi^{-1}(D_{\leqslant\frac{\varepsilon}{2},\tilde{y}})$, т. е. в цилиндре C_δ с основанием $U_\delta(\hat{y})\subset P$ и образующей, параллельной $\bar{L}$. Очевидно,

$$\hat{K}\in\pi^{-1}(\hat{y})\subset\operatorname{int}C_\delta,\quad \hat{K}\in\operatorname{clos}\operatorname{int}A_{\leqslant\frac{\varepsilon}{2},\tilde{K}}.$$

Как было сказано выше, к системе (6.1⁻) (системе (6.1) с обращенным временем) применима теорема 2.5 п. 2. В частности, множество достижимости $A^-_{\leqslant\frac{\varepsilon}{2},\hat{K}}$ этой системы за время $\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$ из точки $\hat{K}$ имеет непустую внутренность, всюду плотную в $A^-_{\leqslant\frac{\varepsilon}{2},\hat{K}}$. Из включений

$$\hat{K}\in A^-_{\leqslant\frac{\varepsilon}{2},\hat{K}},\ \hat{K}\in\operatorname{int}C_\delta,\ \hat{K}\in\operatorname{clos}\operatorname{int}A_{\leqslant\frac{\varepsilon}{2},\tilde{K}}\supset C_\delta$$

вытекает $\operatorname{int}A^-_{\leqslant\frac{\varepsilon}{2},\hat{K}}\cap C_\delta\neq\varnothing$ и, следовательно,

$$\operatorname{int}A^-_{\leqslant\frac{\varepsilon}{2},\hat{K}}\cap\operatorname{int}A_{\leqslant\frac{\varepsilon}{2},\tilde{K}}\neq\varnothing.$$

Если $K^1\in\operatorname{int}A^-_{\leqslant\frac{\varepsilon}{2},\hat{K}}\cap\operatorname{int}A_{\leqslant\frac{\varepsilon}{2},\tilde{K}}$, то система (6.1) приводима из $\tilde{K}$ в K^1 за время $\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$ и из K^1 в $\hat{K}$ за время $\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$, а стало быть из $\tilde{K}$ в $\hat{K}$ за время $\leqslant\varepsilon$. Предложение 10 доказано.

Литература

1. *Аграчев А. А., Гамкрелидзе Р. В.* Экспоненциальное представление потоков и хронологическое исчисление.— Матем. сб., 1978, т. 107(149), с. 476—532.
2. *Sussmann H. J., Jurdjevic V.* Controllability of nonlinear systems.— J. Diff. Equat., 1972, v. 12, p. 95—116.
3. *Гамкрелидзе Р. В.* Основы оптимального управления. Тбилиси: Изд-во Тбилисского ун-та, 1977.
4. *Sussmann H. J.* Lie brackets, real analiticity and geometric control.— Differential geometric control theory. Proc. of the conf. held at Michigan Technol. Univ., June 28— July 2, 1982. Birkhauser, Boston — Basel — Stuttgart, 1983, p. 1—116.
5. *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики. М.: Наука, 1974.
6. *Agrachev A. A., Sarychev A. V.* The control of rotation for asymmetric rigid body.— Probl. of Control and Information Theory, 1983, v. 12(5), p. 335—347.
7. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970.

ВИНИТИ ГКНТ и АН СССР
Москва

Поступила в редакцию
11.III.1985