

# Моделирование управления колёсными роботами

Андрей А. Ардентов

Переславль–Залесский,

[aaa@pereslav.ru](mailto:aaa@pereslav.ru)

Общеинститутский семинар  
ИПС им. А.К. Айламазяна РАН

# Машина Дубинса

$$\dot{x} = \cos \theta,$$

$$\dot{y} = \sin \theta,$$

$$\dot{\theta} = u, \quad |u| \leq u_{\max} \in \mathbb{R},$$

$$q(0) = q_0 = (0, 0, 0),$$

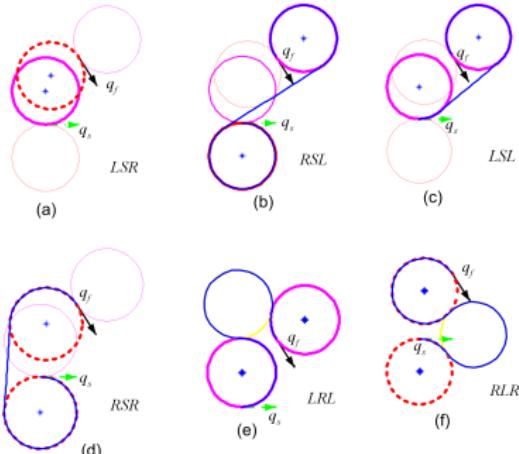
$$q(T) = q_1 = (x_1, y_1, \theta_1),$$

$$T \rightarrow \min.$$

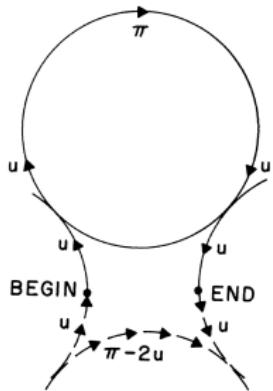
$$q = (x, y, \theta) \in \text{SE}(2) = \mathbb{R}^2 \times S^1.$$

Решение — путь состоящий из прямых и дуг окружности минимального радиуса.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>L.E. Dubins. On Curves of Minimal Length with a Constraint on Average Curvature, and with Prescribed Initial and Terminal Positions and Tangents // American Journal of Math., 1957, 79 (3), pp 497–516



# Машина Ридса-Шеппа<sup>2</sup> (мобильный робот Хайлара)



$$\begin{aligned}\dot{x} &= v \cos \theta, & q = (x, y, \theta) \in \text{SE} = \mathbb{R}^2 \times S^1, \\ \dot{y} &= v \sin \theta, & v = \pm 1, \\ \dot{\theta} &= u, & |u| \leq 1.\end{aligned}$$

<sup>2</sup>J.A. Reeds, L.A. Shepp. Optimal paths for a car that goes both forwards and backwards // Pacific J. Math., 1990, vol.145, No.2, pp 367–393

# Машина Ридса-Шеппа с переменной линейной скоростью

$$\dot{x} = v \cos \theta, \quad \dot{y} = v \sin \theta,$$

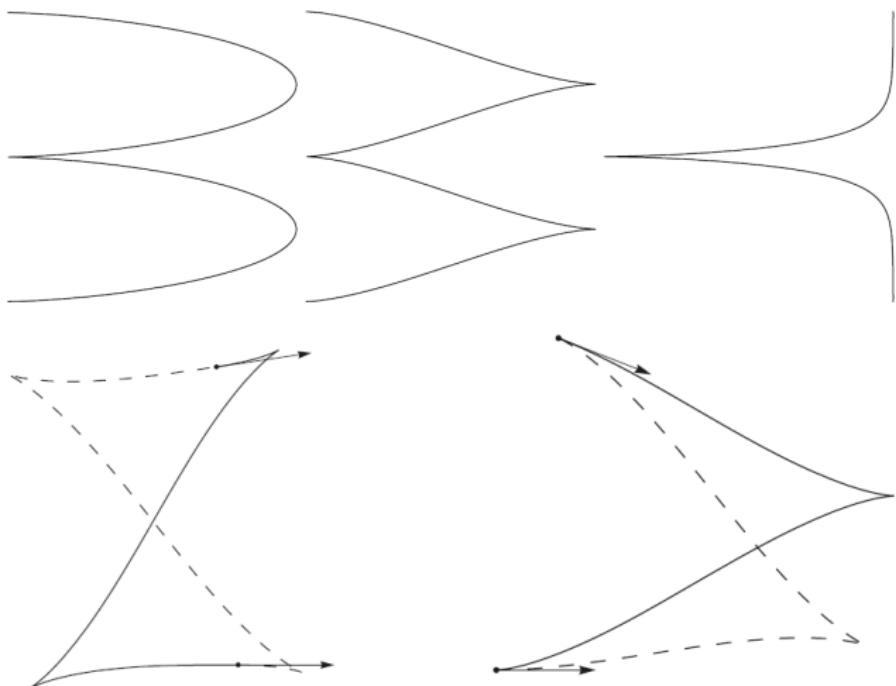
$$\dot{\theta} = u, \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2,$$

$$q(0) = q_0 = (0, 0, 0), \quad q(T) = q_1 = (x_1, y_1, \theta_1),$$

$$J = \int \frac{u^2 + v^2}{2} dt \rightarrow \min.$$

- Yu.L. Sachkov, I.Moiseev. Maxwell strata in sub-Riemannian problem on the group of motions of a plane // ESAIM: COCV, 2010. vol.16, No.2, pp 380–399.
- Yu.L. Sachkov. Conjugate and cut time in the sub-Riemannian problem on the group of motions of a plane // ESAIM: COCV, 2010. vol.16, No.4, pp 1018–1039.
- Yu.L. Sachkov. Cut locus and optimal synthesis in the sub-Riemannian problem on the group of motions of a plane // ESAIM: COCV, 2011. vol.17, No.2, pp 293–321.

# Машина Ридса-Шеппа с переменной линейной скоростью



# Машина Ридса-Шеппа с переменной линейной скоростью

$$\dot{x} = v \cos \theta,$$

$$\dot{y} = v \sin \theta,$$

$$\dot{\theta} = u,$$

$$|u| \leq u_{\max}, \quad |v| \leq v_{\max},$$

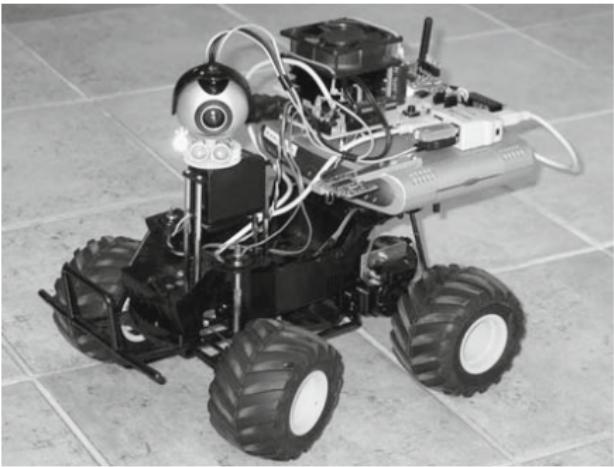
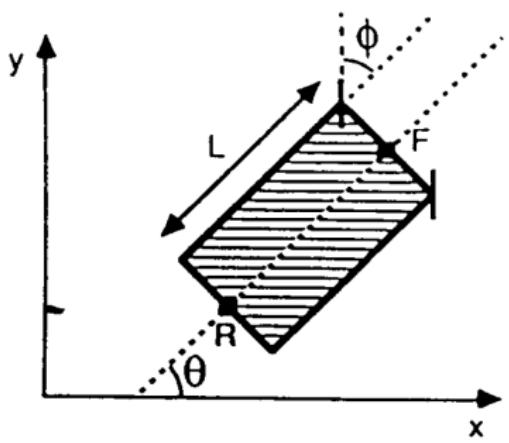
$$q(0) = q_0 = (0, 0, 0),$$

$$q(T) = q_1 = (x_1, y_1, \theta_1),$$

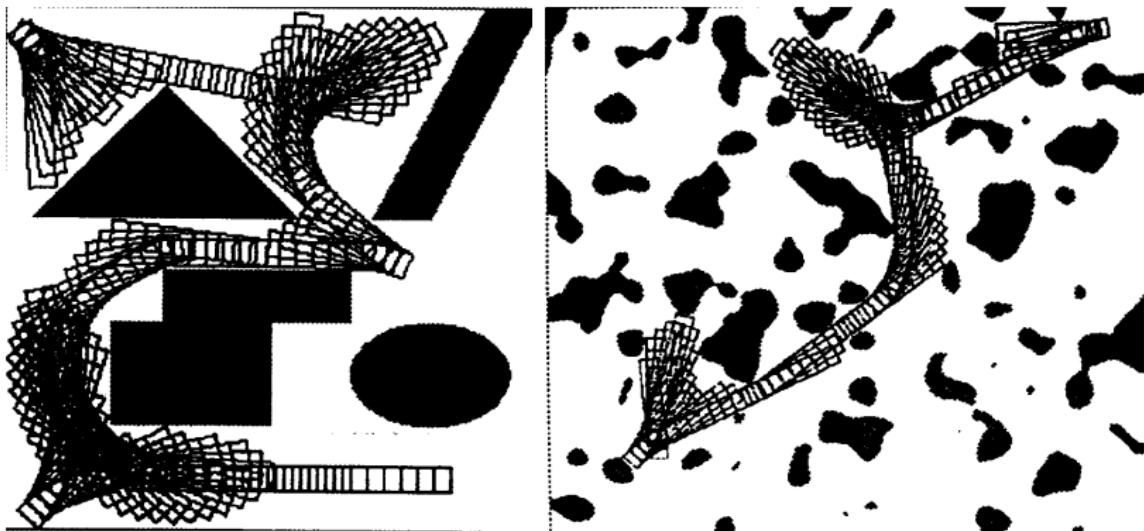
$$J = \int \frac{u^2 + v^2}{2} dt \rightarrow \min.$$

Задача с ограничением на управляющие параметры остается не решенной. Однако существует масса стратегий управлений при отсутствии минимизируемого функционала в том числе при наличии препятствий как неподвижных так и подвижных.

# Машиноподобный робот

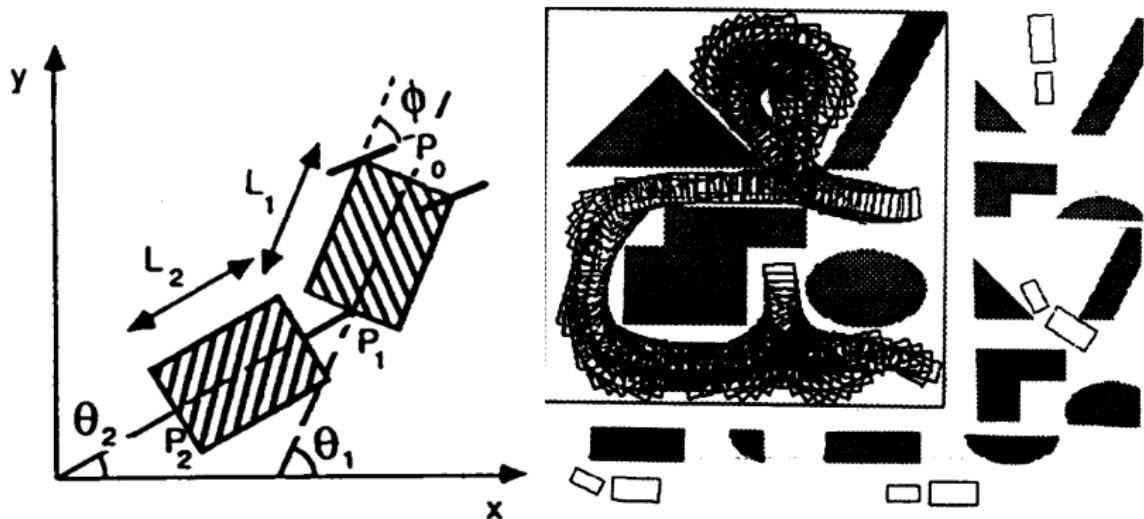


# Управление машиноподобным роботом при наличии препятствий



J. Barraquand, J.-C. Latombe, On non-holonomic mobile robots and optimal maneuvering. In: Proceedings of IEEE International Symposium on Intelligent Control, 1989, pp 340–347.

# Управление мобильным роботом при наличии препятствий

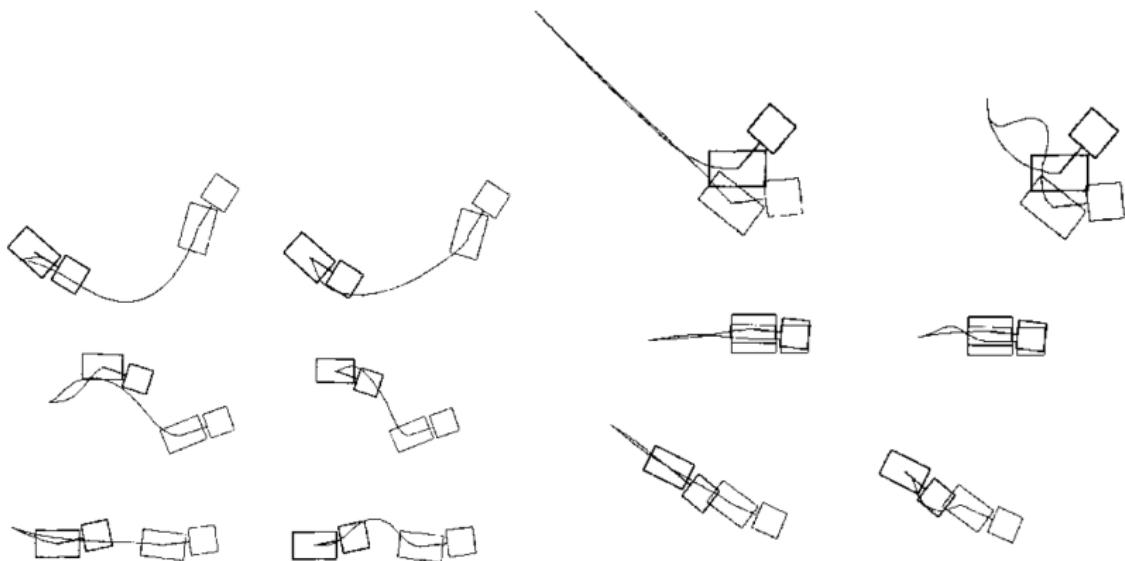


- J.-P. Laumond, Finding collision-free smooth trajectories for a non-holonomic mobile robot // In: Proceedings of the 10th International Joint Conference on Artificial Intelligence, 1987, vol. 2, pp 1120–1123.
- J. Barraquand, J.-C. Latombe, On non-holonomic mobile robots and optimal maneuvering // In: Proceedings of IEEE International Symposium on Intelligent Control, 1989, pp 340–347.

# Различные подходы к управлению мобильным роботом с прицепом

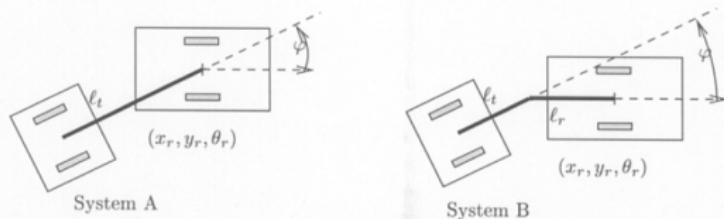
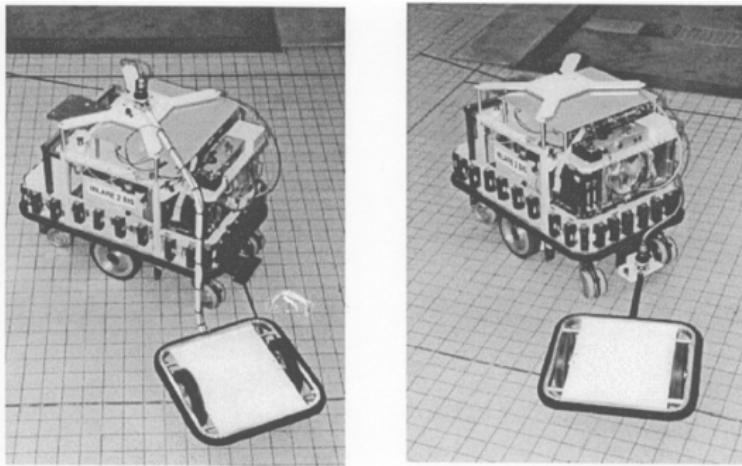
- D. Nguyen, B. Widrow, The truck backer-upper: an example of self-learning in neural networks // Int. Joint. Conf. Neural. Netw., 1989, vol.2, pp 357–363.
- S.-G. Kong, B. Kosko, Adaptive fuzzy systems for backing up a truck-and-trailer // Proc. IEEE Trans. Neural. Netw., 1992, vol.3, No.2, pp 211–223.
- M. Tokunaga, H. Ichihashi, Backer-upper control of a trailer truck by neuro-fuzzy optimal control // In: Proceedings of 8th Fuzzy System Symposium, 1992, pp 49–52.
- R.M. Murray, S.S. Sastry, Steering non-holonomic systems using sinusoids // In: Proceedings of the 29th IEEE Conference on Decision and Control, 1990, vol. 4, pp 2097–2101.
- P. Rouchon, M. Fliess, J. Levine, P. Martin, Flatness, motion planning and trailer systems // In: Proceedings of the 32nd IEEE Conference on Decision and Control, 1993, vol. 3, pp 2700–2705.

# Сравнение двух методов управления<sup>3</sup>



<sup>3</sup>J.-P. Laumond. Nonholonomic Motion Planning for Mobile Robots. Tutorial notes, 1998, 112 p.

# Два типа мобильного робота с прицепом<sup>4</sup>



---

<sup>4</sup>J.-P. Laumond. Nonholonomic Motion Planning for Mobile Robots. Tutorial notes, 1998, 112 p.

# Два типа мобильного робота с прицепом<sup>5</sup>

System A:

$$\begin{cases} \dot{x}_r = v_r \cos \theta_r \\ \dot{y}_r = v_r \sin \theta_r \\ \dot{\theta}_r = w_r \\ \dot{\varphi} = -\frac{v_r}{l_t} \sin \varphi - w_r \end{cases}$$

System B:

$$\begin{cases} \dot{x}_r = v_r \cos \theta_r \\ \dot{y}_r = v_r \sin \theta_r \\ \dot{\theta}_r = w_r \\ \dot{\varphi} = -\frac{v_r}{l_t} \sin \varphi - \frac{l_r w_r}{l_t} \cos \varphi - w_r \end{cases}$$

где  $|v_r| \leq v_{\max}$ ,  $|w_r| \leq w_{\max}$ ,  $|\dot{v}_r| \leq \dot{v}_{\max}$ ,  $|\dot{w}_r| \leq \dot{w}_{\max}$ ,

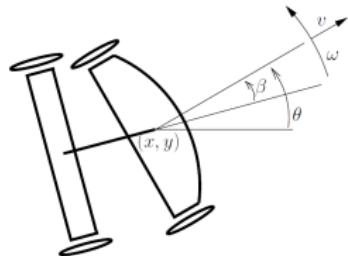
---

<sup>5</sup>J.-P. Laumond. Nonholonomic Motion Planning for Mobile Robots. Tutorial notes, 1998, 112 p.

# Экстремальные траектории для задачи управления робота с прицепом

В работе<sup>6</sup> найдены экстремальные траектории для задачи быстродействия — траектории, состоящие из прямых, дуг окружности минимального радиуса и плоской эластики (merging curve).

Утверждается, что последние две декады задача оставалась открытой, несмотря на заметный прогресс Чуба и Секхавата<sup>7</sup>.



---

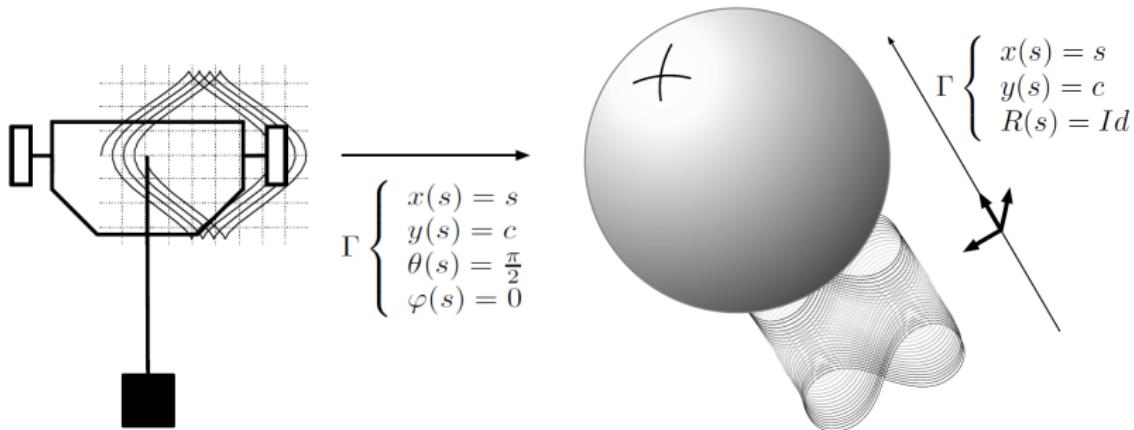
<sup>6</sup>Hamidreza Chitsaz, On Time-optimal Trajectories for a Car-like Robot with One Trailer // SIAM Conf. on Control and its Applications, 2013, pp 114–120.

<sup>7</sup>M. Chyba and S. Sekhavat. Time optimal paths for a mobile robot with one trailer // In IEEE/RSJ Int. Conf. on Intelligent Robots and Systems, vol. 3, 1999, pp 1669–1674.

# Нильпотентная аппроксимация

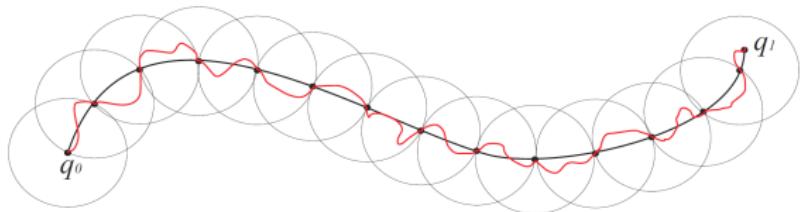
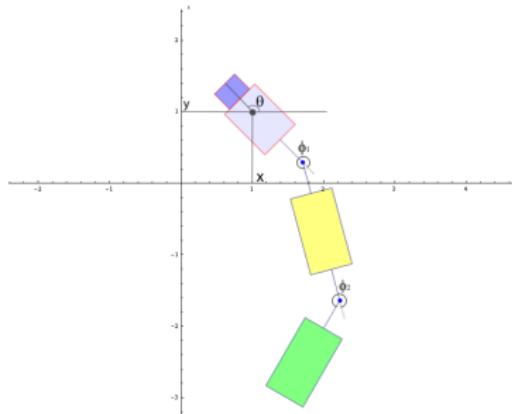
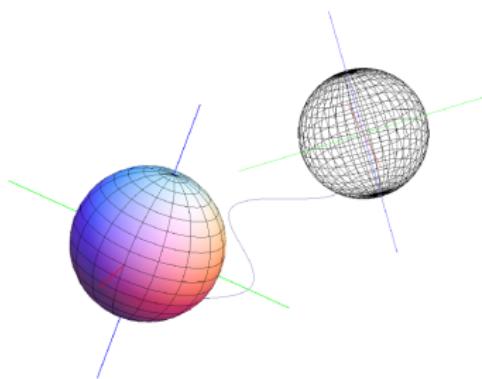
- А.А. Аграчёв, А.В. Сарычев. Фильтрация алгебры Ли векторных полей и нильпотентная аппроксимация управляемых систем // ДАН СССР, 1987. Т. 295, с. 777–781.
- H. Hermes. Nilpotent and high-order approximations of vector fields systems // SIAM, 1991. Vol. 33, pp 238–264.
- G. Laferriere, H.J. Sussmann. A differential geometric approach to motion planning // Nonholonomic motion planning: Kluwer, 1993, pp 235–270.
- A. Bellaiche. The tangent space in sub-Riemannian geometry // Sub- Riemannian geometry: Birkhauser Basel, 1996, pp 1–78.

# Движение вдоль недопустимой траектории



- B. Berret, J.P. Gauthier, V. Zakalyukin, Nonholonomic Interpolation: a general methodology for motion planning in robotics, International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems, Kyoto (Japan), July 24–28, 2006.
- N. Boizot, J.P. Gauthier, Motion Planning for Kinematic Systems, IEEE TAC, vol. 58, No. 6, June 2013, pp. 1430–1442.

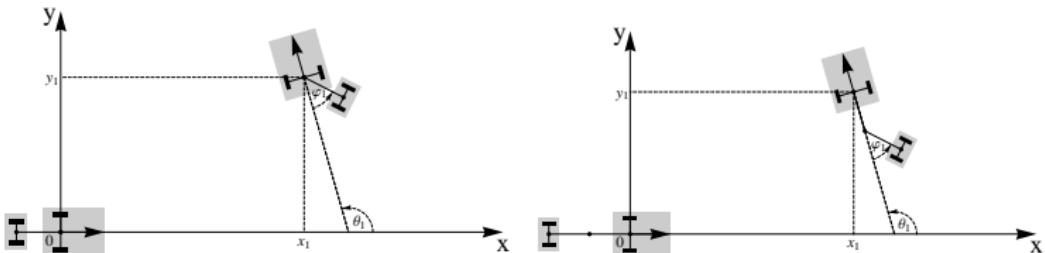
# Управление пятимерными системами<sup>8</sup>



---

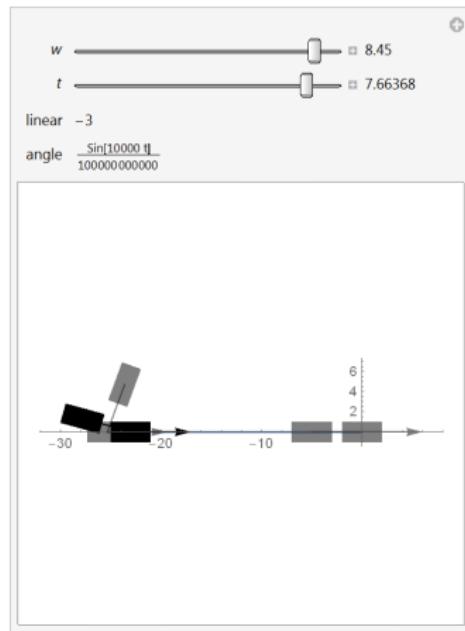
<sup>8</sup>А.П. Маштаков. Алгоритмическое и программное обеспечение решения конструктивной задачи управления неголономными пятимерными системами // Программные системы: теория и приложения, 2012. Т. 3, №. 1, с. 3—29.

# Управление четырехмерными системами с помощью нильпотентной аппроксимации



- А.А. Ардентов, Ю.Л. Сачков. Экстремальные траектории в нильпотентной субриemannовой задаче на группе Энгеля // Матем. сб. 2011. Т. 202, №. 11, с. 31–54.
- A.A. Ardentov, Yu.L. Sachkov. Conjugate points in nilpotent sub-Riemannian problem on the Engel group // Journal of Mathematical Sciences, 2013. vol. 195, No. 3, pp 369–390.
- A.A. Ardentov, Yu.L. Sachkov. Cut time in sub-Riemannian problem on Engel group // ESAIM: COCV, 2015, accepted for publication, preprint URL: <http://arxiv.org/abs/1408.6651>

# Интерфейс для мобильного робота с прицепом (А.М. Пичугин)



# Список литературы

1. J.-P. Laumond, M. Taix, P. Jacobs, A motion planner for car-like robots based on a mixed global/local approach // In: Proceedings of IEEE International Workshop on Intelligent Robots and Systems-Towards a New Frontier of Applications, 1990, vol. 2, pp 765–773.
2. D. Tilbury, J.-P. Laumond, R. Murray, S. Sastry, G. Walsh, Steering car-like systems with trailers using sinusoids // Proc. IEEE Int. Conf. Robot. Autom. 3, 1992, pp 1993–1998.
3. J.-P. Laumond, P.E. Jacobs, M. Taix, R.M. Murray. A motion planner for non-holonomic mobile robots // Proc. IEEE Trans. Robot. Autom., 1994, 10(5), pp 577–593.
4. F. Lamiraux, J.-P. Laumond, Flatness and small-time controllability of multibody mobile robots: application to motion planning // Proc. IEEE Trans. Autom. Control, 2000, 45(10), pp 1878–1881.
5. J.-P. Laumond (Editor). Robot Motion Planning and Control. Lecture notes in control and information sciences, 1998.

6. K. Tanaka, K. Yoshioka, Fuzzy trajectory control and GA-based obstacle avoidance of a truck with five trailers // In: Proceedings of IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics, Intelligent Systems for the 21st Century, 1995, vol.5, pp 4378–4382.
7. K. Tanaka, T. Kosaki, H.O. Wang, Backing control problem of amobile robot with multiple trailers: fuzzy modeling and LMI-based design // Proc. IEEE Trans. Syst. Man Cybern. Part C Appl. Rev., 1998, 28(3), pp 329–337.
8. M. Sharafi, A. Zare, A.V. Kamy, Intelligent Parking Method for Trailers in Presence of Fixed and Moving Obstacles Randomly // International Journal of Information and Electronics Engineering, Vol. 3, No. 1, 2013, pp 77–82.
9. J. David, P.V. Manivannan. Control of truck-trailer mobile robots: a survey // Intelligent Service Robotic, Springer, 2014, vol.7, No.4, pp 245–258.
10. J-M. Mirebeau. Anisotropic Fast-Marching on cartesian grids using Lattice Basis Reduction // SIAM J. Num. Anal., 2014, vol.52, No.4, pp 1573–1599.