

# Построение линейного регулятора с помощью разделения движений<sup>1</sup>

М.Г. Дмитриев, Д.А. Макаров

**Аннотация.** В работе рассматривается подход к построению стабилизирующей обратной связи для линейной нестационарной системы на основе гипотезы о существовании в системе быстрых и медленных движений. Эта гипотеза приводит к разделению исходной системы на две подсистемы, где в каждой строится своя стабилизирующая обратная связь, которые потом объединяются в составной (композитный) регулятор. В работе предлагается более общий алгоритм построения композитного регулятора. Проведено численное моделирование замкнутой системы управления для задачи стабилизации продольного движения вертолета.

**Ключевые слова:** теория автоматического управления, сингулярно возмущенные системы, метод малого параметра, композитный регулятор, управление вертолетом.

## Введение

При решении многих задач оптимизации и управления перспективным является сочетание формализованных и неформализованных процедур использования знаний. Использование качественных представлений позволяет расширить область применения традиционных численных процедур. Здесь продемонстрируем, что на основе использования гипотезы о существовании в системе управления быстрых и медленных движений и соответствующих элементов знаний из теории систем с быстрыми и медленными движениями можно предложить новые алгоритмы построения стабилизирующих управлений, расширяющие существующие. Эта гипотеза связана с выделением в исходной системе условного малого параметра – множителя при части производных. Если такое выделение возможно, тогда систему условно можно считать сингулярно возмущенной.

В литературе имеется [1,2] достаточно много работ, где исследуются алгоритмы построения робастной стабилизирующей обратной связи для сингулярно возмущенных систем управления. Гипотеза о существовании в системе малого параметра приводит к разделению системы на две подсистемы управления меньшей размерности (принцип разделения движения), в каждой из которых строится своя стабилизирующая обратная связь, которые потом объединяются в составной (композитный) регулятор.

Конечно, само понятие малого или большого параметра не является четким с точки зрения приложений, и попытки формализации резко сужают класс возможных применений. Строгие математические утверждения, гарантирующие корректность асимптотического анализа, как правило, не включают в себя практические случаи и применение асимптотики в численных расчетах, вообще говоря, является нестрогим, эвристическим приемом. Очевидно, что выбор малых или больших постоянных своего рода искусство и может опираться, с одной стороны, на анализ прецедентов, а

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты №12-07-31057, 10-01-00332-а, 12-06-00205-а) и Программы ОНИТ РАН (проект №2.10)

с другой – на использование знаний о свойствах моделей. Например, знания о подгруппе асимптотически устойчивых движений позволяет выдвинуть гипотезу, что соответствующие переменные могут быть объявлены быстрыми, и, следовательно, получить конкретный способ декомпозиции системы управления.

После выбора условных малых параметров проводится соответствующий асимптотический анализ и получаются приближения к решению. Такие приближенные решения, если параметр не является малым, могут содержать некоторую информацию, элементы знаний о качественной структуре решения. Поэтому представляет интерес применение принципа разделения движений при построении стабилизирующих управлений, где не требуется существование малого параметра, а его выделение является эвристическим приемом.

## 1. Постановка задачи

Пусть имеем нестационарную управляемую систему

$$\begin{aligned} \dot{y} &= A_1(t)y + A_2(t)z + B_1(t)u, \quad y(t_0) = y^0, \quad y \in R^n, \\ \varepsilon \dot{z} &= A_3(t)y + A_4(t)z + B_2(t)u, \quad z(t_0) = z^0, \quad z \in R^m, \quad u \in R^r, \quad t \in [t_0, \infty), \quad t_0 > 0. \end{aligned} \quad (1.1)$$

где  $\varepsilon$  – некоторый положительный параметр, не обязательно малый;  $y, z$  – фазовые координаты подсистем;  $u$  – управление.

Элементы всех матриц достаточно гладкие функции, и часть из них может содержать ограниченные интервальные неопределенности и при этом будем требовать существование  $A_4^{-1}(t)$  при всех  $t \in [t_0, \infty)$ .

Требуется построить управление в виде линейной обратной связи, такое, что замкнутая система будет асимптотически устойчива по Ляпунову для всех положительных значений параметра  $\varepsilon$  из некоторого ограниченного интервала.

Такая задача, при малых  $\varepsilon$ , т.е. для сингулярно возмущенных систем управления (1.1), рассматривалась в многочисленных публикациях (обзоры [1,2]). При этом приводилась естественная для сингулярно возмущенных систем приближенная декомпозиция исходной системы на две подсистемы управления, где в каждой строится своя стабилизирующая обратная связь, которые потом объединяются в составной (композитный) регулятор, стабилизирующий исходную систему (1.1).

Покажем, что более общий алгоритм построения композитного регулятора, заключающийся в построении линейной комбинации двух регуляторов, построенных на основе декомпозиции системы управления, позволяет стабилизировать (1.1) при значениях параметра  $\varepsilon$  не являющихся обязательно малыми.

## 2. Схема декомпозиции управляемой системы и структура регулятора

Идея заключается в том, чтобы расщепить (1.1) на две подсистемы, вводя условно разделение движений на две группы: с условно большими скоростями и условно малыми скоростями. Для этого, в группе уравнений, с превалирующими по модулю коэффициентами в правых частях, выделяется условный малый параметр  $\varepsilon > 0$ , который становится «меткой» группы быстрых движений. Эта метка является множителем при скоростях этих движений в представлении линейной системы управления в виде (1.1).

Первый регулятор  $u_s(y_s)$  строится для так называемой «медленной» подсистемы

$$\dot{y}_s = (A_1 - A_2 A_4^{-1} A_3) y_s + (B_1 - A_2 A_4^{-1} B_2) u_s, \quad (2.1)$$

получающейся из (1.1) при  $\varepsilon=0$  и подстановке корня  $z_s = -A_4^{-1}(A_3 y_s + B_2 u_s)$  соответствующей алгебраической системы в дифференциальное уравнение для  $y$ .

Второй регулятор  $u_f = u - u_s$  будем строить для «быстрой» подсистемы, полученной с помощью замены  $z_f = z - z_s = z - A_4^{-1}(A_3 y_s + B_2 u_s)$ .

$$\dot{z}_f = \frac{A_4(t)}{\varepsilon} z_f + \frac{B_2(t)}{\varepsilon} u_f + T(y, u, t)|_{u=u_s(y_s)} \quad (2.2)$$

где  $u_f = u - u_s$ ,

$$\begin{aligned} T(y, u, t)|_{u=u_s(y_s)} &= \frac{A_3}{\varepsilon}(y - y_s) + \frac{d}{dt} [A_4^{-1}(A_3 y_s + B_2 u_s(y_s))] = \frac{A_3}{\varepsilon}(y - y_s) + \frac{d}{dt} [A_4^{-1}(A_3 + B_2 N_s) y_s] = \\ &= \frac{A_3}{\varepsilon}(y - y_s) + \left[ \frac{dN_1}{dt} + N_1 (A_1 - A_2 A_4^{-1} A_3 + (B_1 - A_2 A_4^{-1} B_2) N_s) \right] y_s, \quad N_1 = A_4^{-1}(A_3 + B_2 N_s), \end{aligned}$$

если искать  $u_s(y)$ ,  $u_f(y, z)$  в виде  $u_s(y_s) = N_s(t) y_s$  и  $u_f(y_f, z_f) = M_f z_f + \varepsilon D y_f$ , где  $y_f = y - y_s$ , а  $N_s(t)$ ,  $M_f(t)$ ,  $D(t)$  – некоторые матрицы, выбор которых будет описан ниже. Отметим, что управления  $u_f(y_f, z_f) = M_f z_f + \varepsilon D y_f$ , содержит ненаблюдаемую координату  $y_f$  и не может быть реализовано прямым способом. Если все же существует возможность получать текущие значения  $y_f$  (например, из  $y_f = y - y_s$  с помощью численного моделирования (2.1) и значений измеряемой координаты  $y$ ) и матрица  $D$  может быть определена из уравнения

$$B_2 D = -\frac{A_3}{\varepsilon}, \quad (2.3)$$

тогда

$$T(y, u, t)|_{u=u_s(y_s)} = \left[ \frac{dN_1}{dt} + N_1 ((A_1 - A_2 A_4^{-1} A_3) + (B_1 - A_2 A_4^{-1} B_2) N_s) \right] y_s, \quad (2.4)$$

То есть с помощью соответствующего выбора  $D$  можно исключить  $y_f$  из (2.2). Вообще говоря, это делается для того, чтобы (2.2) имела схожесть с подсистемой для  $z_f$  в работах с малым  $\varepsilon$ , где фактически  $y_f = y - y_s = O(\varepsilon)$  и поэтому членом  $\varepsilon D y_f$  пренебрегают при расчете  $u_f$ .

Особенностью данной работы является поиск итогового композитного стабилизирующего управления  $u_c$  в виде линейной комбинации управлений подсистем, т.е.  $u_c = c_1 u_s + c_2 u_f$ , при произвольном  $\varepsilon > 0$ . Причем, несмотря на отсутствие предположения о достаточной малости  $\varepsilon$ , а, следовательно, и близости  $u$  к  $u_s$ , в итоговом композитном управлении  $u_c$  вместо  $y_s$  будем использовать  $y$ , а матрицу  $D$  положим нулевой. Тогда,  $u_c$  для системы (1.1) будет иметь вид

$$\begin{aligned} u_c(y, z) &= c_1 u_s(y_s)|_{y_s=y} + c_2 u_f(z_f, y_f)|_{D=0} = c_1 N_s(t) y + c_2 M_f(t) z_f = \\ &= c_1 N_s(t) y + c_2 (M_f(t) (z + A_4^{-1} (A_3 y + B_2 N_s(t) y))) = \\ &= (c_1 N_s(t) + c_2 M_f(t) A_4^{-1} (A_3 + B_2 N_s(t))) y + c_2 M_f(t) z, \\ &c_1, c_2 > 0. \end{aligned} \quad (2.5)$$

**Замечание 1.** Если  $\varepsilon$  достаточно мало, тогда  $T(y, t)$  в (2.2) можно пренебречь и управление  $u_f(x, y)$  будет близко к управлению в пограничном слое [1], или, точнее, к главному члену погранслоного ряда для управления, который, в свою очередь, есть некоторый регулятор в задаче

$$\frac{dz}{d\tau} = A_4(\theta)z + B_2(\theta)u_f \quad (2.6)$$

где  $\theta \in [t_0, \infty)$  – параметр,  $\tau = \frac{t}{\varepsilon}$  – «быстрое» время и управление  $u_f$  в «упрощенной» быстрой подсистеме (2.6) вместе с управлением  $u_s$  определяет итоговый композитный регулятор в виде суммы  $u_c = u_s + u_f$  [2].

### 3. Построение функции Ляпунова

Подставляя (2.5) в (1.1) получаем замкнутую систему

$$\begin{aligned} \dot{y} &= (A_1(t) + B_1(t)K_y)y + (A_2(t) + B_1(t)K_z)z, \\ \varepsilon \dot{z} &= (A_3(t) + B_2(t)K_y)y + (A_4(t) + B_2(t)K_z)z, \\ K_y &= c_1 N_s(t) + c_2 M_f(t) A_4^{-1} (A_3 + B_2 N_s(t)), \\ K_z &= c_2 M_f(t) \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \tilde{A}_1(t)y + \tilde{A}_2(t)z, \\ \varepsilon \dot{z} &= \tilde{A}_3(t)y + \tilde{A}_4(t)z, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где  $\tilde{A}_1(t) = A_1(t) + B_1(t)K_y$ ,  $\tilde{A}_2(t) = A_2(t) + B_1(t)K_z$ ,  
 $\tilde{A}_3(t) = A_3(t) + B_2(t)K_y$ ,  $\tilde{A}_4(t) = A_4(t) + B_2(t)K_z$ .

Теперь, следуя [4], в (3.1) производим замену переменных

$$v_1 = y, \quad v_2 = z + \tilde{A}_4^{-1} \tilde{A}_3 y. \quad (3.2)$$

Приходим к системе

$$\dot{v}_1 = \tilde{R}(t)v_1 + \tilde{A}_2(t)v_2, \quad (3.3)$$

$$\dot{v}_2 = \frac{\tilde{A}_4(t)}{\varepsilon} v_2 + \left\{ \left( \frac{d\tilde{K}}{dt} + \tilde{K}\tilde{R} \right) v_1 + \tilde{K}\tilde{A}_2(t)v_2 \right\}, \quad (3.4)$$

где  $\tilde{K} = \tilde{A}_4^{-1}(t)\tilde{A}_3(t)$ ,  $\tilde{R} = \tilde{A}_1 - \tilde{A}_2\tilde{A}_4^{-1}\tilde{A}_3$ .

В работе [4], на основе работы [5] показано, что композитный линейный регулятор  $u_c = u_s + u_f$  является стабилизирующим для системы (1.1) при достаточно малых  $\varepsilon > 0$ . Далее будем использовать схему рассуждений из [4] не предполагая, что  $\varepsilon > 0$  достаточно мало.

Введем две подсистемы замкнутой системы

$$\dot{p} = (\tilde{A}_1 - \tilde{A}_2\tilde{A}_4^{-1}\tilde{A}_3)p, \quad (3.5)$$

$$\dot{q} = \tilde{A}_4(\theta)q, \quad (3.6)$$

где  $\theta$  – фиксированный параметр,  $\theta \in [t_0, \infty)$ .

Введем условие

I. Положение равновесия  $p = 0$  в (3.5) равномерно асимптотически устойчиво.

Пусть  $M(\theta)$  есть единственная положительно определенная матрица – решение уравнения

$$\tilde{A}_4^T(\theta)M + M\tilde{A}_4(\theta) = -Q_2, \quad \theta \geq t_0 \quad (3.7)$$

где  $Q_2$  – заданная положительно определенная постоянная матрица. Такая матрица  $M(\theta)$  всегда существует [6], если выполняется условие

II.  $\operatorname{Re} \lambda(\tilde{A}_4(\theta)) < 0, \quad \forall \theta \in [t_0, \infty)$ .

Известно [6], что тогда  $q^T(t)M(\theta)q(t)$  есть параметрическое семейство функций Ляпунова для системы (3.6). Теперь рассмотрим квадратичную форму  $p^T N(t)p$ , являющуюся функцией Ляпунова для (3.5), где некоторая матрица  $N(t) > 0$  и чья производная в силу системы (3.5) есть квадратичная форма  $-p^T Q_1 p$ , с некоторой постоянной матрицей  $Q_1 > 0$ .

Теперь покажем, что при некоторых дополнительных условиях, можно надеяться на то, что квадратичная форма

$$\omega = v_1^T N(t)v_1 + v_2^T M(t)v_2 \quad (3.8)$$

есть функция Ляпунова для системы (3.3), (3.4) и она обеспечивает равномерную асимптотическую устойчивость (3.3), (3.4).

Действительно, из (3.8) и свойств  $N(t)$  и  $M(t)$  следует, что существуют скалярные монотонно возрастающие функции  $\omega_1(\cdot), \omega_2(\cdot)$ , такие что  $0 < \omega_1(\|v_1\|, \|v_2\|) \leq \omega \leq \omega_2(\|v_1\|, \|v_2\|)$  для всех  $t \geq t_0$  и всех  $\|v_1\| \neq 0, \|v_2\| \neq 0$  и при этом  $\omega_1(0) = \omega_2(0) = 0$ .

Теперь, нетрудно показать, что производная  $\dot{\omega}$  в силу системы (3.3), (3.4), которая, в смысле свойств устойчивости, эквивалентна (3.1), имеет вид

$$\dot{\omega} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}^T P(t) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -Q_1 & N\tilde{A}_2 + \left(\frac{d\tilde{K}}{dt} + \tilde{K}\tilde{R}\right)^T M \\ \left(N\tilde{A}_2 + \left(\frac{d\tilde{K}}{dt} + \tilde{K}\tilde{R}\right)^T M\right)^T & -\frac{Q_2}{\varepsilon} + L(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \quad (3.9)$$

где  $L(t) = \frac{dM(t)}{dt} + \tilde{K}^T(t)M(t) + M(t)\tilde{K}(t)$ .

Подставляя  $t$  вместо  $\theta$ , из (3.7) имеем

$$\frac{dM(t)}{dt} = \int_0^\infty e^{\tilde{A}_4^T(t)\sigma} \left[ \frac{d\tilde{A}_4^T(t)}{dt} M(t) + M(t) \frac{d\tilde{A}_4(t)}{dt} \right] e^{\tilde{A}_4(t)\sigma} d\sigma.$$

Введем условие

III. Матрицы  $M(t), \frac{d\tilde{A}_4(t)}{dt}$  непрерывные и ограниченные на  $[t_0, \infty)$ .

Тогда, учитывая II и III, имеем, что  $L(t)$  – ограниченная матрица для всех  $t \geq t_0$ . Из формулы Фробениуса [7] для блочных матриц имеем, что  $P$  – отрицательно определенная, если  $Q_1 > 0$  и

$$\frac{Q_2}{\varepsilon} - L(t) - \left[ N\tilde{A}_2 + \left( \frac{d\tilde{K}}{dt} + \tilde{K}\tilde{R} \right)^T M \right]^T Q_1^{-1} \left[ N\tilde{A}_2 + \left( \frac{d\tilde{K}}{dt} + \tilde{K}\tilde{R} \right)^T M \right] > 0, \quad (3.10)$$

Теперь, т.к.  $Q_2 > 0$ , а  $L(t)$  и  $Q_3 = \left[ N\tilde{A}_2 + \left( \frac{d\tilde{K}}{dt} + \tilde{K}\tilde{R} \right)^T M \right]^T Q_1^{-1} \left[ N\tilde{A}_2 + \left( \frac{d\tilde{K}}{dt} + \tilde{K}\tilde{R} \right)^T M \right]$  – положительно полуопределенные матрицы, то условие (3.10) можно заменить на

$$\det[Q_2 - \varepsilon(L + Q_3)] > 0 \quad (3.11)$$

Таким образом, при всех положительных  $\varepsilon$ , при которых выполняется (3.11), существует монотонно возрастающая непрерывная скалярная функция  $\gamma(\cdot)$  такая, что  $\gamma(0) = 0$  и  $\dot{\omega} \leq -\gamma(\|v_1\|, \|v_2\|) < 0$ , для всех  $t \geq t_0$  и всех  $v_1 \neq 0, v_2 \neq 0$ , т.е. для интервала  $\varepsilon$ , определяемым (3.11), замкнутая система (3.1) или (3.2), (3.3) равномерно асимптотически устойчива по Ляпунову.

Итак, установлена

**Теорема.** Пусть наряду с I-III выполнены условия:

- все матрицы в (1.1) и (3.1) непрерывные;
- матрица  $A_4^{-1}$  существует для каждого  $t \geq t_0$ ;
- матрицы  $N_s(t), M_f(t), Q_1 > 0, Q_2 > 0, L \geq 0, Q_3 \geq 0$  и числа  $c_1 > 0, c_2 > 0, \varepsilon > 0$  таковы, что регуляторы  $u_s(y) = N_s(t)y$  и  $u_f(y, z) = M_f z_f$ , являются стабилизирующими соответственно в подсистемах (2.1), (2.2) и имеет место неравенство (3.11).

Тогда для всех  $\varepsilon > 0$  из (3.11) регулятор  $u_c(x, y) = (c_1 N_s(t) + c_2 M_f(t) A_4^{-1} (A_3 + B_2 N_s(t)))y + c_2 M_f(t)z$  является стабилизирующим в системе (1.1) и соответствующая замкнутая система является равномерно асимптотически устойчивой при всех интервальных возмущениях коэффициентов, не нарушающих условия теоремы.

**Замечание 2.** Условие (3.11) обобщает соответствующее условие из [4] и совпадает с ним при достаточно малом  $\varepsilon > 0$  и  $Q_1 = E_n, Q_2 = E_m, c_1 = c_2 = 1$ .

#### 4. Численный эксперимент

Выше мы изложили алгоритм построения стабилизирующего линейного регулятора в линейной нестационарной системе на основе разделения движений.

В данном разделе проведем численное исследование замкнутой системы управления с композитным регулятором, построенным на основе изложенного в настоящей статье подхода применительно к задаче стабилизации продольной динамики вертолета. При этом проверке подвергаются лишь условия I, II. Работоспособность полученного регулятора проверяется численным моделированием.

Известно [8-10], что вертолет является неустойчивым объектом на режиме висения. Матрицы системы (1.1), описывающей на режиме висения продольную динамику вертолета без учета боковой, имеют [8] следующий вид при  $\varepsilon = 1$ , т.е. параметр  $\varepsilon$  в рассматриваемом случае является условно малым.

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} -0.0176 & -0.0076 \\ 0.0092 & -0.3195 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0.6717 & -9.8063 \\ -0.0126 & 0.2803 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 9.7041 \\ -0.0019 \end{bmatrix} \\ A_3 &= \begin{bmatrix} 0.0113 & 0.0057 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A_4 = \begin{bmatrix} -0.4506 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} -6.5240 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.1)$$

Пренебрегая членом  $T(y, u, t)|_{u=u_s(y_s)}$  в системе (2.3), получаем, что «быстрая» подсистема будет иметь вид

$$\varepsilon \dot{z}_f = A_4(t)z_f + B_2(t)u_f. \quad (4.2)$$

Определим линейное управление  $u_f = c_2 M_f(t)z_f$  так, чтобы II было выполнено. С учетом (3.1) должно выполняться следующее условие

$$\operatorname{Re} \lambda(A_4(\theta) + c_2 B_2(\theta)M_f(\theta)) < 0, \quad \forall \theta \in [t_0, \infty). \quad (4.3)$$

Условие (4.3) можно переписать в развернутом виде

$$\operatorname{Re} \lambda \begin{pmatrix} a_{11}(\theta) + c_2 b_1(\theta)m_1(\theta) & a_{12}(\theta) + c_2 b_1(\theta)m_2(\theta) \\ a_{21}(\theta) + c_2 b_2(\theta)m_1(\theta) & a_{22}(\theta) + c_2 b_2(\theta)m_2(\theta) \end{pmatrix} < 0, \quad \forall \theta \in [t_0, \infty). \quad (4.4)$$

Положим матрицу  $M_f$  стационарной, тогда с учетом (4.1) имеем

$$\operatorname{Re} \lambda \begin{pmatrix} -0.4506 - c_2 6.5240m_1 & -c_2 6.5240m_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} < 0. \quad (4.5)$$

По критерию Рауса-Гурвица условие (4.5) выполняется, если выполняется

$$\begin{aligned} -0.4506 - c_2 6.5240m_1 &< 0 \\ -c_2 6.5240m_2 &< 0 \end{aligned} \quad (4.6)$$

Отметим, что хотя из (4.1) матрица  $A_4(t)$  является вырожденной, после замыкания подсистемы  $z$  обратной связью  $c_2 M_f(t)z$ ,  $c_2 > 0$  с учетом данных (4.1) достаточно обеспечить  $b_1 m_2 \neq 1$ , чтобы матрица полученной замкнутой подсистемы  $\hat{A}_4(t) = A_4(t) + c_2 B_2 M_f$  стала невырожденной. Тогда становится возможным использование описанного в настоящей работе алгоритма синтеза композитного регулятора. Условие (4.6) выполняется, очевидно, например, при  $c_2=1$ ,  $m_1=0.1$ ,  $m_2=0.2$ , при этом  $b_1 m_2 \neq 1$ . Подсистема «медленных» движений (3.5) для определенных выше  $c_2$ ,  $m_1$ ,  $m_2$  и  $c_1=1$  имеет вид

$$\dot{p} = \begin{bmatrix} -0.0875 + 50.0807n_1 & -0.0429 + 50.0807n_2 \\ 0.0116 - 1.4315n_1 & -0.3182 - 1.4315n_2 \end{bmatrix} p, \quad (4.7)$$

где  $n_1$  и  $n_2$  – элементы  $N_s$ .

По критерию Рауса-Гурвица система (4.7) будет равномерно асимптотически устойчива в нуле, при

$$\begin{aligned} 0.4058 - 50.081n_1 + 1.4315n_2 &> 0, \\ 0.0283 - 15.9996n_1 - 0.4594441982n_2 &> 0. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Нетрудно заметить, что (4.8) выполняется даже при  $n_1 = 0$ ,  $n_2 = 0$ , что означает отсутствие управления «медленной» подсистемой. При  $c_2=1$ ,  $c_2=1$ ,  $m_1=0.1$ ,  $m_2=0.2$ ,  $n_1 = 0$ ,  $n_2 = 0$  композитное управление  $u_c(y, z) = -0.0017y_1 - 0.0009y_2 + 0.1z_1 + 0.2z_2$ . На Рис.4.1-Рис.4.4 приведены переходные процессы замкнутой системы на режиме висения с найденным управлением при начальных условиях  $y_1(0)=y_2(0)=z_1(0)=0$  и  $z_2(0)=0.1$  рад.

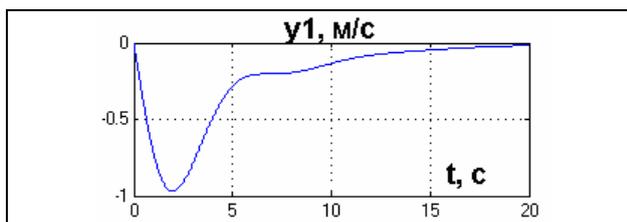


Рис. 4.1. Переходной процесс координаты  $y_1$  (продольной скорости полета)

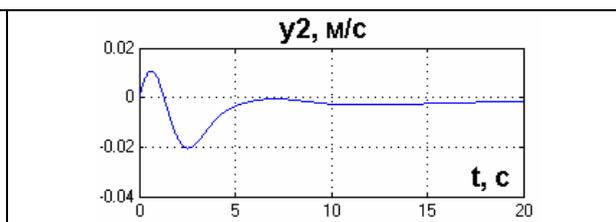


Рис. 4.2. Переходной процесс координаты  $y_2$  (вертикальной скорости полета)

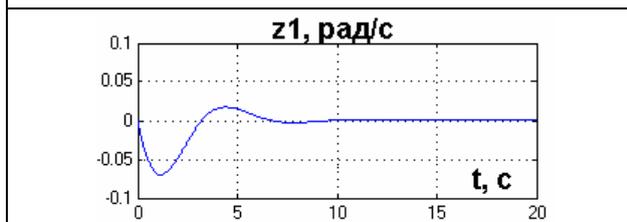


Рис. 4.3. Переходной процесс координаты  $z_1$  (угловой скорости тангажа)

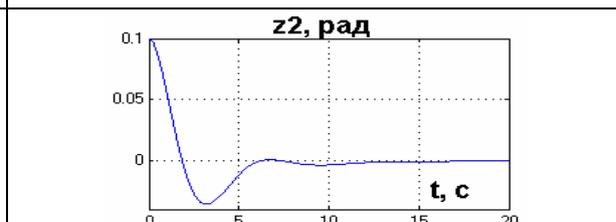


Рис. 4.4. Переходной процесс координаты  $z_2$  (угла тангажа)

Как видно, в полученном композитном управлении доминирующую роль играют коэффициенты при сигналах  $z$ . На практике, это позволяет обеспечить устойчивость продольного движения вертолета только с помощью управления «быстрой» подсистемой, что подтверждается опытом создания и эксплуатации систем автоматической стабилизации вертолетов [8-10].

Отметим, что обозначенный в статье алгоритм построения регулятора может быть использован и в более общей ситуации, в частности, при построении нелинейного композитного регулятора. Так на Рис. 4.5 приведен переходной процесс угла тангажа вертолета с нелинейным композитным регулятором  $u_c = c_1 u_s + c_2 u_f$  в контуре управления (другие координаты системы также являются устойчивыми).

В «быстром» контуре системы использовался нелинейный регулятор [11]

$$u_f = \frac{k(cz_2 + z_1)}{1 - q \exp^{-n(z_2 \cos(\alpha) + z_1 \sin(\alpha))^2 - m(-z_2 \sin(\alpha) + z_1 \cos(\alpha))^2}}, \quad (4.9)$$

где  $(n, m, c, k, q) > 0$  – вектор параметров,  $\alpha = \arctg(1/c)$  и  $0 < q < 1$ . Для «медленной» подсистемы использовался линейный максиминный регулятор, являющийся робастным по отношению к неопределенности определенного типа в коэффициентах и рассчитанный на основе подхода, изложенного в работе [3]. Параметры  $c_1, c_2$  определялись как  $c_1 = 0.005, c_2 = 1$ . Было также замечено, что при  $c_1 = 1$  и достаточно больших  $c_2$  замкнутая система теряет устойчивость (Рис. 4.6).

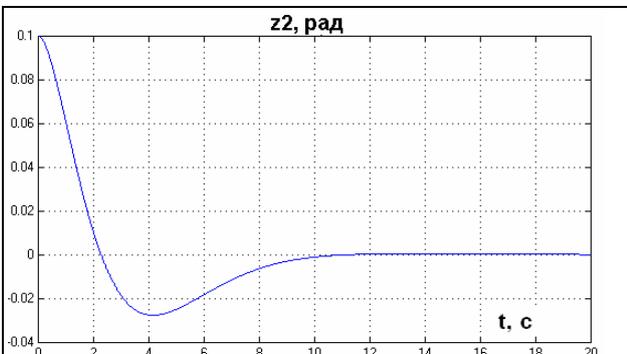


Рис. 4.5. Переходной процесс угла тангажа вертолета с композитным нелинейным регулятором

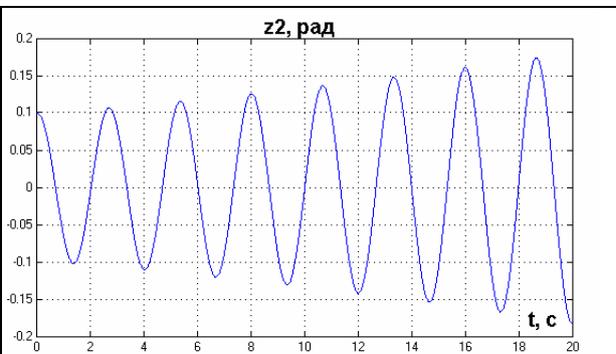


Рис. 4.6. Переходной процесс угла тангажа вертолета с композитным нелинейным регулятором при  $c_1=1, c_2=1$

Таким образом, численное моделирование показало работоспособность композитного регулятора, полученного на основании изложенного в статье подхода. Параметры  $c_1$  и  $c_2$  в более общем нелинейном случае позволяют добиться устойчивости замкнутой системы управления.

## Заключение

В данной статье предложен подход к построению композитного регулятора на основе принципа разделения движений. Итоговое композитное стабилизирующее управление ищется в виде линейной композиции управлений подсистемами исходной системы. Для линейного управления получены условия устойчивости замкнутой системы с построенным композитным регулятором, обобщающие известные. Проведено численное исследование на примере задачи стабилизации продольного движения вертолета.

## Литература

1. Дмитриев М.Г., Курина Г.А. Сингулярные возмущения в задачах управления. Обзор 1982-2004 гг. // Автоматика и телемеханика. – 2006. – №1. – с. 3-53.
2. Kokotovic P.V., Khalil H.K. Singular perturbations in systems and control. – New York: IEEE, 1986. – 495 p.
3. Афанасьев В. Н., Орлов П. В. Субоптимальное управление нелинейным объектом, линеаризуемым обратной связью // Известия РАН. Теория и системы управления. 2011. № 3. С. 13-22.
4. Wilde R.R., Kokotovic P.V. Stability of singular perturbed systems and networks with parasitics // IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC-17, 1972– pp.245-246.
5. Климушев А.Н., Красовский Н.Н. Равномерная асимптотическая устойчивость систем дифференциальных уравнений с малым параметром при производных // ПММ, том 25, №4, 1961 – стр. 680-690.
6. Афанасьев В.Н. Математическая теория конструирования систем управления: Учеб. для вузов. / В.Н. Афанасьев, В.Б. Колмановский, В.Р. Носов. – 3-е изд., испр. и доп. – М.: Высш. шк., 2003. – 614 с.: ил.
7. Баландин Д.Б., Коган М.М. Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств. – М.: Физматлит, 2007. – 280 с.
8. Padfield G. D. Helicopter flight dynamics: the theory and application of flying qualities and simulation modeling. – Washington DC: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2007. – 641 p.
9. Петросян Э.А. Аэродинамика соосного вертолета. – М.: Полигон-пресс, 2004.
10. Кожевников В.А. Автоматическая стабилизация вертолета. – М.: «Машиностроение», 1977, 152 с.
11. Емельянов С.В., Макаров Д.А. Стабилизация угла тангажа вертолета на различных режимах полета с помощью координатно-операторной и операторной обратных связей // Искусственный интеллект и принятие решений. М: ИСА РАН, 2011. №4. С. 68-80.

**Дмитриев Михаил Геннадьевич.** Главный научный сотрудник ИСА РАН, профессор НИУ ВШЭ. Окончил Днепропетровский государственный университет в 1969 году. Доктор физико-математических наук, профессор. Автор более 200 научных публикаций, из них 2 монографии. Область научных интересов: математическое моделирование, сингулярные возмущения, оптимальное управление, системный анализ. E-mail: mdmitriev@mail.ru

**Макаров Дмитрий Александрович.** Инженер-исследователь ИСА РАН. Окончил Рыбинскую государственную авиационную технологическую академию им. П.А. Соловьева в 2008. Автор 10 публикаций. Область научных интересов: управление сложными динамическими системами, робастные методы устойчивости и стабилизируемости, искусственный интеллект, экспертные системы. E-mail: makarov@isa.ru