Алгоритмическое и программное обеспечение задач управления и обработки изображений

Ардентов Андрей Андреевич

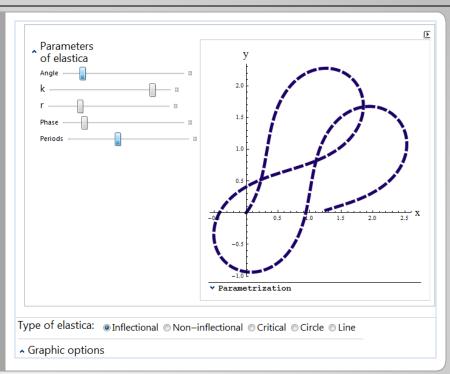
05.13.11 — Математическое и программное обеспечение вычислительных машин, комплексов и компьютерных сетей 05.13.01 — Системный анализ, управление и обработка информации (технические науки)

Научный руководитель: д.ф.-м.н. Юрий Леонидович Сачков

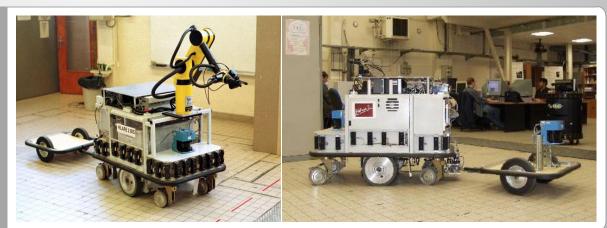
Актуальность работы

изображений Восстановление

Интерфейс для оптимальных кривых



Колёсный робот с прицепом



Цель работы

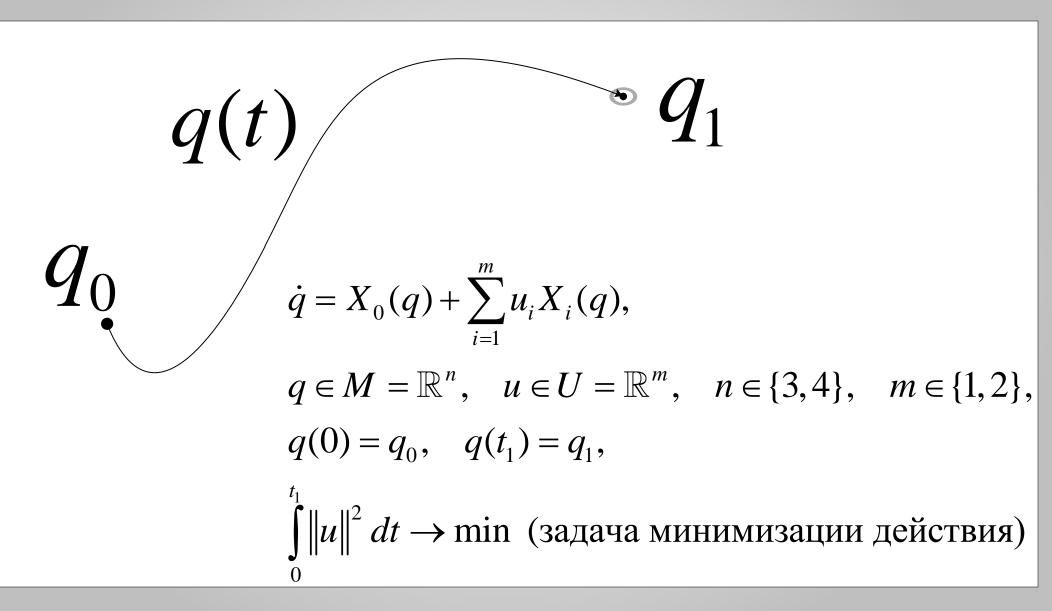
Разработка конструктивных методов, алгоритмов и программ вычисления оптимальных решений в задачах управления, а также создание на этой основе программных средств обработки и анализа изображений

Научная новизна

Разработка эффективных алгоритмов и программных средств для решения задач оптимального управления

- 1. Управление мобильным роботом с прицепом.
- 2. Комплекс программ для моделирования эластик Эйлера и решения задачи Эйлера.
- 3. Программный комплекс для восстановления поврежденных изображений антропоморфным способом.

Общая формулировка рассматриваемых задач



Общая природа задач

- 1. Оптимальные кривые на плоскости.
- 2. Геометрическая теория управления:
 - а) принцип максимума Понтрягина,
 - б) сведение к уравнению математического маятника,
 - в) параметризация экстремальных решений эллиптическими функциями Якоби,
 - г) исследование оптимальности.
- 3. Алгоритм решения систем алгебраических уравнений.
- 4. Параллельное вычисление серии задач.

Структура диссертации

- 1. Введение.
- 2. Аппроксимация мобильного робота с прицепом.
- 3. Задача Эйлера об эластиках.
- 4. Методы, алгоритмы и программы машинной графики: приложение к восстановлению изображений.
- 5. Приложение: коды программ, алгоритм решения систем алгебраических уравнений.

Заключение.

Аппроксимация мобильного робота с прицепом

задача

Математическая постановка задачи управления колёсным роботом с прицепом

$$\dot{q} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{y}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{x}{2} \\ \frac{x^2+y^2}{2} \end{pmatrix},$$

$$q=(x,y,z,v)\in\mathbb{R}^4,\qquad u=(u_1,u_2)\in\mathbb{R}^2.$$

$$q(0) = q_0 = (0, 0, 0, 0)^T, \quad q(t_1) = q_1 = (x_1, y_1, z_1, v_1)^T,$$

$$q = (x,y,z,v) \in \mathbb{R}^4, \qquad u = (u_1,u_2) \in \mathbb{R}^2.$$

$$q(0) = q_0 = (0,0,0,0)^T, \quad q(t_1) = q_1 = (x_1,y_1,z_1,v_1)^T,$$

$$\int_0^{t_1} \sqrt{u_1^2 + u_2^2} \, dt \to \min \iff \int_0^{t_1} \frac{u_1^2 + u_2^2}{2} \, dt \to \min.$$

Эллиптические координаты.

Параметризация экстремальных траекторий

$$\begin{split} x_t &= \frac{2k\sigma}{\alpha} \Big(\operatorname{cn}(\sigma\varphi_t) - \operatorname{cn}(\sigma\varphi) \Big), \\ y_t &= \frac{2\sigma}{\alpha} \Big(\operatorname{E}(\sigma\varphi_t) - \operatorname{E}(\sigma\varphi) \Big) - \operatorname{sgn}\alpha t, \\ z_t &= \frac{2k}{|\alpha|} \Big(\operatorname{sn}(\sigma\varphi_t) \operatorname{dn}(\sigma\varphi_t) - \operatorname{sn}(\sigma\varphi) \operatorname{dn}(\sigma\varphi) - \\ &- \frac{\sigma k y_t}{2\alpha} \Big(\operatorname{cn}(\sigma\varphi_t) + \operatorname{cn}(\sigma\varphi) \Big) \Big), \\ v_t &= \frac{y_t^3}{6} + \frac{2k^2}{|\alpha|} \operatorname{cn}^2(\sigma\varphi) y_t - \frac{4k^2}{\sigma\alpha} \operatorname{cn}(\sigma\varphi) \Big(\operatorname{sn}(\sigma\varphi_t) \operatorname{dn}(\sigma\varphi_t) - \\ &- \operatorname{sn}(\sigma\varphi) \operatorname{dn}(\sigma\varphi) \Big) + \frac{2k^2}{\sigma\alpha} \Big(\frac{2}{3} \operatorname{cn}(\sigma\varphi_t) \operatorname{dn}(\sigma\varphi_t) \operatorname{sn}(\sigma\varphi_t) - \\ &- \frac{2}{3} \operatorname{cn}(\sigma\varphi) \operatorname{dn}(\sigma\varphi) \operatorname{sn}(\sigma\varphi) + \frac{1 - k^2}{3k^2} \sigma t + \\ &+ \frac{2k^2 - 1}{3k^2} \Big(\operatorname{E}(\sigma\varphi_t) - \operatorname{E}(\sigma\varphi) \Big) \Big). \end{split}$$

$$y_t = \frac{2\sigma \operatorname{sgn} c}{\kappa^2} \Big(\operatorname{dn}(\sigma \psi_t) - \operatorname{dn}(\sigma \psi) \Big),$$

$$y_t = \frac{k^2 - 2}{k^2} \operatorname{sgn} \alpha t + \frac{2\sigma}{\alpha k} \Big(\operatorname{E}(\sigma \psi_t) - \operatorname{E}(\sigma \psi) \Big),$$

$$z_t = -\frac{x_t y_t}{2} - \frac{2\sigma \operatorname{sgn} c \operatorname{dn}(\sigma \psi)}{\alpha k} y_t + \frac{2 \operatorname{sgn} c}{|\alpha|} \Big(\operatorname{cn}(\sigma \psi_t) \operatorname{sn}(\sigma \psi_t) - \operatorname{cn}(\sigma \psi) \operatorname{sn}(\sigma \psi) \Big),$$

$$v_t = \frac{4}{\sigma \alpha k} \Big(\frac{1}{3} \operatorname{cn}(\sigma \psi_t) \operatorname{dn}(\sigma \psi_t) \operatorname{sn}(\sigma \psi_t) - \frac{1}{3} \operatorname{cn}(\sigma \psi) \operatorname{dn}(\sigma \psi) \operatorname{sn}(\sigma \psi) - \frac{1 - k^2}{3k^3} \sigma t - \frac{k^2 - 2}{6k^2} \Big(\operatorname{E}(\sigma \psi_t) - \operatorname{E}(\sigma \psi) \Big) \Big) + \frac{y_t^3}{6} + \frac{2y_t}{|\alpha| k^2} \operatorname{dn}^2(\sigma \psi) - \frac{4}{\sigma \alpha k} \operatorname{dn}(\sigma \psi) \Big(\operatorname{cn}(\sigma \psi_t) \operatorname{sn}(\sigma \psi_t) - \operatorname{cn}(\sigma \psi) \operatorname{sn}(\sigma \psi) \Big).$$

$$\begin{array}{c} c \\ \varphi \\ 0 \\ \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \pi \\ \theta \\ \end{array}$$

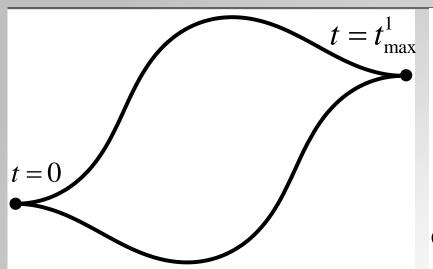
$$x_{t} = \frac{2\sigma \operatorname{sgn} c}{\alpha} \left(\frac{1}{\operatorname{ch}(\sigma\varphi_{t})} - \frac{1}{\operatorname{ch}(\sigma\varphi)} \right),$$

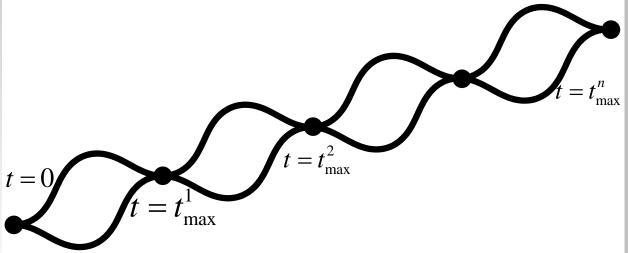
$$y_{t} = \frac{2\sigma}{\alpha} \left(\operatorname{th}(\sigma\varphi_{t}) - \operatorname{th}(\sigma\varphi) \right) - \operatorname{sgn} \alpha t,$$

$$z_{t} = -\frac{x_{t}y_{t}}{2} - \frac{2\sigma \operatorname{sgn} c}{\alpha \operatorname{ch}(\sigma\varphi)} y_{t} + 2 \frac{\operatorname{sgn} c}{|\alpha|} \left(\frac{\operatorname{th}(\sigma\varphi_{t})}{\operatorname{ch}(\sigma\varphi_{t})} - \frac{\operatorname{th}(\sigma\varphi)}{\operatorname{ch}(\sigma\varphi)} \right),$$

$$v_{t} = \frac{2}{3\sigma\alpha} \left(\operatorname{th}(\sigma\varphi_{t}) - \operatorname{th}(\sigma\varphi) + 2 \frac{\operatorname{th}(\sigma\varphi_{t})}{\operatorname{ch}^{2}(\sigma\varphi_{t})} - 2 \frac{\operatorname{th}(\sigma\varphi)}{\operatorname{ch}^{2}(\sigma\varphi)} \right) + \frac{y_{t}^{3}}{6} + \frac{2y_{t}}{|\alpha| \operatorname{ch}^{2}\varphi} - \frac{4}{\sigma\alpha \operatorname{ch}(\sigma\varphi)} \left(\frac{\operatorname{th}(\sigma\varphi_{t})}{\operatorname{ch}(\sigma\varphi_{t})} - \frac{\operatorname{th}(\sigma\varphi)}{\operatorname{ch}(\sigma\varphi)} \right).$$

Точки разреза, точки Максвелла, сопряженные точки





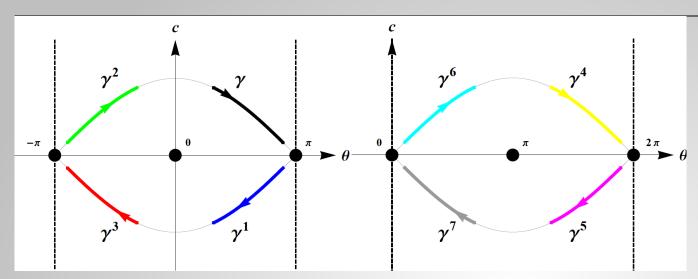
$$\eta = (\xi, t)$$

 $t_{\text{cut}}(\xi) = \sup\{t > 0 \mid q(\xi, s) \text{ глобально оптимальна при } s \in [0, t]\}$

$$t_{\text{max}}^{1}(\xi) = \min\{t_{\text{max}} > 0 \mid \xi' \neq \xi, \ q(\xi', t_{\text{max}}) = q(\xi, t_{\text{max}})\}$$

$$t_{\text{conj}}^{1}(\xi) = \min\{t_{\text{conj}} > 0 \mid J_{i,j} = \frac{\partial q_{i}}{\partial \eta_{i}}, \det J(\xi, t_{\text{conj}}) = 0\}$$

Описание группы дискретных симметрий



G	$arepsilon^1$	ε^2	ε^3	ε^4	ε^{5}	ε^6	ε^7
ε^1	Id	ε^3	ε^2	ε^{5}	ε^4	ε^7	$arepsilon^6$
ε^2 ε^3		Id	$arepsilon^1$	ε^6	ε^7	ε^4	ε^{5}
ε^3			Id	ε^7	ε^6	ε^{5}	ε^4
ε^4				Id	$arepsilon^1$	ε^2	ε^3
ε^{5}					Id	ε^3	ε^2
ε^6						Id	$arepsilon^1$
ε^7							Id

$\varepsilon^i:\gamma\mapsto\gamma^i$

$$x_{s}^{1} = x_{t} - x_{t-s}, \quad y_{s}^{1} = y_{t} - y_{t-s},$$

$$x_{s}^{2} = x_{t-s} - x_{t}, \quad y_{s}^{2} = y_{t} - y_{t-s},$$

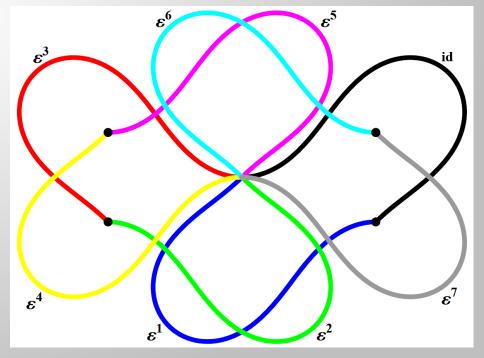
$$x_{s}^{3} = -x_{s}, \quad y_{s}^{3} = y_{s},$$

$$x_{s}^{4} = -x_{s}, \quad y_{s}^{4} = -y_{s},$$

$$x_{s}^{5} = x_{t-s} - x_{t}, \quad y_{s}^{5} = y_{t-s} - y_{t},$$

$$x_{s}^{6} = x_{t} - x_{t-s}, \quad y_{s}^{6} = y_{t-s} - y_{t},$$

$$x_{s}^{7} = x_{s}, \quad y_{s}^{7} = -y_{s}.$$



Стр. 12

Верхняя оценка времени разреза, нижняя оценка сопряженного времени

времени Максвелла

$$\xi \in C_1 \Rightarrow t_{\max}^1(\xi) = \frac{\min\left(2\,p_z^1, 4K(k)\right)}{\sigma}, \quad p_z^1(k) \in \left(K(k), 3K(k)\right)$$

$$\xi \in C_2 \Rightarrow t_{\max}^1(\xi) = \frac{2K(k)\,k}{\sigma}$$

$$\xi \in C_6 \Rightarrow t_{\max}^1(\xi) = \frac{2\pi}{|c|}$$

$$\xi \in C_3 \cup C_4 \cup C_5 \cup C_7 \Rightarrow t_{\max}^1(\xi) = +\infty$$

$$\sigma = \sqrt{|\alpha|}, \quad K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1-k^2\sin^2t}}$$

$$p_z^1(k) = \min\left\{p > 0 \mid \operatorname{dn}(p,k) \operatorname{sn}(p,k) + \left(p - 2\operatorname{E}(p,k)\right) \operatorname{cn}(p,k) = 0\right\}$$

$$\int_{\mathbb{R}} t_{\text{cut}}(\xi) \leq t_{\text{max}}^{1}(\xi) \leq t_{\text{conj}}^{1}(\xi)$$

Факторизация системы уравнений по симметриям

Исходная система

$$\begin{pmatrix} x(\lambda, \alpha) \\ y(\lambda, \alpha) \\ z(\lambda, \alpha) \\ v(\lambda, \alpha) \end{pmatrix} = q(\lambda, \alpha) = q_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ v_1 \end{pmatrix}$$

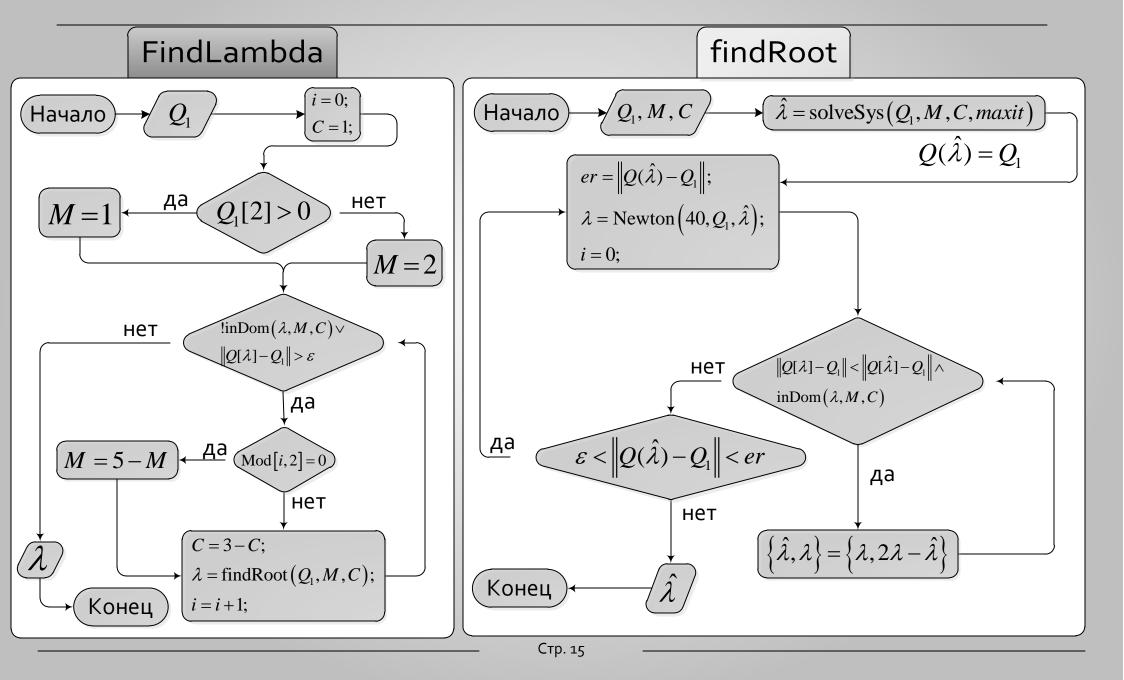
1-параметрическая группа растяжений

$$(\alpha, x, y, z, v, t) \mapsto (\alpha / \gamma, \sqrt{\gamma}x, \sqrt{\gamma}y, \gamma z, \gamma^{\frac{3}{2}}v, \sqrt{\gamma}t)$$

Факторизованная система

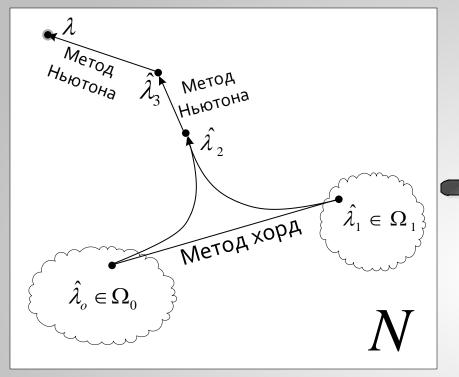
$$\begin{pmatrix} Y(\lambda) = \frac{y(\lambda, \alpha)}{x(\lambda, \alpha)} \\ Z(\lambda) = \frac{z(\lambda, \alpha)}{x^2(\lambda, \alpha)} \\ V(\lambda) = \frac{v(\lambda, \alpha)}{x^3(\lambda, \alpha)} \end{pmatrix} = Q(\lambda) = Q_1 = \begin{pmatrix} \frac{y_1}{x_1} \\ \frac{z_1}{x_1^2} \\ \frac{v_1}{x_1^3} \end{pmatrix}.$$

Блок-схема поиска оптимального решения

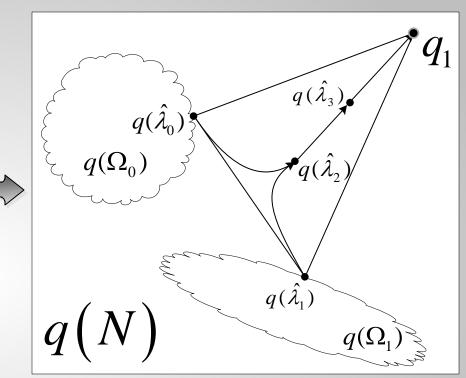


Гибридный метод решения системы

$$Q(\lambda) = Q_1, \ \lambda \in N$$



$$q(\lambda)=q_1,\quad \lambda=q^{-1}(q_1)-?\quad \lambda\in N$$
 $\Omega_j=\mathrm{Random}(N,m),\quad j\in\{0,1\}$ $\min_{\hat{\lambda}\in\Omega_j}(\left|q(\hat{\lambda})-q_1\right|)=\left|q(\hat{\lambda}_j)-q_1\right|$ (метод случайного поиска)

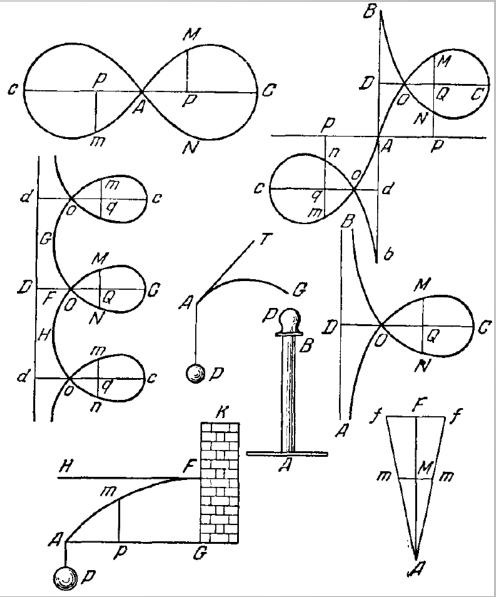


$$\hat{\lambda}_{2} pprox q^{-1} \left(q_{1}, \hat{\lambda}_{0}, \hat{\lambda}_{1}\right)$$
 (метод хорд)
$$\hat{\lambda}_{3} pprox q^{-1} \left(\frac{q_{1} + q(\hat{\lambda}_{2})}{2}, \hat{\lambda}_{2}\right)$$
 (метод Ньютона)
$$\hat{\lambda}_{4} pprox q^{-1} \left(q_{1}, \hat{\lambda}_{3}\right)$$
 (метод Ньютона)
$$q(\hat{\lambda}_{4}) pprox q_{1}$$
?

2. Задача Эйлера об эластиках

Эластики Эйлера

Якоб Бернулли					
1691	Прямоугольная Эластика				
Даниил Бернулли					
1742	Вариационная задача				
Леонард Эйлер					
1744	Квадратуры и классификация				
Макс Борн					
1906	Приближенное вычисление эластик				
Велимир Джурджевич					
1993	Эластики в задаче о качении шара				
Роджер Брокет					
1993	Эластики в обобщ. задаче Дидоны				
Ю.Л. Сачков					
2008	Исследование оптимальности				



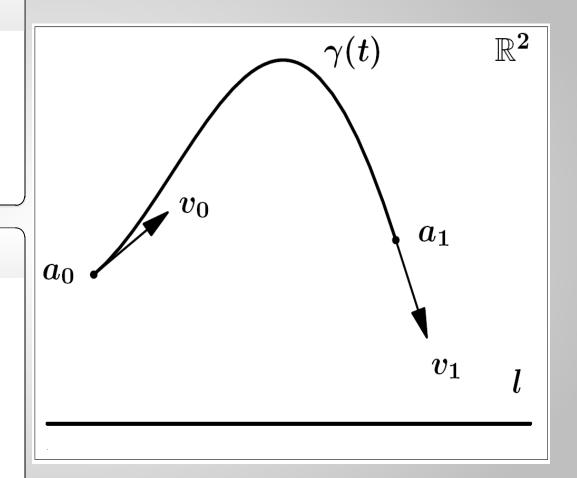
Геометрическая постановка задачи Эйлера об эластиках

Дано

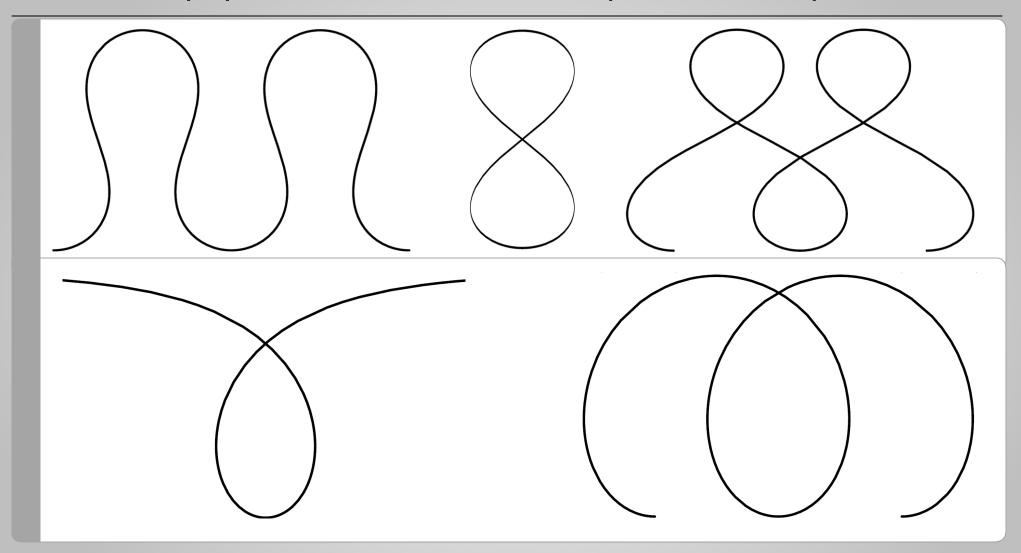
$$I > 0, \quad a_0, \ a_1 \in \mathbb{R}^2, \ v_0 \in T_{a_0} \mathbb{R}^2, \quad v_1 \in T_{a_1} \mathbb{R}^2, \ |v_0| = |v_1| = 1.$$

Найти

$$\gamma(t), \quad t \in [0, t_1],$$
 $\gamma(0) = a_0, \ \gamma(t_1) = a_1,$
 $\dot{\gamma}(0) = v_0, \ \dot{\gamma}(t_1) = v_1,$
 $|\dot{\gamma}(t)| \equiv 1 \Rightarrow t_1 = l$
 $\int_{\gamma} k^2 dt \rightarrow \min.$

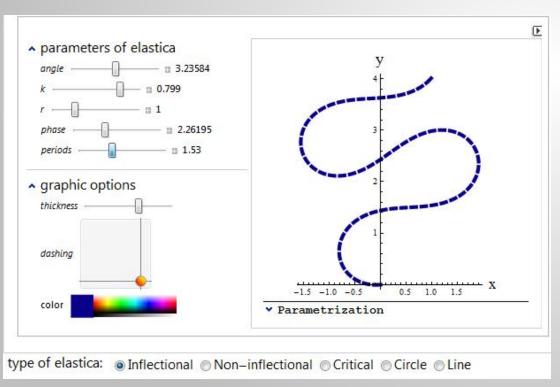


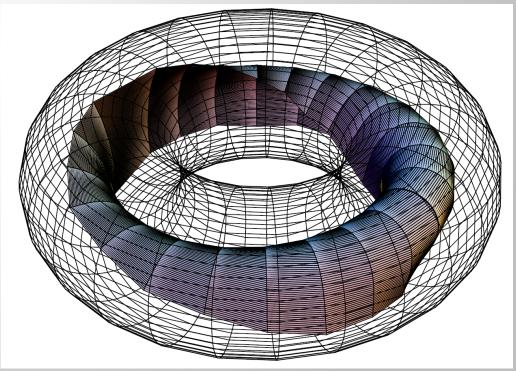
Связь эластик Эйлера с решением задачи управления мобильным роботом с прицепом



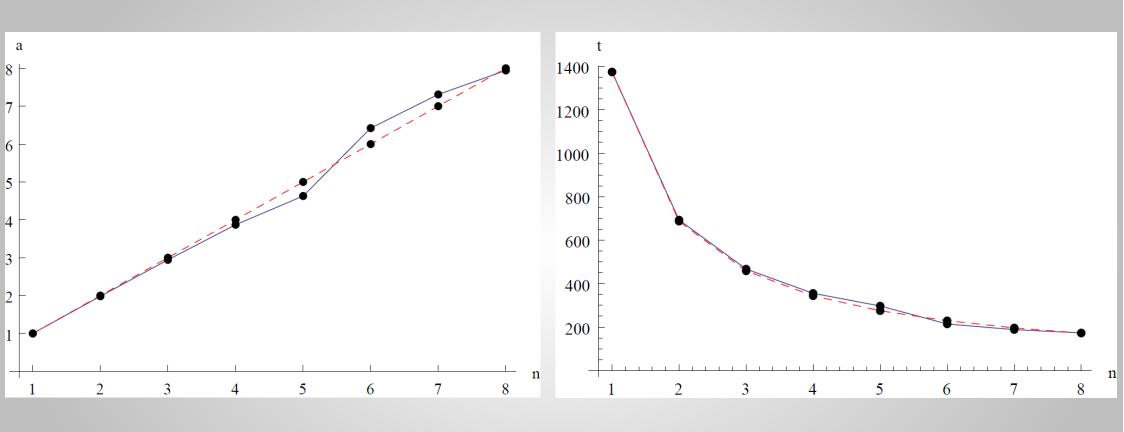
Программный комплекс для моделирования эластик и решения задачи Эйлера

- 1. Интерфейс для экстремальных траекторий,
- 2. Параллельные программы построения глобально и локально оптимальных траекторий,
- 3. Параллельное вычисление серии траекторий (построение анимаций),
- 4. Построение множества разреза.





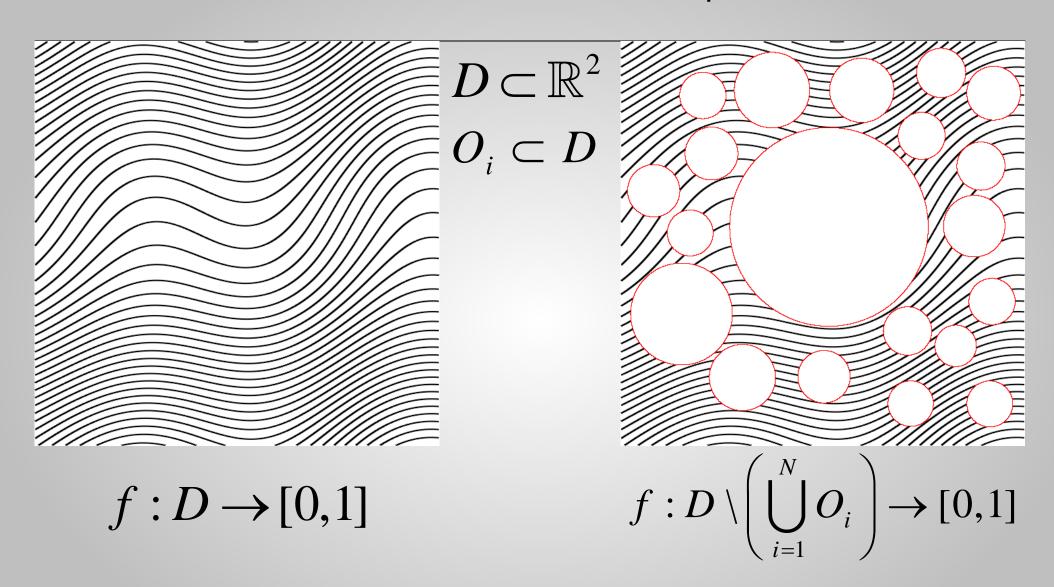
Параллельная программа в системе gridMathematica



Тестирование построения анимации из 1000 кадров на кластере «СКИФ Первенец-М» (8 узлов)

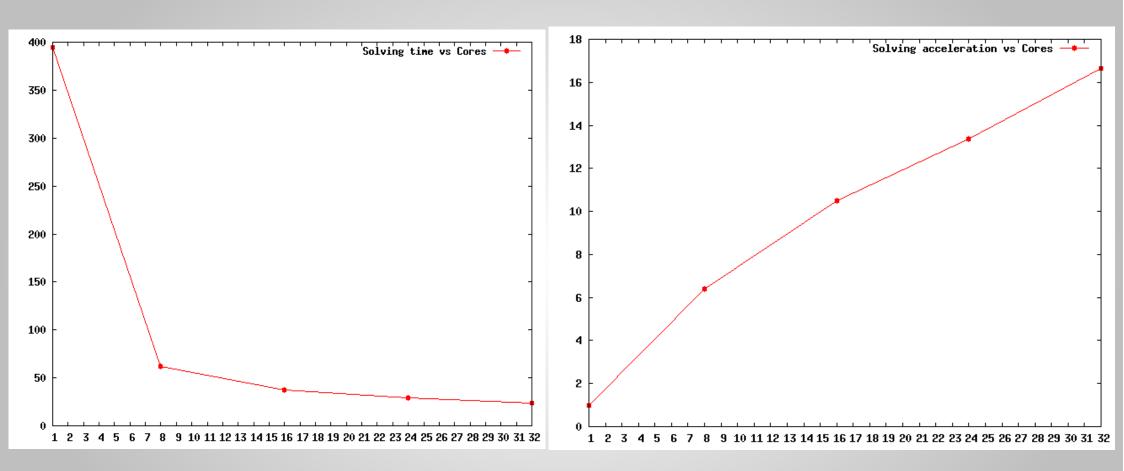
3. Методы, алгоритмы и программы машинной графики: приложение к восстановлению изображений

Задача восстановления изображения



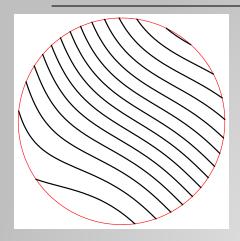
Параллелизм по данным

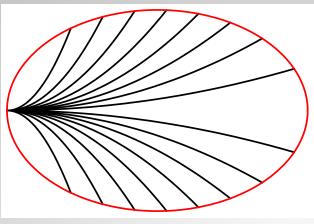
Программа на C++ с использованием библиотеки T-Sim



Тестирование проводилось на машине blade.botik.ru (4 узла по 8 ядер)

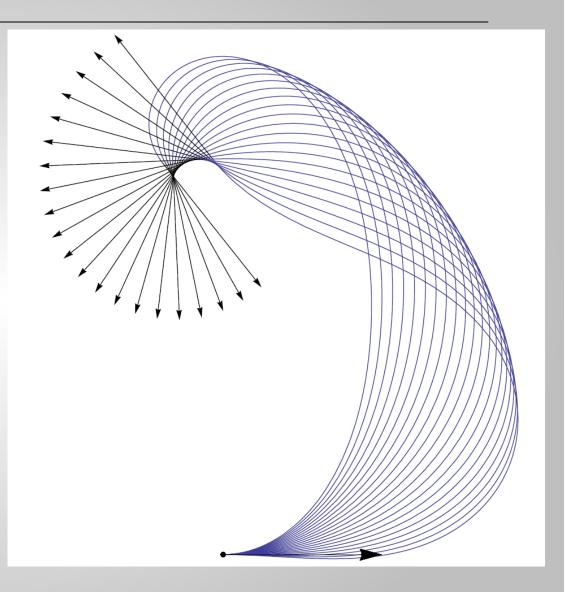
Свойства рассматриваемых систем





Непрерывная
 зависимость граничных
 условий для траекторий
 из одной области
 повреждения

 Система однозначно разрешима



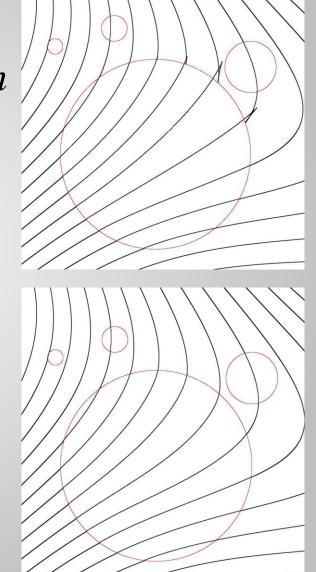
Серия систем алгебраических уравнений. Точки возврата

$$q(v^{i}) = q_{1}^{i} = \begin{pmatrix} x_{1}^{i} \\ y_{1}^{i} \\ \theta_{1}^{i} \end{pmatrix}, \quad v^{i} = (\lambda^{i}, t^{i}), \quad i = 1, \dots, n$$

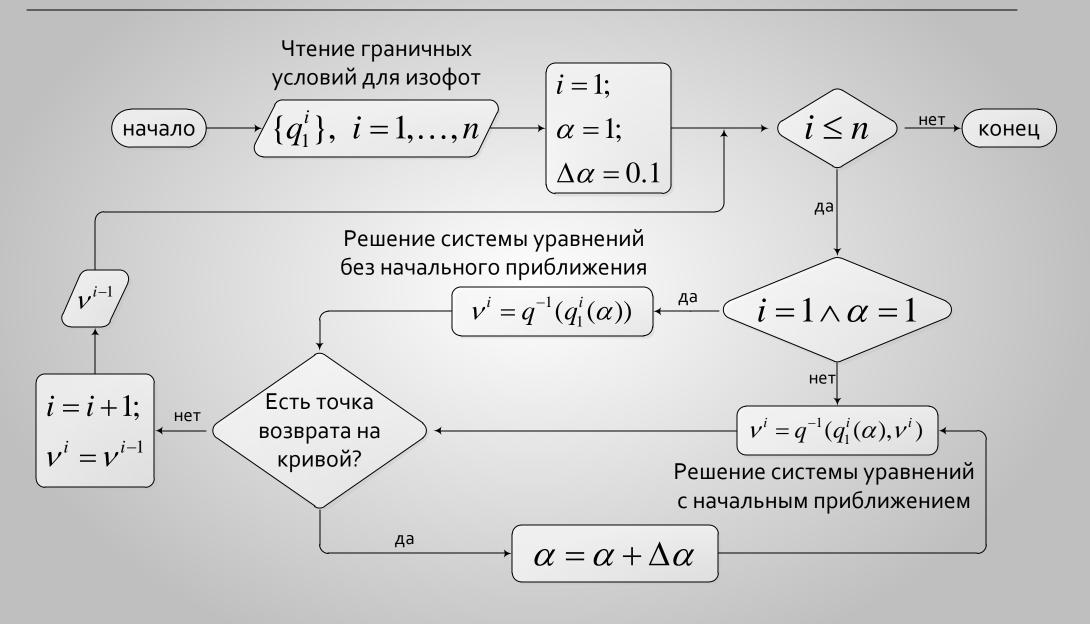
$$q(v_{\alpha}^{i}) = q_{1}^{i}(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha x_{1}^{i} \\ \alpha y_{1}^{i} \\ \theta_{1}^{i} \end{pmatrix}$$

$$q_1^i(1) = q_1^i$$

Увеличение lpha позволяет устранить точку возврата



Блок-схема алгоритма восстановления изображения в поврежденной области



Заключение

Результаты

- Программный комплекс для моделирования эластик Эйлера (параллельные программы).
- Интерфейс для работы с эластиками Эйлера.
- Теоретическое исследование задачи на группе Энгеля, доставляющей решение для задачи управления мобильным роботом с прицепом.
- Программа для вычисления оптимальных траекторий в задаче на группе Энгеля.
- Алгоритм вычисления оптимальных изофот для задачи восстановления изображения антропоморфным образом.
- Разработка алгоритма решения систем алгебраических уравнений, обладающих свойством непрерывности и однозначной разрешимости.

Публикации по теме диссертации

- 1) Ю. Л. Сачков, А. А. Ардентов. Параллельные алгоритмы и программы для моделирования эйлеровых эластик // Программные продукты и системы, No. 4, 2009, c. 71-73.
- 2) А. А. Ардентов, Ю. Л. Сачков, Решение задачи Эйлера об эластиках // Автоматика и телемеханика, No. 4, 2009, с. 78-88.
- 3) Ю. Л. Сачков, А. А. Ардентов, В. М. Касимов, А. П. Маштаков. Восстановление изображений на основе вариационного принципа // Программные продукты и системы, No. 4, 2009, с. 126-127.
- 4) А. А. Ардентов, Экстремальные траектории в нильпотентной субримановой задаче на группе Энгеля (случай докритических колебаний маятника) // Современная математика. Фундаментальные направления, No. 42, 2011, с. 29-34.
- 5) А. А. Ардентов, Ю. Л. Сачков, Экстремальные траектории в нильпотентной субримановой задаче на группе Энгеля // Математический сборник, Т. 202, No. 11, 2011, с. 31-54.
- 6) А. А. Ардентов, Ю. Л. Сачков, Антропоморфное восстановление поврежденных изображений на основе методов субримановой геометрии // Программные системы: теория и приложения, No. 4(8), 2011, c. 3-15.
- 7) А. А. Ардентов, Интерфейс для моделирования эластик Эйлера в программной среде Mathematica // Программные системы: теория и приложения, 2012.

Апробация работы

- Международная конференция по математической теории управления и механике. Суздаль, 2009, 2011.
- Молодежная конференция «Теория управления: новые методы и приложения». Переславль, 2009.
- Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам. Суздаль, 2010.
- Workshop on Nonlinear Control and Singularities. Toulon, France, 2010.
- Семинар по теории управления под рук. проф. Филиппа Жуана, Университет г. Руан, Франция, 2010.
- Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов-2011». Москва.
- Третья традиционная всероссийская молодежная летняя школа «Управление, информация и оптимизация», пос. Ярополец, 2011.
- Международная конференция «Управление и оптимизация неголономных систем». Переславль, 2011.

Гранты и внедрение результатов

- 5 грантов РФФИ, 2005-2011
- Свидетельство №2010614762 о государственной регистрации программы OptimalInpainting для ЭВМ, 2010
- Проект «Система восстановления поврежденных изображений в среде TSim и gridMathematica» научно-технической программы «СКИФ-ГРИД», 2009-2010
- НИР «Разработка модели интегральной системы off-line обработки, хранения и распределенного анализа данных от крупномасштабных сетей датчиков сейсмических колебаний», внедрение в ЗАО «РСК Технологии»;
- НИР «Разработка технологии интеллектуальной обработки информации в командно-измерительных системах космического назначения», шифр «2010-1.1-411-009», ИСА РАН.
- Учебные курсы в УГП имени А.К. Айламазяна: практикум на ЭВМ (приложение к курсу УМФ), практикум на ЭВМ (работа в Wolfram Mathematica)

Спасибо за внимание