Методы, алгоритмы и программы приближенного решения задачи управления

Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук

Сачкова Елена Федоровна

05.13.11 — Математическое и программное обеспечение вычислительных машин, комплексов и компьютерных сетей

05.13.01 — Системный анализ, управление и обработка информации (технические науки)

Научный руководитель
д. т. н., профессор Владимир Иосифович Гурман

Актуальность темы

- Управление техническими объектами
- Автоматизация построения управляющих воздействий
- Неголономные системы: мобильные роботы, роботы-манипуляторы
- Существующие программные средства общего назначения

Актуальность разработки методов и программ решения граничной задачи управления неголономными системами

Н.Н. Красовский. Теория управления движением (1968)

Цель работы

Разработка математического, алгоритмического и программного обеспечения для решения двухточечной граничной задачи управления для нелинейных неголономных трехмерных систем с линейными двумерными управлениями

Задачи исследования

1. Разработка математических методов точного решения двухточечной граничной задачи управления для трехмерных нильпотентных систем с двумерным линейным управлением.
2. Разработка алгоритмов (в том числе параллельных) приближенного решения задачи управления для трехмерных неголономных нелинейных систем с двумерным линейным управлением.
3. Создание программного комплекса для приближенного решения задачи управления для указанного класса систем, с поддержкой автоматического и интерактивного режимов работы.

Содержание диссертации по главам

1. Введение
2. Явные формулы и алгоритмы для решения задачи управления нильпотентной системой
3. Алгоритмы приближенного решения задачи управления
4. Программный комплекс NilpControl для решения задачи управления
5. Апробация и анализ работы программ решения задачи управления
6. Заключение: основные результаты диссертации
7. Приложение: фрагменты листингов Maple-программ

Управляемые системы

$$\dot{x} = u_1 X_1(x) + u_2 X_2(x)$$

$$x \in \mathbb{R}^3, \quad u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$$

Линейно независимые векторные поля

$$X_1(x), \quad X_2(x), \quad X_3(x) = [X_1, X_2] = \frac{\partial X_2}{\partial x} X_1 - \frac{\partial X_1}{\partial x} X_2$$

Теорема Рашевского-Чжоу: система вполне управляема

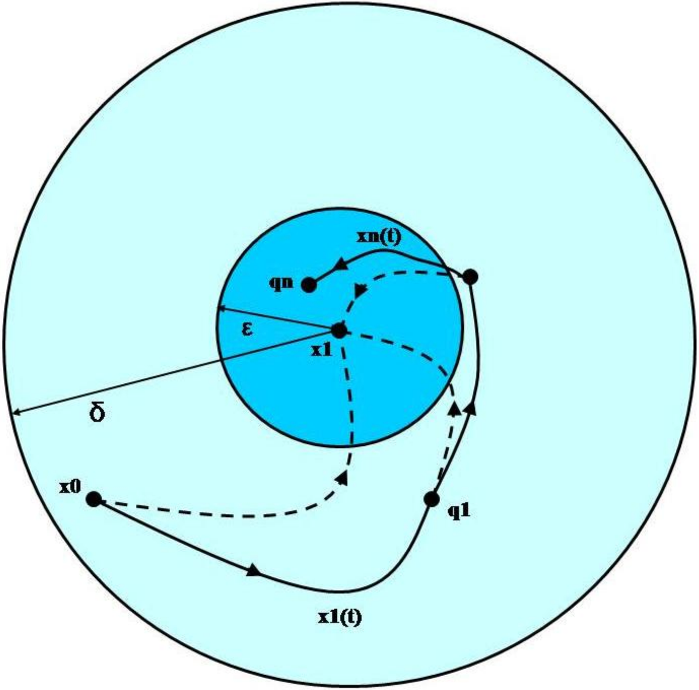
Двухточечная граничная задача управления

- Точное решение задачи управления:
  По заданным $x^0,\ x^1 \in \mathbb{R}^3,\ T > 0$ найти $u(t)$:

$$x(0) = x^0, \qquad x(T) = x^1.$$

- Приближенное решение задачи управления:
  По заданным $x^0, x^1 \in \mathbb{R}^3,\ T > 0, \varepsilon > 0$ найти $u(t)$:

$$x(0) = x^0, \qquad |x(T) - x^1| < \varepsilon.$$


xn(t)
qn
ε
x1
δ
x0
q1
x1(t)

Литература по методу нильпотентной аппроксимации

1. *Аграчев А.А., Сарычев А.В.* Фильтрации алгебры Ли векторных полей и нильпотентная аппроксимация управляемых систем (1987)
2. *Hermes H.* Nilpotent and high-order approximations of vector field systems (1991)
3. *Laferriere G. and Sussmann H.J.* A differential geometric approach to motion planning (1992)
4. *Bellaiche A.* The tangent space in sub-Riemannian geometry (1996)
5. *F. Jean.* Sub-Riemannian geometry (2003)

Универсальная нильпотентная аппроксимация: Неголономный интегратор Брокетта

$$\dot{z}_1 = u_1, \qquad \dot{z}_2 = u_2, \qquad \dot{z}_3 = (u_2 z_1 - u_1 z_2)/2$$

$$z = (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R}^3, \qquad u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$$

Граничные условия:

$$z(0) = z^0, \quad z(T) = 0.$$

R.W. Brockett. Control theory and singular Riemannian geometry (1981)

Оптимальные управления

Теорема (1)

Для неголономного интегратора Брокетта с функционалом качества

$$L = \int_0^T \sqrt{u_1^2 + u_2^2}\, dt \to min$$

построены:

1) *Оптимальные управления* $u(t, z^0)$ *и траектории* $z(t, z^0)$,
2) *Оптимальный синтез* $u(z)$,
3) *Функция цены* $L(z)$.

Комбинированные управления

Теорема (2)

Пусть $\bar{v}(\bar{z}) = (v_1(z_1, z_2), v_2(z_1, z_2))$ — *полное векторное поле:*

1. $\det(\bar{v}(\bar{z}), \bar{z}) \neq 0 \qquad \forall \bar{z} \neq (0,0);$
2. *для* $\forall$ *траектории* $\bar{z}(t) \not\equiv (0,0)$, *интегралы* $\int_0^{+\infty} (z_1\dot{z}_2 - z_2\dot{z}_1)dt$, $\int_{-\infty}^{0} (z_1\dot{z}_2 - z_2\dot{z}_1)dt$ *расходятся.*

Тогда $\forall z^0 = (z_1^0, z_2^0, z_3^0)$, $(z_1^0, z_2^0) \neq (0,0)$, $\exists!\ t = t_p > 0$, *для которого*

$$u_1(t) = \begin{cases} \pm v_1(\bar{z}(t)), & t \in [0, t_p], \\ -\cos\varphi_p, & t \in (t_p, T], \end{cases}$$

$$u_2(t) = \begin{cases} \pm v_2(\bar{z}(t)), & t \in [0, t_p], \\ -\sin\varphi_p, & t \in (t_p, T]. \end{cases}$$

дают решение задачи управления для интегратора Брокетта.

Библиотека управлений NilpLib

Точные решения задачи управления интегратором Брокетта вычислены в следующих классах управлений:

- оптимальном Optimal
- комбинированном Combine, 3-параметрические семейства:
  - линейные поля $\bar{v}(\bar{z})$ типа центр
  - линейные поля $\bar{v}(\bar{z})$ типа фокус
- тригонометрическом Trig, 1-параметрическое семейство
- кусочно-постоянном PieceConst, 1-параметрическое семейство

Нильпотентная аппроксимация и ее каноническая форма

Теорема (3)

Получена явная замена переменных $z = G(x)$, переводящая нильпотентную аппроксимацию любой системы рассматриваемого класса в неголономный интегратор Брокетта.

Алгоритм приближенного решения локальной задачи управления (*Инициализация*)

0. **Входные данные:** векторные поля $X_1(x)$, $X_2(x)$; граничные точки x^0, $x^1 \in \mathbb{R}^3$; терминальное время $T > 0$; точность $\varepsilon > 0$; класс управлений nc $\in \{\text{PieceConst}, \text{Trig}, \text{Optimal}, \text{Combine}\}$; параметры управлений par.
1. **Проверка условия достижения цели:** если $|x^0 - x^1| < \varepsilon$, то $u(t) \equiv 0$, и алгоритм останавливается.
2. **Вычисление нильпотентной аппроксимации** системы в окрестности точки x^1 и замены переменных $z = G(x)$, переводящие эту аппроксимацию в интегратор Брокетта.

Алгоритм приближенного решения локальной задачи управления (*Итерационный процесс*)

3. $q^0 := x^0$. Пусть q^{n-1} — приближение к x^1, полученное на $(n-1)$-ой итерации.
   1. Выбирается класс управлений nc $\in$ {PieceConst, Trig, Optimal, Combine} и параметры управлений par.
   2. $z^{n-1} = G(q^{n-1})$
   3. Вычисляются управления $u^n(t)$, переводящие интегратор Брокетта из точки z^{n-1} в точку 0 в классе управлений nc, с использованием параметров управлений par.
   4. Вычисляется траектория $x^n(t)$ исходной системы с управлениями $u^n(t)$, $x^n(0) = q^{n-1}$.
   5. $q^n := x^n(T)$.
   6. Если $|q^n - x^1| < \varepsilon$, то процесс останавливается. Если $|q^n - x^1| \geqslant \varepsilon$, то переход к пункту 3.1.

Алгоритм приближенного решения локальной задачи управления (*Финальная часть*)

4. **Приближенное решение локальной задачи управления** дается последовательным применением управлений $u^1, \ldots, u^n$, вычисленных ранее и перепараметризованных к отрезку $[0, T]$:

$$u(t) = \begin{cases} nu^1(nt), & t \in [0, T/n], \\ nu^2(nt - T), & t \in [T/n, 2T/n], \\ \ldots \\ nu^n(nt - (n-1)T), & t \in [T(n-1)/n, T]. \end{cases}$$

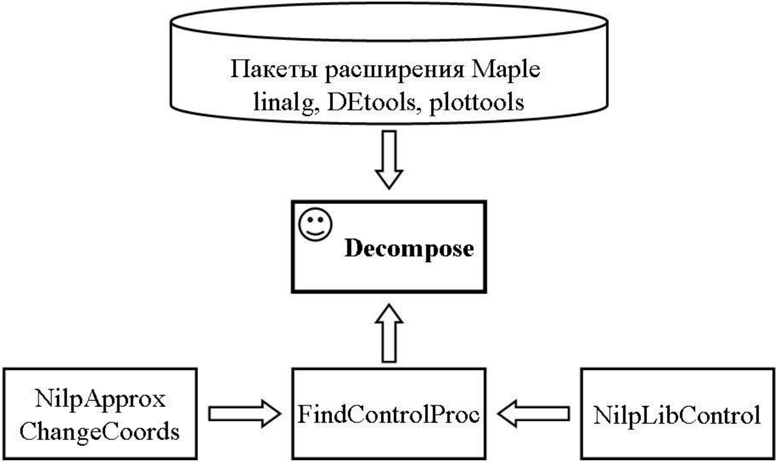
5. *Выходные данные:* управление $u(t)$, $t \in [0, T]$.

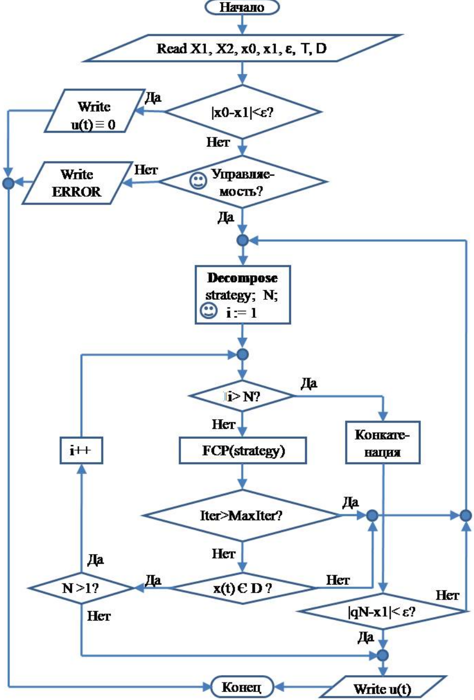
Программный комплекс NilpControl

Программное обеспечение в системе Maple для приближенного решения двухточечной граничной задачи управления:

- модуль FindControlProc для приближенного решения локальной задачи управления,
- ПК NilpControl для приближенного решения глобальной задачи управления, с возможностью учета фазовых ограничений $x(t) \in D$.

Компоненты ПК NilpControl




Начало
Read X1, X2, x0, x1, ε, T, D
|x0-x1|<ε?
Да
Write u(t) ≡ 0
Нет
Управляе-мость?
Нет
Write ERROR
Да
Decompose strategy; N; i := 1
i > N?
Да
Нет
FCP(strategy)
Конкате-нация
i++
Iter>MaxIter?
Да
Нет
x(t) Є D ?
Да
Нет
N >1?
Да
Нет
|qN-x1|< ε?
Нет
Да
Конец
Write u(t)

Кинематическая модель мобильного робота на плоскости

$$\dot{x}_1 = u_1 \cos x_3, \quad \dot{x}_2 = u_1 \sin x_3, \quad \dot{x}_3 = u_2,$$
$$x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, \quad u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2;$$

Сходимость алгоритма, nc = Trig:

n	0	1	2	3	4	5
$\lvert q^n - x^1 \rvert$	2,3	$7 \cdot 10^{-1}$	$3 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-5}$	$6 \cdot 10^{-8}$	$3 \cdot 10^{-9}$

Управление ориентацией сферы, катящейся по плоскости без прокручивания и проскальзывания

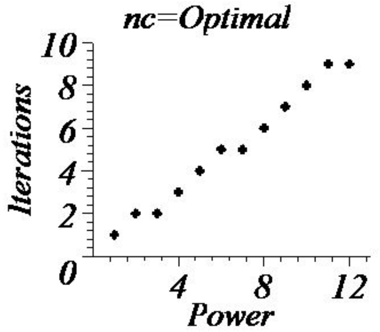
$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= -x_3 u_1 + x_2 u_2, \\
\dot{x}_2 &= -\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2}\, u_1 - x_1 u_2, \\
\dot{x}_3 &= x_1 u_1 - \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2}\, u_2, \\
x &= (x_1, x_2, x_3) \in B^3 = \left\{ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 1 \right\}, \quad u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2.
\end{aligned}
$$

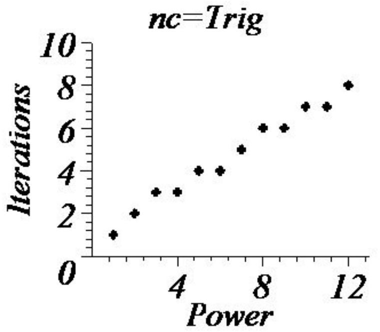
Скорость сходимости алгоритма для разных классов управлений

- Начальное расстояние $|x^0 - x^1| = 0.35$
- Точность $\varepsilon = 10^{-6}$

Класс управлений nc	*Параметры par*	*Число итераций*
Optimal	—	$N = 6$
Trig	1.	$N = 5$
PieceConst	1.88	$N = 5$
Centre (Combine)	$(1, 4, -1)$	$N = 8$
Centre (Combine)	$(0, 5, -3)$	$N = 4$
Focus (Combine)	$(0, 5, -2, 0.3)$	$N = 3$

Зависимость количества итераций n от порядка точности ε





- Iterations $= n$
- Power $= -\lg \varepsilon$

Четырехмерная система с трехмерной орбитой

$$\dot{x}_1 = -u_1 x_3 + u_2 x_2$$
$$\dot{x}_2 = -u_1 x_4 - u_2 x_1$$
$$\dot{x}_3 = u_1 x_1 - u_2 x_4$$
$$\dot{x}_4 = u_1 x_2 + u_2 x_3$$
$$x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4, \qquad u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$$

Предельная система для двухзвенного манипулятора

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= -u_1 \frac{x_3(x_3 + \cos x_2)}{(2 + 2x_3 \cos x_2 + x_3^2)} - u_2 \frac{\sin x_2}{(2 + 2x_3 \cos x_2 + x_3^2)} \\
\dot{x}_2 &= u_1 \\
\dot{x}_3 &= u_2 \\
x(0) &= (\pi/4, \pi/2,\ 1), \qquad x(T) = (\pi/2,\ 0,\ 2) \\
-\pi/2 &\leqslant x_1 \leqslant \pi/2, \qquad -\pi/2 \leqslant x_2 \leqslant \pi/2, \qquad 0 \leqslant x_3 \leqslant 2
\end{aligned}
$$

Основные результаты диссертации

1. Описаны оптимальные траектории, оптимальный синтез и функция цены для задачи оптимального управления неголономным интегратором Брокетта с интегральным критерием качества.
2. Разработан метод комбинированного управления для решения задачи управления неголономным интегратором Брокетта.
3. Создана библиотека программных управлений NilpLib, точно решающих двухточечную граничную задачу управления в классах кусочно-постоянных, тригонометрических, оптимальных в смысле минимума интегрального функционала, и комбинированных управлений.

Основные результаты диссертации

4. Разработаны многометодные алгоритмы (включая параллельные) для вычисления приближенного решения задачи управления для нелинейных неголономных трехмерных систем с двумерным линейным управлением.
5. Создан программный комплекс NilpControl в системе компьютерной математики Maple, с поддержкой автоматического и интерактивного режимов работы пользователя.
6. Проведена экспериментальная эксплуатация программного комплекса NilpControl для решения ряда содержательных задач управления: кинематическая модель мобильного робота на плоскости; ориентация сферы, катящейся по плоскости без проскальзывания и прокручивания; система в четырехмерном пространстве состояний с трехмерной орбитой; предельная система двухзвенного манипулятора.

Апробация работы

1. Международные конференции «Программные системы: теория и приложения», ИПС РАН, 2006, 2009 гг.
2. Международная конференция «Современные проблемы математики, механики и их приложения», Москва, МГУ им. Ломоносова, 31.03–02.04, 2009 г.
3. Международная конференция по математической теории управления и механике, Суздаль, 02.07–07.07, 2009 г.
4. Семинар «Проблемы теории управления» кафедры оптимального управления ВМК МГУ, сентябрь 2009 г.
5. 3 проекта РФФИ (2002–2009 гг.)
6. Научно-техническая программа Союзного государства «Развитие и внедрение в государствах-участниках Союзного государства наукоемких компьютерных технологий на базе мультипроцессорных вычислительных систем» (Шифр «ТРИАДА»), 2008 г.

Публикации в журналах списка ВАК

1. *Сачкова Е.Ф.* Решение задачи управления для нильпотентной системы // Дифф. уравнения, 2008, Т. 44, № 12, с. 1704 – 1707.
2. *Сачкова Е.Ф.* Приближенное решение задачи управления на основе нильпотентной аппроксимации // Дифф. уравнения, 2009, Т.45, № 9, с. 1355 – 1364.
3. *Сачкова Е.Ф.* Приближенное решение двухточечных граничных задач для систем с линейными управлениями// Автоматика и телемеханика, 2009, № 4, с. 179 – 189.
4. *Сачкова Е.Ф.* Программная реализация алгоритма приближенного решения задачи управления// Программные продукты и системы, 2009, № 2, 84–88.

Всего по теме диссертации 9 публикаций.